МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики

*Сборник трудов
Международной научной конференции*

Воронеж,
7–9 декабря 2020 г.

Воронеж
Издательство
«Научно-исследовательские публикации»
2021

УДК 531(063)+51-7(063)
ББК 22.2я5+22.1я5
А43



А43 **Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики** : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 7–9 декабря 2020 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2021. – 1855 с.

ISBN 978-5-6045486-1-5

В сборнике предлагаются научные работы, доклады и лекции, представленные на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой Воронежским государственным университетом.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

ISBN 978-5-6045486-1-5

9 785604 548615

УДК 531(063)+51-7(063)
ББК 22.2я5+22.1я5

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

UDC 597.58

# UNIQUENESS FOR A MULTIDIMENSIONAL KERNEL DETERMINATION PROBLEM FROM A PARABOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

**D. K. Durdiev[1], J. Z. Nuriddinov[2]**

*[1]Bukhara branch of the institute of mathematics named after V. I. Romanovskiy at the academy of sciences of the Republic of Uzbekistan*
*[2]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

**Annotation.** We study two problems of determining the kernel of the integral terms in a parabolic integro-differential equation. In the first problem the kernel depends on time $t$ and $x=(x_1,\dots,x_n)$ spatial variables in the multidimensional integro-differential equation of heat conduction. In the second problem the kernel it is determined from one dimensional integro-differential heat equation with a time-variable coefficient of thermal conductivity. In both cases it is supposed that the initial condition for this equation depends on a parameter $y=(y_1,\dots,y_n)$ and the additional condition is given with respect to a solution of direct problem on the hyperplanes $x=y$. It is shown that if the unknown kernel has the form $k(x,t)=\sum_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t)$, then it can be uniquely determined.
**Keywords:** parabolic equation, Cauchy problem, integral equation, linearly independence, uniqueness.

Integro-differential equations play an important role in the mathematical modeling of many fields: physical, biological phenomena, engineering sciences and others areas where it is necessary to take into account the effect of a prehistory of process. Constitutive relations in the linear non-homogeneous diffusion and wave propagation processes with memory contain time- and space-dependent memory kernel. For many cases, in the practise these kernels are unknown functions. Problems of identification of memory kernels in parabolic and hyperbolic equations have been intensively studied starting at the end of the last century [1–7].

We study an inverse problem to determine a time and spatially varying kernel $k(x,t),\ x\in\mathbb{R}^n, t>0$ in a parabolic integro-differential equations governing the heat flow in materials with memory.

Consider Cauchy problem for the $n$-dimensional parabolic integro-differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta_x u=\int_0^t k(x,t-\tau)u(x,y,\tau)\,d\tau,$$
$$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad t\in(0,T], \tag{1}$$
$$u(x,y,0)=\varphi(x,y), \tag{2}$$

where $\Delta_x$ is Laplacian on the variables $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ is a parameter of problem, $T$ is a fixed positive number.

In this paper we investigate the following problem: find a kernel $k(x,t)$ of the integral term in (1) if a solution to the Cauchy problem (1) and (2) is known on $x=y$ for all $y\in\mathbb{R}^n$ and $t\in[0,T]$:

$$u(y,y,t)=\psi(y,t),\qquad \psi(y,0)=\varphi(y,y). \tag{3}$$

Let $B^m(Q)$ be the class of $m$ times continuously differentiable with respect to all variables and bounded together with all derivatives up to the order of $m$ in the domain $Q$ functions. When $m=0$ this is usual space of continuous and bounded functions.

We assume that the function $k(x,t)$ with derivatives $k_{x_ix_j}$, $i,j=1,2,\dots,n$, $k_t$ belongs to $B(D_T)$, $D_T:=\{(x,t):x\in\mathbb{R}^n,\ 0\le t\le T\}$ for any fixed $T>0$, and the function $\varphi(x,y)$ is in $B^4(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

The main result of this work is the following uniqueness theorem.

**Theorem.** *Suppose that the above mentioned assumptions about function* $\varphi(x,y)$ *are fulfilled. Besides, the function* $\psi(y,t)$ *together with derivatives* $\psi_t$, $\psi_{tt}$ *and* $\psi_{ty_iy_i}$, $i=1,\dots,n$ *belong to the class* $B(D_T)$ *for any fixed* $T>0$ *and*

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n} |\psi(y,t)| = \mu(t) \ge \mu_0 > 0, \tag{4}$$

*where* $\mu_0$ *is a known numbers, then any function* $k(x,t)$ *having the form*

$$k(x,t)=\sum_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t), \quad a_i(x)\in B^2(\mathbb{R}^n),\ b_i(t)\in C^1(\mathbb{R}), \tag{5}$$

*is uniquely determined by the information (3) in domain* $D_T$, *where* $C^1(\mathbb{R})$ *is the class of continuously differentiable in* $\mathbb{R}$ *functions.*

We note only natural necessary conditions which must satisfy the function $\psi(y,t)$. They are the second equalities of (3), (8) and

$$\Delta\psi_t(y,0)-\psi_{tt}(y,0)=\Delta_x\Delta_y\varphi(y,y)+2\sum_{i=1}^{n}\Delta_x\varphi_{x_iy_i}-k(y,0)\varphi(y,y),$$

which follows from the equalities (12) and (13).

First of all we write the problem (1)–(3) with respect to the functions $u_t$, $k$. It follows from (1)–(3) the problem for these functions:

$$(u_t)_t-\Delta_x u_t = k(x,t)\varphi(x,y)+\int_0^t k(x,\tau)u_t(x,y,t-\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

$$u_t(x,y,0)=\Delta_x\varphi(x,y), \tag{7}$$

$$u_t(y,y,t)=\psi_t(y,t), \quad \psi_t(y,0)=\Delta_x\varphi(y,y), \quad y\in\mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Here, the initial condition (7) was obtained from equality (1) by setting $t=0$.

Further introduce the notations

$$\omega_i := u_{ty_i},\quad i=1,2,\dots,n,\quad v=2\,\mathrm{div}_x\,\omega+\mathrm{div}_y\,\omega.$$

Here and below, a variable in index of operators div, grad indicates that they apply in this variable.

Differentiating (6) and (7) with respect to $y_i$, we get the Cauchy problem for the determining of functions $\omega_i(x,y,t)$

$$(\omega_i)_t-\Delta_x(\omega_i)=k(x,t)\varphi_{y_i}(x,y)+\int_0^t k(x,\tau)\omega_i(x,y,t-\tau)\,d\tau,\ t\in(0,T], \tag{9}$$

$$\omega_i(x,y,0)=\Delta_x\varphi_{y_i}(x,y), \quad i=1,2,\dots,n. \tag{10}$$

Applying by differential operators $2\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ and $\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ to equation (9) alternately and summing the results with respect to $i$ from $i=1$ to $i=n$, taking into account the above introduced notation, we obtain the equation for function $v(x,y,t)$

$$v_t-\Delta_x v = k(x,t)\left[2\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_iy_i}+\Delta_y\varphi\right](x,y)+\int_0^t v(x,\tau)v(x,y,t-\tau)\,d\tau+$$

$$+2\,\mathrm{grad}_x k(x,t)\cdot\mathrm{grad}_y\varphi(x,y)+2\int_0^t \mathrm{grad}_x k(x,\tau)\cdot\omega(x,y,t-\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

where $a\cdot b$ means the scalar product of vectors $a$ and $b$. From (9) in this way, we get the initial condition

$$v(x,y,0)=2\sum_{i=1}^{n}\Delta_x\varphi_{x_iy_i}(x,y)+\Delta_x\Delta_y\varphi(x,y). \tag{12}$$

It follows from (8) the relations

$$\omega_i(y,y,t)=\frac{\partial}{\partial y_i}u_t(y,y,t)=(u_{tx_i}+u_{ty_i})(y,y,t)=\psi_{ty_i}(y,t),$$

$$\omega_{iy_i}(y,y,t)=\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}u_t(y,y,t)=$$

$$=(u_{tx_ix_i}+2u_{tx_iy_i}+u_{ty_iy_i})(y,y,t)=\psi_{ty_iy_i}(y,t),\quad i=1,2,\dots,n.$$

$$\mathrm{div}_y\omega(y,y,t)=\left(\Delta_x u_t+2\sum_{i=1}^{n}u_{tx_iy_i}+\Delta_y u_t\right)(y,y,t)=\Delta_y\psi_t(y,t).$$

In view of the last equalities and (6), we note that the condition (3) in the term of function $v$ can be written in the form

$$v(y,y,t)=\Delta_y\psi_t(y,t)-\psi_{tt}(y,t)+k(y,t)\varphi(y,y)+\int_0^t k(y,\tau)\psi_t(y,t-\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Note that at the found from (9) and (10) $\omega_i,\ i=1,2,\dots,n,$ the function $v$ can be determined from the problem (11) and (12).

**Lemma 1.** *For a solution $p(x,t)$ of problem*

$$p_t-\Delta_x p=\int_0^t h(x,\tau)p(x,t-\tau)\,d\tau+f(x,t),\quad p\big|_{t=0}=\lambda(x),\ x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \tag{14}$$

*in the domain $D_T$ take place the estimate*

$$|p(x,t)|\le\Phi e^{T\|h\|_T t}+\int_0^t F(\tau)e^{T\|h\|_T(t-\tau)}\,d\tau, \tag{15}$$

*where* $\|h\|_T:=\max\limits_{0\le t\le T}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|h(x,t)|,\ \Phi:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\lambda(x)|,\ \ F(t):=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x,t)|.$

**Lemma 2.** *Let $k(x,t)$ has the form (5) and $K(t):=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|k(x,t)|$. Then there exists a constant $K_0$ (generally speaking, different for each function $k$ ) so that the inequality*

$$|k_{x_i}(x,t)|\le K_0K(t),\quad i=1,2,\dots,n \tag{16}$$

*is true.*

The **proof** of this lemma is based on the assumption that the system of functions $a_i,\ i=1,2,\dots,N$ can be considered linearly independent in $\mathbb{R}^n$ (otherwise, one can rearrange the terms in (6), leaving only a linearly independent system of functions $a_i$). In fact, then there is $\beta>0$ that $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\sum_{j=1}^N c_ja_j(x)\right|\ge\beta$, if $\sum_{j=1}^N|c_j|=1$. In view of this, we have

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|k(x,t)|=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\sum_{j=1}^N a_j(x)\frac{b_j(t)}{\sum\limits_{j=1}^N|b_l(t)|}\right|\sum_{l=1}^N|b_l(t)|\ge\beta\sum_{l=1}^N|b_l(t)|.$$

At the same time, it follows from (1.5)

$$|k_{x_i}(x,t)|\le\max_{1\le j\le N}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|a_{jx_i}(x)|\sum_{j=1}^N|b_j(t)|.$$

Matching the last two inequalities, we find

$$|k_{x_i}(x,t)|\le K_0\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|k(x,t)|\le K_0K(t),$$

where

$$K_0:=\frac{1}{\beta}\max_{1\le j\le N}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|a_{jx_i}(x)|.$$

The theorem is proved using Lemma 1 and Lemma 2.

**References**


1. *Lorenzi A., Sinestrari E.* An inverse problem in theory of materials with memory // Nonlinear Anal. TMA. 1988. – 12. – P. 411–423.

2. *Durdiev D. K.* An inverse problem for a three-dimensional wave equation in the medium with memory // Math. Anal. And Disc. math., Novosibirsk, NGU. – 1989. – P. 19–26. (in Russian).

3. *Grasselli M.* An identification problem for a linear integro-differential equation occurring in heat flow // Math. Meth. Appl. Sci. 1992 – 15. – P. 167–186.

4. *Durdiev D. K.* To the question of correctness of one inverse problem for hyperbolic integro-differential equation // Siberian Math. J. – 1992. – V. 33. – P. 69–77.

5. *Durdiev D. K.* Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. – 2007. – V. 3, No. 4. – P. 411–423.

6. *Durdiev D. K.* A multidimensional inverse problem for an equation with memory // Siberian Math. J. – 1994. – V. 35, No. 3. – P. 514–521.

7. *Durdiev D. K.* Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics // Diff. Equ. – 2008. – V. 44, No. 7. – P. 893–899.

UDC 517.958

# MEMORY KERNEL RECONSTRUCTION PROBLEMS IN THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF RIGID HEAT CONDUCTOR

**D. K. Durdiev[1], Zh. Zh. Zhumaev[2]**

*[1]Bukhara branch of the institute of mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan*
*[2]Bukhara State University*

**Annotation.** The inverse problems of determining the energy-temperature relation $\alpha(t)$ and the heat conduction relation $k(t)$ functions in the one-dimensional integro-differential heat equation are investigated. The direct problem is the initial-boundary problem for this equation. The integral terms have the time convolution form of unknown kernels and direct problem solution. As additional information for solving inverse problems, the solution of the direct problem for $x = x_0$ is given. At the beginning an auxiliary problem, which is equivalent to the original problem is introduced. Then the auxiliary problem is reduced to an equivalent closed system of Volterra-type integral equations with respect to unknown functions. Applying the method of contraction mappings to this system in the continuous class of functions with weighted norms, we prove the main result of the article, which is a global existence and uniqueness theorem of inverse problem solutions.
**Keywords:** integro-differential equation, thermal memory, initial-boundary problem, inverse problem, Green function.

In [2] Miller studied existence, uniqueness, and continuous dependence on parameters for solutions of the certain initial-boundary value problem for following system of integro-differential equations:

$$\begin{gathered} e(t,x) = e_0 + \alpha(0)\theta(t,x) + \int_0^t \alpha'(t-\tau)\theta(\tau,x)d\tau, \\ q(t,x) = -k(0)\theta_x(t,x) - \int_0^t k'(t-\tau)\theta_x(\tau,x)d\tau, \\ e_t(t,x) = -q_x(t,x) + r(t,x), \end{gathered} \tag{1}$$

where $0 \le t < \infty$, $x \in (0;l)$, $e_t = (\partial/\partial t)e$, $q_x = (\partial/\partial x)q$. In (1) $\alpha(t)$ and $k(t)$ are relaxation functions of internal energy and heat flow, respectively. The first and second equalities in equations (1) are linearized (with respect to certain constant $e_0$ energy) constitutive equations for internal energy and heat flow, respectively. And the third relation in (1) expresses the fundamental law of thermal conductivity — Fourier's law. For $k(0) = 0$ these equations represent the linearized theory for heat flow in a rigid, isotropic, homogeneous material as proposed by Gurtin and Pipkin (see e.g., [1], [3]). For $k(0) > 0$ the equations represent an alternate linearized theory proposed by Coleman and Gurtin [4]. For the direct problem consisting in determining the distribution of heat from some initial-boundary value problem for equation (1) Grabmueller [5] gave a very general uniqueness proof for generalized solutions in a Sobolev space and proved existence theorems in certain special situations.

It is supposed the rigid body will occupy a fixed open interval $(0,\ l)$ (one dimensional case). The energy-temperature relation function $\alpha(t)$ and the heat conduction relation $k(t)$ are both assumed sufficiently continuously differentiable functions.

From (1) it follows that

$$\begin{gathered} \theta_t(t,x) = -\frac{\alpha'(0)}{\alpha(0)}\theta(t,x) + \frac{k(0)}{\alpha(0)}\theta_{xx}(t,x) + \\ + \int_0^t \left[ \frac{k'(t-\tau)}{\alpha(0)}\theta_{xx}(\tau,x) - \frac{\alpha''(t-\tau)}{\alpha(0)}\theta(\tau,x) \right] d\tau + \frac{r(t,x)}{\alpha(0)}. \end{gathered} \tag{2}$$

Let $k(0)>0$ and $\alpha(0)\neq 0$. Rewrite the equation (2) in the compact form:

$$\theta_t(t,x)=f(t,x)+C\theta_{xx}(t,x)-a(0)\theta(t,x)+\int_0^t\left[Cb(t-\tau)\theta_{xx}(\tau,x)-a'(t-\tau)\theta(\tau,x)\right]d\tau \tag{3}$$

for all $t\geq 0,\ x\in(0;l)$ and consider the initial-boundary value problem with

$$\theta(0,x)=\theta_0(x), \tag{4}$$

$$\theta(t,0)=\mu_1(t);\ \theta(t,l)=\mu_2(t);\ \theta_0(0)=\mu_1(0);\ \theta_0(l)=\mu_2(0); \tag{5}$$

the initial and boundary conditions, where

$$C=\frac{k(0)}{\alpha(0)},\ a(t)=\frac{\alpha'(t)}{\alpha(0)},\ b(t)=\frac{k'(t)}{k(0)},\ f(t,x)=\frac{r(t,x)}{\alpha(0)}.$$

In equalities (4) and (5) $\theta_0(x)$, $\mu_1(t)$ and $\mu_1(t)$ are given functions. If $r(t,x)$, $\theta_0$, $\alpha(t)$, $k(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ are given functions, then finding the function $\theta(t,x)$ from (3)–(5) is called as a direct problem.

We pose the inverse problems:

**Inverse problem 1.** For given functions $r(t,x)$, $\theta_0(x)$, $k(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ it is required to determine the function $\alpha(t)$, $t>0$ of the integral term in (3) using additional information about the solution of the direct problem (3)–(5):

$$\theta|_{x=x_0}=\psi(t),\quad x_0\in(0,l),\quad t>0 \tag{6}$$

In this case $\psi(t)$, $t>0$ are assumed to be given functions.

**Inverse problem 2.** For given functions $r(t,x)$, $\theta_0(x)$, $\alpha(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ it is required to determine the function $k(t)$, $t>0$ of the integral term in (3) using additional information (6) on the solution of the direct problem (3)–(5).

Since the method for studying the inverse problems allow to find simultaneously the solution to the inverse problem and the solution to the direct problem, then in the sequel, we will call the inverse problem 1 as a problem of determining functions $\theta(t,x)$, $\alpha(t)$ from equations (3)–(6). Let $C^m(0;l)$ be the class of $m$ times continuously differentiable with all derivatives up to the $m$-th order (inclusive) in $(0;l)$ functions. In the case $m=0$ this space coincides with the class of continuous functions. $C^{m,k}(D_T)$ is the class of $m$ times continuously differentiable with respect to $t$ and $k$ times continuously differentiable with respect to $x$ all derivatives in the domain $D_T$ functions.

We need the following assertion:

**Lemma (see [2]).** *Suppose $\alpha(0)>0$, $\alpha\in C^3[0,T]$, $k\in C^2[0,T]$, $T>0$ is an arbitrary fixed number, are true with $k(0)>0$. Then equation (1) is equivalent to the following integrodifferential equation:*

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(t,x)=F(t,x)+C\Delta\theta(t,x)+y(0)\theta(t,x)+\int_0^t y'(t-\tau)\theta(\tau,x)d\tau, \tag{7}$$

*where $F$ is defined as*

$$F(t,x)=f(t,x)-\int_0^t D(t-\tau)f(\tau,x)d\tau+D(t)\theta(0,x),$$

*and where $D(t)$ and $y(t)$ satisfy the scalar equations*

$$D(t)=b(t)-\int_0^t b(t-\tau)D(\tau)d\tau, \tag{8}$$

$$y(t)=b(t)-a(t)-\int_0^t b(t-\tau)y(\tau)d\tau. \tag{9}$$

If $b(t)$ function is continuously for $t>0$ then the solution to the integral equations (8) exists and unique. Note that for given equation (9) it can be considered to be an integral Volterra equation of the second kind with respect to $y(t)$ with the kernel $b(t)$,

$$y(t)=-\int_0^t b(t-\tau)y(\tau)d\tau+[b(t)-a(t)]. \tag{10}$$

It follows from the general theory of integral equations (see, e.g., [6, p.39–44]) that the solution of this equation is expressed by the formula

$$y(t) = b(t) - a(t) + \int_0^t R(t-\tau)\big[b(\tau) - a(\tau)\big] d\tau, \tag{11}$$

where the kernels $R(t)$ and $b(t)$ are related by

$$b(t) = -R(t) - \int_0^t R(t-\tau) b(\tau) d\tau. \tag{12}$$

If $b(0)$ is a known number, from relation (12) we find $R(0) = -b(0)$.

Everywhere in this paper it is supposed $\alpha(0)$ and $k(0)$ are given numbers such that $\alpha(0) \neq 0$, $k(0) > 0$.

The solution of the initial-boundary problem (7), (4), (5) satisfies the integral equation ([7], pp. 200–221):

$$\begin{aligned}\theta(t,x) = \Psi(t,x) + \int_0^t\int_0^l G(t-\tau,x,\xi)\Big(y(0)\theta(\tau,\xi) + \int_0^\tau y'(\tau-\alpha)\theta(\alpha,\xi)d\alpha\Big)d\xi d\tau = \\ = \Psi(t,x) + \int_0^t\int_0^l G(t-\tau,x,\xi)\theta_0(\xi)y(\tau)d\xi d\tau + \\ + \int_0^t\int_0^l G(t-\tau,x,\xi)\int_0^\tau y(\alpha)\theta_\alpha(\tau-\alpha,\xi)d\alpha d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{13}$$

where

$$\Psi(t,x) = \int_0^l G(t,x,\xi)\theta_0(\xi)d\xi + \int_0^t\int_0^l G(t-\tau,x,\xi)F(\tau,\xi)d\xi d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \frac{2\pi n}{l^2}\big[\mu_1(\tau) - (-1)^n\mu_2(\tau)\big] e^{-(\frac{\pi n}{l})^2(t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)d\tau;$$

$$G(t-\tau,x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty e^{-(\frac{\pi a n}{l})^2(t-\tau)}\sin\left(\frac{\pi a n}{l}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi a n}{l}x\right)$$

is the Green function of the initial-boundary problem for one-dimensional heat equation.
We differentiate the equation (13) with respect to $t$. Introducing the notation $\vartheta(t,x) := \theta_t(t,x)$ and taking into account the following relations:

$$\lim_{t\to 0} G(t,\xi,x) = \delta(x-\xi), \quad \lim_{t\to 0}\int_0^l G(t,x,\xi)\theta_0(\xi)d\xi = \theta_0(x),$$

where $\delta(\cdot)$ is the Dirac's delta function, we rewrite the result in the form

$$\begin{aligned}\vartheta(t,x) = \Psi_t(t,x) + \theta_0(x)y(t) + \int_0^t y(\alpha)\vartheta(t-\alpha,x)d\alpha + \\ + \int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x,\xi)\theta_0(\xi)y(\tau)d\xi d\tau + \int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x,\xi)\int_0^\tau y(\alpha)\vartheta(\tau-\alpha,\xi)d\alpha d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{14}$$

Further, using the condition (6), we obtain:

$$\psi'(t) = \Psi_t(t,x_0) + \theta_0(x_0)y(t) + \int_0^t y(\alpha)\vartheta(t-\alpha,x_0)d\alpha +$$

$$+ \int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi)\theta_0(\xi)y(\tau)d\xi d\tau + \int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi)\int_0^\tau y(\alpha)\vartheta(\tau-\alpha,\xi)d\alpha d\xi d\tau.$$

Next we write this equality as the integral equation of the second order with respect to unknown function $y(t)$

$$\begin{aligned}y(t) = -\frac{1}{\theta_0(x_0)}\Big[\Psi_t(t,x_0) - \psi'(t) + \int_0^t y(\alpha)\vartheta(t-\alpha,x_0)d\alpha + \\ + \int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi)\theta_0(\xi)y(\tau)d\xi d\tau + \int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi)\int_0^\tau y(\alpha)\vartheta(\tau-\alpha,\xi)d\alpha d\xi d\tau\Big].\end{aligned} \tag{15}$$

Replacing $t = 0$ in integral equation (15), the unknown function $y(0)$ is found as follows:

$$y(0) = \frac{\psi'(0) - \Psi_t(0,x_0)}{\theta_0(x_0)}.$$

In what follows we assume $\theta_0(x_0) \neq 0$.

**Theorem 1 (existence and uniqueness).** *Assume the conditions* $\theta_0(x) \in C(0,l)$, $\psi(t) \in C[0;T]$, $r(t,x) \in C(D_T)$, $\mu_i(t) \in C[0,T]$, $i=1,2$, $k(t) \in C^2[0,T]$, $\theta_0(0)=\psi(0)$, $\theta_0(x_0) \neq 0$, $\theta_0(0)=\mu_1(0)$, $\theta_0(l)=\mu_2(0)$ *are hold. Then there exists sufficiently small number* $T^* \in (0,T)$ *that the solution to the integral equations (13), (14) in the class of functions* $\vartheta(t,x) \in C^{1,2}(D_{T^*})$, $y(t) \in C[0;T^*]$ *exist and unique, where* $D_{T^*} = \{(x,t) \mid x \in (0,l),\ t \in [0,T^*]\}$.

Applying the method of contraction mappings to this system in the continuous class of functions with weighted norms, we prove the main result of the work, which is a global existence and uniqueness theorem of inverse problem solution.

Having found the functions $\vartheta(t,x)$ and $y(t)$, we determine the functions $\theta(t,x)$, $a(t)$ by integral equation (9):

$$a(t) = b(t) - y(t) - \int_0^t b(t-\tau) y(\tau) d\tau.$$

$$\theta(t,x) = \theta_0(x) + \int_0^t \vartheta(\tau,x) d\tau.$$

With the known function $a(t)$, solving the differential equation $a(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(0)}$, we find the function $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha(0)\int_0^t a(\tau) d\tau$,
the solution of the inverse problem 1 (3)–(6).

The second part with the problem of finding $\theta(t,x)$ and $k(t)$ from equalities (3)–(6). According to Lemma 1, the equation (3) is equivalent to equation (7). The solution of the direct problem (7), (4), (5) is expressed in the form of integral equation (13). We rewrite this equation as follows:

$$\theta(t,x) = \Phi(t,x) + \int_0^t \int_0^l G(t-\tau,x,\xi) F(\tau,\xi) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G(t-\tau,x,\xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^l G(t-\tau,x,\xi) \int_0^\tau y(\alpha) \theta_\alpha(\tau-\alpha,\xi) d\alpha d\xi d\tau, \tag{16}$$

where

$$\Phi(t,x) = \int_0^l G(t,x,\xi) \theta_0(\xi) d\xi +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{2\pi n}{l^2} \left[\mu_1(\tau) - (-1)^n \mu_2(\tau)\right] e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 (t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) d\tau.$$

Differentiating equation (16) in *t*, we use the equality (8) and notation $\vartheta(t,x) := \theta_t(t,x)$. Then we have

$$\vartheta(t,x) = \Phi_t(t,x) + f(t,x) - \int_0^t D(t-\tau) f(\tau,x) d\tau + b(t)\theta_0(x) - \theta_0(x)\int_0^t b(t-\tau) D(\tau) d\tau +$$
$$+ \theta_0(x) y(t) + \int_0^t y(\tau) \vartheta(t-\tau,\xi) d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau,x,\xi) F(\tau,\xi) d\xi d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau,x,\xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau,x,\xi) \int_0^\tau y(\alpha) \vartheta(\tau-\alpha,\xi) d\alpha d\xi d\tau \tag{17}$$

and we obtained the following equation using the additional condition (6):

$$\psi'(t) = \Phi_t(t,x_0) + f(t,x_0) - \int_0^t D(t-\tau) f(\tau,x_0) d\tau + b(t)\theta_0(x_0) - \theta_0(x_0)\int_0^t b(t-\tau) D(\tau) d\tau +$$
$$+ \theta_0(x_0) y(t) + \int_0^t y(\tau) \vartheta(t-\tau,\xi) d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi) F(\tau,\xi) d\xi d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi) \int_0^\tau y(\alpha) \vartheta(\tau-\alpha,\xi) d\alpha d\xi d\tau.$$

From the above equation the unknown function $b(t)$ is found:

$$b(t) = -\frac{1}{\theta_0(x_0)} \Big[\Phi_t(t,x_0) + f(t,x_0) - \psi'(t) - \int_0^t D(t-\tau) f(\tau,x_0) d\tau -$$
$$- \theta_0(x_0) \int_0^t b(t-\tau) D(\tau) d\tau + \theta_0(x_0) y(t) + \int_0^t y(\tau) \vartheta(t-\tau,\xi) d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi)F(\tau,\xi)d\xi d\tau+\int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi)\theta_0(\xi)y(\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_t(t-\tau,x_0,\xi)\int_0^\tau y(\alpha)\vartheta(\tau-\alpha,\xi)d\alpha d\xi d\tau\Big]. \qquad (18)$$

The existence and uniqueness of the solution of the system of closed integral equations (17) and (18) is proved by applying the principle of contraction mapping. Therefore, it is true the following assertion:

**Theorem 2 (existence and uniqueness).** Assume the conditions $\theta_0(x)\in C(0,l)$, $\psi(t)\in C[0;T]$, $r(t,x)\in C(D_T)$, $\mu_i(t)\in C[0,T]$, $i=1,2$, $\alpha(t)\in C^2[0,T]$, $\theta_0(0)=\psi(0)$, $\theta_0(x_0)\neq 0$, $\theta_0(0)=\mu_1(0)$, $\theta_0(l)=\mu_2(0)$ are hold. Then there exists sufficiently small number $T^*\in(0,T)$ that the solution to the integral equations (17), (18)

in the class of functions $\vartheta(t,x)\in C^{1,2}(D_{T^*})$, $b(t)\in C[0;T^*]$ exist and unique, where $D_{T^*}=\{(x,t)\,|\,x\in(0,l),\, t\in[0,T^*]\}$.

