УДК 511.9

О точности исчисления числа ПИ (π)*

М. М. Сальников
Пермский государственный университет, 614990, Пермь, Букирева, 15

Изложен авторский взгляд на традиционное решение вопроса и предложены иные основания исчисления числа π с наперед заданной степенью точности. Показаны возможные следствия из иного решения вопроса.

Введение

Вопрос о точности отношения длины окружности к длине ее диаметра поставлен не нами. Ответ на него *на сегодня* не устраивает нас по ряду соображений, которые подкреплены нами соответствующими вычислениями. Наша позиция по этому вопросу лишена претензий на д о к а з а т е л ь н о с т ь или п о с л е д н е е с л о в о неистребимого любопытства пользователей математических констант от школьного до преклонного возрастов любых профессиональных приложений. "…А формула всегда красива, когда, как жизнь, права!"[1]

История возникновения и исчисления числа π уходит своими корнями в глубокую древность нескольких тысячелетий развития человеческих цивилизаций [1, с.456] .

Не считаем для себя возможным комментировать увлекающие и восхищающие перипетии интеллектуального творчества многочисленных предшественников, которые посвятили часть своих исследований этой удивительной константе. И поныне значению их успехов принадлежит должный пиетет последователей. Укажем небольшой ряд известных у нас работ, например, В.Д.Чистякова, А.Н.Костовского, Р.А.Симонова, В.И.Яковлева [1–5]. Особо отметим совместную книгу И.Ш.Шевелева, М.А.Марутаева и И.П.Шмелева о "Золотом сечении" [6]. Обратим внимание читателя и на красноречивый факт: в указанной работе В.Д.Чистякова [2, с.66] приведены 808 (!) знаков числа π после запятой, а в словаре [1] указано о вычислении с помощью компьютера значения π даже "… до 100000-го знака после запятой…"[2]

Полагаем безосновательным отход некоторых п о с л е д о в а т е л е й древних предшественников с позиции последних – в решении математических проблем исходить из геометрических представлений с учетом, однако, их арифметической адекватности. Нам импонирует позиция неприятия у в л е ч е н н о с т и доказательствами *невозможности*, например, "трисекции угла в 60^{o}" [2, с.32]. Нас не убеждает путь логических изощрений в анализе проблем[3].

Представляется, что еще у легендарных Пифагора и Евклида с их талантливыми учениками была возможность дать последователям арифметически (исчислимо) точное ре-

* Предмет настоящего изложения есть констатация итога двух десятилетий поисков и размышлений – "… дойти до самой сути…" Б.Пастернака.

[1] Николай Грачев. "Зачем Эйнштейн играл на скрипке".

[2] "Но и это не останавливает попыток увеличения числа знаков… (нам известно вычисление и более миллиона…). Считаем, что число вычисленных знаков после запятой в числовом выражении любой величины не может служить аргументом ни *точности* числа, ни той или иной позиции в научной полемике; думается, что вполне достаточно в таких случаях указания алгоритма их получения с любой *наперед заданной степенью точности*".

[3] "Наши эксперименты в попытках решения некоторых задач древности дают нам убеждающие – демонстрационные – основания к сомнению в *невозможности*".

шение рассматриваемой здесь проблемы. Правда, им для этого, считаем, нужно было п о ч у в с т в о в а т ь фундаментальность точной связи линейных изменений (см., напр. [2, с.46–47, особо, с.4 (1-я и 3-я задачи)]). Думается, что и впоследствии неоднократно эта возможность была упущена. Например, в драматическую эпоху европейской Реформации и Ренессанса, в ходе бурного развития математических теорий в научном творчестве разных сфер познания. Не были в стороне в те времена и ученые Китая, Индии и арабского Востока, Малой Азии. Здесь уместно отметить определенную историческую закономерность установления великим Л.Эйлером формулы, которая с в я з ы в а л а пару фундаментальных констант:

$$e^{2\pi i} = 1$$

(напр., см. [1, с. 456])[4].

В и р у с уточнения связей величин-констант нас п о р а з и л еще в конце 80-х гг. прошлого уже века. С тех пор поиск убедительных оснований примечательной близости числовых значений π и ***S***, с одной стороны, ***S*** и ***e***, с другой стороны, нет наших сил остановить[5].

1. Точно ли *точное* значение π ?

Смысл ответа на этот вопрос, по нашим размышлениям, должен предполагать в его непредвзятом рассмотрении осмысление нескольких аспектов:

– п о ч е м у и м е н н о т а к о п р е д е л я е т с я к о н с т а н т а ?

– п о ч е м у и м е н н о т а к и с ч и с л я е т с я е е з н а ч е н и е ?

