УДК 517.521

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОДНОГО ДВОЙНОГО РЯДА ДЛЯ ЧИСЛА ПИ

С. В. Кабинов*

Научный руководитель – Н. Н. Осипов,
доктор физико-математических наук, доцент
Сибирский федеральный университет
Институт космических и информационных технологий

В статье [1] была приведена формула, выражающая число π через ряд по решётке Λ целых комплексных чисел $\alpha = m + ni$:

$$\pi = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{1+\beta} + \sum_{0 \neq \alpha \in \Lambda} \left(\frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{1}{1 - \alpha - \beta} + \frac{1}{\alpha^2} \right).$$

Здесь β – произвольное комплексное число, не принадлежащее решётке Λ. Вопрос о скорости сходимости двойного ряда в этой формуле для различных β в [1] по существу не изучался, а сама формула доказывалась излишне сложно – с помощью специальных функций (а именно: дигаммы функции $\psi(z)$ и её асимптотического ряда [2: с. 60]).

Цель настоящей работы – получить более простое доказательство формулы, доступное даже первокурснику, а также исследовать скорость сходимости ряда к его сумме в зависимости от параметра β. Под скоростью сходимости понимается скорость стремления частичных сумм $S_N(\beta)$ по квадратам $\Lambda_N = \{m + ni \in \Lambda\colon |m| \le N;\ |n| \le N\}$ к числу π.

Предложенное нами доказательство формулы для числа π использует свойство телескопичности двойных сумм $S_N(\beta)$, в результате чего их можно заменить обычными суммами, которые, в свою очередь, удаётся приблизить суммами Римана для интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{2dx}{1+x^2} = \pi,$$

не зависящего от β. Далее обозначим $\delta_N(\beta) = \pi - S_N(\beta)$.

Теорема:

а) для любого β имеем $\delta_N(\beta) = O(N^{-2})$ при $N \to \infty$;

б) для $\beta = 1/2 \pm i\sqrt{3}/6$ верна более точная оценка $\delta_N(\beta) = O(N^{-6})$ при $N \to \infty$.

В частности, взяв в формуле $\beta = 1/2 \pm i\sqrt{3}/6$, при каждом увеличении N в 10 раз мы получали бы дополнительно 6 верных знаков числа π. Доказательство теоремы опирается на хорошо известную формулу Эйлера – Маклорена.

Список литературы

1. Галушина Е. Н. Об одном представлении числа π в виде двойного ряда / Е. Н. Галушина // Известия ИГУ. Сер.: Математика. 2016. Т. 17. С. 3–11.

2. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды / М. В. Федорюк. М.: Наука, 1987.