From the found function $b(t)$, the unknown function $k(t)$ is determined as follows:

$$k(t)=k(0)+k(0)\int_0^t b(\tau)d\tau.$$

## References


1. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – 31. – P. 113–126.

2. *Miller R. K.* An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory // Journal of mathematical analysis and applications. – 1978. – 66. – P. 313–332.

3. *Gurtin M. E.* On the thermodynamics of materials with memory // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – 28. P. 40–50.

4. *Coleman B. D., Gurtin M. E.* Equipresense and constitutive equation for rigid heat conductors // Z. Angew. Math. Pkys. – 1967. – 18. – P. 199–208.

5. *Grabmueller H.* Linear Theorie der Waermeleitung in Medium mit Gedaechtnis; Existenz und Eindeutigkeit von Loesungen sum Inversen Problem // Technische Hochschule Darmstdadt. – Preprint No. 226. – September 1975.

6. *Kilbas A. A.* Integral equations: course of lectures. – Minsk : BSU. – 2005. (In Russian)

7. *Tikhonov A. N., Samarsky A. A.* Equations of Mathematical Physics. – Moscow : Nauka, 1977. (In Russian)

УДК 517.9

# OPTIMIZATION OF ONE ESSENTIALLY NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM

**V. V. Nefedov, V. V. Tikhomirov, G. Yu. Gladyshev**

*Lomonosov Moscow State University*

**Annotation.** The paper uses a variational approach to study the optimization and stability of one essentially nonlinear dynamic system.(see [1]) For many essentially nonlinear dynamical systems, (adequate) stability and optimization methods have not yet been developed. This is due to the fact that the classical Lyapunov method is not always applicable, even in those cases when the Lyapunov function is constructed. However, the implementation of the Lyapunov method poses difficulties of both a qualitative and a quantitative nature in studies of this dynamic system for stability.

In such cases, it is more convenient to apply the variational approach to the study of stability. It allows you to fairly accurately establish the necessary stability conditions for a substantially nonlinear system. The proposed method (see [2]) is based on a variational method for estimating the rate of change of the metric of the phase space of states of a perturbed system. The authors congratulate dear Shavkat Arifdzhanovich Alimov on his anniversary and wish him health and success in his scientific work.

**Keywords:** variational method, Lyapunov's method, stability study, nonlinear dynamic system, necessary stability conditions, partial derivatives.

## 1. Problem formulation

Consider the problem of studying the stability of fixed equilibrium points of an essentially nonlinear dynamical system

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(\mu_1 - (x_1^2 + 2\cdot x_2^2)), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2(\mu_2 - (2\cdot x_1^2 + x_2^2)), \tag{1}$$

where $\mu_1$, $\mu_2$ — fixed parameters, at that $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$.

## 2. The content of the variation technique

The solution to problem (1) is based on the consideration of the «variational techniqueв», which gives the necessary stability conditions. Moreover, the application of the direct Lyapunov method, based on obtaining sufficient stability conditions using the Lyapunov function, as noted above, is not always effective.

Let a semimetric $S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} x_k^2$ and a small number $\varepsilon > 0$ be given in the Euclidean space $X$ of the phase variables $x_1$ and $x_2$. We analyze the solutions of system (1) in a small neighborhood $S(x_1, x_2) < \varepsilon$.

**Definition 1.** *The solution to system (1) is called* $\varepsilon$ *— stable if there exists a small number* $\varepsilon > 0$ *and a time moment* $t_1 \in (0, +\infty)$ *such that for all* $t > t_1$ *the trajectory of the system* $x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$ *does not go beyond the domain* $S(x_1, x_2) < \varepsilon$.

**Definition 2.** *The solution to system (1) is called asymptotically stable if, for any arbitrarily small positive number, the trajectory* $x(t)$ *monotonically tends to zero in the domain* $S(x_1, x_2) < \varepsilon$ *and reaches zero for* $t < \infty$ *(i. e., for* $t \to \infty$ *). Moreover, this trajectory satisfies the condition*

$$\dot{S} = (\nabla S, \dot{x}) \le 0. \tag{2}$$

The following statement is true (see [2]):

**Statement.** *In order for some (perturbed) solution of the dynamical system (1) to be* $\varepsilon$ *— stable, it is necessary that the total time derivative* $\dot{S}$ *of the function* $S(x_1, x_2)$, *calculated by virtue of system (1) for* *the perturbed solution reaches a maximum in the domain* $S(x_1,x_2)<\varepsilon$, *and in the case of monotonic asymptotic stability, the maximum was reached at zero.*

**Consequence.** *This statement implies, in particular, that the conditions*

$$\frac{\partial \dot S}{\partial x_i}=0,\ \ \frac{\partial^2 \dot S}{\partial x_i^2}\le 0;\quad \left[\frac{\partial \dot S}{\partial x_i}=0,\ \ \frac{\partial^2 \dot S}{\partial x_i^2}<0\right];\quad i=1,2 \tag{3}$$

*are necessary stability conditions [asymptotic stability] of the perturbation of the zero solution in the vicinity of a fixed equilibrium point.*

### 3. Application of the variational method for studying stability for system (1)

Note that system (1) has 5 equilibrium positions, having the following form

$$(0,0);\ (a,0);\ (0,b),\ \text{where } a=\pm\sqrt{\mu_1},\ b=\pm\sqrt{\mu_2}.$$

We carry out a study on the stability of each of these equilibrium positions

A) We first consider system (1) in a neighborhood of the zero equilibrium position, i.e. in the vicinity of the point (0,0).

Using the above method, we compose a function

$$\dot S = x_1\cdot\dot x_1 + x_2\cdot\dot x_2 = x_1^2\cdot(\mu_1-(x_1^2+2\cdot x_2^2))+x_2^2\cdot(\mu_2-(2\cdot x_1^2+x_2^2)). \tag{4}$$

We define the necessary stability conditions (3) for the first partial derivatives of the function $\dot S$. We find the following necessary conditions

$$\frac{\partial \dot S}{\partial x_1}=2x_1\cdot(\mu_1-2\cdot x_2^2)-4x_1^3-4x_1\cdot x_2^2=0$$

$$\frac{\partial \dot S}{\partial x_2}=-4\cdot x_2\cdot x_1^2+2x_2\cdot(\mu_2-2\cdot x_1^2)-4\cdot x_2^3=0.$$

The necessary stability conditions (3) for the second partial derivative (with respect to the argument $x_1$) take the form:

$$\frac{\partial^2 \dot S}{\partial x_1^2}=2\cdot(\mu_1-2\cdot x_2^2)-12\cdot x_1^2-4\cdot x_2^2=2\mu_1+\bar o(\rho^2)\ge 0,$$

Obviously, the necessary condition (3) is not satisfied, which means that the perturbed solution of the zero equilibrium position is not stable.

B) Now consider the equilibrium position $(a,0)$, where $a=\pm\sqrt{\mu_1}$. In system (1), obviously, we need to make a replacement $x_1=z_1+a,\ x_2=z_2$. As a result, we get the system

$$\begin{cases}\dot z_1=\mu_1(z_1+a)-(z_1+a)\cdot[\,(z_1+a)^2+2\cdot z_2^2\,],\\ \dot z_2=\mu_2\cdot z_2-z_2\cdot[\,2\cdot(z_1+a)^2+z_2^2\,].\end{cases} \tag{5}$$

Given the variational principle, we compose a function

$$\dot S=z_1\cdot\dot z_1+z_2\cdot\dot z_2=z_1\cdot(z_1+a)\cdot[\,\mu_1-(z_1+a)^2-2\cdot z_2^2\,]+z_2^2\cdot[\,\mu_2-2\cdot(z_1+a)^2-z_2^2\,].$$

Next, we calculate the necessary stability conditions for the perturbed solution of the zero equilibrium position of system (5) in accordance with (3) for the first partial derivatives of the function $\dot S$, which take the form:

$$\frac{\partial \dot S}{\partial z_1}=(2\cdot z_1+a)\cdot(\mu_1-2\cdot z_2^2)-(4\cdot z_1+a)\cdot(z_1+a)^2-4\cdot(z_1+a)\cdot z_2^2=0,$$

$$\frac{\partial \dot S}{\partial z_2}=-4\cdot z_1\cdot z_2\cdot(z_1+a)+2\cdot z_2\cdot(\mu_2-2\cdot(z_1+a)^2)-4\cdot z_2^3=0.$$

For the second partial derivatives, the necessary stability conditions obviously take the following form:

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_1^2} = 2\cdot(\mu_1 - 2\cdot z_2^2) - 4\cdot z_2^2 - (z_1 + a)\cdot(12\cdot z_1 + 6\cdot a) = 2\mu_1 - 6a^2 + \overline{o}(\rho^2) = -4\cdot\mu_1 + \overline{o}(\rho^2) < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_2^2} = -4\cdot z_1\cdot(z_1 + a) + 2\cdot(\mu_2 - 2\cdot(z_1 + a)^2) - 12\cdot z_2^2 = 2\cdot(\mu_2 - 2\cdot a^2) + \overline{o}(\rho) < 0.$$

Obviously, the last two inequalities are true if the inequalities $0 < \mu_2 < 2\cdot\mu_1$, which means that in this case the perturbed solution of the dynamical system (1) asymptotically stable in the vicinity of the equilibrium position $(a, 0)$.

C) We now consider the problem of studying the stability of the equilibrium position $(0, b)$, where $b = \pm\sqrt{\mu_2}$. For this purpose, in system (1), we make the change of variables $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2 + b$.

As a result, we get the system

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1\cdot[\,\mu_1 - (z_1^2 + 2\cdot(z_2 + b)^2)\,], \\ \dot{z}_2 = (z_2 + b)\cdot[\,\mu_2 - (2\cdot z_1^2 + (z_2 + b)^2)\,]. \end{cases} \tag{6}$$

Using the variational technique, we compose the variational metric function

$$\dot{S} = z_1\cdot\dot{z}_1 + z_2\cdot\dot{z}_2 = z_1^2\cdot[\,\mu_1 - (z_1^2 + 2\cdot(z_2 + b)^2)\,] + z_2\cdot(z_2 + b)\cdot[\,\mu_2 - (2\cdot z_1^2 + (z_2 + b)^2)\,].$$

Next, we calculate the partial derivatives of this function with respect to each of the arguments and determine the necessary stability conditions in a neighborhood of the equilibrium position. We have

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial z_1} = 2\cdot z_1\cdot[\,\mu_1 - (2\cdot(z_2 + b)^2)\,] - 4\cdot z_1^3 - 2\cdot z_1\cdot z_2\cdot(z_2 + b) = 0,$$

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial z_2} = -4\cdot(z_2 + b)\cdot z_1^2 + (2\cdot z_2 + b)\cdot(\mu_2 - 2\cdot z_1^2) - (z_2 + b)^2\cdot(4\cdot z_2 + b) = 0.$$

It is easy to check that the last equations are valid at the point of the zero equilibrium position.

For the second partial derivatives of the function $\dot{S}$, the necessary stability conditions for the perturbed equilibrium position are obviously represented in the form

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_1^2} = 2\cdot[\,\mu_1 - (2\cdot(z_2 + b)^2)\,] - 12\cdot z_1^2 - 4\cdot z_2\cdot(z_2 + b) = 2\cdot\mu_1 - 4\cdot b^2 + \overline{o}(\rho) < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_2^2} = -4\cdot z_1^2 + 2\cdot(\mu_2 - 2\cdot z_1^2) - (z_2 + b)\cdot(12\cdot z_2 + 6\cdot b) = 2\cdot\mu_2 - 6\cdot b^2 + \overline{o}(\rho) < 0.$$

From the last two inequalities we conclude that the necessary stability condition is satisfied if the parameters are related by the relations $0 < \mu_1 < 2\cdot\mu_2$.

Thus, the following holds

**Theorem.** *System (1) has five equilibrium positions* $(0,0)$; $(a,0)$; $(0,b)$, *where* $a = \pm\sqrt{\mu_1}, b = \pm\sqrt{\mu_2}$. *The equilibrium position (0,0) is not stable. The necessary condition for the stability of the equilibrium position* $(a, 0)$ *is valid when the inequalities* $0 < \mu_2 < 2\cdot\mu_1$, *otherwise it is not stable. The necessary condition for the stability of the equilibrium position* $(0, b)$ *is valid when the conditions* $0 < \mu_1 < 2\cdot\mu_2$ *are fulfilled. Otherwise, it is not stable.*

## 4. Conclusions

The results obtained allow us to draw the following conclusions. The variational method for studying the stability of essentially nonlinear dynamical systems is effective and is easily implemented in the study of essentially nonlinear dynamical systems, when classically methods cause difficulties.

In the case when the variational metric coincides with the Lyapunov function, the necessary conditions coincide with the sufficient ones, which allows a complete study of the problem. The proposed method makes it possible to find the sets of parameter values for which the system is not stable, as well as to determine the regions of dependence of the phase variables for which the given dynamical system is stable in the sense of Definitions 1 or 2.

**References**


1. *Братусь А. и др.* Динамические системы и модели в биологии. – Физматлит, 2009. – 400 с.

2. *Смольяков Э.* Эффективный метод устойчивости существенно нелинейных динамических систем // Кибернетика и системный анализ. – 2019. – Т. 55, № 4.

3. *Четаев Н.* Некоторые задачи  теории устойчивости. Работы по аналитической механике // М. АНСССР. – 1962.

4. *Тихомиров В. В., Исаев Р. Р.* Применение вариационного метода для исследования устойчивости системы Лотки — Вольтера (для 3 измерений) // Конференция. Тихоновские чтения. Москва, 26.10.2020 г. – МГУ им. М. В. Ломоносова.

UDC 519.6, 519.63

# APPLICATION OF THE VARIATIONAL METHOD FOR STUDYING STABILITY OF THE 3D LOTKA — VOLTERRA SYSTEM

**V. V. Tikhomirov, R. R. Isaev**

*Lomonosov Moscow State University*

**Annotation.** The paper investigates the stability of the Lotka — Volterra dynamic system "predator — two preys" with the help of variational method. This method is applicable for studying equilibrium stability non-linear dynamical systems of any kind and in any dimension. It approves its effectiveness even in cases where the use of the Lyapunov function causes great difficulties (for example, when solving tasks of large dimension). The proposed method is based on a variation method for estimating the rate of phase-state metric change for the perturbed system when the variable $t \to \infty$. The disadvantage of the variation method is the fact that this method provides only the necessary conditions of stability. However, its it forms the first step in studying the stability of non-linear dynamical systems of any kind and any dimension.
**Keywords:** variational method, research of stability, non-linear dynamic system, necessary conditions of stability, partial derivative, Jaconian matrix, eigenvalues.

**1.** Let us consider the problem of studying the stability of the equilibrium positions of the Lotka — Volterra dynamic system "predator — two preys" (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\gamma_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_2 - x_3); \\ \dot{x}_2 = \gamma_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_1) \\ \dot{x}_3 = \gamma_3 \cdot x_3 \cdot (\alpha - x_1). \end{cases} \tag{1}$$

Here $\alpha, \gamma_i$, with $i = 1,2,3$ are constants (parameters of the system), functions $x_i = x_i(t)$ denote the amount of the predator $(x_1)$ and preys $(x_2, x_3)$.

System (1) has the following three equilibrium points $M_0(0,0,0)$, $M_1(1,1,0)$, $M_2(\alpha,0,1)$ respectively.

For studying equilibrium points we apply the method proposed in [2], which is based on checking necessary conditions of stability.

**2.** The main idea of variational method is to determine the the maximum rate of change of Euclidean metric. $S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} x_k^2$ in state-space, assuming that the solution sought does not leave $S(x) < \varepsilon$. We analyse (1) in small neighbourhood $S(x_1, x_2, x_3) < \varepsilon$.

**Definition 1.** The solution of a system (1) is called $\varepsilon$ — stable, if there exist $\varepsilon > 0$ and $t_1 \in (0, +\infty)$ such that for all $t > t_1$ the trajectory of the system $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)$ does not leave $S(x_1, x_2, x_3) < \varepsilon$.

**Definition 2.** Solution of a system (1) is called asymptotically stable, if for all $\varepsilon > 0$ the trajectory $x(t)$ monotonically tends to zero in $S(x_1, x_2, x_3) < \varepsilon$ and reaches zero when $t \le \infty$ (i.e. $t \to \infty$). At the same time trajectory satisfies the condition (derivative due to the system (1)) $\dot{S} = (\nabla S, \dot{x}) \le 0$.

The following statement holds true.

**Statement 1.** The fact that a given (perturbed) solution of dynamic system (1) is $\varepsilon$ — stable, demands the following conditions are required:

1. Time derivative $\dot{S}$ of function $S(x_1, x_2, x_3)$ due to the system (1) for the perturbed solution reaches maximum inside $S(x_1, x_2, x_3) < \varepsilon$.

2. In case of monotonic asymptotic stability the maximum is reached on the zero solution

**Corollary.** This statement, in particular yields, that the conditions

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial x_i} = 0;\ \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} \le 0;\ \left(\frac{\partial \dot{S}}{\partial x_i} = 0;\ \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} < 0\right);\ i = 1,2,3$$

are necessary conditions for stability(asymptotically stability) of zero solution perturbation in the vicinity of equilibrium point.

**3.** Consider variational method for studying stability of system (1). Apply a variational method to equilibria at points $M_0$, $M_1$, $M_2$.

For the singular point $M_0(0,0,0)$ construct the make metric function:

$$\dot{S} = x_1 \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 + x_3 \cdot \dot{x}_3 = -\gamma_1 \cdot x_1^2 \cdot (1 - x_2 - x_3) + \gamma_2 \cdot x_2^2 \cdot (1 - x_1) + \gamma_3 \cdot x_3^2 \cdot (\alpha - x_1).$$

For the first partial derivatives of metric function $\dot{S}$ the necessary conditions of stability of perturbed solution in the vicinity of zero equilibrium positions are as follows:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial x_1} = -2 \cdot x_1 \cdot \gamma_1 \cdot (1 - x_2 - x_3) - \gamma_2 \cdot x_2^2 - \gamma_3 \cdot x_3^2 = 0; \\ \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial x_2} = \gamma_1 \cdot x_1^2 + 2 \cdot \gamma_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_1) = 0; \\ \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial x_3} = \gamma_1 \cdot x_1^2 + 2 \cdot \gamma_3 \cdot x_3 \cdot (\alpha - x_1) = 0; \end{cases}$$

For second partial derivatives of metric function $\dot{S}(x_1, x_2, x_3)$ the necessary conditions for stability of perturbed solution in the vicinity of zero equilibrium positions are as follows:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_1^2} = -2 \cdot \gamma_1 \cdot (1 - x_2 - x_3) = -2 \cdot \gamma_1 + o(\rho) < 0 \ \Leftrightarrow \gamma_1 > 0; \\ \dfrac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_2^2} = 2 \cdot \gamma_2 \cdot (1 - x_1) = 2 \cdot \gamma_2 + o(\rho) < 0 \qquad \Leftrightarrow \gamma_2 < 0; \\ \dfrac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_3^2} = 2 \cdot \gamma_3 \cdot (\alpha - x_1) = 2 \cdot \alpha \cdot \gamma_3 + o(\rho) < 0 \qquad \Leftrightarrow \gamma_3 < 0. \end{cases}$$

**Statement 2.** If the zero solution of the system (1) is (asymptotically) **stable** in the vicinity of equilibrium positions $(0,0,0)$, then the following inequalities hold true: $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 < 0$, $\alpha \cdot \gamma_3 < 0$ (or $\Leftrightarrow \gamma_3 < 0$). In the other words, this solution **in not stable**, if at least one of the indicated inequalities is violated (that contradicts a condition $\gamma_i > 0$), therefore the perturbed solution of zero equilibrium positions **is not stable**.

**4.** In order to study the stability of equilibrium position at $M_1(1,1,0)$ we let: $x_1 = z_1 + 1$; $x_2 = z_2 + 1$; $x_3 = z_3$. Thus we obtain the following system:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\gamma_1 \cdot (z_1 + 1) \cdot (-z_2 - z_3); \\ \dot{z}_2 = -\gamma_2 \cdot z_1 \cdot (z_2 + 1); \\ \dot{z}_3 = \gamma_3 \cdot z_3 \cdot (\alpha - 1 - z_1), \end{cases} \tag{2}$$

For this system the point $(0,0,0)$ is an equilibrium point. Following variational method we construct the metric function:

$$\dot{S}(z_1, z_2, z_3) = z_1 \cdot \dot{z}_1 + z_2 \cdot \dot{z}_2 + z_3 \cdot \dot{z}_3 =$$

$$= \gamma_1 \cdot z_1 \cdot (z_1 + 1) \cdot (z_2 + 1) \cdot (z_2 + z_3) - \gamma_2 \cdot z_1 \cdot z_2 + \gamma_3 \cdot z_3^2 \cdot (\alpha - 1 - z_1)$$

Necessary conditions for stability of perturbed solution in the vicinity of zero equilibrium position $(0,0,0)$ of system (2) for the first partial derivatives of function $S(z_1, z_2, z_3)$ are as follows:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial z_1} = \gamma_1 \cdot (2 \cdot z_1 + 1) \cdot (z_2 + z_3) - \gamma_2 \cdot (z_2^2 + z_2) - \gamma_3 \cdot z_3^2 = 0; \\ \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial z_2} = \gamma_1 \cdot (z_1^2 + z_1) - \gamma_2 \cdot z_1 \cdot (2 \cdot z_2 + 1) = 0; \\ \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial z_3} = \gamma_1 \cdot (z_1^2 + z_1) + 2 \cdot \gamma_3 \cdot z_3 \cdot (\alpha - 1 - z_1) = 0; \end{cases}$$

Next we need to define necessary conditions for stability of perturbed solution for the second partial derivatives of function $S(z_1, z_2, z_3)$ in the vicinity of zero equilibrium positions of system (2). These conditions are as follows:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_1^2} = 2 \cdot \gamma_1 \cdot (z_2 + z_3) \le 0; & \Leftrightarrow \gamma_1 < 0; \\ \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial z_2^2} = -2 \cdot \gamma_2 \cdot z_1 \le 0; & \Leftrightarrow \gamma_2 > 0; \\ \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial z_3^2} = 2 \cdot \gamma_3 \cdot (\alpha - 1 - z_1) \le 0; & \Leftrightarrow \gamma_3 \cdot (\alpha - 1) < 0 \; (\gamma_3 > 0, \alpha < 1); \end{cases}$$

**Statement 3.** Perturbed solution in the vicinity of equilibrium positions $(1,1,0)$ of system (1) (or, which is also the same, zero equilibrium positions of system (2)) **is necessarily stable**, if the following conditions hold true:

$$\gamma_1 < 0; \; \gamma_2 > 0; \; \gamma_3 \cdot (\alpha - 1) < 0 \; \text{ (or } \gamma_3 > 0, \alpha < 1).$$

In the other words, if at least one of these conditions is violated, the specified solution **is not stable**.

**5.** In order to study the stability of equilibrium position of the point $M_2(\alpha, 0, 1)$ of system (1), we let: $x_1 = z_1 + \alpha; \; x_2 = z_2; \; x_3 = z_3 + 1$.

Now the equilibrium position $M_2(\alpha, 0, 1)$ becomes the zero equilibrum position of the following:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \gamma_1 \cdot (z_1 + \alpha) \cdot (z_2 + z_3); \\ \dot{z}_2 = \gamma_2 \cdot z_2 \cdot (1 - \alpha - z_1); \\ \dot{z}_3 = -\gamma_3 \cdot z_1 \cdot (1 + z_3); \end{cases} \tag{3}$$

Following the variational method we get the following metric function:

$$\dot{S}(z_1, z_2, z_3) = \gamma_1 \cdot z_1 \cdot (z_1 + \alpha) \cdot (z_2 + z_3) + \gamma_2 \cdot z_2^2 \cdot (1 - \alpha - z_1) - \gamma_3 \cdot z_1 \cdot z_3 \cdot (1 + z_3).$$

Necessary conditions of stability of disturbed solution of zero equilibrium position of system (3) (and therefore equilibrium position $M_2(\alpha, 0, 1)$ of system (1)) for first partial derivatives of metric function $\dot{S}(z_1, z_2, z_3)$ are the following:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial z_1} = \gamma_1 \cdot (2 \cdot z_1 + \alpha) \cdot (z_2 + z_3) - \gamma_2 \cdot z_2^2 - \gamma_3 \cdot (z_3 + z_3^2) = 0; \\ \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial z_2} = \gamma_1 \cdot (z_1^2 + \alpha \cdot z_1) + 2 \cdot \gamma_2 \cdot z_2 \cdot (1 - \alpha - z_1) = 0; \\ \dfrac{\partial \dot{S}}{\partial z_3} = \gamma_1 \cdot (z_1^2 + \alpha \cdot z_1) - \gamma_3 \cdot z_1 \cdot (2 \cdot z_3 + 1) = 0. \end{cases}$$

Necessary conditions of stability of disturbed solution for second partial derivatives of metric function $\dot{S}(z_1, z_2, z_3)$ are the following:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_1^2} = 2\cdot\gamma_1\cdot(z_2+z_3)\le 0; & \Leftrightarrow \gamma_1<0; \\ \dfrac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_2^2} = 2\cdot\gamma_2\cdot(1-\alpha-z_1)\le 0; & \Leftrightarrow \gamma_2\cdot(1-\alpha)<0 \Leftrightarrow (\gamma_2>0, \alpha<1); \\ \dfrac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_3^2} = -2\cdot\gamma_3\cdot z_1\le 0; & \Leftrightarrow \gamma_3>0. \end{cases}$$

Hence we come to the following statement:

**Statement 4.** Perturbed solution in the vicinity of equilibrium position $M_2(\alpha,0,1)$ of system (1) ((or, which is also the same, zero equilibrium positions of system (3)) **is necessarily stable**, if the following conditions hold true:

$$\gamma_1<0;\ \gamma_2\cdot(1-\alpha)<0;\ \ (\text{or } \gamma_2>0, \alpha<1);\ \ \gamma_3>0.$$

In the other words, if at least one of these conditions is violated then the specified solution **is not stable**.

**6.** Thus, the paper proposes a variation method for studying the stability of the equilibrium positions of Lotka — Volterra system(1). This study shows that the variational tool is an effective method of optimization for essentially non-linear dynamical systems also. In particular, this method could be effectively applied to dynamic systems of large dimension.

It is shown that this method allows us to formulate the necessary stability conditions of the perturbed solution for each of the three equilibrium positions and for all of incoming parameters.

At the same time, we found necessary conditions of stability of disturbed solution for each equilibrium position and for each incoming parameters, that is studying in researching optimization of solutions in systems. The following theorem is obtained

**Theorem.** The necessary conditions of stability for bifurcation points of system (1) are:

1. For **stability** of equilibrium position of $M_0(0,0,0)$:

$$\gamma_1>0;\ \gamma_2<0;\ \alpha\cdot\gamma_3<0\ \ (\text{or } \gamma_3<0).$$

2. For **stability** of equilibrium position of $M_1(1,1,0)$:

$$\gamma_1<0;\ \gamma_2>0;\ \gamma_3\cdot(\alpha-1)<0\ \ (\text{or }\ \gamma_3>0,\ \alpha<1).$$

3. For **stability** of equilibrium position of $M_2(\alpha,0,1)$:

$$\gamma_1<0;\ \ \gamma_2\cdot(1-\alpha)>0;\ \ (\text{or }\ \gamma_2<0,\ \alpha<1);\ \gamma_3>0.$$

4. On the other hand, if at least one of the above conditions is not true, then perturbed solution in neighbourhood of the respective equilibrium position equilibrium positions **is not stable**.

**Remark.** While proving the theorem, it was not assumed that the system parameters are strictly positive, as it is in the Lotka — Volterra model "predator — two preys". Turning back to this model one can formulate the following result.

Corollary. If all the coefficients $\gamma_i$ are positive, then all equilibrium positions $M_i$ are not stable.

**7.** Let's compare our results with classical methods of finding stability by Lyapunov approach. Henceforth (for certainty) we will assume that all parameters $\gamma_i>0$. We will consider the stability of the equilibrium positions with respect to the first approximation.

Then let $M_i(x_1,x_2,x_3)$, — be equilibrium positions (point of bifurcation) of system (1). To determine the nature of these points' stability, we introduce the Jacobian matrix.

$$J(M)=\frac{\partial f}{\partial x}(M)=\begin{bmatrix} -\gamma_1\cdot(1-x_2-x_3) & x_1\cdot\gamma_1 & x_1\cdot\gamma_1 \\ -\gamma_2\cdot x_2 & \gamma_2\cdot(1-x_1) & 0 \\ -\gamma_3\cdot x_3 & 0 & \gamma_3\cdot(\alpha-x_1) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Characteristic determinant of this matrix at the point in $M_0(0,0,0)$

$$|J(M_0)-\lambda\cdot E|=\begin{vmatrix}-(\gamma_1+\lambda) & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \alpha\cdot\gamma_3-\lambda\end{vmatrix}.$$

It has eigenvalues with different signs. $\lambda_1=\alpha\cdot\gamma_3>0$; $\lambda_2=\gamma_2>0$; $\gamma_3=-\gamma_1<0$. Then we get a conclusion that zero equilibrium position $M_0(0,0,0)$ of system (1) **is not stable by Lyapunov**.