– п о ч е м у п р е д ш е с т в е н н и к а м и п р о и г н о р и р о в а н ф а к т б л и з о с т и ч и с л о в ы х з н а ч е н и й м а т е м а т и ч е с к и х к о н с т а н т ?

– с о с т о я т е л ь н ы л и в п р и л о ж е н и я х н а у ч н ы е т е о р и и, к о т о р ы е т а к и л и и н а ч е п о л а г а ю т с я н а э т и к о н с т а н т ы ? Это при всей неопределенности их степени точности, а значит, сомнительности (правомерности именно теоретической такого их исчисления)[6].

Ф у н д а м е н т а л ь н о с т ь с о р а з м е р н о с т и длины некоторой окружности и длин ее основных дуг (см. ниже рис. 1) при заданности образующего их параметра (R или r) имеет наглядную здесь иллюстрацию.

В любой подобной иллюстрации не имеет существенного значения указание или отсутствие конкретного числового значения радиуса; за его единицу (R, r =1) мы можем принять любое действительное число. Произвольная окружность с центром ее в точке "O", длина которой обозначается как $|L_{o(R)}|$, представлена на рис. 1; ней геометрически построены две ее основные дуги. Одна из этих дуг ($\cup AEB$) стягивается радиусом R_{Lo} (условно "радиальная"), а другая ($\cup CFD$) – стороной правильного 5-угольника, который известным способом вписывается в эту же окружность (условно "радианная"). Их стягивают соответствующие им хорды: $X_6 = |AB|$ и $X_5 = |CD|$.

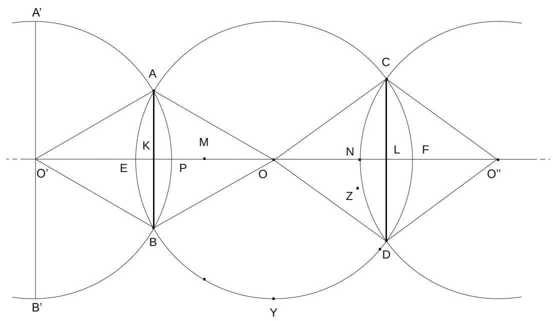

Рис. 1. *Сегментованная окружность* $L_{0(R=|0A|)}$

[4] Л.Эйлер, очевидно, лучше многих современников понимал взаимосвязь математических констант. Приходится только сожалеть о том, что у него "не дошли руки" до рассмотрения их (π и e) связности еще с другой константой (S или s), история которой еще не менее примечательна (см., напр., [6]).

[5] Представляется очень удобным использование букв "***S***" и "***s***" латинского алфавита (см. далее по тексту) для символического обозначения направленностей линейной равномерности ("Золотого сечения") следования отрезков и/или интервалов.

[6] В этой связи (о муссируемом в очередной раз, якобы, кризисе математики), надо отметить, например, сентенцию в передаче "Очевидное невероятное" (в конце мая 2007 г.) В.А.Садовничего в отношении математики будущего: "… что-то без чисел…" (?? – *М.С.*). То есть, нефинитность ее формальных оснований… Правда, он при этом честно оговорился, что не знает тогда какие. Надо ли комментировать ?

Если обозначить: $\cup AEB := \overset{6}{\cup}$, стягиваемая $R_{Lo} := X_6$, а $\cup CFD := \overset{5}{\cup}$, стягиваемая $CD := X_5$, и записать $\overset{6}{\cup} = \frac{1}{6} L_{o(R)}$, а $\overset{5}{\cup} = \frac{1}{5} L_{o(R)}$, то формально имеем строгое тождество:[7]

$$6 \times |\overset{6}{\cup}| \equiv 5 \times |\overset{5}{\cup}| = |L_{o(R)}|. \qquad (1)$$

В случае $R = 1$ взаимосвязь длин этих дуг ($\overset{6}{\cup}$ и $\overset{5}{\cup}$) примет вид

$$|\overset{6}{\cup}| = \frac{5}{6} \times |\overset{5}{\cup}|, \text{ а } |\overset{5}{\cup}| = \frac{6}{5} \times |\overset{6}{\cup}| \qquad (2)$$

Соответствие данных рис. 1 данным таблиц (в том числе и $\cup ACF$, соответствующей центральному углу $L_{o(R)}$ в 150°) легко проверяется (напр., в [7, табл. 54, с.92–93], [8, табл. 11, с.397–403]).

Если точность исчисления длин этих хорд (X_6 и X_5) не вызывает арифметических сомнений,[8] то традиционное исчисление [9] длин стягиваемых ими дуг и самой окружности обязывает нас к осмыслению и преодолению двух моментов по меньшей мере.

Во-первых,[10] еще древним нашим предшественникам было ясно, что, сколько бы и как бы ни было измерено окружностей и их диаметров для получения исходных данных в вычислениях π (согласно традиционному определению константы), невозможно устранить неточности измерений даже с привлечением в экспериментах (позднее) известной теории учета погрешностей таких измерений.

Во-вторых, даже современные расчеты[11], которые базируются на известных методах аппроксимации с использованием теории рядов и современных вычислительных средств (и компьютеров в том числе), по сути – *при прочих равных условиях* – носят приближенный характер, с разной степенью точности, в теоретическом отношении прежде всего. В ы б о р этой точности всегда остается за в ы ч и с л и т е л е м, но не обусловливается качеством технологии вычислений.

Осмысление этих моментов "принуждает" нас констатировать теоретическую несопоставимость исчисления π, с одной стороны, и ***S***, с другой стороны[12]. Это, само по себе, означает с о х р а н е н и е **актуальности** п о и с к а о б щ е г о о с н о в а н и я и х и с ч и с л е н и я или формального определения их (π и ***S***) связности.

В самом деле, традиционное значение $\pi = 3{,}141592653589793$[13] дает длину окружности –

$$L_{o(R=1)} = 2\pi = 6{,}283185307179586\ldots,$$

а соответственно

$$\overset{6}{\cup} = \frac{1}{3} \times \pi = 1{,}047197551196598\ldots,$$

$\overset{5}{\cup} = 1{,}256637061435917\ldots$[см., на с.5, ф.(2)]. Длина

$$\cup ACF = \pi - \frac{1}{2} \times |\overset{6}{\cup}| = 2{,}617993877991494$$

… Легко видеть, что в пределах 4-х знаков после запятой (с учетом правил округления) связность π и ***S*** не подлежит никаким сомне-

---

[7] Здесь существенно, что эти дуги ($\overset{6}{\cup}$ и $\overset{5}{\cup}$) – части одной и той же окружности $L_{o(R)}$ и имеют четкое геометрическое происхождение.

[8] $X_6 = |AB| = |R_{Lo}|$ по построению; ΔAOB – равносторонний; ΔOCD – равнобедренный $(OC = OD = R_{Lo})$, а $|OL| = \frac{1}{2}|OO''|$ (диагональ ромба $OCO''D$ по построению), где $OO'' = S$ – «золотое сечение» (см., сноску 5) и $|CD| = 2 \cdot |CL|$ (другая диагональ) легко вычисляются и не единственным образом. Аналогично вычисляется $|OO'| = \sqrt{3}$.

[9] Как независимое от с о и з м е р е н и я, т. е. от выражения или преображения числовой связности линейных размеров по радианной линии (по окружности) в связи с радиальной (по прямой).

[10] Относительно аспекта определения понятия (см. выше – на с. 3, 1-й вопрос).

[11] Относительно методического аспекта (см. выше – на с. 3, 2-й вопрос).

[12] И это при очевидной сопоставимости π и ***S*** согласно табличным данным (см., напр., $|\cup ACF|$ соответствующей центральному углу в 150°).

[13] Число знаков после запятой – 15 – обусловлено только возможностями вычислительного средства; мы пользовались во всех наших вычислениях серийным калькулятором CITIZEN SDC-435 (16-DIGIT).

ниям, если в $S^2 = 2{,}618033988749895$[14]. Также ограничимся 4-мя знаками после запятой. Но тогда как же быть с *наперед заданной степенью точности*? И какое же значение константы (π) д о л ж н о б ы т ь с о о т в е т с т в у ю щ и м геометрическим построениям?[15]

Представляется р а з у м н ы м в определении связности π и S (для ответа на последние вопросы о π) воспользоваться уточнением определения понятия прежде всего.

По нашему мнению, "константа π" может без ущерба для традиционных ее приложений (в силу ограничения ее дробной части в практических вычислениях 4 знаками, см. выше) иметь иное определение: "**отношение длины дуги окружности, стягиваемой хордой длиной, равной ее радиусу, к длине этого радиуса**"[16].

Следующим шагом, в завершение решения проблемы, предлагается использовать в качестве числового значения длины $\cup ACF$ (см. рис. 1) ее арифметически точно определяемое значение как "S^2", (с "наперед заданной степенью…"), размер которой не зависит, в таком случае, от нашего выбора и определяется только технологией вычисления $\sqrt{5}$.

Это означает, что для определяющих вычислений (согласно $^{\#}\pi$) нами рекомендуется в качестве $|\cup ACF|$ использовать в уточняющих расчетах $|S|^2$, где $|S| = (\sqrt{5}+1):2$, а не 2,618, как в известных и указанных таблицах[17].