Let's consider the bifurcation point $M_1(1,1,0)$. At this point the characteristic matrix (4) equals:

$$J(M_1)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_1)=\begin{bmatrix}0 & \gamma_1 & \gamma_1\\ -\gamma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3\cdot(\alpha-1)\end{bmatrix}.$$

Eigenvalues of matrix are: $\lambda_1=(\alpha-1)\cdot\gamma_3<0$ (if $\alpha<1$), and two other are imaginary $\lambda_{2,3}=\pm i\cdot\sqrt{(\gamma_1\cdot\gamma_2)}$, and $(\gamma_1\cdot\gamma_2)>0$. In this case, the study on the first approximation cannot determine anything. Determining the nature of stability requires further research. The method that we propose solves this problem definitely: the equilibrium position is not stable.

Let's consider equilibrium position $M_2(\alpha,0,1)$ and determine the nature of its stability. Jaconian matrix in this point is:

$$J(M_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_2)=\begin{bmatrix}0 & \alpha\cdot\gamma_1 & \alpha\cdot\gamma_1\\ 0 & \gamma_2\cdot(1-\alpha) & 0\\ -\gamma_3 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Eigenvalues of this matrix are: real one $\lambda_1=\gamma_2\cdot(1-\alpha)>0$ and two imaginary $\lambda_{2,3}=\pm i\cdot\sqrt{\alpha\cdot(\gamma_1\cdot\gamma_3)}$ bearing in mind that $(\gamma_1\cdot\gamma_3)>0$. In this case equilibrium position $M_2(\alpha,0,1)$, obviously, **is not stable**.


## Acknowledgements

The authors thank A. S. Bratus for his attention to the work.


## References


1. *Братусь А. и др.* Динамические системы и модели в биологии // Физматлит. – 2009. – 400 с.

2. *Смольяков Э.* Эффективный метод устойчивости существенно нелинейных динамических систем // Кибернетика и системный анализ. – 2019. – Т.55, № 4.

3. *Четаев Н.* Некоторые задачи теории устойчивости // Работы по аналитической механике. – М. АНСССР. – 1962.

УДК 517.518.85

# ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА СИСТЕМЕ ОТСЧЁТОВ КВАДРАТИЧНЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К НЕКОТОРЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

**Абдул Ахад Ариан, С. М. Ситник, А. С. Тимашов**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет*

**Аннотация.** Рассматриваются аппроксимации сигналов при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса — квадратичных экспонент. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений. Намечены возможные приложения этого метода к решению дифференциальных уравнений типа Больцмана — Максвелла — Власова.
**Ключевые слова:** интерполяция, функции Гаусса, узловые функции, тета-функции Якоби, уравнения типа Больцмана — Максвелла — Власова.

Развитие науки и техники приводит к появлению новых задач, для решения которых требуются современные методы и подходы как к вопросам теории, так и к практическим приложениям. Задачи исследования электрических и оптических сигналов, теории фильтрации, голографии, моделирование процессов в томографии и медицине привели к поиску методов разложения функций по неполным, переполненным или неортогональным системам. До этого в течение долгого временного периода приближения осуществлялись в основном разложением по полным ортогональным системам. Примерами переполненных систем являются фреймы, а неортогональных — всплески, системы Габора (когерентные состояния), функции Рвачёвых, sinc — функции и другие. Уже само многообразие этих методов подтверждает тот очевидный факт, что среди них нет универсальных, эффективно работающих для всех или хотя бы для большинства задач. Поэтому для специальных классов задач разрабатываются различные методы, которые наиболее эффективны и не имеют ограничений именно для рассматриваемых задач.

Одним из современных подходов к решению задачи о восстановлении цифровых сигналов по их значениям на данной системе отсчетов является использование квадратичных экспонент, то есть разложений сигналов по целочисленным сдвигам функций Гаусса. Этот подход, основанный на использовании функций Гаусса, исторически возникал в нескольких известных задачах математики, физики и техники. На его основе в 19 веке Френелем было предложено решение задачи о корректном описании результатов опытов Фраунгофера по дифракции и объяснение дискретной природы спектра солнечных лучей. Гаусс использовал квадратичные экспоненты для вычисления знаменитых сумм, названных его именем, при помощи которых им были решены известные задачи теории чисел, суммы Гаусса до сих пор используются, например, в современной оптике и теории кодирования. В 20 веке на основе использования функций Гаусса была создана математическая модель голографии, за техническую реализацию которой Д. Габор получил Нобелевскую премию в 1971 г. В 21 веке другая Нобелевская премия была присуждена за разработку и применение компьютерного пакета Gaussian для моделирования процессов в квантовой физике, молекулярной химии, биологии, генной инженерии и в других приложениях, основу математического обеспечения этого пакета составили комбинации разложений именно по квадратичным экспонентам – функциям Гаусса.

Данное направление исследований, основанное на использовании сдвигов функций Гаусса, развивали многие отечественные и зарубежные учёные, перечислим только некоторых из них: Журавлёв М. В., Киселёв Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Переломов А. М., Ситник С. М., Ушаков С. Н., Calcaterra C., Darlington S., Feichtinger G. H., Lanzara F., Lifshits M., Madrenas J., Maz'ya V., Schmidt G., Riemenschneiter S.D., Seshadri V., Shclumprecht T., Sivakumar N.

Изучим задачу о приближении сигналов произвольной природы (электрических, информационных и т. д.) в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов.

Более точно, будет исследована следующая основная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$ и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, так же определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f(m) = \tilde{f}(m), \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби. Как показано в [1], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [2–3], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма, при этом вычисления возможны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений, см. также [4–5].

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.

В работе получено теоретическое обоснование корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведён достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Приведём список основных полученных результатов (см. также [4–11]).

1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров $q$, $\sigma$ исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.

2. Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров $q$, $\sigma$.

3. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры.

4. Рассмотрены приложения разработанного метода к аналитическому и численному решению дифференциальных уравнений типа Больцмана-Максвелла-Власова.

**Литература**


1. *Журавлёв М. В., Киселёв Е. А., Минин Л. А., Ситник С. М.* Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных. – 2010. – С. 107–116.

2. *Минин Л. А., Ситник С. М., Журавлев М. В.* О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – № 13 (68), 17/2. – С. 89–99.

3. *Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. – 2011. – V. 173, No 2. – P. 231–241.

4. *Ситник С. М., Тимашов А. С.* Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2013. – № 19 (162), вып. 32. – С. 184–186.

5. *Ситник С. М., Тимашов А. С., Ушаков С. Н.* Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – 2015. – № 17 (214), вып. 40. – С. 130–142.

6. *Sitnik S. M., Timashov A. S., Ushakov S. N.* On the Correctness of Finite-rank Approximations by Series of Shifted Gaussians // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Kazan, 2020. – V. 41, No 3. – P. 423–429.

7. *Sitnik S. M., Timashov A. S., Ushakov S. N.* Signal approximations by shifted Gaussians: a direct approach by finite linear systems // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – V. 1479, 012046.

8. *Минин Л. А., Ситник С. М., Ушаков С. Н.* Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2014. – № 7 (183), вып. 35. – С. 214–217.

9. *Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ситник С. М.* О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Математические заметки. – 2014. – Том 96, вып. 2. – С. 239–250.

10. *Ситник С. М., Тимашов, А. С.* Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов. «Новые информационные технологии в автоматизированных системах». Материалы семнадцатого научно-практического семинара. – М. : Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2014. – С. 292–300.

11. *Тимашов А. С.* Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции / А. С. Тимашов // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – Белгород, 2019. – № 4 (19), вып. 51. – С. 514–521.

УДК 517.624

# О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Г. Э. Абдурагимов**

*Дагестанский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе с помощью итерационного метода предлагается построение приближенного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка.
**Ключевые слова:** краевая задача, положительное решение, итерационный метод.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \left( \int_0^1 x(s)ds \right)^3 = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \tag{2}$$

Из результатов работы [1], в частности, следует, что рассматриваемая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение.

С помощью соответствующих итерационных схем было получено приближенное положительное решение задачи (1)–(2), приведенное в табл. 1.

Таблица 1

*Положительное решение задачи (1)–(2)*

| $t$ | 0,00 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 1,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,00 | 0,38 | 0,67 | 0,87 | 1,00 | 1,04 | 1,00 | 0,87 | 0,67 | 0,38 | 0,00 |

После интерполирования табличных данных получен следующий график приближенного положительного решения задачи (1)–(2).

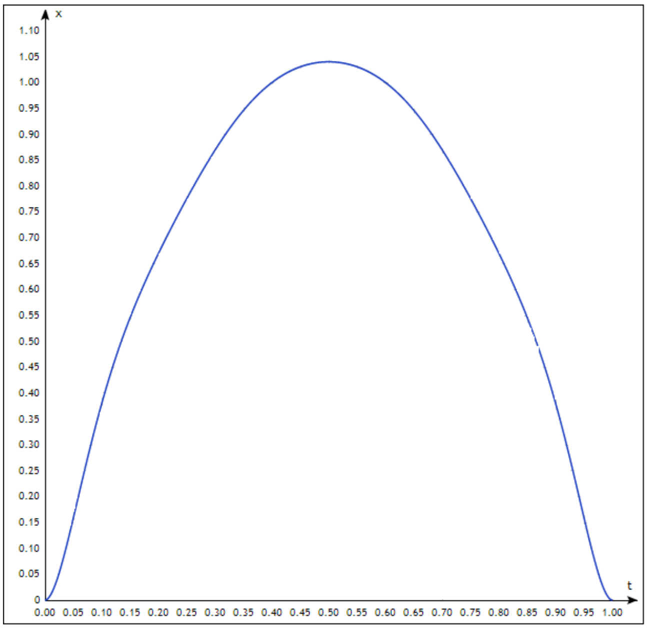



*Рис. 1*

## Литература

1. *Абдурагимов Г. Э.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма-Лиуввиля для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 77–80.

УДК 517.929.7

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИТИПА ТРАНСМИССИИ

**Е. В. Астахова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается задача об упругости в материале, состоящем из двух слоев. На границе задано неоднородное условие типа трансмиссии. Построено решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям в смысле главного значения, и асимптотики по гладкости с выделением сингулярных составляющих вблизи границы.

**Ключевые слова:** задача сопряжения, асимптотики по гладкости, упругость, деформации.

## Введение

Изучение свойств композитных материалов привело к постановке и изучению задач теплопроводности, упругости, термоупругости. Особый интерес среди них представляют задачи для материалов с трещинами. Из статей в этой области можно отметить работы, посвященные изучению задач для материалов с ограниченными трещинами (трещины ограниченной длины) [1–7]. В данной статье рассматривается математическая модель, описывающая распространение упругости в материалах с трещиной. Однако, в отличие от предыдущих статей, здесь рассматривается случай биматериала из двух слоев, заполняющих верхнюю и нижнюю полуплоскости.

## 1. Постановка задачи

Модель задана дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} &(\kappa_i+1)\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_1^2}+(\kappa_i-1)\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_1\partial x_2}=0,\\ &(\kappa_i-1)\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_1^2}+(\kappa_i+1)\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_1\partial x_2}=0, \end{aligned} \tag{1}$$

которые выполняются на каждой полуплоскости отдельно: верхняя полуплоскость моделируется уравнениями с индексом $i=1$, нижняя – с индексом $i=2$. Значения параметров $\kappa_i$ и $\beta_i$ характеризуют материал полуплоскости и, вообще говоря, различаются: $\kappa_1\neq\kappa_2$, $\beta_1\neq\beta_2$

На границе, которая является осью абсцисс $l=\{(x_1,x_2):x_2=0\}$, заданы граничные условия типа трансмиссии:

$$\begin{aligned} &\left[U(x_1,x_2)\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left(U_1(x_1,\varepsilon)-U_2(x_1,-\varepsilon)\right)=Q_1(x_1),\\ &\left[V(x_1,x_2)\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left(V_1(x_1,\varepsilon)-V_2(x_1,-\varepsilon)\right)=Q_2(x_1),\\ &\left[\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_1,\varepsilon)-\frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x_1,-\varepsilon)\right)=Q_3(x_1),\\ &\left[\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}(x_1,\varepsilon)-\frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x_1,-\varepsilon)\right)=Q_4(x_1). \end{aligned} \tag{2}$$

**Определение 1.** Решением краевой задачи (1)–(2) назовем вектор-функцию

$$U(x_1,x_2)=\begin{cases}U_1(x_1,x_2),\ x_2>0\\ U_2(x_1,x_2),\ x_2<0\end{cases},\quad V(x_1,x_2)=\begin{cases}V_1(x_1,x_2),\ x_2>0\\ V_2(x_1,x_2),\ x_2<0\end{cases},$$

компоненты которой

– имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно по обеим пространственным переменным в любой точке $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus l$;

– удовлетворяют уравнениям (1);

– удовлетворяют граничным условиям (2) в смысле главного значения.

### 2. Решение задачи в образах Фурье

После применения преобразования Фурье по переменной $s_1$, задача (1)–(2) приобретает следующий вид

$$\begin{gathered}-(\kappa+1)s_1^2u+(\kappa-1)\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+2is_1\frac{\partial v}{\partial x_2}=0,\\ -(\kappa-1)s_1^2v+(\kappa+1)\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}+2is_1\frac{\partial u}{\partial x_2}=0,\end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{gathered}\left[u(x_1,x_2)\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left(u_1(x_1,\varepsilon)-u_2(x_1,-\varepsilon)\right)=q_1(x_1),\\ \left[v(x_1,x_2)\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left(v_1(x_1,\varepsilon)-v_2(x_1,-\varepsilon)\right)=q_2(x_1),\\ \left[\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1,\varepsilon)-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1,-\varepsilon)\right)=q_3(x_1),\\ \left[\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1,\varepsilon)-\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1,-\varepsilon)\right)=q_4(x_1),\end{gathered}\tag{4}$$

где $u_i(s_1,x_2)=F_{x_1\to s_1}\left[U_i(x_1,x_2)\right]$, $v_i(s_1,x_2)=F_{x_1\to s_1}\left[V_i(x_1,x_2)\right]$ и $q_i(s_1)=F_{x_1\to s_1}\left[Q_i(x_1)\right]$.

**Определение 2.** Решением краевой задачи (3)–(4) назовем вектор-функцию

$$u(x_1,x_2)=\begin{cases}u_1(x_1,x_2),\ x_2>0\\ u_2(x_1,x_2),\ x_2<0\end{cases},\quad v(x_1,x_2)=\begin{cases}v_1(x_1,x_2),\ x_2>0\\ v_2(x_1,x_2),\ x_2<0\end{cases},$$

компоненты которой

– удовлетворяют уравнениям (3);

– удовлетворяют граничным условиям (4) в смысле главного значения;

– ограничены на бесконечности.

**Теорема 1.** Решение задачи (3)–(4), отвечающему Определению 2, будет иметь следующий вид

– для верхней полуплоскости

$$\begin{pmatrix}u_1(s_1,x_2)\\ v_1(s_1,x_2)\end{pmatrix}=\frac{e^{-|s_1|x_2}}{\Delta}\begin{pmatrix}-\dfrac{is_1}{|s_1|}\Delta_3-\dfrac{\kappa_1}{|s_1|}\Delta_4+\Delta_4x_2\\ \Delta_3+\dfrac{is_1}{|s_1|}\Delta_4x_2\end{pmatrix}$$

– для нижней полуплоскости

$$\begin{pmatrix} u_2(s_1,x_2) \\ v_2(s_1,x_2) \end{pmatrix} = \frac{e^{|s_1|x_2}}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 + \dfrac{is_1}{|s_1|}\Delta_2 x_2 \\ -\dfrac{is_1}{|s_1|}\Delta_1 - \dfrac{\kappa_2}{|s_1|}\Delta_2 + \Delta_2 x_2 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = 4|s_1|^2(\kappa_1\kappa_2 - 1)$,

$$\Delta_1 = |s_1|^2 q_1(s_1)(2 - 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 - \kappa_2) + is_1|s_1| q_2(s_1)(2 - \kappa_1 - \kappa_2) +$$
$$+ |s_1| q_3(s_1)(-2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) - is_1 q_4(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2),$$

$$\Delta_2 = 2is_1|s_1|^2 q_1(s_1)(\kappa_1 + 1) + 2|s_1|^3 q_2(s_1)(\kappa_1 - 1) + 2is_1|s_1| q_3(s_1)(\kappa_1 - 1) + 2|s_1|^2 q_4(s_1)(\kappa_1 + 1),$$

$$\Delta_3 = -is_1|s_1| q_1(s_1)(2 + \kappa_1 + \kappa_2) + |s_1|^2 q_2(s_1)(-2 + 2\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_2) +$$
$$+ is_1 q_3(s_1)(\kappa_2 - \kappa_1) - |s_1| q_4(s_1)(2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2),$$

$$\Delta_4 = -2|s_1|^3 q_1(s_1)(\kappa_2 + 1) + 2is_1|s_1|^2 q_2(s_1)(1 - \kappa_2) - 2|s_1|^2 q_3(s_1)(1 - \kappa_2) + 2is_1|s_1| q_4(s_1)(\kappa_2 + 1),$$

$$q_i(s_1) = F_{x_1 \to s_1}\left[Q_i(x_1)\right]$$

Таким образом, решением задачи (3)–(4) являются следующие функции:

$$u_1(s_1,x_2) = \frac{e^{-|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left( q_1(s_1)(-2 + 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 - \kappa_2) + \frac{is_1}{|s_1|} q_2(s_1)(2 - \kappa_1 - \kappa_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{|s_1|} q_3(s_1)(-2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) - \frac{i}{s_1} q_4(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2) \right) +$$
$$+ \frac{2x_2 e^{-|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left( -|s_1| q_1(s_1)(\kappa_2 + 1) + is_1 q_2(s_1)(\kappa_2 - 1) + q_3(s_1)(\kappa_2 - 1) + \frac{is_1}{|s_1|} q_4(s_1)(\kappa_2 + 1) \right)$$

$$v_1(s_1,x_2) = \frac{e^{-|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left( -\frac{is_1}{|s_1|} q_1(s_1)(2 + \kappa_1 + \kappa_2) + q_2(s_1)(-2 + 2\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_2) - \right.$$
$$\left. - i\frac{s_1}{|s_1|^2} q_3(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{1}{|s_1|} q_4(s_1)(2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) \right) +$$
$$+ \frac{2x_2 e^{-|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left( -is_1 q_1(s_1)(\kappa_2 + 1) + |s_1| q_2(s_1)(\kappa_2 - 1) + i\frac{s_1}{|s_1|} q_3(s_1)(\kappa_2 - 1) - q_4(s_1)(\kappa_2 + 1) \right)$$

$$u_2(s_1,x_2) = \frac{e^{|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left( q_1(s_1)(2 - 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 - \kappa_2) + \frac{is_1}{|s_1|} q_2(s_1)(2 - \kappa_1 - \kappa_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{|s_1|} q_3(s_1)(-2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) - \frac{i}{s_1} q_4(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2) \right) +$$
$$+ \frac{2x_2 e^{|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left( -|s_1| q_1(s_1)(\kappa_1 + 1) + is_1 q_2(s_1)(\kappa_1 - 1) - q_3(s_1)(\kappa_1 - 1) + \frac{is_1}{|s_1|} q_4(s_1)(\kappa_1 + 1) \right)$$

$$v_2(s_1,x_2)=\frac{e^{|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2-1)}\left(-\frac{is_1}{|s_1|}q_1(s_1)(2+\kappa_1+\kappa_2)+q_2(s_1)(2-2\kappa_1\kappa_2-\kappa_1+\kappa_2)-\right.$$

$$\left.-i\frac{s_1}{|s_1|^2}q_3(s_1)(\kappa_1-\kappa_2)-\frac{1}{|s_1|}q_4(s_1)(2\kappa_1\kappa_2+\kappa_1+\kappa_2)\right)+$$

$$+\frac{2x_2e^{|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2-1)}\left(is_1q_1(s_1)(\kappa_1+1)+|s_1|q_2(s_1)(\kappa_1-1)+i\frac{s_1}{|s_1|}q_3(s_1)(\kappa_1-1)+q_4(s_1)(\kappa_1+1)\right)$$

### 3. Существование и асимптотика решения

**Теорема 2.** Если $Q_i(x_1)$ $i=\{1;2;3;4\}$ – такая функция, что:

1. $Q_i(x_1)\in C^4$;
2. $Q_i(x_1)$ – финитная с носителем $[-A;A]$;
3. Существует постоянная $M$ такая, что $\left|Q_i^{(n)}(x_1)\right|\le M$ для любого $x_1\in[-A;A]$, $n=\{0;1;2;3;4\}$;
4. $\int\limits_{-A}^{A}Q(x_1)dx_1=0$,

то прообразы Фурье решения задачи (3)–(4) будут существовать, удовлетворять дифференциальным уравнениям (1) и граничным условиям (2).

**Теорема 3.** Если $Q_i(x_1)$ $i=\{1;2;3;4\}$ – такая функция, что:

1. $Q_i(x_1)\in C^4$;
2. $Q_i(x_1)$ – финитная с носителем $[-A;A]$;
3. Существует постоянная $M$ такая, что $\left|Q_i^{(k)}(x_1)\right|\le M$ для любого $x_1\in[-A;A]$, $k=\{0;1;\ldots;4\}$;
4. $\int\limits_{-A}^{A}Q(x_1)dx_1=0$,

то прообразы Фурье решения задачи (3)–(4) являются решением задачи (1)–(2) по Определению 2 и имеют следующие асимптотические представления:

$$U_1(x_1,x_2)=\frac{x_2}{\kappa_1\kappa_2-1}\left((\kappa_2+1)\left.\frac{(x_1-y_1)Q_1(y_1)}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}\right|_{y_1=-A}^{A}+(\kappa_2-1)\left.\frac{|x_2|Q_2(y_1)}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}\right|_{y_1=-A}^{A}\right)+R_1^1(x_1,x_2),$$

$$V_1(x_1,x_2)=\frac{-x_2}{\kappa_1\kappa_2-1}\left((\kappa_2+1)\left.\frac{|x_2|Q_1(y_1)}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}\right|_{y_1=-A}^{A}+(\kappa_2-1)\left.\frac{(x_1-y_1)Q_2(y_1)}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}\right|_{y_1=-A}^{A}\right)+R_1^2(x_1,x_2),$$

$$U_2(x_1,x_2)=\frac{x_2}{\kappa_1\kappa_2-1}\left((\kappa_1+1)\left.\frac{(x_1-y_1)Q_1(y_1)}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}\right|_{y_1=-A}^{A}+(\kappa_1-1)\left.\frac{|x_2|Q_2(y_1)}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}\right|_{y_1=-A}^{A}\right)+R_2^1(x_1,x_2),$$

$$V_2(x_1,x_2)=\frac{x_2}{\kappa_1\kappa_2-1}\left((\kappa_1+1)\left.\frac{|x_2|Q_1(y_1)}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}\right|_{y_1=-A}^{A}-(\kappa_1-1)\left.\frac{(x_1-y_1)Q_2(y_1)}{x_2^2+(x_1-y_1)^2}\right|_{y_1=-A}^{A}\right)+R_2^2(x_1,x_2),$$

где $R_m^n(x_1,x_2)$ – непрерывные на $\mathbb{R}^2$ функции.

## Выводы

Для задачи упругости с граничными условиями типа трансмиссии (1)–(2) было построено решение в образах Фурье (Теорема 1). Далее было доказано существование обратного преобразования Фурье от полученных функций при выполнении некоторых условий и построены асимптотики вблизи границы с выделением сингулярных составляющих компонент решения.

## Литература

1. *El-Borgi S.* A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri // International Journal of Engineering Science. – 2004. – № 42. – С. 371–393.

2. *Глушко А. В.* Асимптотическое поведение производных решения задачи упругих деформаций неоднородного материала под воздействием механических нагрузок / А.В. Глушко, Е. А. Логинова, С. В. Пронина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. – Воронеж, 2017. – № 4. – С. 70–87.

3. *Астахова Е. В.* Влияние тепла на деформации материала с дефектом / Е. В. Астахова, А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – Москва, 2019. – 59:9. – С. 1532–1536.

4. *Глушко А. В.* О стационарном распределении тепла в двух связных полуплоскостях с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. – Воронеж, 2015. – № 1. – С. 111–134.

5. *Черникова А. С.* Асимптотические представления решения и его первых производных задачи о стационарном распределении тепла в биматериале вблизи межфазной трещины / А. С. Черникова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. – Воронеж, 2015. – № 1. – С. 188–206.

6. *Глушко А. В.* Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. 1 / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Журнал вычислительной математики и математической физики – Москва, 2019 – 59:6 – С.1007–1023.

7. *Глушко А. В.* Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. 2 / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // Журнал вычислительной математики и математической физики – Москва, 2019 – 59:7 – С. 1230–1242.

УДК 517.968

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНЫМ ЯДРОМ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

**С. Н. Асхабов**

*Чеченский государственный педагогический университет,*
*Чеченский государственный университет*

**Аннотация.** В статье получены точные априорные оценки решения интегрального уравнения с суммарным ядром, степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части. Используя эти оценки, методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании и единственности решения данного уравнения в конусе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций. Установлено, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений в полном метрическом пространстве, порожденном априорными оценками. Приведена оценка скорости сходимости последовательных приближений к точному решению. Приведен пример, показывающий неулучшаемость априорных оценок.
**Ключевые слова:** нелинейное интегральное уравнение, суммарное ядро, априорные оценки, метод весовых метрик.

## 1. Введение

Среди линейных интегральных уравнений с суммарным ядром хорошо известно уравнение Фокса, решение которого в замкнутой форме с помощью преобразования Фурье приведено в монографии Е. Титчмарша [1, п. 11.15]. Известно [2, § 7], что уравнения с суммарным ядром после применения преобразования Фурье приводят к так называемым краевым задачам со сдвигом, а в некоторых частных случаях заменой переменных они сводятся к линейным интегральным уравнениям типа свертки. Как отмечено в работе [3], линейные интегральные уравнения с суммарным ядром, в отличие от соответствующих уравнений с разностным ядром, изучены сравнительно мало. Что касается нелинейных интегральных уравнений с суммарным ядром, то они также тесно связаны с соответствующими уравнениями типа свертки и их теория в настоящее время находится в стадии становления. Известно [4, § 20], что исследование нелинейных интегральных уравнений типа свертки с симметричными переменными пределами интегрирования приводит к суммарным ядрам и системам нелинейных вольтерровских уравнений типа свертки, возникающим при решении некоторых задач гидроаэродинамики, популяционной генетики и других (подробнее, см. [4–6]). При этом с теоретической и прикладной точек зрения особый интерес представляют неотрицательные решения таких уравнений. В этой связи, рассмотрим в классе

$$Q_+ = \{u(x) : u(x) \in C[0,\infty] \quad \text{и} \quad u(x) > 0 \quad \text{при} \quad x > 0\}$$

нелинейное интегральное уравнение

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x k(x+t)u(t)dt + f(x), \qquad x > 0, \quad \alpha > 1, \tag{1}$$

в котором ядро $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } \int_0^{\delta} k(t)dt > 0 \text{ для любого } \delta > 0, \tag{2}$$

$$f(x) \in C[0,\infty), \; f(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } f(0) \geq 0. \tag{3}$$

Цель данной работы получить в классе $Q_+$ точные априорные оценки решения уравнения (1) и методом весовых метрик [4, § 17] доказать, что это уравнение имеет единственное решение, а также показать, что его можно найти методом последовательных приближений и установить оценку скорости их сходимости.

## 2. Априорные оценки решения

При доказательстве основных результатов оказываются весьма полезными следующие две простые леммы.

**Лемма 1.** *Если* $a(x)$ *и* $b(x)$ *неотрицательные неубывающие на* $[0,\infty)$ *функции, то*

$$\int_0^x a(x+t)\cdot b(t)dt \le \int_0^x [2a(2t)-a(t)]\cdot b(t)dt. \tag{4}$$

**Лемма 2.** *Если функция* $a(x)$ *локально интегрируема на* $[0,\infty)$, *то*

$$\int_0^x a(x+t)dt = \int_0^x [2a(2t)-a(t)]dt. \tag{5}$$

Следующая теорема дает существенную в дальнейшем информацию о возможных решениях уравнения (1) в конусе $Q_+$.

**Теорема 1.** *Если выполнены условия (2), (3) и функция* $u(x)\in Q_+$ *является решением уравнения (1), то* $u(x)$ *не убывает на* $[0,\infty)$ *и удовлетворяет неравенствам*:

$$F_+(x) \equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x k(2t)dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)\right)^{1/(\alpha-1)} \le u(x) \le$$
$$\le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x k(x+t)dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right)^{1/(\alpha-1)} \equiv G_+(x). \tag{6}$$

Заметим, что если $k(x)=C_1>0$ и $f(x)=C_2\ge 0,$ то нижняя и верхняя априорные оценки совпадают, т. е.

$$F_+(x)\equiv G_+(x)\equiv\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot C_1\cdot x + C_2^{(\alpha-1)/\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)},$$

и являются решением интегрального уравнения (1). Значит, в определенном смысле, неравенства (6) неулучшаемы.