Тогда длина $\cup AEB$ или $|\overset{6}{\cup}|$ из $|L_{o(R)}| - 2\times|\cup ACF| = |\cup AEB|$ в точности (согласно иному определению π константой $^{\#}\pi$, см. выше и сноску 16) равна: из $2\times|\cup ACF| = |L_{o(R)}| - |\cup AEB| = 5\times|\cup AEB|$.

И тогда:

$$^{\#}\pi = (2\times|\cup ACF|):5 = 1{,}047213595499958 \qquad (3)$$

Соответственно,

$$^{\#}L_{0(R=1)} = 6{,}283281572999748\ldots,$$

а $\overset{\#\,5}{\cup} = 1{,}2\times{}^{\#}\pi = 1{,}256656314599949\ldots$ [см., ф.(2)] и длина $\frac{1}{2}\times{}^{\#}L_{0(R=1)}$, т.е. $^{*}\pi = 3\times{}^{\#}\pi$ или

$$\left|{}^{\#}L/2\right| = 3{,}141640786499874$$

(см., сноску 16).

Разновариантные расчеты оценок расхождения полученных значений с "традиционными" (см., выше – на с. 6) не превышают значений $1\cdot 10^{-4}$ (в абсолютных сравнениях) и $15\cdot 10^{-6}$ (в относительной оценке). Привлекая авторитет немецкого математика[18], мы надеемся, что возможно и наши доводы принять во внимание. Мы настаиваем на том, что в любых расчетах следует пользоваться выше уточненным, с *наперед заданной степенью точности*, значением этой константы вместо ее традиционного значения[19]:

$$^{*}\pi = \frac{6}{5}\times S^2. \qquad (4)$$

---

[14] Во избежание вопросов к автору по поводу точности 15-го знака после запятой в точном значении S^2 считаем благоразумным отметить: его значение ("S") определено нами в целях устранения (нейтрализации) в наших вычислениях алгоритмических особенностей, которые заложены производителем в аппаратную реализацию нашего калькулятора, во-первых. А, во-вторых, по соображениям идентификации дробной части значений s и S, а также s^2 и S^2; мотивация такого выбора проистекает из наших экспериментов в построении членов ряда…s^n, **1**, S^n …при $n \in \overline{1, N}$ и точном исчислении $\sqrt{5}$ = 2,236067977499790… (также и с помощью компьютера, кстати).

[15] …В качестве 1-го шага решения проблемы или в преодоление 1-го момента ее постановки (см. 1-й вопрос на с. 3).

[16] Это иное определение "константы π" (мы обозначаем ее как $^{\#}\pi$) не препятствует традициям в приложениях, так как все р а с х о ж д е н и я (абсолютные погрешности) начинаются с 4-го знака после запятой; вместо "π" может быть используемо «$^{*}\pi$» $= 3\times{}^{\#}\pi$ (в наших обозначениях).

[17] В самом деле, число 2,618 есть также результат округления до 3-го знака после запятой *точного* значения длины дуги ACF (см. с. 6).

[18] Готлоб Фреге: "…Я думаю, мои результаты, по крайней мере, по существу найдут согласие тех математиков, которые возьмутся за труд принять во внимание мои доводы".

[19] Чем это выражение не квадратное уравнение, о "котором" речь идет в известном доказательстве Ф. Линдемана (1882 г.), опиравшегося на резуль-

Исходя из существа ф. (4) мы считаем логичным наше утверждение, что константа $^{*}\pi$ не есть п р о с т о половина длины окружности, а теоретически (по своему смыслу, сн. 16) представляет собой коэффициент "перевода" (перерасчета с наперед заданной степенью точности) радиальной меры линейных изменений в радианную меру (см. сноску 9)[20].

Основанием справедливости такого утверждения и, может быть, решающим доводом (убеждающим) в пользу п р и н я т и я е г о в о в н и м а н и е (см., сноску 18) служит наше пояснение к иллюстрированным уточнениям "π". Окружность $L_{o(R)}$ разбивается "радиусной" хордой (X_6) на две дуги: $\cup AEB$ и $\cup AFB$. Одна из них ($\cup AEB$) определяется "приближением" и, будучи умноженной на "6", позволяет вычислить длину всей $L_{o(R)}$. Другая ($\cup AFB$) определяется удвоением вычисляемой длины дуги ($|\cup ACF| = |S^2| = [(\sqrt{5}+1)/2]^2$). Затем $\frac{1}{6}L_{o(R)} = \cup AEB$ легко вычисляется: $\frac{1}{6}L_{o(R)} = |\cup AFB| : 5 = (2\times|\cup ACF|) : 5$, т.е. $L_{o(R)} = 6\times \frac{1}{6}\cdot L_{o(R)}$, в отличие от определения "приближением" в 1-м случае. Но эта иллюстрация допускает и проверку представленной схемы расчетов: эта же самая окружность $L_{o(R)}$ разбивается "радианной" хордой (X_5) на две дуги – $\cup CFD$ и $\cup CED$; одна из них ($\cup CFD$) вычисляется по ф. (2), а другая ($\cup CED$) – простой "разностью" длин $L_{o(R)}$ и $\cup CFD$ – равна $4\times|\cup CFD|$, т. е. имеем два способа вычисления длины хорды "X_5": 1-й из формулы (2) через $|\cup AEB|$, вычисляемой как $\frac{1}{6}L_{o(R)}$ (см. выше), а 2-й – как $\frac{1}{4}|\cup CED|$.