## 3. Теорема существования и единственности

Запишем уравнение (1) в операторном виде:

$$u = T_+u, \quad \text{где} \quad (T_+u)(x) = \left(\int_0^x k(x+t)\cdot u(t)dt + f(x)\right)^{1/\alpha}.$$

Из теоремы 1 следует, что решение уравнения $u=T_+u$ естественно разыскивать в классе

$$P^+ = \{u(x): u(x)\in C[0,\infty) \quad \text{и} \quad F_+(x)\le u(x)\le G_+(x)\},$$

где функции $F_+(x)$ и $G_+(x)$ определены в (6).

Далее будем предполагать, что неоднородность $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,\infty),$ т. е. представима в виде:

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0) \qquad \forall x\in[0,\infty). \tag{7}$$

**Лемма 3.** *Пусть выполнены условия (2), (3) и (7). Тогда оператор* $T_+$ *переводит класс* $P^+$ *в себя.*

Зафиксируем любое число $b>0$ и рассмотрим класс:

$$P_b^+ = \{u(x) : u(x) \in C[0,b] \quad \text{и} \quad F_+(x) \le u(x) \le G_+(x)\}.$$

Из леммы 3 непосредственно вытекает следующее

**Следствие 1.** *Если выполнены условия (2), (3) и (7), то оператор* $T_+$ *отображает класс* $P_b^+$ *в себя.*

Введем теперь в классе $P_b^+$ метрику, положив для любых $u, v \in P_b^+$

$$\rho_b^+(u,v) = \sup_{0<x\le b} \frac{|u(x)-v(x)|}{G_+(x)}. \tag{8}$$

Корректность этой метрики проверяется так же как и в пункте 17.7 [4]. Заметим, что в отличие от §§ 17–19 [4], в данной метрике в качестве весовой функции используется не нижняя, а верхняя априорная оценка решения уравнения (1). Точно так же как и при доказательстве теоремы 17.13 [4] проверяется, что пара $(P_b^+, \rho_b^+)$ образует полное метрическое пространство.

Если дополнительно предположить, что функции $k(x)$, $f(x)$ и показатель $\alpha$ удовлетворяют условию:

$$q = \sup_{0<x\le b} \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x k(x+t)dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{(\alpha-1)\int_0^x k(2t)dt + \alpha \cdot f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)} < 1, \tag{9}$$

то для любых $u, v \in P_b^+$ выполняется неравенство

$$\rho_b^+(T_+u, T_+v) \le q \cdot \rho_b^+(u,v),$$

т. е. оператор $T_+$ является сжимающим.

Таким образом, в силу принципа сжимающих отображений, справедлива

**Теорема 2.** Если $\alpha > 1$ и выполнены условия (2), (3), (7), (9), то уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x)$ в метрическом пространстве $P_b^+$ (и в $Q_+$). Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле $u_n = T_+ u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике (8). При этом справедлива оценка скорости сходимости:

$$\rho_b^+(u_n, u^*) \le \frac{q^n}{1-q} \rho_b^+(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $q<1$ определено в условии (9), а $u_0(x) \in P_b^+$ есть начальное приближение (произвольная функция).

В заключение отметим, что следуя работам [7–9], где изучаются различные классы нелинейных дискретных уравнений с разностными ядрами, можно исследовать соответствующие нелинейные дискретные уравнения с суммарными ядрами в различных пространствах числовых последовательностей.


## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611 (проект «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи»).

**Литература**


1. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – Москва – Ленинград : Гостехиздат, 1948. – 479 с.

2. *Гахов Ф. Д.* Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – Москва : Наука, 1978. – 296 с.

3. *Антипов В. Г.* Особое интегральное уравнение с суммарным ядром / В. Г. Антипов // Изв. вузов. Матем. – 1959. – № 6. – С. 9–13.

4. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки / С. Н. Асхабов. – Москва : Физматлит, 2009. – 304 с.

5. *Okrasinski W.* On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation / W. Okrasinski // Annal. Polon. Math. – 1980. – V. 37, № 3. – P. 223–229.

6. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications / W. Okrasinski // Extracta Math. – 1989. – V. 4, № 2. – P. 51–74.

7. *Асхабов С. Н.* Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью / С. Н. Асхабов, Н. К. Карапетянц // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 10. – С. 1777–1784.

8. *Askhabov S. N.* Convolution type discrete equations with monotonous nonlinearity in comples spaces / S. N. Askhabov, N. K. Karapetian // Journal of Integral Equations and Math. Phys. – 1992. – V. 1, № 1. – P. 44–66.

9. *Асхабов С. Н.* Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах / С. Н. Асхабов, Н. К. Карапетянц // Докл. АН. – 1992. – Т. 322, № 6. – С. 1015–1018.

УДК 517.9

# ОБ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**М. С. Афанасова[1], В. В. Обуховский[1], Г. Г. Петросян[2]**

*[1]Воронежский государственный педагогический университет*
*[2]Воронежский государственный университет инженерных технологий*

**Аннотация.** Рассматривается обобщенная краевая задача для управляемой системы с обратной связью, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением дробного порядка с бесконечным запаздыванием в сепарабельном банаховом пространстве. Строится и изучается разрешающий мультиоператор, на основе свойств которого формулируется общий принцип существования решений задачи в терминах отличия от нуля топологической степени соответствующего векторного поля. Приводится конкретный пример реализации этого общего принципа, а также пример существования оптимального решения поставленной задачи, минимизирующего заданный полунепрерывный сверху функционал качества.
**Ключевые слова:** система управления с обратной связью, оптимальное решение, дробное дифференциальное включение, бесконечное запаздывание, мера некомпактности, уплотняющий оператор, неподвижная точка, топологическая степень.

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, монографии [18, 22] статьи [16, 17, 21] и др.).

Мы будем использовать аксиоматическое определение фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное J. K. Hale и J. Kato (см. [13, 14]). Пространство $\mathcal{B}$ будем рассматривать как линейное топологическое пространство функций, заданных на $(-\infty,0]$ со значениями в банаховом пространстве $E$, наделенное полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Для любой функции $x:(-\infty,a]\to E$, где $a>0$, и каждого $t\in(-\infty,a]$, $x_t$ представляет собой функцию из $(-\infty,0]$ в $E$, заданную как

$$x_t(\theta)=x(t+\theta), \qquad \theta\in[-\infty,0].$$

Будем предполагать, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

($\mathcal{B}1$) Если функция $x:(-\infty;a]\to E$ непрерывна на $[0,a]$ и $x_0\in\mathcal{B}$, то для любого $t\in[0,a]$ выполнено

(i) $x_t\in\mathcal{B}$;

(ii) функция $t\to x_t$ непрерывна;

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}}\le K(t)\sup_{0\le\tau\le t}\|x(\tau)\|+M(t)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$, где функции $K,M:[0,\infty)\to[0;\infty)$ не зависят от $x$, $K$ строго положительна и непрерывна, а $M$ локально ограничена.

($\mathcal{B}0$) Существует $l>0$ такое, что $\|\psi(0)\|_E\le l\|\psi\|_{\mathcal{B}}$ для всех $\psi\in\mathcal{B}$.

Отметим, что при данных условиях пространство $C_{00}$ всех непрерывных функций из $(-\infty,0]$ в $E$ с компактным носителем входит в любое фазовое пространство $\mathcal{B}$ (см. [14], Предложение 1.2.1).

Будем предполагать дополнительно, что выполнено следующее условие.

($\mathcal{B}C1$) Если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset C_{00}$ сходится к функции $\psi$ компактно, то $\psi\in\mathcal{B}$ и $\lim_{n\to+\infty}\|\psi_n-\psi\|_{\mathcal{B}}=0$.

($\mathcal{B}C2$) Если $\psi\in BC$ и $\|\psi\|_{BC}\ne0$, то $\|\psi\|_{\mathcal{B}}\ne0$.

Из этого предположения вытекает, что пространство $BC$, наделенное $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ является нормированным пространством. Мы будем обозначать его $\mathcal{BC}$.

Пусть $E$ – сепарабельное банахово пространство. Обозначим символом $\mathcal{C}$ нормированное пространство ограниченных непрерывных функций $x:(-\infty;a]\to E$ наделенное нормой

$$\|x\|_{\mathcal{C}} = \|x_0\|_{\mathcal{B}} + \|x|_{[0,a]}\|_{C},$$

где последняя норма – обычная sup-норма пространства $C([0,a];E)$.

Мы будем рассматривать следующую управляемую систему, описываемую полулинейным функционально-дифференциальным включением с бесконечным запаздыванием в $E$:

$$^{C}D^{q}x(t)\in Ax(t)+F(t,x_t)+Bu(t), \qquad t\in[0,a], \tag{1}$$

удовлетворяющую условию обратной связи

$$u\in \Psi x. \tag{2}$$

Здесь символом $^{C}D^{q}$ обозначена дробная производная Герасимова-Капуто порядка $0<q<1$; $D(A)\subset E\to E$ – замкнутый линейный оператор; $F:[0,a]\times\mathcal{BC}\to Kv(E)$ – мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями; $u$ – непрерывная функция действующая из $[0,a]$ в банахово пространство управлений $E_1$; $\Psi:\mathcal{C}\to K(C([0,a];E_1))$ – мультиотображение обратной связи; $B:E_1\to E$ – ограниченный линейный оператор.

Рассмотрим задачу о существовании траекторий указанной системы, удовлетворяющих следующему общему граничному условию:

$$\mathcal{Q}x\in\mathcal{S}x, \tag{3}$$

где $\mathcal{Q}:\mathcal{C}\to\mathcal{BC}$ – линейный ограниченный оператор; $\mathcal{S}:\mathcal{C}\to Kv(\mathcal{BC})$ – $J^{c}$-мультиотображение.

Предположим, что выполнено следующее условие.

$(A)$ Линейный оператор $A:D(A)\to E$ порождает ограниченную $C_0$-полугруппу $\{T(t)\}$, $t\geq 0$ линейных операторов в $E$. Обозначим $M=\sup\left\{\|T(t)\|;t\geq 0\right\}$.

Предположим, что мультиотображение $F:[0,a]\times\mathcal{BC}\to Kv(E)$ удовлетворяет следующим условиям.

$(F1)$ для любого $\psi\in\mathcal{BC}$ мультифункция $F(\cdot,\psi):[0;a]\to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t\in[0;a]$, мультиотображение $F(t,\cdot):\mathcal{BC}\to Kv(E)$ п.н.св;

$(F3)$ для любого $r>0$, существует функция $\alpha_r\in L_{+}^{p}[0,a]$ такая, что для $\|\psi\|_{\mathcal{B}}\leq r$ выполнено

$$\|F(t,\psi)\|_{E}\leq\alpha_r(t)$$

для п.в. $t\in[0,a]$;

$(F4)$ существует функция $\mu\in L^{p}([0,a])$ такая, что для каждого непустого ограниченного $Q\subset\mathcal{BC}$ выполнено:

$$\chi_E(F(t,Q))\leq\mu(t)\varphi_{\mathcal{BC}}(Q) \text{ п.в. } t\in[0,a],$$

где $\chi_E$ – МНК Хаусдорфа в $E$, $\varphi_{\mathcal{BC}}(Q)$ – модуль послойной некомпактности множества $Q$.

Относительно мультиотображения $\Psi$ будем предполагать, что

$(\Psi)$ естественно определенное мультиотображение

$$B\Psi:\mathcal{C}\to K(C([0,a];E))$$

является $J^{c}$-мультиотображением.

**Определение 1.** Пара функций $x\in\mathcal{C}$ и $C([0,a];E_1)$ образуют интегральное решение системы (1)–(3) если функция $x$ удовлетворяет включению (2) и имеет вид

$$x(t)=\mathcal{G}(t)x(0)+\int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)[f(s)+Bu(s)]ds, \tag{4}$$

где $f(s)\in F(s,x_s)$,

$$\mathcal{G}(t)=\int_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \qquad \mathcal{T}(t)=q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta,$$

$$\xi_q(\theta)=\frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q),\ \ \theta\in\mathbb{R}^+,$$

а функция $u$ удовлетворяет включению (2). Функция $x$ называется траекторией системы, а функция $u$ – соответствующим управлением.

Рассмотрим линейный оператор $G:L^p([0,a];E)\to\mathcal{C}$, заданный следующим образом

$$(Gf)(t)=\begin{cases}\int\limits_0^t(t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds, & t\in[0,a]\\ 0, & t\in(-\infty,0].\end{cases}\tag{5}$$

Обозначим $\mathcal{C}_0$ подпространство $\mathcal{C}$, состоящее из функций, имеющих вид

$$x(t)=\mathcal{G}(t)x(0),\qquad t\in[0,a]$$

и обозначим $\mathcal{Q}_0$ сужение $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{C}_0$.

Основным требованием на граничные операторы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ будет следующее условие:

($\mathcal{QS}$) существует непрерывный линейный оператор $\Lambda:\mathcal{BC}\to\mathcal{C}_0$ такой, что

$$(I-\mathcal{Q}_0\Lambda)(z-\mathcal{Q}G(f+Bu))=0$$

для всех $x\in\mathcal{C}$, $z\in\mathcal{S}(x)$, $f\in F(s,x_s)$ и $u\in\Psi(x)$.

В предположении, что выполнено условие ($\mathcal{QS}$), рассмотрим мультиоператор

$$\Theta:\mathcal{C}\to Kv(\mathcal{C}).$$

Основное свойство мультиоператора $\Theta$ описывается следующим утверждением.

**Теорема 1.** Каждая неподвижная точка мультиоператора $\Theta$, то есть функция $x(\cdot)$ удовлетворяющая соотношению

$$x=\Lambda z+(I-\Lambda\mathcal{Q})G(f+Bu)\tag{6}$$

для некоторых $z\in\mathcal{S}(x)$, $f\in F(s,x_s)$ и $u\in\Psi(x)$ вместе с функцией $u$ образуют интегральное решение задачи (1)–(3).

Обратно, при выполнении условия ($\widetilde{Q}$), если $x$ и $u$ – траектория и соответствующее управление для задачи (1)–(3), то функция $x$ удовлетворяет (6) для $z=\mathcal{Q}x\in\mathcal{S}(x)$ и $f\in F(s,x_s)$.

Исследуются условия, при которых мультиоператор $\Theta$ является уплотняющим относительно векторной меры некомпактности в данном функциональном пространстве. Свойства этого мультиоператора дают возможность применить теорию топологической степени.

Мы можем сформулировать следующий общий принцип существования интегральных решений задачи (1)–(3).

**Теорема 2.** При указанных выше условиях, пусть ограниченное открытое множество $\Omega\subset\mathcal{C}$ не имеет траекторий $x(\cdot)$ задачи (1)–(3) на границе $\partial\Omega$ и пусть

$$\deg(i-\Theta,\overline{\Omega})\neq 0.$$

Тогда множество интегральных решений $\{x,u\}$ задачи (1)–(3) непусто.

В качестве примера применения этого принципа рассмотрим следующее утверждение.

**Теорема 3.** При указанных выше условиях предположим дополнительно, что

(H1) найдется последовательность функций $\omega_n\in L_+^p(0;a)$, $n=1,2,\ldots$ такая, что:

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|\omega_n\|_2=0;\quad \text{и}\quad \sup_{\|x\|\le n}\|F(t,x)\|\le\omega_n(t)\ \text{для п.в. } t\in(0;a),$$

(H2) выполнены следующие асимптотические условия:

$$\liminf_{\|x\|\to\infty}\frac{\|\mathcal{S}(x)\|}{\|x\|}=\liminf_{\|x\|\to\infty}\frac{\|B\Psi(x)\|}{\|x\|}=0.$$

Тогда множество интегральных решений задачи (1)–(3) непусто.

В случае, когда мультиотображения $F$, $\mathcal{S}$ и $B\Psi$ глобально ограничены, получаем следующий оптимизационный результат.

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие $(\widetilde{Q})$, также существует функция $\omega \in L^p_+(0,a)$ и константы $s > 0$, $b > 0$ такие, что

(1) для любого $\psi \in \mathcal{BC}$ выполнено $\|F(t,\psi)\|_E \le \omega(t)$ для п.в. $t \in (0,a)$;

(2) для любого $x \in \mathcal{C}$ выполнено $\|\mathcal{S}(x)\|_{\mathcal{B}} \le s$;

(3) $\|B\Psi(x)\|_{C([0,a];E)} \le b$.

Тогда существует траектория $x_*$ и соответствующее управление $u_*$ задачи (1)–(3) такие, что

$$\phi(x_*) = \inf\{\phi(x) : x \in \Sigma\},$$

где $\Sigma$ обозначает множество всех траекторий задачи (1)–(3) и $\phi$ заданный полунепрерывный снизу функционал на пространстве $\mathcal{C}$.


**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).


**Литература**


1. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений. Успехи мат. наук. – 1980. – 35(1). – С. 59–126.

2. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Издание 2-е, испр. и доп. – Москва : Книжный дом «Либроком», 2011.

3. *Борсук К.* Теория ретрактов. – Москва : Мир, 1971.

4. *Мышкис А. Д.* Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории. Матем. Сборник. – 1954. – 34. – С. 525–540.

5. *Anh C. T., Ke T. D.* On nonlocal problems for retarded fractional differential equations in Banach spaces. Fixed Point Theory. – 2014. – 15(2). – P. 373–392.

6. *Arutyunov A. V., Obukhovskii V.* Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics, De Gruyter Graduate, De Gruyter, Berlin. 2017.

7. *Bader R., Kryszewski W.* Fixed-point index for compositions of set-valued maps with proximally 1-connected values on arbitrary ANR's. Set-Valued Anal. – 1994. – 2. – P. 459–480.

8. *Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P.* Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces. Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. – 2003. – 23. P. 53–74.

9. *Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P.* On solutions of differential inclusions in homogeneous spaces of functions. J. Math. Anal. Appl. – 2006. – 324 (2). – P. 1310–1323.

10. *Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V.* On noncompact fractional order differential inclusions with generalized boundary condition and impulses in a Banach space. J. Funct. Spaces. 2015, Art. ID 651359, 10 pp.

11. *Ding Z., Kartsatos A. G.* Nonresonance problems for differential inclusions in separable Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – 124. – P. 2357–2365.

12. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Second edition. Topological Fixed Point Theory and Its Applications, vol. 4. Springer, Dordrecht. 2006

13. *Hale J. K., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay. Funkc. Ekvac. – 1978. – Vol. 21. – P. 11–41.

14. *Hito Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infinite Delay. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York : Springer-Verlag, 1991.

15. *Hyman D. H.* On decreasing sequences of compact absolute retracts. Fund Math. – 1969. – 64. – P. 91–97.

16. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 7, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001.

17. *Ke T. D., Obukhovskii V., Wong N.-C., Yao J.-C.* On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays. Appl. Anal. – 2013. – 92 (1). – P. 115–137.

18. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

19. *Mallet-Paret J., Nussbaum R. D.* Asymptotic fixed point theory and the beer barrel theorem. J. Fixed Point Theory Appl. – 2008. – 4. – P. 203–245.

20. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley, Inc., New York, 1993.

21. *Obukhovskii V. V.* Semilinear functional-differential inclusions in a Banach space and controlled parabolic systems. Soviet J. Automat. Inform. Sci. – 1991. – 24. – P. 71–79.

22. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.

23. *Zhang Z., Liu B.* Existence of mild solutions for fractional evolution equations. Fixed Point Theory. – 2014. – 15 (1). – P. 325–334.

24. *Zhou Y.* Fractional Evolution Equations and Inclusions: Analysis and Control. Elsevier Academic Press, London, 2016.

УДК 517.988.5

# РЕЗУЛЬТАТЫ О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ, КОМПАКТНЫМИ И НЕКОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Е. С. Барановский**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Получены новые результаты о разрешимости нелинейных операторных уравнений с монотонными, компактными и некомпактными операторами. На основе этих результатов установлено существование слабых решений в модели неизотермического течения несжимаемой жидкости с учетом вязкой диссипации энергии.
**Ключевые слова:** нелинейные операторные уравнения, монотонные операторы, компактные операторы, неизотермическое течение, вязкая диссипация энергии, слабые решения, теорема существования.

Исследование математических моделей, описывающих сложные физические процессы, часто сводится к решению систем нелинейных уравнений и неравенств, содержащих монотонные и компактные операторы. К настоящему времени разработаны эффективные и разнообразные методы решения таких задач (см., например, [1, 2] и цитируемую там литературу). Однако в приложениях иногда возникают системы уравнений с некомпактными возмущениями монотонных операторов. Это относится, например, к моделям неизотермических течений жидкостей с учетом вязкой диссипации энергии [3, 4]. В рамках доклада будут обсуждаться различные подходы к изучению таких уравнений. В качестве основного результата получена следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathbf{V}$ *— равномерно выпуклое сепарабельное банахово пространство,* $\mathbf{W}$ *— рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Предположим, что выполнены следующие условия.*

(i) *Операторы* $\mathbf{M}_1 : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ *и* $\mathbf{M}_2 : \mathbf{W} \to \mathbf{W}^*$ *являются непрерывными и монотонными и для любых* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ *и* $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}$, $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$, *выполнены следующие соотношения:*

$$\langle \mathbf{M}_1(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} = \mu(\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}}), \qquad \langle \mathbf{M}_2(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle_{\mathbf{W}^* \times \mathbf{W}} > 0,$$

*где* $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *— непрерывная взаимно-однозначная функция.*

(ii) *Операторы* $\mathbf{K}_1 : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to \mathbf{V}^*$ *и* $\mathbf{K}_2 : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to \mathbf{W}^*$ *являются вполне непрерывными, т. е. для любых последовательностей* $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{V}$ *и* $\{\boldsymbol{w}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{W}$ *таких, что* $\boldsymbol{v}_n \rightharpoonup \boldsymbol{v}_0$ *в пространстве* $\mathbf{V}$ *и* $\boldsymbol{w}_n \rightharpoonup \boldsymbol{w}_0$ *в пространстве* $\mathbf{W}$ *при* $n \to \infty$, *имеем, что* $\mathbf{K}_1(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_n) \to \mathbf{K}_1(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{w}_0)$ *в* $\mathbf{V}^*$ *и* $\mathbf{K}_2(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}_n) \to \mathbf{K}_2(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{w}_0)$ *в* $\mathbf{W}^*$ *при* $n \to \infty$.

(iii) *Оператор* $\mathbf{N} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}^*$ *непрерывен и ограничен.*

(iv) *Множество* $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \boldsymbol{\Sigma}_\lambda$ *ограничено в пространстве* $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$, *где* $\boldsymbol{\Sigma}_\lambda$ *обозначает множество пар* $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}$, *удовлетворяющих системе уравнений*

$$\begin{cases} \langle \mathbf{M}_1(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} + \lambda \langle \mathbf{K}_1(\boldsymbol{v}, \mathbf{w}), \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} = 0, \\ \langle \mathbf{M}_2(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle_{\mathbf{W}^* \times \mathbf{W}} + \lambda \langle \mathbf{K}_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} \rangle_{\mathbf{W}^* \times \mathbf{W}} + \lambda \langle \mathbf{N}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle_{\mathbf{W}^* \times \mathbf{W}} = 0. \end{cases}$$

*Тогда следующая система уравнений*

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1(\boldsymbol{v}) + \mathbf{K}_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_2(\boldsymbol{w}) + \mathbf{K}_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \mathbf{N}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

*имеет по крайней мере одно решение в пространстве* $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$.

Приведем один пример использования сформулированной выше теоремы в задачах гидродинамики.

Рассмотрим модель стационарного неизотермического течения несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2,3$, с локально-липишицевой границей $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{d} u_i \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} - \operatorname{div}\left[\nu \,|\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) \,|^{p-2}\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\right] + \nabla\pi = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\theta) \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \sum_{i=1}^{d} u_i \dfrac{\partial \theta}{\partial x_i} - \operatorname{div}\left[k \,|\, \nabla\theta \,|^{q-2}\, \nabla\theta\right] = \nu \,|\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) \,|^{p} + \omega \text{ в } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad k \,|\, \nabla\theta \,|^{q-2} \dfrac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = -\beta\theta \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A}$$

где $\boldsymbol{u}$ — скорость течения; $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$ — тензор скоростей деформаций; $\theta$ — температура; $\boldsymbol{f}$ — внешние массовые силы, действующие на жидкость; $\pi$ — давление, $\omega$ — интенсивность внешних тепловых источников; $\nu > 0$ — коэффициент вязкости; $k > 0$ — коэффициент теплопроводности; $\beta > 0$ — коэффициент теплообмена на стенках сосуда $\Omega$; $p$ и $q$ — заданные параметры; $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$.

С помощью теоремы 1 получен следующий результат.

**Теорема 2.** *Предположим, что:*

- *вектор-функция* $\boldsymbol{f}(\cdot, y) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *измерима для любого* $y \in \mathbb{R}$;
- *вектор-функция* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \cdot), : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ *непрерывна для п. в.* $\boldsymbol{x} \in \Omega$;
- *существует функция* $f_0 \in L_2(\Omega)$ *такая, что для любого* $y \in \mathbb{R}$ *и п. в.* $\boldsymbol{x} \in \Omega$ *справедлива оценка* $|\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, y) \,| \le f_0(\boldsymbol{x})$;
- *выполнено включение* $\omega \in L_2(\Omega)$;
- *выполнены неравенства:* $p \ge 2$ *и* $q > d$.

*Тогда задача (A) имеет по крайней мере одно слабое решение* $(\boldsymbol{u}, \theta) \in W_p^1(\Omega)^d \times W_q^1(\Omega)$.

## Литература


1. *Zeidler E.* Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Part II/B: Nonlinear Monotone Operators. – New York : Springer Science+Business Media, 1990.

2. *Papageorgiou N. S., Rădulescu V. D., Repovš D. D.* Nonlinear Analysis — Theory and Methods. – Cham : Springer, 2019.

3. *Consiglieri L., Rodrigues J. F., Shilkin T.* On the Navier — Stokes equations with energy-dependent nonlocal viscosities // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – Vol. 130, No 4. – P. 4814–4826.

4. *Feireisl E., Novotný A.* Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids, 2nd ed. – Cham : Birkhäuser, 2017.

УДК 51-74

# ПАССИВНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ ТРАНСПОРТА НА ОСНОВЕ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ТОРМОЗНЫХ УЗЛОВ С УЧЕТОМ ТЕРМОСОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕПЛОРАСЕИВАНИЮ

**В. П. Белокуров[1], С. В. Белокуров[2], А. А. Штепа[1], Р. А. Кораблев[1], Э. Н. Бусарин[1]**

*[1]Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова*
*[2]Воронежский государственный университет инженерных технологий*

**Аннотация.** Статья затрагивает тему недооценки тепловых явлений тормозных узлов. Рассматривается тема контактных термических сопротивлений. Рассмотрен теплообмен между двумя «полуограниченными» телами. Приведены дифференциальные уравнения теплопроводности. Установлены граничные условия. Расчетные зависимости позволят определить значения температурных перепадов и температур поверхностей в контактных парах с учетом контактных термических сопротивлений рассеиваемым тепловым потокам в тормозных узлах. Данные уточняющие расчеты применимы для улучшения теплоотвода из зон трения тормозных узлов, следствием чего является повышение пассивной безопасности транспорта.

**Ключевые слова:** пассивная безопасность, показатели, сопротивление, тормозной узел, теплообмен, температура, термическое сопротивление, работоспособность, расчет, тепловой поток.

Энергонасыщенность транспортных средств в настоящее время имеет тенденцию к повышению. Однако, узлы трения, в частности тормоза, их конструктивное исполнение и размеры, остаются, как правило, без изменения. Это приводит к повышенному температурному режиму, что сказывается на снижении гарантированного безотказного срабатывания тормозных узлов. Так, в горных районах на спусках из-за этого приходиться использовать низкие передачи коробки переменных передач, так как работоспособность тормозов из-за нагрева снижается. Таким образом, недооценка тепловых явлений тормозных узлов может привести к нежелаемым результатам.

Имеющиеся методики конструктивного расчета, учитывающие температурных режим, тормозных узлов справедливы для случаев непродолжительного времени взаимодействия тормозных узлов. Эксплуатационные условия тормозных узлов транспортных машин в настоящее время испытывают порой длительные и частные включения. В связи с этим для принятия надежного конструктивного решения по изготовлению тормозов необходимо проводить более точный тепловой расчет, который буде определяться не только нагрузочно-скоростным режимам транспорта, но и учетом термических сопротивлений на пути теплорассеивания теплового потока и его условиями. Все это будет характеризовать пассивную безопасность транспортного средства в целом.

В тормозных узлах, в местах соединения различных поверхностей, через которые проходит рассеиваемый тепловой поток, на его пути возникают контактные термические сопротивления (КТС). Контактные термические сопротивления определяются местами фактического контакта соприкасающихся поверхностей твердых тел, по отношению к которым и происходит перераспределение линий теплового потока — конвергенция теплового потока. Величина КТС может быть значительной и существенно влиять в целом на температурный режим теплонапряженных объектов, к которым относятся и тормозные узлы.

Рассмотрим теплообмен между двумя «полуограниченными» телами, начальная температура которых $t_1^0$ и $t_2^0$. В процессе теплообмена между данными телами в зоне контакта формируется температурный перепад, величина которого будет определяться КТС.

Дифференциальные уравнения теплопроводности в данном случае будут иметь вид:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \alpha_1 \times \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}, \quad x < 0 \text{ и } \tau > 0;$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = \alpha_2 \times \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}, \quad x > 0 \text{ и } \tau > 0,$$

где $x$ — величина, характеризующая координату пути теплового потока в контактной паре, м.; $\alpha_{1,2}$ — коэффициенты температуропроводности материалов контактирующих пар, м²/с; $\tau$ — время, с.

Граничные условия для данной задачи принимаем в виде

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x}\bigg|_{x=0};$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{R_K} \times \left(t_2(0,\tau) - t_1(0,\tau)\right), \quad \tau > 0;$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\partial t_2(x,\tau)}{\partial x} = \lim_{n \to -\infty} \frac{\partial t_1(x,\tau)}{\partial x} = 0,$$

где $R_K$ — термическое сопротивление контакта, м2•град/Вт; $t_2(0,\tau)$ температуры на границах контактирующих тел, °С; $\lambda_{1,2}$ — коэффициенты теплопроводности материалов контактирующей пары, Вт/м•град.

Начальные условия принимаем в форме

$$t_1(x,0) = t_1^0; \quad t_2(x,0) = t_2^0.$$

Задачу будем решать, применяя интегральное преобразование Лапласа. Введем обозначение

$$L\left[t_1(x,\tau)\right] = \int_0^\infty t_1(x,\tau) \times e^{-p\tau} d\tau = T_1(x,P);$$

$$L\left[t_2(x,\tau)\right] = \int_0^\infty t_2(x,\tau) \times e^{-p\tau} d\tau = T_2(x,P).$$

Тогда уравнение теплопроводности, начальные и граничные условия примут вид

$$PT_1(x,P) - t_1^0 = \alpha_1 \times T_{1x}^{''}(x,P) \tag{1}$$

или

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - P \times \frac{T_1}{\alpha_1} = -\frac{t_1^0}{\alpha_1}, \quad x < 0;$$

$$PT_2(x,P) - t_2^0 = \alpha_2 \times T_{2x}^{''}(x,P) \tag{2}$$

или

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} - P \times \frac{T_2}{\alpha_2} = -\frac{t_2^0}{\alpha_2}, \quad x > 0;$$

$$-\lambda_1 \times T_{1x}^{'}(0,P) = \lambda_2 \times T_{2x}^{'}(0,P). \tag{3}$$

$$-\lambda_1 \times T_{1x}^{'}(0,P) = \frac{\left(T_2(0,P) - T_1(0,P)\right)}{R_K}. \tag{4}$$

$$\lim_{n \to -\infty} T_{1x}^{'}(x,P) = 0. \tag{5}$$

$$\lim_{n \to +\infty} T_{2x}^{'}(x,P) = 0. \tag{6}$$

Общее решение (1) имеет вид

$$T_1(x,P)=c_1(P)\times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^x}}}+c_2(P)\times e^{\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^x}}}+\frac{t_1^0}{P},\quad x<0.$$

В силу условия (6) $c_1(P)\equiv 0$, получаем

$$T_1(x,P)=c_2(P)\times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^x}\times|x|}}+\frac{t_1^0}{P},\quad x<0.$$

Общее решение (2)

$$T_2(x,P)=c_3(P)\times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_2^x}}}+c_4(P)\times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_2^x}}}+\frac{t_2^0}{P},\quad x>0.$$

В силу условия (5) $c_4(P)\equiv 0$, получаем

$$T_2(x,P)=c_3(P)\times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_2^x}}}+\frac{t_2^0}{P},\quad x>0.$$

Из (3) следует

$$PT_1(x,P)-t_1^0=\alpha_1\times T_{1x}''(x,P)$$

или

$$\frac{d^2T_1}{dx^2}-P\times\frac{T_1}{\alpha_1}=-\frac{t_1^0}{\alpha_1},\quad x<0;$$

$$\lambda_1-c_2(P)\sqrt{\frac{P}{\alpha_1}}=-\lambda_2-c_3(P)\sqrt{\frac{P}{\alpha_2}};$$

или

$$c_2(P)=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\times c_3(P).$$

Согласно условию (4)

$$\lambda_1c_2(P)\sqrt{\frac{P}{\alpha_1}}=\frac{1}{R_K}\left(c_3(P)+\frac{t_2^0}{P}\right)-c_2(P)-\frac{t_1^0}{P}$$

или

$$-\lambda_1\sqrt{\frac{P}{\alpha_1}}\times\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\times\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\times c_3(P)=\frac{1}{R_K}\left(c_3(P)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\times\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\times c_3(P)-\frac{t_2^0-t_1^0}{P\times R_K}$$

или

$$c_3(P)\left[\frac{1}{R_K}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\times\frac{1}{R_K}+\sqrt{\frac{P}{\alpha_2}}\times\lambda_2\right]=\frac{t_1^0-t_2^0}{P\times R_K}.$$

Следовательно

$$c_3(P)=\frac{t_1^0-t_2^0}{P\times R_K\left[\frac{1}{R_K}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\times\frac{1}{R_K}+\sqrt{\frac{P}{\alpha_2}}\times\lambda_2\right]}=\ldots$$

$$=\frac{t_1^0-t_2^0}{P\times R_K\,\frac{2}{\sqrt{\alpha_2}}\left[\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}+\sqrt{P}\right]}\times\frac{\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}}{P\left[\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}+\sqrt{P}\right]}=\ldots$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha_2}\times\lambda_1\left(t_1^0-t_2^0\right)}{\sqrt{\alpha_2}\times\lambda_1+\sqrt{\alpha_1}\times\lambda_2}\times\frac{\dfrac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}}{P\left[\dfrac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}+\sqrt{P}\right]};\qquad(7)$$

$$c_2\left(P\right)=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\times c_3\left(P\right)=\frac{\lambda_2\sqrt{\alpha_1}\left(t_2^0-t_1^0\right)}{\sqrt{\alpha_2}\times\lambda_1+\sqrt{\alpha_1}\times\lambda_2}\times\frac{\dfrac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}}{P\left[\dfrac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}+\sqrt{P}\right]}.\qquad(8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$T_1(x,P)=\frac{\lambda_2\sqrt{\alpha_1}(t_2^0-t_1^0)}{\sqrt{\alpha_2}\times\lambda_1+\sqrt{\alpha_1}\times\lambda_2}\times\frac{\dfrac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}}{P\left[\dfrac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}+\sqrt{P}\right]}\times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^x}}\times|x|}+\frac{t_1^0}{P},\ \ x<0;$$

$$T_2(x,P)=\frac{\lambda_1\sqrt{\alpha_2}(t_1^0-t_2^0)}{\sqrt{\alpha_2}\times\lambda_1+\sqrt{\alpha_1}\times\lambda_2}\times\frac{\dfrac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}}{P\left[\dfrac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\dfrac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}+\sqrt{P}\right]}\times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_2^x}}\times|x|}+\frac{t_2^0}{P},\ \ x>0.$$

Согласно таблице изображения [3] $\frac{1}{P}\leftarrow\!\!\!\div\!\!\!-1$ и

$$\frac{b\times e^{-K\sqrt{S}}}{s\left(b+\sqrt{S}\right)}\left(K\geq 0\right)\leftarrow erfc\frac{K}{2\sqrt{\tau}}-e^{bK}\times e^{b^2\tau}\times erfc\left(b\sqrt{\tau}+\frac{K}{2\sqrt{\tau}}\right);$$

$$erfcU=1-erfcU=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^U e^{-U^2}\times dU=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_U^\infty e^{-U^2}\times dU.$$

Введем обозначения

$$K=\frac{|x|}{\sqrt{\alpha_{1,2}}};\ \ b=\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}.$$

Для $T_1\left(x,P\right)$ и $T_2\left(x,P\right)$ находим окончательные решения в виде

$$t_1\left(x,\tau\right)=L^{1-}\left[T_1\left(x,P\right)\right]=\ldots$$

$$=t_1^0+\frac{\lambda_2\sqrt{\alpha_1}\left(t_2^0-t_1^0\right)}{\sqrt{\alpha_1}\times\lambda_2+\sqrt{\alpha_2}\times\lambda_1}\times\left\{erfc\frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_2\tau}}-exp\left[\frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_1}}\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}\right)\right]\times exp\left[\tau\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\ldots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}\right)^2\right]\times erfc\left[\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}\right)\sqrt{\tau}+\frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_1\tau}}\right]\right\};$$

$x<0,\ \ t>0.$

$$t_2\left(x,\tau\right)=L^{1-}\left[T_2\left(x,P\right)\right]=\ldots$$

$$=t_1^0+\frac{\lambda_1\sqrt{\alpha_2}\left(t_2^0-t_1^0\right)}{\sqrt{\alpha_1}\times\lambda_2+\sqrt{\alpha_2}\times\lambda_1}\times\left\{erfc\frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_2\tau}}-exp\left[\frac{|x|}{\sqrt{\alpha_1}}\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}\right)\right]\times exp\left[\tau\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\ldots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}\right)^2\right]\times erfc\left[\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2\times R_K}+\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1\times R_K}\right)\sqrt{\tau}+\frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_2\tau}}\right]\right\};$$

$x>0,\ t>0.$

Использование в расчетной практике зависимостей (9) и (10) позволяет определять значения температурных перепадов и температур поверхностей в контактных парах с учетом контактных термических сопротивлений рассеиваемым тепловым потокам в тормозных узлах. Это уточняет тепловые расчеты тормозных узлов транспортных машин, что может быть учтено при улучшении теплоотвода из зон трения. Уменьшение термических сопротивлений тепловым потокам, возникающим в зоне трения тормозных узлов в свою очередь зависит от теплофизических свойств, формы и размеров трущихся пар, а также от конструкции всего фрикционного узла.

Учет в тепловых расчетах тормозных узлов транспортных машин термических сопротивлений тепловому рассеиваемому потоку, в конечном счете, улучшит эксплуатационные показатели тормозных узлов, что непременно скажется на пассивной безопасности транспортных машин в целом.

**Литература**


1. *Григорьев, И. М.* Экспериментальные исследования влияния технического состояния тормозных механизмов на характер протекания тормозных сил / И. М. Григорьев, В. Ю. Ткачев, А. А. Смолин // Вестник Иркутского государственного технического университета. –2008. – № 2 (34). – С. 28–30.

2. *Дыгало, В. Г.* Комплексная оценка влияния нестабильности характеристик элементов тормозного механизма колеса автомобиля, возникающих в процессе эксплуатации / В. Г. Дыгало, В. В. Котов, Г. В. Бойко, Л. В. Дыгало, А. А. Ревин // Известия Волгоградского государственного технического университета. Серия: Наземные транспортные системы. – 2015. – Т. 12, № 6 (166). – С. 16–19.

3. *Лобкова, Н. А.* Температурное поле и тепловые напряжения в рулонированном цилиндре при неидеальном контакте витков / Н. А. Лобкова // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1980. – № 20. – С. 19–22.

4. *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

5. *Лыков, А. В.* Тепломассообмен / А. В. Лыков // Справочник. – М. : Энергия, 1972. – 560 с.

6. *Макаров, А. М.* Температурные поля в составных конструкциях при переменном контакте сопрягаемых элементов / А. М. Макаров, В.Р. Романовский // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1979. – № 5. – С. 156–162.

7. *Озябкин, А. Л.* Физико-математическое моделирование фрикционного контакта диско-колодочного тормозного механизма автомобиля / А. Л. Озябкин, П. В. Харламов, А. П. Павлов // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2009. – № 1 (33). – С. 15–22.

8. *Потянихин, Д. А.* К выбору физически обоснованных решений автомодельных краевых задач нелинейной динамической теории упругости / Д. А. Потянихин, О. В. Дудко // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4-5. – С. 2440–2442.

9. *Радаев, Ю. Н.* Нелинейная теория упругости как физическая теория поля: учебное пособие / Ю. Н. Радаев, С. А. Лычев. – Самара : Изд-во «Универс-групп», 2005. – 60 с.

10. *Турсунов, А. А.* Оценка приспособления тормозных систем автомобилей к горным условиям эксплуатации по темпу охлаждения тормозных механизмов / А. А. Турсунов, Б. Ж. Мажитов // Известия Санкт-Петербургского государственного аграрного университета. – 2010. – № 20. – С. 316–320.

11. *Boley, B. A.* Survey of recent developments in the fields of heat conduction in solids and thermo elasticity. Nuc. Eng. Des. – 1972. – 18. – P. 377–399.

УДК 517.95, 624.07

# ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ С ДИНАМИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**А. В. Богатов**

*Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева*

**Аннотация.** В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, проведено доказательство существования и единственности решения задачи.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, единственность решения, разрешимость задачи.

## Введение

Строительные конструкции и сооружения в значительной степени подвержены как природным, так и техногенным динамическим воздействиям, к которым можно отнести ветровые и сейсмические воздействия, нагрузки от оборудования, движущегося транспорта, пешеходов.

Энергия колебаний инженерных систем постепенно рассеивается за счет внутреннего трения в материале и внешнего сопротивления, что, безусловно, влияет на их колебательный процесс, а снижение интенсивности внешних динамических воздействий приводит к затуханию колебаний. Проводятся динамические расчеты конструкций и сооружений, выявляются их динамические характеристики (частота, форма собственных колебаний, определение напряженно-деформированного состояния, оценка прочности и долговечности при воздействии нагрузок). Также, стоит отметить, что необходимо учитывать влияние эффекта внутреннего демпфирования, которое гасит колебания за счет трения в материале и тем самым влияет на общий колебательный процесс. И если уже известно, как учитывать эффекты внешнего трения (внешнее гашение колебаний), то задача учета внутреннего трения до сих пор не имеет однозначного решения. Переходя к математическим терминам, мы получаем задачу с нелокальными условиями, которая описывает модель внутреннего трения (нелокального демпфирования материала).

В современной теории дифференциальных уравнений задачи с нелокальными условиями представляют собой довольно развивающееся направление. Исследования задач с нелокальными условиями показали, что классические подходы к их решению неприменимы, то есть встает задача о разработке принципиально-новых методов решения задач.

Мы дадим определение обобщенного решения изучаемой задачи, докажем теорему о единственности определенного нами решения.

## 1. Постановка задачи

В области $Q_T = (0,l)\times(0,T)$ рассмотрим уравнение

$$\alpha u \equiv u_{tt} - (au_x)_x + bu_t + cu = f(x,t), \tag{1}$$

и поставим задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)+\gamma u_t(l,t)=0. \tag{3}$$

Как известно [1, 3–8], решение задачи с динамическими условиями вида (3) вызывает затруднения даже для уравнения колебаний струны. Мы же рассматриваем уравнение, коэффициенты которого суть произвольные функции аргументов $x, t,$ что делает бессмысленной попытку получить решение задачи методом разделения переменных или воспользоваться общим решением уравнения. Однако удалось доказать однозначную разрешимость поставленной задачи в пространстве Соболева, что и демонстрируется в статье.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) и его правая часть удовлетворяют следующим условиям:

$$a, a_t, a_{tt}, b, b_t, b_{tt}, c \in C(\overline{Q}_T),\ \ f \in L_2(Q_T),\ \ a(x,t) \ge a_0 > 0.$$

Введем определение обобщенного решения. Для этого, следуя [2], рассмотрим равенство

$$\int_0^T\int_0^l vLu\,dxdt = \int_0^T\int_0^l fv\,dxdt,$$

где $v(x,t)$ – произвольная гладкая функция, такая, что $v(T)=0,$ в предположении, что $u(x,t)$ решение поставленной задачи.

Интегрируем левую часть по частям:

$$\int_0^T\int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + b u_t v + cuv)\,dxdt + \gamma\int_0^T a(l,t)v(l,t)u_t(l,t)\,dt = \int_0^T\int_0^l fv\,dxdt. \tag{4}$$

Заметим, что (4) выполняется и при меньших требованиях на функции $u(x,t),\ v(x,t)$ а именно, все входящие в него интегралы существуют, если $u \in W(Q_T), v \in \hat{W}(Q_T)$, где обозначено

$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T),\ \ u_t(l,t) \in L_2(0,T)\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_T),\ \ v(x,T) = 0\}.$$

**Определение.** Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u \in W(Q_T),$ если $u(x,0)=0$ и для любого $v \in \hat{W}(Q_T)$ справедливо (4).

### 2. Решение задачи

**Теорема.** Если

$$a, a_t, a_{tt}, b, b_t, b_{tt}, c \in C(\overline{Q}_T),\ \ f \in L_2(Q_T),\ \ a(x,t) \ge a_0 > 0,$$

то существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).

#### *2.1. Единственность решения*

Предположим, что существует два обобщенных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1). Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + b u_t v + cuv)\,dxdt + \gamma\int_0^T a(l,t)v(l,t)u_t(l,t)\,dt = 0. \tag{5}$$

Выберем в (5)

$$\begin{cases} \int_T^t u(x,\eta)\,d\eta, & x \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T. \end{cases}$$

Заметим, что $v_t(x,t) = u(x,t).$ Интегрируя по частям в левой части (5), получим

$$\int_0^T\int_0^l -u_t v_t\,dxdt = -\int_0^T\int_0^l u_t u\,dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,\tau)\,dx;$$

$$\int_0^T\int_0^l au_x v_x\,dxdt = -\int_0^T\int_0^l av_{xt}v_x\,dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l a_t v_x^2\,dxdt - \frac{1}{2}\int_0^l av_x^2(x,0)\,dx;$$

$$\int_0^T\int_0^l bu_t v\,dxdt = \int_0^T\int_0^l bu^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l b_{tt}v^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l b_t(x,0)v^2(x,0)\,dx;$$

$$\int_0^T a(l,t)v(l,t)u_t(l,t)\,dx = -\int_0^\tau a(l,t)u^2(l,t)\,dt - \int_0^\tau a_t v_t(l,t)v(l,t)\,dt =$$

$$= \int_0^\tau a(l,t)u^2(l,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau a_{tt}v^2(l,t)dt + \frac{1}{2}a_t(l,0)v^2(l,0).$$

Подставим полученные результаты в (5), получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + av_x^2(x,0)]\,dx + \int_0^\tau a(l,t)u^2(l,t)dt =$$
$$= 2\int_0^\tau\int_0^l cuv\,dxdt - \int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2\,dxdt - 2\int_0^\tau\int_0^l bu^2\,dxdt + \int_0^\tau\int_0^l b_{tt}v^2\,dxdt + \tag{6}$$
$$+\int_0^l b_t(x,0)v^2(x,0)\,dx + \int_0^\tau a_{tt}(l,t)v^2(l,t)dt + a_t(l,0)v^2(l,0).$$

Так как $a(x,t) > 0$ всюду в $\overline{Q}_T$, то из (6) следует неравенство

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]\,dx + \int_0^\tau a(l,t)u^2(l,t)dt \le 2\left|\int_0^\tau\int_0^l cuv\,dxdt\right| +$$
$$+\left|\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2\,dxdt\right| + 2\left|\int_0^\tau\int_0^l bu^2\,dxdt\right| + \left|\int_0^\tau\int_0^l b_{tt}v^2\,dxdt\right| + \tag{7}$$
$$+\left|\int_0^l b_t(x,0)v^2(x,0)\,dx\right| + \left|\int_0^\tau a_{tt}(l,t)v^2(l,t)\,dt\right| + \left|a_t(l,0)v^2(l,0)\right|.$$

Оценим правую часть (7). Если $c, a, a_t, a_t t, b, b_t, b_t t \in C(\overline{Q}_T)$, то существуют числа $a_1, c_0, b_0$ такие, что $|a, a_t, a_t t| \le a_1$, $|b, b_t, b_t t| \le b_0$, $|c| \le c_0$, тогда

$$2\left|\int_0^\tau\int_0^l cuv\,dxdt\right| \le c_0\int_0^\tau\int_0^l (u^2 + v^2)\,dxdt;$$

$$\left|\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2\,dxdt\right| \le a_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2\,dxdt.$$

Учитывая, что $v(x,0) = -\int_0^\tau u(x,t)\,dt$ и используя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$v^2(x,0) = \left(\int_0^\tau u\,dt\right)^2 \le \tau\int_0^\tau u^2 dt.$$

Применим неравенство (3.9) из [1]:

$$v^2(l,t) \le 2l\int_0^l v_x^2(x,t)\,dx + \frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)\,dx.$$

Получим

$$\left|\int_0^\tau a_{tt}(l,t)v^2(l,t)\,dt\right| \le 2a_1 l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2\,dxdt + \frac{2a_1}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)\,dxdt.$$

Для оценки слагаемых, содержащих значение $v(l,t)$ применим неравенство Коши «с $\varepsilon$» [2]:

$$\left|a_1(l,0)v^2(l,0)\right| \le a_1\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)\,dx + a_1c(\varepsilon)\int +0^l v^2(x,0)\,dx \le$$

$$\le a_1\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)\,dx + a_1c(\varepsilon)\tau\int_0^\tau\int_0^l u^2\,dxdt.$$

Выберем $\varepsilon$ так, чтобы $\mu = a_0 - a_1\varepsilon > 0$ и перенесем интеграл из левой части в правую:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + \mu v_x^2(x,0)]\,dx \le M\int_0^\tau\int_0^l (u^2 + v_x^2 + v^2)\,dxdt, \tag{8}$$

где $M = \max\{a_1c(\varepsilon), a_1c(\varepsilon)\tau\}$.

Проведем ряд вычислений. Поскольку

$$v^2(x,t) = \left(\int_T^t n d\eta\right)^2 \le (\tau - t)\int_0^\tau u^2\,dt,$$

то в правой части (8)

$$M\int_0^\tau\int_0^l (u^2 + v_x^2 + v^2)\,dxdt \le M\int_0^\tau\int_0^l \left(u^2 + v_x^2 + \tau\left(\int_0^\tau u^2\right)\right)dxdt \le M_1\int_0^\tau\int_0^l (u^2 + v_x^2)\,dxdt,$$

где $M_1 = M + \tau^2$.

Так как под знаком интеграла в левой части есть слагаемое $v_x(x,0)$, а в правой нет, то введем функции

$$w(x,t) = \int_0^\tau u_x d\eta,$$

откуда

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau) \;\Rightarrow\; v_x(x,0) = -w(x,\tau).$$

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + \mu w^2(x,\tau)]\,dx \le M_1\int_0^\tau\int_0^l u^2\,dxdt + 2M_1\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,t)\,dxdt + 2M_1\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,\tau)\,dxdt.$$

Заметим, что

$$\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,\tau)\,dxdt = \tau\int_0^l w^2(x,\tau)\,dx.$$

Выберем в силу произвольности $\tau$ так, чтобы $\mu - 2M_1\tau > 0$. Пусть для определенности $\mu - 2M_1\tau \ge \dfrac{\mu}{2}$, тогда для $\tau \in [0, M/4M_1]$

$$m_0\int_0^l [u^2(x,\tau)]\,dx \le 2M_1\int_0^\tau\int_0^l [u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]\,dxdt, \tag{9}$$

где $m_0 = \min\left\{1, \dfrac{M}{2}\right\}$.

Применение к последнему равенству леммы Гронуолла приводит к

$$u(x,\tau) = 0, \quad \tau \in \left[0, \frac{M}{4M_1}\right].$$

Продолжая данную процедуру для $\tau \in \left[\dfrac{M}{4M_1}; \dfrac{M}{2M_1}\right]$ по алгоритму из [2], получаем снова нули, из чего следует единственность обобщенного решения поставленной задачи.

## *2.2. Существование решения*

Пусть функции $w_k(x) \in C^2(0,l)$ линейно независимы и образуют полную систему в $W_2^1(0,l)$. Будем искать решение задачи (1) в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x). \tag{10}$$

из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + b u_t^m w_j + c u^m w_j)\, dx + \gamma [a(l,t) u_t^m(l,t) w_j(l)] = \int_0^l f w_j\, dx. \tag{11}$$

Подставив в (11) представление $u^m(x,t)$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[ c_k''(t) \int_0^l w_k w_j + c_k(t) \int_0^l a w_{kx} w_j + b w_t w_j + c w_k w_j\, dx + \gamma a w_{kt} w_j \right] = \int_0^l f w_j\, dx,$$

присоединив к которой начальные условия

$$c_k(0) = 0, \qquad c_k'(0) = 0,$$

получим задачу Коши.

Умножим каждое соотношение (11) на соответствующие $c_j'$, просуммируем от 1 до $m$, затем проинтегрируем полученные равенства от 0 до $\tau$, получим

$$\int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b(u_t^m)^2 + c u^m u_t^m)\, dx dt + \gamma \int_0^\tau a(u_t^m(l,t))^2\, dt = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m\, dx dt. \tag{13}$$

Интегрируем по частям, учитывая, что $u^m(x,0) = u_t^m(x,0) = 0$:

$$\int_0^\tau \int_0^l u_{tt}^m u_t^m\, dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^m(x,\tau))^2\, dx;$$

$$\int_0^\tau \int_0^l a u_x^m u_{xt}^m\, dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a u_{xt}^m u_x^m\, dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m(x,\tau))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\tau \int_0^l a u_x^m u_{xt}^m\, dx dt = -\frac{1}{2} a_t (u_x^m)^2\, dx dt + \frac{1}{2} a(u_x^m(x,\tau))^2\, dx.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2]\, dx + \int_0^\tau \int_0^l b(u_t^m)^2\, dx dt + \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m\, dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2\, dx dt + \gamma \int_0^\tau a(u_t^m(l,t))^2\, dt = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m\, dx dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Оставим в левой части только положительные члены:

$$\begin{aligned} &\int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2]\, dx + 2\gamma \int_0^\tau a(u_t^m(l,t))^2\, dt = \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2\, dx dt - \\ &- 2\int_0^\tau \int_0^l b(u_t^m)^2\, dx dt - 2\int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m\, dx dt + 2\int_0^\tau \int_0^l f u_t^m\, dx dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) вытекает неравенство:

$$\int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2]\,dx + 2\gamma\int_0^\tau a(u_t^m(l,t))^2\,dt \le \int_0^\tau\int_0^l |a_t|(u_x^m)^2\,dxdt -$$
$$-2\int_0^\tau\int_0^l |b|(u_t^m)^2\,dxdt - 2\left|\int_0^\tau\int_0^l cu^m u_t^m\,dxdt\right| + 2\left|\int_0^\tau\int_0^l fu_t^m\,dxdt\right|. \tag{16}$$

Пусть $a, a_t, b, c \in C\overline{Q}_t$ следственно, существуют числа $a_1, a_2, b_1, c_0$ положительные и такие, что

$$|a| \le a_1, \quad |b| \le b_1, \quad |c| \le c_0.$$

Оценим правую часть (16), используя неравенство Коши:

$$2\left|\int_0^\tau\int_0^l cu^m u_t^m\,dxdt\right| \le c_0\int_0^\tau\int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2]\,dxdt,$$
$$2\left|\int_0^\tau\int_0^l fu_t^m\,dxdt\right| \le \int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2\,dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f^2\,dxdt.$$

Таким образом, из (16):

$$\int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2]\,dx + 2\gamma\int_0^\tau a(u_t^m(l,t))^2\,dx \le$$
$$\le \int_0^\tau\int_0^l [a_2(u_x^m)^2 + (2b_1 + c_0 + 1)(u_t^m)^2 + c_0(u^m)^2\,dxdt] + \int_0^\tau\int_0^l f^2\,dxdt. \tag{17}$$

Учтем, что

$$u^m(x,\tau) = \int_0^\tau u_t^m(x,t)\,dt,$$

откуда следует неравенство

$$\int_0^l (u^m(x,\tau))^2\,dx \le \tau\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2\,dxdt.$$

Прибавим это неравенство к (17):

$$\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2]\,dx + 2\gamma\int_0^\tau a(u_t^m(l,t))^2\,dt \le$$
$$\le \int_0^\tau\int_0^l [a_2(u_x^m)^2 + (2b_1 + c_0 + 1 + \tau)(u_t^m)^2]\,dxdt + 2\int_0^\tau\int_0^l f^2\,dxdt,$$

где $m_0 = \min\{1, a_0\}$, $M = \max\{a_2, 2b_1 + c_0 + 1 + \tau\}$, следственно,

$$m_0\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2]\,dx + 2\gamma a_0\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2\,dt \le$$
$$\le M\int_0^\tau\int_0^l [(u_x^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u^m)^2]\,dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f^2\,dxdt. \tag{18}$$

Применим лемму Гронуолла:

$$\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2]\,dx \le e^{\frac{M_\tau}{m_0}}\frac{1}{m_0}\int_0^\tau\int_0^l f^2\,dxdt.$$

Интегрируя в промежутке $\tau \in [0,T]$, получаем

$$\left\|u^m\right\|^2_{W_2'(Q_T)} \le C\left\|f\right\|^2_{L_2(Q_T)},$$

где $C = \frac{1}{M}\left(e^{\frac{M_\tau}{m_0}} - 1\right)$.

Из полученного неравенства следует оценка нормы

$$\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2\,dt \le N\left\|f\right\|^2_{L_2(Q_T)}$$

$$\forall\,\tau \in [0,T] \Rightarrow \left\|u_t^m(l,t)\right\|^2_{L_2(Q_T)},\quad \Gamma = \{((x,t): x = l, t) \in [0,T]\}.$$

Введем обозначения

$$W(Q_T) = \{u(x,t): u \in W_2'(Q_T),\ u_t \in L_2(\Gamma_l)\},$$

$$\overline{W}(Q_T) = \{v(x,t): v \in (Q_T),\ v(x,T) = 0\}.$$

Таким образом получаем, что $\{u^m\}$ ограничена в $W(Q_T)$ и можно выделить слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ подпоследовательность.