Совпадение этих результатов убеждает нас в отсутствии вычислительных ошибок, но еще ничего не доказывает по поводу точности традиционного (*точного*) значения "π" [см. 2, с.66]. Одна треть традиционного значения константы отличается от $\frac{1}{6}{}^{\#}L_{o(R=1)}$ (см. $^{\#}\pi$) на 0,000016044303360… [$\Delta(\frac{1}{3}{}^{*}\pi - \frac{1}{3}\pi)$] или с абсолютной погрешностью в 16×10^{-6} при относительной погрешности в 15×10^{-6} (0, 000015321181129…) всех вычисляемых длин дуг $L_{o(R)}$.

Анализ проделанных нами оценочных вычислений позволяет констатировать, что совпадение относительных показателей с точностью "до" 1×10^{-10} в оценке погрешности вычислений по исходным данным с точностью "до" 1×10^{-16} (см. выше) придает и теоретическую уверенность в правильности проделанного уточнения значения константы π и справедливости нашего утверждения [см. ф.(4)][21].

таты еще Э.Эрмита (1882–1901). Если наших коллег не устраивает ф. (4), то мы могли бы предложить равноценные ей варианты:

$$^{*}\pi = 1{,}2\times(3-s^2) = 1{,}2\times(\sqrt{5}+s^2) =$$
$$= 0{,}6\times(\sqrt{5}+3) = 0{,}4\times(1+S^4)$$

и т. п.

[20] Отдавая должное нашим предшественникам (традициям градусной меры длин дуг окружности, соответствующих ее центральным углам или "составлять" – "разбивать" в исчислении времени единицы разрядов по "60"), мы полагаем формально вполне корректным выражение радианной меры длиной дуги окружности, стягиваемой хордой в размере ее радиуса. А, по сути, это и представляет собой пересчет единицы радиальной меры в единицу радианной меры, которая в "переводе" в градусную меру имеет значение в $57°{,}29490168751578\ldots$ в сравнении с традиционным в $57°{,}29577951308232\ldots$ с любой наперед заданной степенью точности без "углубления" в дольные единицы градуса ("`" и "``"); при этом $\Delta_{рад} = 0{,}0052669533993\ldots$, а $\delta_{рад} = 0{,}000015320946394\ldots$ (см., напр., "δ" выше).

[21] Это хорошо видно по "структуре" абсолютной погрешности $\frac{1}{6}{}^{\#}L_{0(R=1)}$: 0,000016 0443 03361… (при избыточных значениях), уверенная точность практических вычислений (16x10^{-6}) и уверенная – точность результатов (1x10^{-10}) при исходных данных с точностью –1x10^{-16}. То есть, по числу знаков после запятой имеем "золотые" значения их отношений [$\frac{9}{15} = 0{,}6$ и $\frac{15}{9} = 1{,}6$ (6)].

2. Некоторые следствия уточнения π

Геометрическая соотнесенность десяти основных дуг окружности $L_{o(R)}$ и, соответственно, стягивающих их хорд – радиуса, диаметра и сторон правильных вписанных в эту окружность многоугольников (от 3 до 10) представлено на рис. 2.

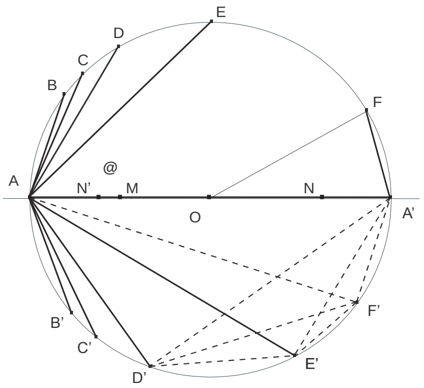

Рис. 2. *Соотнесенность 10 основных хорд и стягиваемых ими дуг окружности* $L_{0(R=|0A|)}$, *их з о л о ч е н ы е 4-угольники и 3-угольники*

Выше диаметра (в верхней половине круга) расположены пять ч е т н ы х хорд (диаметр являет собой самую большую их них, дополняя общее число хорд до "10"), а ниже его из той же точки (A) расположены четыре н е ч е т н ы х хорды. В наших обозначениях сама окружность радиуса $OA = R = AD$ с центром в точке "O" представляется "$\overset{1}{\cup}$", а все остальные ее дуги – в порядке от 2 до 11 и дополнительно 12-я, как соответствующие части $L_{o(R)}$ ($L_{O/2\div10} := \overset{2\div10}{\cup}$); соответствующие им (стягивающие их) хорды представляются $X_{2\div10}$; $X_{12} = A'F$ показана отдельно от других "четных" хорд в точке A' в соответствии с $X_{10} := AB = A'F'$. Пунктиром на рис. 2 показаны "золотые" хорды, которые вместе с X_2, X_3 и X_5 образуют "золоченые" четырех- и треугольники (так нами названные для отличия от прочих в силу их особой "примечательности"). Их особенность связана с трисекцией некоторых центральных углов круга.

A: При $R = 1$ представляют интерес числовые значения длин дуг и соответствующих им хорд на основе точных значений ***S*** и ${}^{\#}\pi$[22]:

$\overset{1}{\cup} := L/1 \overset{2*\pi}{=} 6,283281572999748\ldots$

$|L_{o(R)}| - X_1 := R = 1$, а ***S*** $= 1,618033988749895\ldots$

$\overset{2}{\cup} := L/2 \overset{*\pi}{=} 3,141640786499874\ldots$

$|AA'| - X_2 := D = 2R = 2,0$

$\overset{3}{\cup} := L/3 = 2,094427190999916\ldots$

$|AE'| - X_3 = 1,732050807568878\ldots$ ($\sqrt{3}$)

$\overset{4}{\cup} := L/4 = 1,570820393249937\ldots$

$|AE| - X_4 = 1,414213562373095\ldots$ ($\sqrt{2}$)

$\overset{5}{\cup} := L/5 = 1,256656314599949\ldots$

$|AD'| - X_5 = 1,175570504584946\ldots$ ($\sqrt{2-s}$)

$\overset{6}{\cup} := L/6 \overset{\#\pi}{=} 1,047213595499958\ldots$

$|AD| - X_6 = 1,0 = R$ (также и $A'E'$)

$\overset{7}{\cup} := L/7 = 0,897611653285678\ldots$

$|AC'| - X_7 = 0,866025403784439\ldots$ ($\sqrt{3}/2$)

$\overset{8}{\cup} := L/8 = 0,785410196624968\ldots$

$|AC| - X_8 = 0,765366864730179\ldots$ ($\sqrt{2-\sqrt{2}}$)

$\overset{9}{\cup} := L/9 = 0,698142396999972\ldots$

$|AB'| - X_9 \cong 0,684$ (центр. угол $40°$, табл.)

$\overset{10}{\cup} := L/10 = 0,628328157299975\ldots$

$|AB| - X_{10} = 0,618033988749895\ldots$ (***s***)

$\overset{12}{\cup} := L/12 = 0,523606797749979\ldots$

$|FA'| - X_{12} = 0,517644665769869\ldots$

---

[22] Для общности соответствия дуг и хорд нам представляется естественным полагать, что самой $L_{o(R)}$ в качестве "хорды" – образующего ее параметра – соответствует или "стягивает" ее радиус (R), а "***S***" выступает в качестве основного и единственного (!) ч и с л о в о г о исходного данного.

Кроме "правильных" 11 дуг и хорд $L_{o(R)}$ представляют интерес (трудно сейчас оценить, акие задачи они "смогут" помочь решить в будущем…) также

$$\cup D'F' = \cup AD' := L/5,$$

$$\cup A'F' = \cup AB := L/10,\ \cup E'F' = 1/3 \cup D'F'$$

и $\cup D'E' = 2/3 \cup D'F'$. К этим дугам можно добавить, например, $\cup A'F'E'D'$ (соответствует центральному углу круга в $108°$) и $\cup A'E' = \cup AD := L/6$ (соответствует центральному углу круга в $60°$). Отметим, что с помощью $\cup E'F'$ не только трисектируется $\cup D'F'$, но и $\cup A'E'$ сечется на 5 равных дуг ($12°$).

К 10 хордам (см. выше) можно добавить к рассмотрению в качестве представляющих особый интерес хорду $A'E' = X_6$, хорду $A'F' = X_{10}$, хорду $A'D' = \boldsymbol{S}$ (см. табл. в [7 и 8] хорду центрального угла в $108°$), хорду $D'E'$, которая "делит" $L_{o(R)}$ на 7,5 одинаковых частей (дуг $D'E'$-7 и еще $1/2 \cup D'E'$ или $\cup E'F'$), хорду $AF' = \sqrt{S^2+1}/2$ и хорду $D'F' = X_5$, образующие примечательные четырехугольники $AD'E'A'$ и $AD'F'A'$, как и прямоугольные треугольники $AD'A'$, $AE'A'$ и $AF'A'$ и равнобедренный $-AD'F'$. Могут представить определенный интерес и косоугольные треугольники $A'D'F'$, $D'F'E'$ и $AF'E'$ вместе с другими, образуемыми диагоналями выше приведенных примечательных четырехугольников, диаметром $L_{o(R)}$, хордами AD', $D'E'$ и $D'F'$, $E'A'$ и $F'A'$.