Покажем, что $u(x,t)$ – обобщенное решение задачи.

Начальное условие будет выполнено в силу слабой сходимости в $W(Q_T)u^m(x,t)$ к $u(x,t)$ и того, что $u^m(x,0) = 0$, $u_t^m(x,0) = 0$ в $L_2(0,l)$. Покажем, что этот предел удовлетворяет (4). Умножим (11) на функцию $h_j(t) \in C^1(Q_T)$ такую, что $h_j(T) = 0$, просуммируем по $i$ и проинтегрируем по $t$ от 0 до $T$.

Обозначим

$$\eta(x,t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) w_j(x),$$

$$\int_0^\tau\int_0^l (u_{tt}^m\eta + au_x^m\eta_t + bu_t^m\eta + cu^m\eta)\,dxdt + \gamma\int_0^T a(l,t)u_t^m\eta\,dt = \int_0^\tau\int_0^l f(x,t)\eta(x,t)\,dxdt.$$

Проинтегрируем по частям, учитывая, что $\eta(x,t) = 0$:

$$\begin{gathered}\int_0^\tau\int_0^l (-u_t^m\eta_t + au_x^m\eta_t + bu_t^m\eta + cu^m\eta)\,dxdt + \gamma\int_0^T au_t^m\eta\,dt - \\ -\int_0^l u_t^m(x,0)\eta(x,0)\,dx = \int_0^\tau\int_0^l f(x,t)\eta(x,t)\,dxdt.\end{gathered} \tag{19}$$

Тождество (19) справедливо для любой функции $\eta(x,t)$. Обозначим совокупность таких функций через $\theta_m$. В (19) перейдем к пределу фиксированной функции $\eta(x,t) \in \theta_m$. Это приведет к начальным условиям для предельной функции $u(x,t)$. Следовательно, $u(x,t)$ – обобщенное решение поставленной задачи.

## Заключение

Таким образом, нами была поставлена задача для гиперболического уравнения с динамическим условием $u_x(l,t) + \gamma u_t(l,t) = 0$, получено обобщенное решение поставленной задачи. Проведены необходимые преобразования, получены оценки для доказательства единственности и существования решения уравнения.

**Литература**


1. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / Л. С. Пулькина. – Самара : Издательство Самарский университет, 2012.
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973.
3. *Рогожников А. М.* О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний / А.М. Рогожников. – Издательство Макс-пресс. – 2013.
4. *Бейлин А. Б.* Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями /А. Б. Бейлин, Л. С. Пулькина. – Издательство Самарский университет. – 2014.
5. *Doronin G. G.* A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // G. G. Doronin, N. A. Lar'kin, A. J. Souza // EJDE. – 1998.
6. *Louw T.* Forced wawe motion with internal and boundary damping / T. Louw, S. Whitney, A. Subramanian, H. Viljoen // Journal of applied physics. – 2012.
7. *Pulkina L. S.* A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation / L. S. Pulkina / Russian Mathematics. – 2016.
8. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский / Издательство «Наука». – 2004.

УДК 517.984, 517.95

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

**М. Ш. Бурлуцкая**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается смешанная задача для неоднородного волнового уравнения на геометрическом графе, состоящем из двух ребер-колец. Использован новый подход, предложенный А. П. Хромовым, который опирается на идеи по ускорению сходимости рядов, исследование резольвенты соответствующего оператора и специальное преобразование формального ряда, и позволяет представить решение в виде нового быстросходящегося ряда с экспоненциальной скоростью сходимости. Доказано существование классического решения задачи.
**Ключевые слова:** смешанная задача, геометрический граф, волновое уравнение, классическое решение.

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения на простейшем геометрическом графе, состоящем из двух ребер-колец, касающихся в одной точке (узле графа). При параметризации каждого ребра графа отрезком $[0,1]$, задача будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - q_j(x)u_j(x,t) + f_j(x,t), \tag{1}$$

$$(j=1,2), \qquad (x,t)\in Q=[0,1]\times\in[0,+\infty),$$

$$u_1(0,t)=u_1(1,t)=u_2(0,t)=u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t)-u'_{1x}(1,t)+u'_{2x}(0,t)-u'_{2x}(1,t)=0, \tag{3}$$

$$u_1(x,0)=\varphi_1(x), \quad u_2(x,0)=\varphi_2(x), \quad u'_{1t}(x,0)=\psi_1(x), \quad u'_{2t}(x,0)=\psi_1(x) \tag{4}$$

(условия (2), (3) порождены структурой графа).

С применением резольвентного подхода при $f_j(x,t)\equiv 0$, $\psi_j(x)\equiv 0$ в [1] получено классическое решение смешанной задачи на таком графе в случае непрерывных $q_j(x)$, в [2] – в случае суммируемого потенциала. При этом метод Фурье применялся с использованием идей по ускорению сходимости рядов, идущих от А. Н. Крылова, и позволяющих получать классическое решение при минимальных требованиях на начальные функции.

Здесь будет использован иной подход, предложенный А. П. Хромовым в [3–6], снова опирающийся на идеи по ускорению сходимости рядов, но подразумевающий иное преобразование формального ряда. Такой подход позволил получить необходимые и достаточные условия существования классических и обобщенных решений ряда задач в случаях суммируемых потенциалов и начальных функций, и далее с использованием в [5–6] расходящихся рядов расширить границы применения метода Фурье. В данной работе рассмотрен случай $q_j(x)\in C[0,1]$ (случай $q_j(x)\in L[0,1]$ исследуется с привлечением расходящихся рядов, используя технику работ [5–6]).

Будем предполагать, что все функции, входящие в (1)–(4) комплекснозначные, и выполнены требования:

$$q_j(x)\in C[0,1], \quad \varphi_j(x)\in C^2[0,1], \quad \psi_j(x)\in C^1[0,1], \quad f_j(x,t)\in C(Q)$$

$$\varphi'_1(0)-\varphi'_1(1)+\varphi'_2(0)-\varphi'_2(1)=0, \tag{5}$$

$$\varphi''_1(0)=\varphi''_1(1)=\varphi''_2(0)=\varphi''_2(1).$$

(также как в [1] для простоты ограничимся случаем $q_1(0)=q_2(0)=q_1(1)=q_2(1)$, и кроме того, $f_1(0,0)=f_1(1,0)=f_2(0,0)=f_1(1,0)$). В дальнейшем будем использовать обозначения

$\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x))^T$, $\psi(x)=(\psi_1(x),\psi_2(x))^T$ и $f(x,t)=(f_1(x,t),f_2(x,t))^T$ ($T$ – знак транспонирования), $Q(x)=\mathrm{diag}(q_1(x),q_2(x))$. Условия (5) являются минимальными для существования классического решения и следуют из постановки задачи. Классическим решением будем называть вектор-функцию $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))^T$, компоненты которой дважды непрерывно дифференцируемы по $x$ и $t$, и удовлетворяют (1)–(4).

Также как в [3–4] можно показать, что если $u(x,t)$ классическое решение задачи (1)–(4), то оно может быть найдено по формуле

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Big[\left(R_\lambda\varphi\right)\cos\rho t+-$$

$$+R_\lambda(\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\Big]d\lambda, \tag{6}$$

где $R_\lambda$ – резольвента оператора:

$$Ly=(-y_1''(x)+q_1(x)y_1(x),-y_2''(x)+q_2(x)y_2(x))^T,$$

$$y_1(0)=y_1(1)=y_2(0)=y_2(1),\quad y_1'(0)-y_1'(1)+y_2'(0)-y_2'(1)=0,$$

$\lambda=\rho^2$, $\mathrm{Re}\rho\ge 0$, $r>0$ и достаточно велико, $\gamma_n$ есть образ в $\lambda$ – плоскости окружностей $\widetilde{\gamma}_n=\{\rho\,|\,|\rho-n\pi|=\delta\}$ (см. [1]), $\delta>0$ достаточно мало и фиксировано, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что $R_\lambda$ применяется к $f(x,\tau)$ по $x$. Ряд в (6) при фиксированном $t\ge 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$.

Обозначим через $Z(x,t,\varphi)$ ряд (6) при $\psi_j(x)=f_j(x,t)=0$. Из (6) получим представление:

$$u(x,t)=Z(x,t,\varphi)+\int\limits_0^t Z(x,\tau,\psi)d\tau+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau}Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))d\eta \tag{7}$$

(в случае суммируемого потенциала такое представление было предложено А. П. Хромовым в [5–6] с привлечением теории расходящихся рядов). При этом $Z(x,t,\varphi)$ есть решение задачи (1)–(4) при $\psi(x)=f(x,t)=0$ (будем обозначать такую задачу (A)). Поэтому фактически требуется рассмотреть только задачу (A) при разных начальных функциях $\varphi(x)$.

В [1–2] для формального решения задачи (A)

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda\varphi\right)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{8}$$

использовалось представление

$$u(x,t)=U_0(x,t)+U_1(x,t). \tag{9}$$

Здесь $U_0(x,t)$ есть (8), где $R_\lambda$ заменено на $R_\lambda^0=(L_0-\lambda E)^{-1}$, $L_0$ есть оператор $L$ при $q(x)=0$.

Ряд $U_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно по всем $x$ и $t$. Обозначим его сумму $A_0(x,t)$. Справедлив следующий результат [1]

**Теорема 1.** *Ряд $U_0(x,t)$ является классическим решением задачи (A) при $q_j(x)\equiv 0$, при этом для суммы $A_0(x,t)$ ряда имеет место формула*

$$U_0(x,t)=A_0(x,t)=\frac{1}{2}\left(\widetilde{F}(x+t)+\widetilde{F}(x-t)\right),$$

*где вектор-функция $\widetilde{F}(x)=(\widetilde{F}_1(x),\widetilde{F}_2(x))^T$ дважды непрерывно дифференцируема на всей оси, при этом $\widetilde{F}(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0,1]$, а на всю ось продолжается с помощью соотношений*

$$\widetilde{F}_1(-x)=\frac{1}{2}\Big[\widetilde{F}_1(1-x)+\widetilde{F}_2(1-x)-\widetilde{F}_1(x)+\widetilde{F}_2(x)\Big],$$

$$\widetilde{F}_2(-x)=\frac{1}{2}\Big[\widetilde{F}_1(1-x)+\widetilde{F}_2(1-x)+\widetilde{F}_1(x)-\widetilde{F}_2(x)\Big],$$

$$\widetilde{F}_1(1+x)=\frac{1}{2}\Big[\ \widetilde{F}_1(x)-\widetilde{F}_1(1-x)+\widetilde{F}_2(x)+\widetilde{F}_2(1-x)\Big], \tag{10}$$

$$\widetilde{F}_2(1+x)=\frac{1}{2}\Big[\ \widetilde{F}_1(x)+\widetilde{F}_1(1-x)+\widetilde{F}_2(x)-\widetilde{F}_2(1-x)\Big],$$

В [1] исследование $U_1(x,t)$ проводилось с помощью оценок компонент разности резольвент $R_\lambda - R_\lambda^0$, и доказывалась возможность дважды почленного дифференцирования $U_1(x,t)$. Теперь мы поступаем иначе. Заметим, что $U_1(x,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-Q(x)u(x,t)+F^0(x,t), \tag{11}$$

$$u_1(0,t)=u_1(1,t)=u_2(0,t)=u_2(1,t), \tag{12}$$

$$u'_{1x}(0,t)-u'_{1x}(1,t)+u'_{2x}(0,t)-u'_{2x}(1,t)=0, \tag{13}$$

$$u_1(x,0)=u_2(x,0)=u'_{1t}(x,0)=u'_{2t}(x,0)=0, \tag{14}$$

где $F^0(x,t)=-Q(x)A^0(x,t),\ (x,t)\in Q.$

Представим $U_1(x,t)$ в виде:

$$U_1(x,t)=A_1(x,t)+U_2(x,t),$$

где $A_1(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{F}_0(\eta,\tau)d\eta,\ \widetilde{F}_0(x,\tau)=F_0(x,\tau)$ при $x\in[0,1]$, и на всю числовую ось продолжается с помощью соотношений (10), $U_2(x,t)$ – решение задачи (11)–(14) с $F_1(x,t)=-Q(x)A_1(x,t)$.

Продолжая этот процесс до бесконечности, и выполняя необходимые обоснования, аналогично работам [3–4], получим, что справедлив следующий результат.

**Теорема 2.** *При выполнении условий (5) классическое решение задачи (А) существует и имеет вид*

$$u(x,t)=A(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x,t),$$

*где* $A_0(x,t)=\frac{1}{2}\Big[\widetilde{F}(x+t)+\widetilde{F}(x-t)\Big],$

$$A_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{F}_{n-1}(\eta,\tau)d\eta,\qquad n\ge 1$$

*и* $F_n(x,t)=-Q(x)A_n(x,t)$ *при* $x\in[0,1]$, $\widetilde{F}_{n-1}$ *есть продолжения функций* $F_{n-1}$ *с помощью соотношений (10).*

Используя приемы из [4, 6] доказывается существование классического решения задачи (1)–(4).

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

## Литература

1. *Бурлуцкая М. Ш.* Метод Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения на графе / М. Ш. Бурлуцкая // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 465, № 5. – С. 519–522.

2. *Burlutskaya M.* On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph / M. Burlutskaya // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 72. – P. 37–44.

3. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Диф. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 5. – С. 717–731.

4. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / А. П. Хромов // ЖВМ и МФ – 2019. – Т. 59, № 2. – С. 286–300.

5. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения / А. П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. – Саратов: Изд-во ООО «Научная книга», 2020. – С. 433–439.

6. *Корнев В. В.* О смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. – Саратов: Изд-во ООО «Научная книга», 2020. – С. 202–204.

УДК 539.376

# О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ И ДРУГИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

**А. П. Бырдин, А. А. Сидоренко, О. А. Соколова**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе представлены результаты исследования, направленного на создание метода решения задачи Коши стационарной задачи для уравнений, содержащих линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и нелинейный аналитический функционал. Методом рядов Вольтерра-Фреше получено стационарное решение дифференциального уравнения второго порядка с аналитическим функционалом, описывающего колебания нелинейного вибратора, обладающего наследственным поведением. Изучено поведение решения и зависимость энергетических потерь от физических параметров.
**Ключевые слова:** аналитический функционал, ряды Вольтера, функционально-дифференциальные уравнения, нелинейно-наследственная упругость, нелинейный вибратор, энергетические потери.

## Введение

При проектировании современных технических систем в электронике, радиотехнике, материаловедении для исследования их поведения с течением времени и при изменении нагрузки широко используются модели, описывающие состояние системы в виде нелинейных функционалов, определяющих зависимость между входными и выходными переменными

$$y(r_2,t)=\hat{F}\left[x(r_1,\tau),t\right]+\hat{L}x,\quad \tau\in(-\infty,t),\tag{1}$$

где $\hat{L}$ – дифференциальный оператор, функционал $\hat{F}$ однозначно отображает множество входных переменных $x$ на множество выходных переменных $y$, причем эти переменные могут носить скалярный, векторный или тензорный характер, $r_1$ и $r_2$ – параметры. Определяющий эту зависимость функционал должен удовлетворять условиям причинности и затухающей памяти. Для стационарных систем в правой части (1) дифференциальный оператор отсутствует. Соотношение (1) указыват на то, что значение выходной переменной в момент времени $t$ определяется поведением входной переменной во все предшествующие моменты вплоть до момента времени $t$.

Примерами функциональных устройств, используемых в электронике, являются пьезоэлектрические резонаторы, датчики Холла, негатроны и другие устройства, когда множество дискретных составляющих устройства можно заменить средой, выполняющей функции этого множества [1]. Аналогичным образом с помощью нелинейных функционалов описываются состояния и процессы в радиотехнических системах, например – антенны с нелинейной нагрузкой [2]. Как известно [3], линейная связь между векторами поляризации среды и напряженности электрического поля не пригодна для описания результатов наблюдения в конденсированных средах, когда напряженность достигает величины порядка межатомных полей, которую можно получить в современных энергетических установках при фокусировке лазерных пучков. Для описания оптических эффектов с высокой напряженностью полей материальное уравнение представляется суммой полилинейных функционалов вольтерровского типа. То есть определяющий функционал аппроксимировался аналитическим функционалом.

Анализ экспериментов на ползучесть стеклопластиков, ряда полимеров, металлов и сплавов при повышенных температурах, показывает, что кривые ползучести не описываются соотношениями линейной теории вязкоупругости, но достаточно хорошо аппроксимируются нелинейно-наследственной зависимостью между напряжениями и деформациями [4]. В одномерном случае такая зависимость представляется разложением аналитического функционала в ряд Вольтерра-Фреше.

$$\sigma(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \overset{n}{\cdots}\int V_n(t_1,\dots,t_n)\prod_{m=1}^{n}\varepsilon(t-t_m)dt_m\,, \tag{2}$$

где $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ – напряжение и деформация, $V_n(t_1,\dots,t_n)$ – ядра релаксации $n$-го порядка, удовлетворяющие условиям причинности, затухающей памяти и симметричности по перестановкам аргументов [4]. В случае установившегося процесса верхний предел интегралов должен быть равным бесконечности. В работе [5] показано, что если ядро $V_1(t)$ аддитивно содержит $\delta$-функцию, то соотношение (2) можно обратить

$$\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{W}_n\sigma\ ,\ \hat{W}_n\sigma=\int_0^t \overset{n}{\cdots}\int W_n(t_1,\dots,t_n)\prod_{m=1}^{n}\sigma(t-t_m)dt_m\,, \tag{3}$$

где ядра ползучести $W_n(t_1,\dots,t_n)$ однозначно определяются через ядра релаксации $V_k(t_1,\dots,t_k)$.

Завершает задачу построения обратного соотношения для (2) полученная в работе [6] система рекуррентных уравнений, позволяющая определить лаплас-образы ядер ползучести $W_n^*(p_1,\dots,p_n)$ через лаплас-образы ядер релаксации $V_k^*(p_1,\dots,p_k)$:

$$W_1^*(pV_1^*(p))=1,$$

$$\begin{aligned}W_n^*(p_1,\dots,p_n)\,V_1^*\left(\sum_{m=1}^{n}p_m\right)=-\frac{1}{n}\sum_{cikl}\sum_{m=1}^{n}\sum_{|J,m|=n}W_{j_1}^*(p_1,\dots,p_{j1})\dots W_{jm}^*(p_{|J,m-1|+1},\dots,p_n)\times\\ \times V_m^*\left(\sum_{k=1}^{j_1}p_k,\dots,\sum_{k=|J,m-1|+1}^{n}p_k\right),\end{aligned} \tag{4}$$

где $|J,m|=j_1+\ldots+j_m$, внутренняя сумма берется по натуральным решениям уравнения $|J,m|=n$, внешняя сумма берется по циклической перестановке индексов.

## 1. Построение решений дифференциальных уравнений с аналитическими операторами

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее изменение состояния функциональной системы

$$\left(\hat{L}_n+\hat{F}^t\right)x(t)=y(t)\,, \tag{5}$$

$$\hat{L}_n=\sum_{k=0}^{N}C_{n-k}\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\,,\ c_k=\text{const},$$

$\hat{F}^t$ – нелинейный аналитический оператор, представленный разложением Вольтерра-Фреше в ряд полилинейных интегральных операторов вида (2).

Решение уравнения (5) с начальными условиями

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_1,\dots,x^{(n-1)}(0)=x_{n-1},\quad x_k=\text{const}.$$

Решение уравнения (5) можно получить в виде ряда Вольтера

$$x(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^m\cdots\int W_m(t-t_1,\dots,(t-t_m))\prod_{k=1}^{m}f(t_k)dt_k\,,$$

где ядра интегральных операторов определяются из системы рекуррентных уравнений вида (4)

$$f(t)=y(t)+\sum_{l=1}^{n}x_{l-1}\delta_{(t)}^{(n-k)},$$

$\delta_{(t)}^{(n-k)}(t)$ – производные функции Дирака.

В качестве примера приложения рассмотрим задачу о динамическом поведении нелинейного вибратора, обладающего наследственностью. В большинстве работ решение этой задачи строилось с помощью методов усреднения, что позволяет в решении учитывать только первую гармонику колебаний. Применение метода решения, основанного на его представлении аналитическим функционалом позволяет получить решение в любом приближении и учитывать влияние всего спектра гармоник.

В безразмерных переменных и параметрах $t'=\beta\cdot t$, $\omega_0^2=\dfrac{E}{m\beta^2}$, $P=\dfrac{P_0}{m\beta^2}$, где $\beta^{-1}$ – время релаксации материала пружины, $m$ – масса осциллятора, $E$ – коэффициент жесткости пружины, $P_0$ – амплитуда внешней периодической силы, уравнение движения принимает вид

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}\int\overset{n}{\cdots}\int_0 V_n(t_1,\ldots,t_n)\prod_{k=1}^{n}x(t-t_k)dt_k=Pf(t), \tag{6}$$

штрих у временной переменной опущен, $x(t)$ – перемещение, ядра наследственности $V_n$ удовлетворяют условию причинности, ядро $V_1$ содержит аддитивно – функцию и материал пружины не изменяет свойства с течением времени. Если поведение пружины одинаково при растяжении и сжатии, то $V_{2n}$, $\quad n=1,2,\ldots$.

Стационарное решение уравнения (6) разыскиваем в виде интегрального ряда Вольтера

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P^n\int\overset{\infty}{\cdots}\int_0 W_n(t_1,\ldots,t_n)\prod_{k=1}^{m}x(t-t_k)dt_k. \tag{7}$$

Таким образом, задача сводится к определению последовательности ядер $W_n(t_1,...,t_n)$. Для построения установившейся реакции вибратора получаем рекуррентное соотношение для Фурье-трансформант ядер вида

$$\begin{gathered}W_n^*(t_1,\ldots,t_n)\cdot V_1^{0*}\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\right)+\frac{\omega_0^2}{n}\sum_{cikl}\sum_{m=1}^{n}\sum_{|J,m|=n}W_{j1}^*(\omega_1,\ldots,\omega_{j1})\ldots W_{jm}^*(\omega_{|J,m-1|},\ldots,\omega_n)\times\\ \times V_m^*\left(\sum_{k=1}^{j_1}\omega_k,\ldots,\sum_{k=|J,m-1|}^{n}\omega_k\right)=\delta_{1,n},\\ V_1^{0*}(\omega)=-\omega^2+\omega_0^2\cdot V_1^*(\omega).\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $|J,n|=j_1+\ldots+j_n$ – длина мультииндекса, $j_k$ – натуральные числа, звездочка над буквой $V_k^*$, $W_k^*$ обозначает изображение по Фурье соответствующей функции. Внутренняя сумма берется по натуральным решениям уравнения $|J,m|=n$, внешняя сумма берется по циклической перестановке индексов $1,\ldots,n$ и является симметризующей. Последнее – обусловлено требованием симметрии функций $W_n(t_1,\ldots,t_n)$ относительно перестановки аргументов.

Будем далее предполагать, что функция безразмерного времени $f(t)$ является $\dfrac{2\pi}{\omega}$ периодической и удовлетворяющей условию разложимости в ряд Фурье

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n e^{in\omega t},\ f(t)=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}f(t)e^{-in\omega t},\quad f_{-n}=\overline{f}_n,$$

где черта над буквой обозначает комплексное сопряжение.

Изменив порядок выполнения действий суммирования и произведения в выражении (8) и выполнив интегрирование по всем переменным, получим следующий вид решения дифференциального уравнения (6)

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2\pi}P)^n\sum_{l=-\infty}^{\infty}\psi_{n,l}(\omega)e^{il\omega t}, \tag{9}$$

$$\psi_{n,l}(\omega)=\sum_{|M,n|=l}^{\infty}W_n^*(m_1\omega,\ldots,m_n\omega)\prod_{k=1}^{n}f_{m_k},$$

где «длина» мультииндекса $|M,n|$ в сумме принимает как положительные, так и отрицательные значения. Выражение (9) вместе с рекуррентным соотношением (8) представляет решение задачи построения отклика нелинейной наследственно – упругой системы на периодическое возбуждение. Из вида решения следует, что отклик на возмущение является периодической функцией $t$ с периодом возмущения. Коэффициенты построенного ряда являются аналитическими функциями амплитуды возбуждения.

В том случае, когда входной сигнал $f(t)$ аппроксимируется тригонометрическим полиномом

$$f(t)=\sum_{m=-N}^{N}f_m e^{im\omega t},$$

решение рассматриваемого дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2\pi}P\right)^n\sum_{l=-nN}^{nN}\psi_{n,l}(\omega)e^{il\omega t}.$$

## 2. Диссипативная характеристика нелинейного осциллятора

На основе полученных выше результатов построим решение уравнения стационарных колебаний нелинейного наследственно-упругого осциллятора с симметричной нелинейно-упругой характеристикой под действием моногармонического возмущения. В качестве меры диссипации энергии используем внутреннее трение [7], мера – широко используемая для определения параметров функций наследственности по экспериментально измеренным возбуждениям и откликам изучаемой системы.

Уравнение движения рассматриваемого осциллятора, с учетом требования симметричности его поведения, принимает вид

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2\sum_{n=0}^{\infty}V_{(n)}(t_1,\ldots,t_{(n)})\prod_{k=1}^{2n+1}x(t-t_k)dt_k=P\sin\omega t, \tag{10}$$

где $\omega=\dfrac{\Omega}{\beta}$ – безразмерная частота возбуждения, $t$ – безразмерное время, $(n)=2n+1,\ P,\beta,\omega_0$ – определены в формуле (6), $V_{(n)}$ – весовые функции наследственности, симметричные относительно перестановок аргументов, удовлетворяющие условиям причинности и нестарения, $V_1(t)$ – аддитивно содержит дельта-функцию.

Для преобразования решения уравнения используем соотношение

$$\hat{W}_n\sin\omega t=\frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{(2i)^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^n\hat{C}_n^m W_n(t_1,\ldots,t_n)\exp[i\omega(n-2m)t],$$

где интегральный оператор $\hat{W}_n$ представляется общим членом ряда в (7), оператор $\hat{C}_n^m$ определен правилом

$$\hat{C}_n^m\Phi(t_1,\ldots,t_n)=\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}\sum_m\Phi^*(\omega_1,\ldots,\omega,-\omega,\ldots,-\omega),$$

$\Phi^*(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ – преобразование Фурье функции $\Phi(t_1,\ldots,t_n)$, сумма берется по перестановкам аргументов группы $(\omega)$ с $m$ аргументами группы $(-\omega)$. Число членов в сумме равно биномиальному коэффициенту $\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}$. Приведенны соотношения позволяют представить решение задачи о колебаниях осциллятора в виде

$$x(t)=\frac{P}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi P^2}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{2n+1}(-1)^{n+m}\hat{C}_{2n+1}^{m}W_{(n)}(t_1,\ldots,t_{(n)})\exp[i\omega(2n-2m+1)t]. \qquad (11)$$

Можно показать, что определенная этим выражением функция $x(t)$ является действительной, а представляющий решение задачи ряд сходится к дважды непрерывно дифференцируемой функции.

С помощью решения (11) можно вычислить энергетические потери осциллятора за цикл колебаний

$$\Delta N=P\int_0^T f(t)\dot{x}(t)dt,$$

где $T$ – период возбуждающей колебания силы. Используя вид решения и выражение для функции $f(t)$ и, изменив порядок суммирования, получим

$$\Delta N=\frac{\pi P^2}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi P^2}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{2n+1}(-1)^{n+m}(2n-2m+1)(\delta_{n+1,m}-\delta_{n,m})\hat{C}_{2n+1}^{m}W_{(n)}(t_1,\ldots,t_n),$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Выполнив суммирование по индексу $m$, и учитывая равенство

$$\overline{C_{2n+1}^{n+1}W_{(n)}}=\hat{C}_{2n+1}^{n}W_{(n)},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, будем иметь

$$\Delta N=\pi P^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi P^2}{2}\right)^n\operatorname{Im}\left[\hat{C}_{2n+1}^{n+1}W_{(n)}(t_1,\ldots,t_{(n)})\right], \qquad (12)$$

$\operatorname{Im}[\ldots]$ – обозначает мнимую часть выражения в скобках.

Вычислим приближенно потерю энергии осциллятора за цикл колебаний, учитывая только два члена в решении. Полагая в формуле (11) $n=0$ и $n=1$, получим

$$x(t)=P\sum_{n=0}^{1}\left[A_{2n+1}\sin(2n+1)\omega t+B_{2n+1}\cos(2n+1)\omega t\right],$$

$$A_1(\omega)=\operatorname{Re}\left(W_1^*(\omega)\right)+\frac{3\pi P^2}{2}\operatorname{Re}\left(W_3^*(-\omega,\omega,\omega)\right),$$

$$B_1(\omega)=-\operatorname{Im}\left(W_1^*(\omega)\right)-\frac{3\pi P^2}{2}\operatorname{Im}\left(W_3^*(-\omega,\omega,\omega)\right), \qquad (13)$$

$$A_3(\omega)=-\frac{\pi P^2}{2}\operatorname{Re}\left(W_3^*(\omega,\omega,\omega)\right),\ B_3(\omega)=\frac{\pi P^2}{2}\operatorname{Im}\left(W_3^*(\omega,\omega,\omega)\right),$$

где учитывали

$$W_n^*(\omega_1,\ldots,\omega_n)=\operatorname{Re}\left(W_n^*(\omega_1,\ldots,\omega_n)\right)-i\operatorname{Im}\left(W_n^*(\omega_1,\ldots,\omega_n)\right).$$

Предполагая сепарабельность ядер наследственности

$$V_n^*(\omega_1,\ldots,\omega_n)=a_n\prod_{k=1}^{n}V_1^*(\omega_k)$$

из рекуррентного соотношения (8) для нечетных $n$ определим входящие в соотношение (13) функции в явном виде

$$W_3^*(\omega,\omega,\omega)=-\frac{a_3}{2\pi}W_1^*(3\omega)\left[W_1^{0*}(\omega)\right]^3, \qquad (14)$$

$$W_3^*(-\omega,\omega,\omega)=-\frac{a_3}{2\pi}W_1^*(\omega)W_1^{0*}(\omega)\left|W_1^{0*}(\omega)\right|^2,$$

где $W_1^{0*}(\omega)=W_1^*(\omega)V_1^*(\omega)$.