Б: Исследование сути необходимого уточнения π, вылившееся в переопределение константы и исчисление ее точного значения (${}^{\#}\pi$) привело нас "попутно" к поиску "производящего решение вопроса" геометрического места (арифметического его соответствия). Другими словами выражая, г д е с о б а к а з а р ы т а ?[23]. Если условно обозначить это м е с т о известным символом ("**@**"), определив его как половину дробной части ({…}) длины окружности единичного радиуса $|L_{o(R=1)}|$ за вычетом $|{}^{\#}\pi| = 1/6 \times L_{o(R=1)}$.

Обратим внимание, что этому определению равносильно и вычисление выражений $(\sqrt{5}-2)/2$ либо $\boldsymbol{s}^3/2$, ($\boldsymbol{s} - 0{,}5$) или ($\boldsymbol{S} - 1{,}5$), ($\boldsymbol{S}^2 - 2{,}5$) или ($\boldsymbol{s}$-$\boldsymbol{s}^2$): 2 и т.п. То есть |**@**| $:= \{|L_{o(R=1)}| - |{}^{\#}\pi|\}/2 \equiv 0{,}118033988749895\ldots$ (MN') с любой "наперед заданной степенью точности" (поэтому и тождественность равенства) и "лежит" в основе связности ${}^{\#}\pi$ и ${}^{\#}\boldsymbol{S}$, где ${}^{\#}\boldsymbol{S} := S^2/3 \equiv 0{,}872677996249965\ldots$ (аналогично ${}^{\#}\pi = {}^{*}\pi/3$). Эта связность (${}^{\#}\pi$ и ${}^{\#}\boldsymbol{S}$) аналогична выраженной в ф. (1), т.е. $5 \times {}^{\#}\pi = 6 \times {}^{\#}\boldsymbol{S}$ или ${}^{\#}\pi : {}^{\#}\boldsymbol{S}$ =6/5=1,2, а ${}^{\#}\boldsymbol{S}$+ +**@**$\equiv$ 1 или ${}^{\#}\boldsymbol{S}$ = 1 –**@.**

Отметим и очевидные соотношения:
если $5 \cdot \{{}^{\#}\pi\} = 2\,$**@**, то

$$@ = 2{,}5 \times \{{}^{\#}\pi\} = 0{,}5 \times \{6x\,{}^{\#}\boldsymbol{S}\}. \qquad (5)$$

Остается только уточнить, что эта связность ${}^{\#}\pi$ и ${}^{\#}\boldsymbol{S}$ с "**@**-й" не зависит от длины радиуса окружности $L_{o(R)}$. Легко убедиться, что в общем случае всегда справедлива формула $\left|\overset{5}{\cup}\right| = {}^{\#}\pi/{}^{\#}S \times \left|\overset{6}{\cup}\right|$ [аналог ф. (2)], где

$${}^{\#}\boldsymbol{S} = 5/6 \times {}^{\#}\pi = 1/1{,}2 \times {}^{\#}\pi,$$

$$\text{а } \{{}^{\#}\pi\} = @/2{,}5 = 0{,}4\,@. \qquad (6)$$

В: Как хорошо известно из истории развития наук, а математика в том числе не является исключением, любой н о в ы й поворот в ответах на с т а р ы е вопросы ставит куда больше новых вопросов, "требующих" настоятельно соответствующих им ответов, чем у науки "находится" необходимых средств к моменту их (поворотов) осуществления.

Если теперь попытаться выразить формулу связи "***e***" и "***S***", то, получив

[23] Очевидно, поиск той "точки опоры", которую настоятельно запрашивал легендарный Архимед.

$*e^{12/5\times S^2\times i} = \mathbf{1}$[24], имеем возможность задуматься о совершенствовании наших (и не только) представлений о финитных основах в структурировании формальных преобразований и их результатов ("преображений") – мощных средств в современном математическом моделировании. Нам, однако, представляется, что рассмотрение этого "предмета" выводит исследования за "рамки" уточнений.

Г: Очевидное и простое преображение (4):

$$S^2 = {}^5\!/_6 \times *\pi \qquad (7)$$

позволяет сформулировать следствие [см. рис.1 и ф.(2)]: для единичной окружности "золотое сечение" (***S***) есть с р е д н е е г е о м е т р и ч е с к о е соотношения $*\pi$ и отношения ее дуг, "радиальной" к "радианной" (см., сн. 9), т. е. справедлива пропорция:

$$*\pi : S = S : {}^5\!/_6 . \qquad (8)$$

Если это следствие интерпретировать в наших обозначениях (рис. 1) для окружности произвольного радиуса (R) аналогично ф.(7), то получим

$$(EN)^2 = {}^{\cup AEB}\!/_{\cup CFD} \times \cup EACF \text{ , где} \qquad (9)$$

$EN = (R + s \times R) = R \times S$ – часть ("з о л о т а я") диаметра окружности $L_{0(R)}$, $\cup AEB = R$ – "радиальная" дуга этой же окружности, $\cup CFD = {}^6\!/_5 \times R$ – "радианная" дуга этой же окружности, а $\cup EACF$ – полуокружность $L_{0(R)}$ ("спрямляемая…").

Переписав ф.(9) по известной аналогии (в "квадратрисе" ${}^1\!/_4$- ой L_0 см. 11, с. 26), имеем:

$$|\cup EACF| : |EN| = |EN| : {}^{|\cup AEB|}\!/_{|\cup CFD|} \quad –$$

основная (10) пропорция $L_{0(R)}$ (см. рис. 1).

"AD USUM ET LIBITUM"

[24] Исходя из формулы Эйлера (см. с.4) и полученной выше [ф. (4)] заменой $*\pi$ на $^{\#}\pi$ и подстановкой в первую. Кстати, внимательные или дотошные легко заметят, что коэффициент при "i" в показателе степени есть точный $\left|{}^{\#}L_{o(R=1)}\right|$ или $2 \times |{*\pi}|$, а $*e \neq e$.

P.S. Искренне признателен Алле Ефимовне Малых за обращение нашего внимания (10.03.09) на монографию С.Е.Белозерова (см. 11). Усмотренная нами (11.03.09) аналогия в "квадратуре круга с помощью квадратрисы" позволила у в и д е т ь (!) г л а в н о е следствие (**Г**…) наших результатов [см. ф. (4) и (2)].

Особо благодарен Лазарю Борисовичу Грайферу за прочтение рукописи и замечания по улучшению "тона" настоящей статьи.

Признателен за принципиальное замечание в рукописи Юрию Рафаэлевичу Айдарову и за поддержку в публикации ее Бэле Исаковне Мызниковой.

Благодарен за неоценимую помощь в "переводе" рукописи в "читабельный" формат Алексею Юрьевичу Русакову.

Список литературы

1. *Математический* энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В.Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1998.
2. *Чистяков В.Д.* Три знаменитые задачи древности: пособие для внеклассной работы / В.Д.Чистяков. М.: Учпедгиз, 1963. 95 с.
3. *Костовский А.Н.* Геометрические построения одним циркулем / А.Н.Костовский; 3-е изд. М.: Наука, 1988. Вып. 29: Популярные лекции по математике.
4. *Симонов Р.А.* Математическая мысль древней Руси / Р.А Симонов. М.: Наука, 1977. 120 с. (История науки и техники).
5. *Яковлев В.И.* Математические начала: учеб. пособие для вузов по специальности (направлению) "Математика" / В.И.Яковлев. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 224 с.
6. *Шевелев И.Ш.* Золотое сечение: три взгляда на природу гармонии / И.Ш.Шевелев, М.А.Марутаев, И.П.Шмелев. М.: Стройиздат, 1990. 343 с.
7. *Митропольский А.К.* Краткие математические таблицы / А.К.Митропольский; ред. А.З.Рывкин. М.: ФМ, 1962. 96 с.
8. *Рывкин А.А.* Справочник по математике / А.А.Рывкин, А.З.Рывкин, Л.С.Хренов. М.: Высшая школа, 1964. 520 с.
9. *Цыпкин А.Г.* Справочник по математике для средней школы / А.Г.Цыпкин; под ред. С.А.Степанова. М.: Наука, ФМ, 1980. 400 с.
10. *Груденов Я.И.* Изучение определений, аксиом, теорем: пособие для учителей / Я.И. Груденов. М.: Просвещение, 1981. 95 с.
11. *Белозеров С.Е.* Пять знаменитых задач древности (история и современная теория) / С.Е Белозеров; Ростов. гос. ун-т. Ростов н/Д., 1975. 320 с.

On Pi-Calculus Precision

M. M. Salnikov
Perm State University, 614990, Perm, Bukireva st., 15

The author's view on the traditional solution to the problem is presented and different bases of the preset precision pi-calculus are suggested. Possible consequences of a different solution to the problem are also shown.