Подставляя соотношение (14) в (13) получим выражения для коэффициентов гармоник, входящих в приближенное решение

$$A_1(\omega) = \mathrm{Re}\left[W_1^*(\omega) - \alpha_3 W_1^*(\omega) W_1^{0*}(\omega)\left|W_1^{0*}(\omega)\right|^2\right],$$

$$B_1(\omega) = \mathrm{Im}\left[W_1^*(\omega) - \alpha_3 W_1^*(\omega) W_1^{0*}(\omega)\left|W_1^{0*}(\omega)\right|^2\right], \tag{15}$$

$$A_3(\omega) = \frac{\alpha_3}{3}\mathrm{Re}\left[W_1^*(3\omega)\left(W_1^{0*}(\omega)\right)^3\right],\ B_3(\omega) = \frac{\alpha_3}{3}\mathrm{Im}\left[W_1^*(3\omega)\left(W_1^{0*}(\omega)\right)^3\right],\ \alpha_3 = \frac{3a_3P^2}{4}.$$

Учитывая равенства (14) и (15), выражение для энергии диссипации, включающее две первые гармоники, при условии, сепарабельности функций влияния $V_n(t_1,\ldots,t_n)$ принимает вид

$$\Delta N \approx -\pi P^2 B_1(\omega), \tag{16}$$

где $B_1(\omega) < 0$.

Среднюю накопленную энергию можно вычислить, усредняя по периоду сумму потенциальной $U$ и кинетической $E_k$ энергий [8]

$$N = \langle U + E_k \rangle,$$

где

$$U = \frac{x^2(t)}{2} + a_3\frac{x^4(t)}{4} + \cdots,\ E_k = \frac{\dot{x}^2(t)}{2}.$$

Для достаточно малых амплитуд возмущения, учитывая $|a_3| < 1$, при вычислении $U$ можно ограничиться первым членом в разложении.

Выполнив преобразования, аналогичные тем, которые использовались при получении выражения для энергетических потерь, и, проведя усерднение по периоду колебаний, получим

$$\left\langle \frac{x^2(t)}{2} \right\rangle = \frac{P^2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi P^2}{2}\right)^{n-1} \sum_{p_1+p_2=n-1}\ \sum_{m_1+m_2=n}\ \prod_{k=1}^{2} \hat{C}_{2p_k+1}^{m_k} W_{2p_k+1}, \tag{17}$$

$$\left\langle \frac{\dot{x}^2(t)}{2} \right\rangle = -\frac{(\omega P)^2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi P^2}{2}\right)^{n-1} \sum_{p_1+p_2=n-1}\ \sum_{m_1+m_2=n}\ \prod_{k=1}^{2} (2p_k - 2m_k + 1)\hat{C}_{2p_k+1}^{m_k} W_{2p_k+1},$$

где внутренние суммы берутся по целым неотрицательным решениям диофантовых уравнений. Учитывая в полученных выражениях вклады только первой и третьей гармоник (13), а также сепарабельность ядер $V_n(t_1,\ldots,t_n)$ и формулы (14), получим выражения для средней накопленной энергии

$$N \approx \frac{P^2}{4}\left[(\omega_0^2 + \omega^2)(A_1^2 + B_1^2 + A_3^2 + B_3^2) + 8\omega^2(A_3^2 + B_3^2)\right], \tag{18}$$

где амплитуды гармоник определены выражениями (15).

Выбирая в качестве меры внутреннего трения величину [7] ,

$$Q^{-1} = \frac{\Delta N}{2\pi N},$$

получим в рассматриваемом приближении с учетом (16) и (18)

$$Q^{-1} = -\frac{-2B_1}{(\omega_0^2 + \omega^2)(A_1^2 + B_1^2 + A_3^2 + B_3^2) + 8\omega^2(A_3^2 + B_3^2)}. \tag{19}$$

Отметим – формула (19) определяет внутреннее трение при колебаниях линейного наследственного упругого осциллятора при $a_3 = 0$.

Полученное выражение для меры диссипации определяет не только частотную, но и амплитудную зависимость. Таким образом, полученные результаты можно использовать для феноменологического описания энергетических потерь при движении точечных дефектов и дислокаций в твердых телах под действием механической вибрации [7, 8]. Возможность применения нелинейной теории вязкоупругости для описания амплитудной зависимости внутреннего трения отмечалось в монографии [7]. Вопрос о частотной зависимости внутреннего трения имеет весьма важное значение в материаловедении. Имеется значительное число экспериментальных результатов для различных материалов, а также теоретические разработки о связи частотной зависимости внутреннего трения с физическими механизмами релаксации. Установлено, что наиболее подходящими для описания экспериментальных данных являются слабосингулярные ядра наследственности.

Рассмотрим частотную зависимость внутреннего трения для функций релаксации Ржаницына и Работнова. В безразмерных переменных они имеют вид

$$V_1(t)=\delta(t)-\nu t^{\gamma-1}\frac{e^{-t}}{\Gamma(\gamma)},\ V_1(t)=\delta(t)-\nu t^{\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{\gamma n}}{\Gamma(\gamma(1+n))},$$

где $0<\gamma\le 1,\ 0<\nu<1,\ \delta(t)$ – дельта-функция, $\Gamma(\ldots)$ – гамма-функция. Фурье-образы ядер решения имеют вид: для ядра Ржаницына

$$W_1^*(\omega)=B_r^{-1}(\omega)\delta^\gamma\left[(\omega_0^2-\omega^2)\delta^\gamma-\nu\omega_0^2\cos\gamma\varphi-i\nu\omega_0^2\sin\gamma\varphi\right],$$

$$\varphi=arctg\omega,\ \delta=\sqrt{1+\omega^2},\ B_r(\omega)=(\omega_0^2-\omega^2)\left[\delta^{2\gamma}+\nu^2\omega_0^4-2\nu\omega_0^2\delta^\gamma\cos\gamma\varphi\right];$$

для функции Работнова

$$W_1^*(\omega)=B_R^{-1}(\omega)\left[\omega^{2\gamma}(\omega_0^2-\omega^2)+(\nu\omega_0^2-\omega^2)+\omega^\gamma\left[(2-\nu)\omega_0^2-2\omega^2\right]\cdot\cos\frac{\pi\gamma}{2}-i\nu\omega^{2+\gamma}\sin\frac{\pi\gamma}{2}\right],$$

$$B_R(\omega)=\omega^{2\gamma}(\omega_0^2-\omega^2)^2+((1-\nu)\omega_0^2-\omega^2)^2+2\omega^\gamma(\omega_0^2-\omega^2)((1-\nu)\omega_0^2-\omega^2)\cdot\cos\frac{\pi\gamma}{2}.$$

## Заключение

В настоящей работе построен метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих нелинейные аналитические функционалы, моделирующие состояния ряда технических устройств современной электроники, используемых в нелинейной оптике для описания поведения диэлектриков при прохождении интенсивных электромагнитных волн, описывающих ползучесть полимеров и некоторых сплавов в условиях значительных механических нагружений. В основу предлагаемого метода положено представление решения функционального уравнения в виде ряда полилинейных функционалов возрастающего порядка. Получены соотношения между ядрами функционалов, представляющих решение, и ядрами заданного функционала.

Развитый в работе метод применен к построению стационарного решения уравнения движения нелинейного наследственно-упругого осциллятора, в котором функционал, описывающий эффекты наследственности, представлен рядом Вольтерра. Получено выражение для внутреннего трения осциллятора, описывающее его частотную и амплитудную зависимости. Установлено в частотной зависимости диссипации энергии наличие пиков и провалов. Указанные эффекты не обнаруживаются при применении к решению уравнения методов осреднения.

Отметим, что работа над обобщением представленного метода на случай системы дифференциальных уравнений с нелинейными аналитическими функционалами является перспективным направлением исследований.

**Литература**

1. *Кабанов Д. А.* Функциональные устройства с распределенными параметрами. – М. : Сов. Радио. 1979. – 336 с.

2. Нелинейные электромагнитные волны / Под ред. П. Усленди. – М. : Мир, 1983. – 312 с.

3. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. – М. : Мир, 1966. – 424 с.

4. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М. : Наука, 1977. – 384 с.

5. *Ильюшин А. А.* Основы математической теории термовязко-упругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М. : Наука, 1970. 280 с.

6. *Бырдин А. П.* Метод рядов Вольтерра в динамических задачах нелинейной наследственной упругости / А. П. Бырдин, М. И. Розовский // Изв. АН Арм. ССР. – 1985. Т. 38, № 5. – С. 49–56.

7. *Постников В. С.* Внутреннее трение в металлах. – М. : Металлургия, 1969. – 332 с.

8. *Мешков С. И.* Вязко-упругие свойства металлов. – М. : Металлургия, 1974. – 192 с.

УДК 517.95

# О НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

**В. Б. Васильев, Л. А. Ковалева, Ш. Х. Кутаиба, О. В. Чернова**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет*

**Аннотация.** В работе изучается предельное поведение решения модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения. Сначала уравнение рассматривается в плоском секторе с дополнительным интегральным условием. В этом случае, используя формулу для общего решения, предельное поведение изучается предполагая, что угол сектора стремится к нулю. Установлено, что функция в граничном условии не может быть произвольной, а должна удовлетворять определенному функциональному сингулярному интегральному уравнению. Затем рассмотрен случай четырехгранной конической канонической трехмерной особой области с двумя параметрами. Показано, что решение такой краевой задачи может иметь предел по конечным значениям параметров в соответствующем пространстве Соболева – Слободецкого, если граничная функция является решением специального функционального сингулярного интегрального уравнения.
**Ключевые слова:** асимптотика, интегральное условие, краевая задача, эллиптическое псевдодифференциальное уравнение.

**1.** Большое количество работ [1–3] посвящено построению и развитию теории эллиптических псевдодифференциальных операторов и уравнений на негладких многообразиях или на многообразиях с негладкими границами. Сам термин «теория» означает присутствие в этих исследованиях теорем фредгольмовости и теорем об индексе.

Используя локальный принцип и изучая свойства обратимости модельных операторов, в так называемых канонических областях, мы тем самым исследуем фредгольмовы свойства общего псевдодифференциального оператора. Отметим, что различные модельные операторы и канонические области порождают различные теории Фредгольма.

Под каноническими областями, как обычно, будем понимать либо все пространство $\mathbb{R}^m$ или полупространство $\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m),\ x_m > 0\}$, либо заданный конус в $\mathbb{R}^m$.

Пусть $C$ выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^m$ не содержащий целой прямой. Рассмотрим в нем псевдодифференциальный оператор вида

$$(Au)(x) = \int_C \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i(x-y)\cdot\xi} u(y)\, d\xi\, dy, \qquad x \in C,$$

и модельное уравнение

$$(Au)(x) = v(x), \qquad x \in C, \tag{1}$$

и потребуем, чтобы символ $A(\xi)$ оператора $A$ удовлетворял условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1+|\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Стоит отметить, что в [6] был развит новый подход к изучению псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладкой границей, основанный на получении условий обратимости модельного псевдодифференциального оператора $A$ или условий однозначной разрешимости модельного уравнения (1) в соответствующих функциональных пространствах.

Чтобы описать эти условия было введено [6] понятие волновой факторизации для эллиптического символа.

**2.** Рассмотрим двумерный случай. Уравнение (1) будем изучать в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(C^a_+)$. Как известно, [6] под символом æ понимается индекс волновой факторизации. Пусть для него выполнено условие

$$1/2 < æ - s < 3/2,$$

где $s$ – показатель пространства Соболева – Слободецкого $H^s(C_+^a)$ [6, 10] и плоский сектор имеет вид

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|,\ a > 0\}.$$

Для простоты, положим $v \equiv 0$ в (1). Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [6], то можно показать [7] что общее решение уравнения (1) в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(C_+^a)$ в образах Фурье имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} +$$

$$+A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2)\left(v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta}\right),$$

где $c_0$ – произвольная функция из $H^{s-æ+1/2}(\mathbb{R})$.

Обозначим

$$v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2), \quad v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2). \tag{3}$$

Тогда получим

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} \equiv$$

$$\equiv \frac{\tilde{c}(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{d}(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)}, \tag{4}$$

где $\tilde{c}(\xi_1 + a\xi_2) \equiv \tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2)$, $\tilde{d}(\xi_1 - a\xi_2) \equiv \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2)$.

Пусть нам известен интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 \equiv g(x_1). \tag{5}$$

Для преобразования Фурье означает $\tilde{u}(\xi_1, 0) = \tilde{g}(\xi)$ и согласно формуле (3) имеем

$$\frac{\tilde{c}_0(\xi_1)}{A_{\neq}(\xi_1, 0)} = \tilde{g}(\xi_1).$$

Следовательно, формально, мы можем найти функцию $\tilde{c}_0(\xi_1) = A_{\neq}(\xi_1, 0)\tilde{g}(\xi_1)$. Затем, используя (3), найти $\tilde{d}_0(\xi_1)$. Таким образом, формула (4) дает нам решение уравнения (1). Окончательно решение уравнения (1) при условии (5) примет вид

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \frac{A_{\neq}(\xi_1 + a\xi_2, 0)\tilde{g}(\xi_1 + a\xi_2) + A_{\neq}(\xi_1 - a\xi_2, 0)\tilde{g}(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} +$$

$$+\frac{1}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - \frac{1}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta}.$$

Вводя обозначение $a_{\neq}(t_1, t_2) \equiv A_{\neq}\left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{t_1 - t_2}{2a}\right)$, $\tilde{U}(t_1, t_2) \equiv \tilde{u}\left(\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{t_1 - t_2}{2a}\right)$, запишем

$$\tilde{U}(t_1, t_2) = \frac{A_{\neq}(t_1, 0)\tilde{g}(t_1) + A_{\neq}(t_2, 0)\tilde{g}(t_2)}{2a_{\neq}(t_1, t_2)} +$$

$$+\frac{1}{2a_{\neq}(t_1, t_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_1 - \eta} - \frac{1}{2a_{\neq}(t_1, t_2)}v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_2 - \eta}.$$

Устремляя $a \to +\infty$, обозначая $A_{\neq}(t,0)\tilde{g}(t) \equiv G(t)$ и $\lim\limits_{a\to+\infty} a_{\neq}(t_1,t_2) \equiv h(t_1,t_2)$ получим следующее соотношение

$$\tilde{u}\left(\frac{t_1+t_2}{2},0\right) = \tilde{U}(t_1,t_2) = \frac{A_{\neq}(t_1,0)\tilde{g}(t_1) + A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}(t_2)}{2h(t_1,t_2)} +$$

$$+\frac{1}{2h(t_1,t_2)} v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_1-\eta} - \frac{1}{2h(t_1,t_2)} v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_{\neq}(\eta,0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_2-\eta}. \qquad (6)$$

Окончательно, согласно условию (5), имеем

$$2h(t_1,t_2)\tilde{g}\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) = G(t_1) + G(t_2) + (SG)(t_1) - (SG)(t_2), \qquad (7)$$

где

$$(SG)(t) = v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\eta)d\eta}{t-\eta}.$$

Окончательный результат для плоского случая формулирует следующая

**Теорема 1.** *Если символ* $A(\xi_1,\xi_2)$ *допускает волновую факторизацию относительно конуса* $C_+^a$ *при достаточно больших* $a$, *то предел (6) при* $a \to +\infty$ *существует, краевая задача (1), (5) разрешима, если имеет место условие (7).*

**3.** Перейдем к многомерному случаю. Пусть $C_+^{ab}$ – четырехгранная коническая каноническая область трехмерного пространства

$$C_+^{ab} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1,x_2,x_3),\quad x_3 > a|x_1| + b|x_2|,\ a,b>0\}.$$

Обозначим через $\tilde{A}(\xi)$ символ псевдодифференциального оператора $A$, причем он не зависит от $x$ и удовлетворяет условиям (2). Далее нам понадобятся некоторые определения из [8].

Радиальной трубчатой областью над конусом $C_+^{ab}$ называется область следующего вида

$$T(C_+^{ab}) \equiv \{z \in \mathbb{C}^3 : z = x+iy,\ x\in\mathbb{R}^3,\ y \in C_+^{ab}\}.$$

Сопряженным конусом $\overset{*}{C}{}_+^{ab}$ называется такой конус, для всех точек которого выполнено

$$x\cdot y > 0,\ \ \forall y \in C_+^{ab},$$

где $x\cdot y$ есть скалярное произведение для $x$ и $y$.

Согласно [4] определим волновую факторизацию символа.

**Определение.** *Волновой факторизацией символа* $\tilde{A}(\xi)$ *относительно конуса* $C_+^{ab}$ *называется его представлением в виде*

$$\tilde{A}(\xi) = \tilde{A}_{\neq}(\xi)\tilde{A}_{=}(\xi),$$

*где* $\tilde{A}_{\neq}(\xi)$, $\tilde{A}_{=}(\xi)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

*1)* $\tilde{A}_{\neq}(\xi), \tilde{A}_{=}(\xi)$ *определены всюду, за исключением точек* $\left\{\xi\in\mathbb{R}^3 : \xi_3 = \frac{1}{2a}|\xi_1| + \frac{1}{2b}|\xi_2|\right\}$;

*2)* $\tilde{A}_{\neq}(\xi), \tilde{A}_{=}(\xi)$ *допускают аналитическое продолжение в радиальной области* $T(\overset{*}{C}{}_+^{ab})$, $T(-\overset{*}{C}{}_+^{ab})$ *соответственно, которые удовлетворяют оценкам*

$$|A_{\neq}^{\pm1}(\xi+i\tau)| \le c_1(1+|\xi|+|\tau|)^{\pm æ},$$

$$|A_{=}^{\pm1}(\xi-i\tau)| \le c_2(1+|\xi|+|\tau|)^{\pm(\alpha-æ)},\ \ \forall \tau \in \overset{*}{C}{}_+^{ab}.$$

*Число* æ *называется индексом волновой факторизации.*

**Замечание.** *Всюду ниже мы предполагаем, что такая волновая факторизация существует.*

Как и выше, для многомерного случая уравнение (1) рассматриваем в аналогичном пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(C_+^{ab})$ [4]. Для упрощения построения исследуем однородную краевую задачу

$$(Au)(x)=0 \quad x\in C_{+}^{ab}. \tag{8}$$

Для описания общего решения уравнения (1) в случае, когда $æ - s = 1+\delta,\ |\delta|<1/2$ будем использовать результаты, полученные в [5]. Далее введем следующие сингулярные интегральные операторы [9]

$$(S_1u)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=v.p\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\tau,\xi_2,\xi_3)d\tau}{\xi_1-\tau},$$

$$(S_2u)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=v.p\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi_1,\eta,\xi_3)d\eta}{\xi_2-\eta}.$$

и пусть

$$\begin{gathered}A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi)=\tilde{C}_1(\xi_1-a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)+\tilde{C}_2(\xi_1-a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)+\\ +\tilde{C}_3(\xi_1+a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)+\tilde{C}_1(\xi_1+a\xi_3,\xi_2+b\xi_3),\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{C}_1(\xi_1-a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)=\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1-a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)-\frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)-\\ -\frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)+(S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_3,\xi_2-b\xi_3);\\ \tilde{C}_2(\xi_1-a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)=\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1-a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)-\frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)+\\ +\frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)-(S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_3,\xi_2+b\xi_3);\\ \tilde{C}_3(\xi_1+a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)=\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1+a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)+\frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1+a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)-\\ -\frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1+a\xi_3,\xi_2-b\xi_3)-(S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1+a\xi_3,\xi_2-b\xi_3);\\ \tilde{C}_4(\xi_1+a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)=\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1+a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)+\frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1+a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)+\\ +\frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1+a\xi_3,\xi_2+b\xi_3)+(S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1+a\xi_3,\xi_2+b\xi_3).\end{gathered}$$

Чтобы однозначно определить произвольную функцию $c_0(\xi_1,\xi_2)$ потребуется некоторое дополнительное условие. Предположим, что нам известна функция $\tilde{u}(\xi_1,\xi_2,0)$, что в свою очередь означает, что известен интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(x_1,x_2,x_3)dx_3\equiv g(x_1,x_2), \tag{10}$$

для преобразования Фурье это дает равенство

$$\tilde{u}(\xi_1,\xi_2,0)=\tilde{g}(\xi_1,\xi_2). \tag{11}$$

Подставляя (10) в (9) мы можем получить аналогичные слагаемые. Действительно

$$\begin{gathered}\tilde{A}_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi)=\sum_{k=1}^{4}\tilde{C}_k(\xi_1,\xi_2)=\\ =\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2)-\frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)-\frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)+(S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)+\\ +\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2)-\frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)+\frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)-(S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)+\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2)+\frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)-\frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)-(S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)+$$
$$+\frac{1}{4}\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2)+\frac{1}{2}(S_1\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)+\frac{1}{2}(S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)+(S_1S_2\tilde{c}_0)(\xi_1,\xi_2)=\tilde{c}_0(\xi_1,\xi_2).$$

Подставляя в последний результат условие (10) получим

$$\tilde{A}_{\neq}(\xi',0)\tilde{u}(\xi',0)=\tilde{c}_0(\xi'),\xi'-(\xi_1,\xi_2).$$

Следовательно

$$\tilde{c}_0(\xi')=\tilde{A}_{\neq}(\xi',0)\tilde{g}(\xi'). \tag{12}$$

**Теорема 2.** *Пусть* $æ-s=1+\delta,\ |\delta|<1/2,\ g\in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда решение краевой задачи (8), (10) дается формулой (9), где* $c_0(x_1,x_2)$ *определяется из формулы (12).*

**4.** В предыдущем разделе конус определялся двумя параметрами $a$ и $b$. Особый интерес представляют ситуации, когда один их параметров или оба устремляются к . 0 или $+\infty$. Здесь стоит отметить, что случай $a,b\to 0$ содержится в книге [10] и соответствует полупространству, случаи $a\to 0,\ b=\text{const}$ и $a=\text{const},\ b\to 0$ описаны в [4]. Здесь рассматривается случай $a\to+\infty,\ b=\text{const},$ который будет аналогичен случаю $a=\text{const},\ b\to+\infty$.

Исходной точкой является равенство (9). Мы применяем замену переменных $\xi_1-a\xi_3=t_1$, $\xi_1+a\xi_3=t_3$, из которой находим $\xi_1=\frac{t_3+t_1}{2},\ \xi_3=\frac{t_3-t_1}{2a}$. В новых переменных $t_1,\ \xi_2,\ t_3$ с использованием условия (11) мы можем определить произвольную функцию $\tilde{c}_0$ по формуле (12). Теперь мы переписываем формулу (9) в новых переменных $t_1,\ \xi_2,\ t_3$ и получаем

$$A_{\neq}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2,\frac{t_3-t_1}{2a}\right)\tilde{u}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2,\frac{t_3-t_1}{2a}\right)=\tilde{C}_1\left(t_1,\xi_2-b\frac{t_3-t_1}{2a}\right)+$$
$$+\tilde{C}_2\left(t_1,\xi_2+b\frac{t_3-t_1}{2a}\right)+\tilde{C}_3\left(t_3,\xi_2-b\frac{t_3-t_1}{2a}\right)+\tilde{C}_4\left(t_3,\xi_2+b\frac{t_3-t_1}{2a}\right), \tag{13}$$

Устремляя $a$ к $+\infty$, мы приходим к соотношению

$$A_{\neq}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2,0\right)\tilde{u}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2,0\right)=\tilde{C}_1(t_1,\xi_2)+\tilde{C}_2(t_1,\xi_2)+\tilde{C}_3(t_3,\xi_2)+\tilde{C}_4(t_3,\xi_2),$$

Вычисления дают следующее:

$$\tilde{C}_1(t_1,\xi_2)+\tilde{C}_2(t_1,\xi_2)+\tilde{C}_3(t_3,\xi_2)+\tilde{C}_4(t_3,\xi_2)=$$
$$=\frac{\tilde{c}_0(t_1,\xi_2)+\tilde{c}_0(t_3,\xi_2)}{2}-(S_1\tilde{c}_0)(t_1,\xi_2)+(S_1\tilde{c}_0)(t_3,\xi_2).$$

Учитывая условие (11), формулу (12) в равенстве (13) и вводя новое обозначение

$$\tilde{A}_{\neq}(\xi_1,\xi_2,0)\tilde{g}(\xi_1,\xi_2)\equiv h(\xi_1,\xi_2)$$

мы приходим к следующему равенству (уравнению) с параметром $\xi_2$

$$h\left(\frac{t_2+t_1}{2},\xi_2\right)=\frac{h(t_1,\xi_2)+h(t_3,\xi_2)}{2}-(S_1h)(t_1,\xi_2)+(S_1h)(t_3,\xi_2). \tag{14}$$

Таким образом, имеет место следующая

**Теорема 3.** *Если символ* $A(\xi)$ *допускает волновую факторизацию относительно конуса* $C_+^{ab}$ *с индексом* æ, *таким, что* $æ-s=1+\delta,\ |\delta|<1/2$, *для достаточно больших* $a$, *то единственное решение краевой задачи (8), (10) имеет предел при* $a\to+\infty$ *тогда и только тогда, когда граничная функция* $g\in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$ *является решением уравнения (14).*

**Литература**


1. *Egorov Ju. V.* Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications / Ju. V. Egorov, B.-W. Schulze. – Birkhauser, Basel, 1997.

2. Elliptic Theory on Singular Manifolds / V. E. Nazaikinskii , A. Yu. Savin, B.-W. Schulze and B. Yu. Sternin; Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

3. *Schulze B.-W.* Differential Equations on Singular Manifolds / B.-W. Schulze, B. Sternin, V. Shatalov; Semiclassical Theory and Operator Algebras, Wiley, Berlin, 1998.

4. *Vasilyev V. B.* On Certain 3-Dimensional Limit Boundary Value Problems / V. B. Vasilyev // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – V. 41, pages 917–925.

5. *Vasilyev V. B.* Pseudo-Differential equations and conical potentials: 2-dimensional case / V. B. Vasilyev // Opusc. Math. – 2019 – V. 39, P. 109–124.

6. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М. : КомКнига , 2010. – 135 с.

7. *Васильев В. Б.* Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе / В. Б. Васильев // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. – 2016. – Т. 16, № 3, С. 3–14.

8. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных / В. С. Владимиров; М.: Наука, 1964. – 412 с.

9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения /Н. И. Мусхилишвили; М. : Наука, 1968. – 513 с.

10. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г. И. Эскин; М. : Наука, 1973. – 232 с.

УДК 517.9

# О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

**Г. А. Виноградова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается краевая дифференциальная задача с сингулярным положительно определенным оператором, которая решается вариационным методом. Решение вариационной задачи ищется в весовом энергетическом пространстве. Имеются проблемы сходимости приближенного решения к точному решению. Для решения этих проблем строится модифицированная задача, аппроксимирующая сингулярную задачу.

**Ключевые слова:** сингулярная краевая задача, весовые функциональные пространства, энергетические пространства, вариационная задача, вариационный метод, регуляризация задачи.

Рассмотрим краевую задачу для сингулярного дифференциального уравнения

$$Au(x) = -\frac{1}{x^k}\frac{d}{dx}\Big(x^k p(x)u'(x)\Big) = f(x), \quad x \in (0,1)$$
$$u'(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

где $k > 0$, $p(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $p(x) \ge p_0 > 0$.

Введем весовое гильбертово пространство $L_{2,k}(0,1)$, которое является пополнением множества четных, бесконечно дифференцируемых, финитных на отрезке $[-1,1]$ функций по норме $\| g \|^2 = \int\limits_0^1 x^k g^2(x)dx$. Скалярное произведение в нем определяется по формуле $(u,v) = \int\limits_0^1 x^k u(x)v(x)dx.$

Область определения оператора $D(A)$ состоит из множества функций дважды непрерывно дифференцируемых на интервале $(0.1)$, непрерывных на отрезке $[0,1]$, имеющих непрерывную производную на полуинтервале $[0,1)$, удовлетворяющих граничным условиям $u'(0) = 0$ и $u(1) = 0$.

Оператор задачи $A$ является симметричным и положительно определенным в пространстве $L_{2,k}(0,1)$. Как следует из вариационного метода, теория которого изложена в [1], решение задачи сводится к проблеме минимума функционала

$$F(u) = (Au,u) - 2(u,f) = \int\limits_0^1 x^k p(x)(u'(x))^2 dx - 2\int\limits_0^1 x^k f(x)u(x)dx \tag{2}$$

на энергетическом пространстве $H_A$. Энергетическое пространство является пополнением $D(A)$ по норме $\| u \|_A = (Au,u)$. Как известно из теории ([1]), решение задачи (1) доставляет минимум функционалу (2), и функция, доставляющая минимум функционалу (2), принадлежащая области определения оператора $A$, является решением задачи (1). Если функция, доставляющая минимум функционалу, не принадлежит $D(A)$, то такую функцию называют обобщенным решением задачи (1).

Как отмечалось в работах [2, 3], в случае $k \in (0,1)$ пространство $H_A$ вложено в пространство непрерывных функций. Решение задачи о минимуме функционала методом Ритца приводит к тому, что приближенное решение равномерно стремится к точному решению на отрезке $[0,1]$.

В случае $k \ge 1$ приближенное решение стремится к точному решению в энергетическом пространстве $H_A$ и равномерно на любом отрезке $[h,1]$, где $h > 0$. Граничное условие $u'(0) = 0$

не обязательно выполняется, более того, в окрестности нуля приближенное решение может быть неограниченным.

Заметим, что для функции $u \in D(A)$, удовлетворяющей условию $u'(0)=0$ справедливо равенство

$$Au(x) = -\frac{1}{x^k}\frac{d}{dx}\left(x^k p(x)u'(x)\right) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)u'(x)\right) - \frac{kp(x)}{x}u'(x) =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(p(x)u'(x)\right) - \frac{k(p(x)u'(x)-p(0)u'(0))}{x} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)u'(x)\right) - k\frac{d}{dt}\left(p(t)u'(t)\right)\Big|_{t=\theta x},$$

где $\theta \in (0,1)$.

Определим оператор $Bu(x) = -(k+1)\frac{d}{dx}\left(p(x)u'(x)\right)$, $x \in (0,h)$. Заметим, что при $x \in (0,h)$ $Au(x) - Bu(x) = k\left(\frac{d}{dx}(p(x)u'(x) - \frac{d}{dt}(p(t)u'(t))\Big|_{t=\theta x}\right)$ является бесконечно малой величиной при $h \to 0$.

Таким образом, оператор $B$ аппроксимирует оператор $A$ на отрезке $[0,h]$.

Рассмотрим новую задачу

$$\begin{aligned} &Bu(x) = Au(x) = f(x),\ x \in (h,1) \\ &Bu(x) = f(x),\ x \in (0,h) \\ &u'(0) = u(1) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $k \ge 1$.

В [4] был рассмотрен случай $k > 1$. В настоящей работе рассматривается случай $k = 1$, ранее опущенный.

На области определения оператора $A$ определим новые скалярное произведение и норму по формулам

$$(u,v)_* = h\int_0^h u(x)v(x)dx + \int_h^1 xu(x)v(x)dx,\ \|u\|_*^2 = h\int_0^h u^2(x)dx + \int_h^1 xu^2(x)dx. \tag{4}$$

Пополним множество $D(A)$ по норме $\|\cdot\|_*$, полученное пространство обозначим $H_B$.

**Теорема 1.** *Оператор $B$ является симметричным и положительно определенным.*

**Доказательство.** В самом деле, используя формулу интегрирования по частям для функций $u,v$ из $D(A)$ имеем

$$(Bu,v) = -h\int_0^h \frac{d}{dx}(p(x)u'(x))v(x)dx + \int_h^1 xAu(x)v(x)dx = -h\int_0^h (p(x)u'(x))'v(x)dx - \int_h^1 (xu'(x))'v(x)dx =$$

$$= -hp(h)u'(h)v(h) + hp(0)u'(0)v(0) + h\int_0^h p(x)u'(x)v'(x)dx - p(1)u'(1)v(1) + hp(h)u'(h)v(h) +$$

$$+\int_h^1 xp(x)u'(x)v'(x)dx = h\int_0^h p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_h^1 xp(x)u'(x)v'(x)dx = (u,Bv).$$

То есть оператор $B$ является симметричным.

Если $u \in D(A)$, и $u(1)=0$, имеем $u(x) = -\int_x^1 u'(t)dt = -\int_x^1 t^{-1/2}t^{1/2}u'(t)dt$. Тогда в силу неравенства Гельдера получаем

$$u^2(x) \le \int_x^1 t^{-1}dt \cdot \int_x^1 t(u'(t))^2 dt = -\ln x\int_x^1 t(u'(t))^2 dt \le -\ln x\int_h^1 t(u'(t))^2 dt \le$$

$$\le \frac{-\ln x}{p_0}\left(h\int_0^h p(x)(u'(x))^2 dx + \int_h^1 xp(x)(u'(x))^2 dx\right) = \frac{-\ln x}{p_0}(Bu,u),\ \text{если}\ x > h, \tag{5}$$

и

$$u^2(x) \le \int_x^h dt \cdot \int_x^h (u'(t))^2 dt - \ln h \int_h^1 x(u'(x))^2 dx = (h-x)\int_x^h (u'(t))^2 dt - \ln h \int_h^1 x(u'(x))^2 dx \le$$
$$\le h\int_x^h (u'(t))^2 dt - \ln h \int_h^1 x(u'(x))^2 dx \le \frac{-\ln h}{p_0}\left( h^k \int_0^h p(x)(u'(x))^2 dx + \int_h^1 xp(x)(u'(x))^2 dx \right) = \qquad (6)$$
$$= \frac{-\ln h}{p_0}(Bu,u), \text{ если } x\in[0,h].$$

Интегрируя последние неравенства по отрезкам $[0,h]$ и $[h,1]$, получаем

$$\| u \|_*^2 = h\int_0^h u^2(x)dx + \int_h^1 xu^2(x)dx \le \frac{-h\ln h}{p_0}(Bu,u)\int_0^h dx - \frac{1}{p_0}(Bu,u)\int_h^1 x\ln x dx = c(Bu,u).$$

Последнее означает, что оператор $B$ является положительно определенным. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пространство $H_B$ вложено в пространство непрерывных на отрезке* $[0,1]$ *функций.*

**Доказательство.** При доказательстве теоремы 1 было показано, что для функций из области определения оператора $A$ (см. неравенства (5), (6)) справедливо неравенство $u^2(x) \le \frac{-\ln h}{p_0}(Bu,u)$ для всех $x\in[0,1]$. Отсюда следует, что $\max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)| \le \sqrt{\frac{-h\ln h}{p_0}(Bu,u)} = \sqrt{\frac{-h\ln h}{p_0}}\| u \|_*$. То есть из сходимости в энергетическом пространстве $H_B$ следует равномерная сходимость. Теорема доказана.

Задача (3) сводится к проблеме о минимуме функционала

$$\Phi(u) = \int_h^1 x(p(x)u'(x))^2 dx - 2\int_h^1 xf(x)u(x)dx + h\int_0^h (p(x)u'(x))^2 dx - h\int_0^h f(x)u(x)dx \qquad (7)$$

и имеет единственное решение в энергетическом пространстве $H_B$.

## Литература


1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М. : Наука, 1970. – 512 с.

2. *Виноградова Г. А.* О решении сингулярной задачи вариационным методом // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа. – Воронеж : Издательский дом ВГУ. – 2015.

3. *Виноградова Г. А.* О решении сингулярной задачи вариационным методом // Вестник факультета ПММ. – 2015. – Вып. 10. – С. 39–42.

4. *Виноградова Г. А.* Регуляризация вариационной задачи для сингулярного оператора // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : Сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2020. – С. 52-55.

УДК 517.9

# К СПЕКТРАЛЬНЫМ СВОЙСТВАМ ОДНОГО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Г. В. Гаркавенко[1], Н. Б. Ускова[2]**

[1]*Воронежский государственный педагогический университет,*
[2]*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается дифференциальный оператор первого порядка, возмущенный оператором дробного интегрирования Римана-Лиувилля на отрезке [0;1] с периодическими краевыми условиями. Методом исследования служит метод подобных операторов. Описываются спектральные свойства изучаемого оператора.
**Ключевые слова:** дифференциальный оператор первого порядка, спектр, метод подобных операторов, дробный интеграл Римана-Лиувилля.

Применение преобразования подобия для исследования различных классов возмущенных операторов используется достаточно давно. Оно берет свое начало с приведения матриц к диагональному виду [1]. Считается, что впервые эта идея по отношению к операторам была высказана К. О. Фридрихсом (метод Фридрихса подобных операторов) для операторов с непрерывным спектром [2, 3]. Хотя есть мнение, что первоначально идея принадлежала русскому математику Летникову А. В. [4]. Полный обзор по истории и современному состоянию этой теории можно найти в [5].

Метод подобных операторов, предложенный А. Г. Баскаковым, также использует преобразование подобия исследуемого возмущенного оператора в более просто устроенный оператор. Такой, что его спектральные свойства легко изучать, потому что они близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. Общую схему метода подобных операторов можно посмотреть в [6–9]. Кроме работ Фридрихса, метод подобных операторов опирается на метод Тернера подобных операторов [10], а также метод кинематического подобия Ляпунова [11] и замену Крылова-Боголюбова [12].

В связи с интересом в последнее десятилетие к дифференциальным операторам с инволюцией [13–20] потребовалась модификация метода подобных операторов, предназначенная специально для исследования нормальных линейных замкнутых операторов с дискретным спектром, собственные значения которых «не разбегаются». В работах [21, 22] именно такая модификация и была разработана, причем более общий ее вариант в [21], а максимально приспособленный под дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией – в [22]. Потом возник вопрос, для каких еще классов возмущенных дифференциальных операторов данная модификация применима. Один из таких типов операторов и рассматривается в данной работе. Отметим, что это не единственный пример применения указанной модификации (см., например, [23, 24]).

Пусть $\mathcal{H} = L_2[0,1]$ – гильбертово пространство измеримых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ и суммируемых с квадратом модуля (классов эквивалентности) функций. Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ задается формулой

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt, \quad x, y \in \mathcal{H},$$

и норма $\|x\|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt$ порождается этим скалярным произведением. Через $W_2^1[0,1]$ обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $\mathcal{H}$ с производными из $\mathcal{H}$.

Символом $\operatorname{End}\mathcal{H}$ обозначим банахово пространство всех линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, с нормой $\|X\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Xx\|$, $x \in \mathcal{H}$, $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, а символом $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ – идеал операторов Гильберта-Шмидта из $\operatorname{End}\mathcal{H}$. Свойства идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ можно найти в [10, 25].

В $\mathcal{H}$ рассмотрим интегро-дифференциальный оператор $L : D(L) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ вида

$$(Ly)(t) = \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} y(x)dx, \quad t \in [0,1], \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.5,$$

$$D(L) = \{y \in W_2^1[0,1],\, y(0) = y(1)\}.$$

Здесь через $\Gamma(\alpha)$ обозначена гамма-функция [26, 27].

Представим оператор $L$ в виде $L = A - B$, где $A = d/dt$, $D(A) = D(L)$, и

$$(By)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} y(x)dx, \quad t \in [0,1], \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.5.$$

Оператор $B$ обычно называется дробным интегралом Римана-Лиувилля (см. [26, 27]). Он ограничен на $\mathcal{H}$. Отметим, что обычно требуется, чтобы функция $y$ была абсолютно интегрируема на $[0,1]$, но в рассматриваемом случае $(\alpha > 0.5)$ этого условия не требуется. Оператор $B$ является интегральным оператором с суммируемым с квадратом на $[0,1]\times[0,1]$ ядром и нормой Гильберта-Шмидта

$$\|B\|_2 \leqslant \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}((2\alpha-1)2\alpha)^{-1/2}.$$

Введем обозначения

$$b_j = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} e^{i2\pi j(x-t)}dxdt.$$

Рассмотрим невозмущенный оператор

$$A = \frac{d}{dx}, \quad A : D(A) = D(L) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Спектральные характеристики оператора $A$ известны. Числа $\lambda_n = i2\pi n/\omega$, $n \in \mathbb{Z}$, являются его простыми изолированными собственными значениями, отвечающими собственным векторам – функциям $e_n(t) = e^{\lambda_n t} = e^{i2\pi nt/\omega}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Соответствующие спектральные проекторы $P_n$, $n \in \mathbb{Z}$, действуют по формуле $P_n x = (x, e_n)e_n = \hat{x}(n)e_n$, где $\hat{x}(n)$ – $n$-й коэффициент Фурье в разложении функции $x$. Обозначим $P_{(n)} = \sum\limits_{|i|\le n} P_i$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

С помощью [23, Теорема 5.3] и [24, Теорема 1.1] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть оператор $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ таков, что выполнено условие*

$$\frac{4\pi\|B\|_2}{\omega} < 1. \tag{1}$$

*Тогда оператор $L$ подобен оператору*

$$A - \sum_{i\in\mathbb{Z}} P_i X_* P_i = A - Y,$$

*где оператор $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ – диагональный, а оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов (см. [24, формула (5)]) и это решение может быть найдено методом итераций, отправляясь от $X_{(1)} = B$.*

Выполнение условия (1) теоремы 1 нельзя гарантировать всегда. Поэтому также удобно иметь теорему, условия которой не предполагают малость величины $\|B\|_2$ или хорошую отделенность собственных значений оператора $A$.

Из [24, Теоремы 1.2 и 5.7] вытекает

**Теорема 2.** *Существует такое целое число* $k \geq 0$, *что оператор* $L$ *подобен оператору блочно-диагонального вида*

$$A - P_{(n)} X_* P_{(n)} - \sum_{|i|>n} P_i X_* P_i = A - \widetilde{B},$$

*где* $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *есть решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов. Имеет место равенство*

$$L(I+U) = (I+U)\left(A - \widetilde{B}\right),$$

*где* $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теоремы 1 и 2 позволяют выразить спектральные характеристики оператора $L$ через спектральные характеристики оператора $A - \widetilde{B}$. Например, получить асимптотические формулы для собственных значений и собственных векторов, доказать равносходимость спектральных разложений и выписать вид группы операторов, генератором которой является исследуемый оператор $L$. Соответствующие результаты, полученные с помощью метода подобных операторов для дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и периодическими краевыми условиями и для оператора Дирака с потенциалом общего вида и краевыми условиями Дирихле приведены в [26–28]. Заметим также, что так как возмущение $B$ в данной задаче ограничено, то результаты, касающиеся группы операторов, можно получить из общей теории возмущенных полугрупп (групп) операторов (см. [29, 32]), не прибегая к методу подобных операторов.

**Теорема 3.** *Для собственных значений оператора L имеют место асимптотические формулы*

$$\widetilde{\lambda}_n = i2\pi n - b_n + \beta_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| > k,$$

*где последовательность* $(\beta_n, n \in \mathbb{Z})$ *суммируема. Соответствующие собственные векторы* $\tilde{e}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > k$, $\tilde{e}_n = (I+U)e_n$, $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, *образуют базис Бари в* $\mathcal{H}$ *и*

$$\sum_{|n|>k} \|\tilde{e}_n - e_n\|_2^2 < \infty.$$

**Теорема 4.** *Имеет место следующее предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{|j|\leq n} P_j - \tilde{P}_{(k)} - \sum_{|j|=k+1}^{n} \tilde{P}_j \right\|_2 = 0.$$

**Теорема 5.** *Оператор* $L$ *является генератором сильно непрерывной операторной группы* $\tilde{T} : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\mathcal{H}$. *Группа* $\tilde{T} : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\mathcal{H}$ *подобна группе* $T : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\mathcal{H}$ *вида*

$$T(t) = \sum_{|n|>k} e^{i\tilde{\lambda}_n t} P_n + e^{i(A-\tilde{B})_{(k)} t} P_{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in \mathbb{R},$$

*где* $(A - \tilde{B})_{(k)}$ *есть сужение оператора* $A - \tilde{B}$ *на образ проектора* $\tilde{P}_{(k)}$.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №19-01-00-732.

**Литература**

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Физматлит, 2004. – 560 с.

2. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве / К. Фридрихс. – М. : Мир, 1968. – 232 с.

3. *Friedrichs K. O.* Lectures on advanced ordinary differential equations. Notes by P. Berg, W. Hirsch, P. Treuenfels / K. O. Friedrichs. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1965. – 207 p.

4. Историко-математические исследования. Выпуск 5 / сост. Г. Ф. Рыбкин, А. П. Юшкевич. – М. : ГИТТЛ, 1952. – 472 с.

5. *Ситник С. М.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – М. : Физматлит, 2019. – 224 с.

6. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. – 164 с.

7. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 3–32.

8. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Изв. РАН. Сер. матем. – 2011. – Т. 75, № 3. – С. 3–28.

9. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, Д. М. Поляков // Матем. сб. – 2017. – Т. 208, № 1. – С. 3–47.

10. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3 / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : Мир, 1974. – 662 с.

11. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.

12. *Баскаков А. Г.* Об абстрактном аналоге преобразования Крылова-Боголюбова в теории возмущенных линейных операторов / А. Г. Баскаков // Функц. анал. и его прил. – 1999. – Т. 33, № 2. – С. 76–80.

13. *Kopzhassarova A. A.* Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with an involution / A. A. Kopzhassarova, A. L. Lukashov, A. M. Sarsenbi // Abstr. Appl. Anal. – 2012. – Article ID 590781.

14. *Cabada A.* Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions / A. Cabada, A. F. Tojo // J. Math. Anal. Appl. – 2014. – Vol. 412. – P. 529–546.

15. *Бурлуцкая М. Ш.* Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 10–20.

16. *Бурлуцкая М. Ш.* О смешанной задаче для уравнений с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями / М. Ш. Бурлуцкая // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 3–12.

17. *Крицков Л. В.* Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией / Л. В. Крицков, А. М. Сарсенби // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 990–996.

18. *Баскаков А. Г.* Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Уфимск. матем. журн. – 2018. – Т. 10, № 3. – С. 11–34.

19. *Криштал И. А.* Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов / И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Сиб. электрон. матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 1091–1132.

20. *Владыкина В. Е.* Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией / В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 5. – С. 643–659.

21. *Baskakov A. G.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices / A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 477. – P. 930–960.

22. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Прикладная математика & физика. – 2020. – Т. 52, № 2. – С. 72–86.

23. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Прикладная математика & физика. – 2020. – Т. 52, № 3. – С. 185–194.

24. *Гаркавенко Г. В.* Об одном модельном примере метода подобных операторов / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // В сб. Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. – 2020. – С. 112–115.

25. *Гохберг И. Ц.* Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1965. – 448 с.

26. *Баскаков А. Г.* Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 277–281.

27. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 9. – С. 1261–1265.

28. *Ускова Н. Б.* Спектральные свойства оператора Дирака с негладким потенциалом общего вида и группы операторов / Н. Б. Ускова // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 8. – С. 1154–1158.

29. *Hille E.* Functional analysis and semi-groups / E. Hille, R. S. Phillips. – New York: Amer. Math. Soc., 1957. – 808 p.

30. *Engel K.-J.* One-parameter semigroups for linear evolution equation / K.-J. Engel, R. Nagel. – New York: Springer, 2000. – 609 p.

31. *Riesz M.* L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy / M. Riesz // Acta Math. – 1949. – Vol. 81. – P. 1–222.

32. *Самко С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

УДК 531.332.1

# О ВОЗМОЖНОМ СУЩЕСТВОВАНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ЗАДАЧЕ О БРАХИСТРОХРОНЕ

**С. О. Гладков, С. Б. Богданова**

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** Показано, что при использовании основных принципов теории криволинейного движения в подвижном базисе можно аналитически найти решение задачи о брахистохроне с учетом любых действующих на тело сил. При учете сил сухого и вязкого трения, а также силы тяжести предсказана точка «геометрического фазового перехода», которая соответствует переходу брахистохрон с одного класса траекторий на качественно другой.

**Ключевые слова:** брахистохрона, сухое трение, вязкое трение, подвижный базис, численное моделирование.

Впервые задача о брахистохроне была предложена для обсуждения Я. Бернулли в 1696 году. При этом ее постановка формулируется буквально в одном предложении. Необходимо найти такой класс кривых, соединяющих две заданные точки $A$ и $B$, по которым материальное тело могло бы скатиться за наименьшее время.

Как было показано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбница и другими великими математиками, такими линиями оказались циклоиды. При этом основой решения задачи о брахистохроне всегда служили вариационные принципы (см., к примеру, монографии [1–3]). В настоящем сообщении мы приведем подробное решение этой задачи с учетом силы тяжести, а также сил вязкого и сухого трения, исходя из общих принципов динамики криволинейного движения, не прибегая к методам теории оптимального управления и вариационного исчисления.

Решение задачи удобно разбить на две части. Вначале мы приведем ее решение без учета сил трения, а затем учтем диссипативные механизмы.

1. Силы трения отсутствуют.

Составим систему динамических уравнений движения в подвижном базисе $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – орт касательной к произвольной точке $M$ траектории движения тела, а $\mathbf{n}$ – орт нормали в этой точке. Проекции ускорения силы тяжести на подвижные оси $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$, согласно рис. 1 при этом будут:

$$\begin{cases} g\sin\alpha = \dot{\mathrm{v}}, \\ g\cos\alpha = -\dfrac{\mathrm{v}^2}{R}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, $R = \left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big/ y''$ – радиус кривизны траектории в точке $M$.

После преобразований решение системы (1) находится в виде зависимостей

$$\mathrm{v} = C_1\left|\cos\alpha\right|, \quad \alpha = -\frac{gt}{C_1}, \tag{2}$$

а после учета соотношений $\dot{x} = \mathrm{v}_x = \mathrm{v}\cos\alpha$ и $\dot{y} = \mathrm{v}_y = \mathrm{v}\sin\alpha$, находим и параметрическое уравнение движения тела:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{C_1^2}{4g}\left(\dfrac{2gt}{C_1} + \sin\left(\dfrac{2gt}{C_1}\right)\right), \\ y(t) = \dfrac{C_1^2}{4g}\left(1-\cos\left(\dfrac{2gt}{C_1}\right)\right). \end{cases} \tag{3}$$

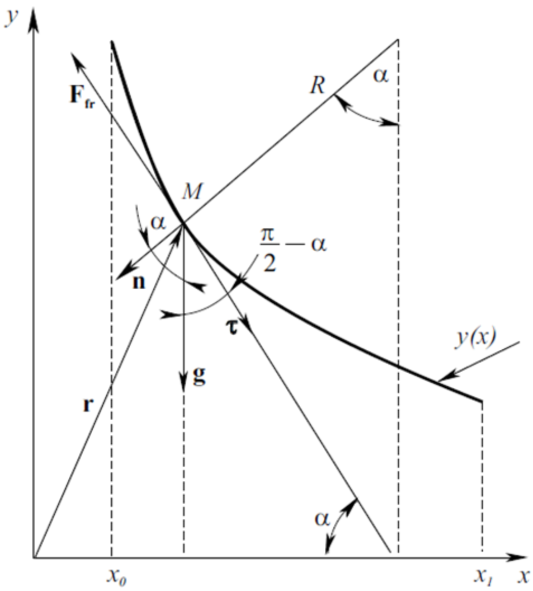



*Рис. 1. Геометрия задачи:* $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y -$ *радиус – вектор, проведенный из начала координат в произвольную точку* $M$. *Условно* $x_0, x_1$ *– начало и конец траектории*

Циклоиды, заданные формулами (3), приведены на рис. 2.

2. Составим теперь уравнения движения в том же подвижном базисе, но с учетом сил трения.

Введем следующие обозначения. Пусть сила вязкого трения $\mathbf{F}_{1fr} = -k_1\mathbf{v}$, а сухого $\mathbf{F}_{2fr} = \hat{k}_2 m\mathbf{g}$, где $\hat{k}_2$ – безразмерный тензорный коэффициент трения [4].

Тогда вместо системы (1) мы приходим к следующим уравнениям

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{v}} = g\sin\alpha - \dfrac{k_1}{m}\mathrm{v} - k_2 g\cos\alpha\left(1 + \dfrac{|R|}{R}\right), \\ \mathrm{v}^2 = |R|\, g\cos\alpha. \end{cases} \tag{4}$$

Аналитическое решение системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} \alpha(t) = \dfrac{1}{2k_2}\ln\left|\dfrac{C_2}{1 - \dfrac{2mk_2}{C_1k_1}e^{\frac{k_1t}{m}}}\right|, \\ \mathrm{v} = gC_1\left|e^{-\frac{k_1t}{m}} - \dfrac{2mk_2}{C_1k_1}\right|\cos\alpha. \end{cases} \tag{5}$$

где $C_{1,2}$ – константы интегрирования.

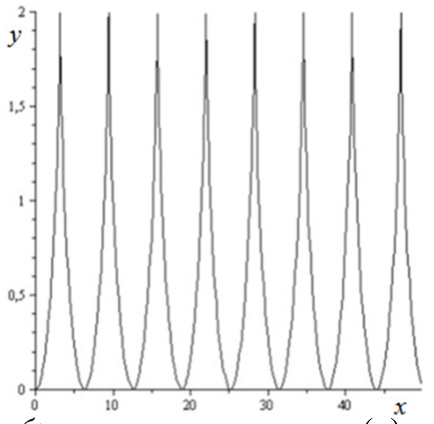



*Рис. 2. Графическое изображение зависимости* $y(x)$ *в отсутствие трения*

Воспользовавшись очевидными соотношениями

$$\dot{x} = \mathrm{v}_x = \mathrm{v}\cos\alpha,\ \dot{y} = \mathrm{v}_y = \mathrm{v}\sin\alpha,$$

приходим к решению задачи в параметрическом виде

$$\begin{gathered} \dot{x} = \mathrm{v}_x = gC_1\left|e^{-\frac{k_1 t}{m}} - \frac{2mk_2}{C_1k_1}\right|\cos^2\left[\frac{1}{2k_2}\ln\left|\frac{C_2}{1-\frac{2mk_2}{C_1k_1}e^{\frac{k_1 t}{m}}}\right|\right], \\ \dot{y} = \mathrm{v}_y = -\frac{1}{2}gC_1\left|e^{-\frac{k_1 t}{m}} - \frac{2mk_2}{C_1k_1}\right|\sin\left[\frac{1}{k_2}\ln\left|\frac{C_2}{1-\frac{2mk_2}{C_1k_1}e^{\frac{k_1 t}{m}}}\right|\right] \end{gathered} \tag{6}$$

Полагая $C_2 = 1$, из (6) немедленно следует тогда, что

$$\begin{gathered} x(t) = a\int_0^p\left|e^{-u} - b\right|\cos^2\left[\frac{1}{2k_2}\ln\left|1-2bk_2e^u\right|\right]du \\ y(t) = -\frac{a}{2}\int_0^p\left|e^{-u} - b\right|\sin\left[\frac{1}{k_2}\ln\left|1-2bk_2e^u\right|\right]du \end{gathered}, \tag{7}$$

где безразмерные параметры $p = \dfrac{k_1 t}{m}$, $a = \dfrac{mgC_1}{k_1}$ и $b = \dfrac{m}{C_1k_1}$.

Как видно из рис. 3, в точке $u_0 = \ln\left(\dfrac{1}{2k_2b}\right)$ имеет место своеобразный геометрический «фазовый переход», под которым мы подразумеваем переход с одного класса траекторий на качественно другой.

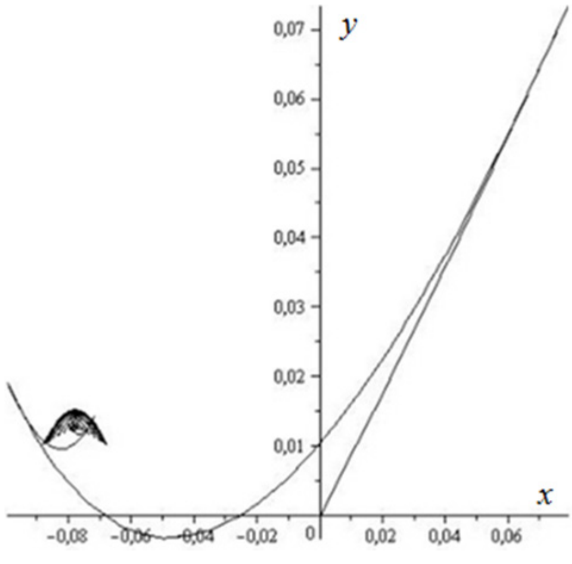



*Рис. 3. Для параметров $b = 1$ $2k_2 = 0.1$ показано качественное изменение траектории при переходе через точку «геометрического фазового» перехода $u_0 = \ln 10 \approx 2.3$*

Другие результаты численного моделирования решений (7) можно посмотреть в работе авторов [5].

**Литература**

1. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.

2. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. – Москва : Мир, 1974. – 488 с.

3. *Гладков С. О.* Сборник задач по теоретической и математической физике / С. О. Гладков. – Москва : Физматлит, 2010. – 488 с.

4. *Ландау Л. Д.* Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва : Наука, 1988. – 733 с.

5. *Гладков С. О.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки Физического факультета МГУ. – 2016. – № 1. – 161101.

УДК 531.332.1

# О КЛАССЕ ВОЗМОЖНЫХ ФОРМ ЖЕЛОБА, КОГДА СИЛА РЕАКЦИИ С ЕГО СТОРОНЫ НА ДВИЖУЩЕЕСЯ ТЕЛО ПОСТОЯННА

**С. О. Гладков, С. Б. Богданова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Найдена зависимость силы реакции желоба $N(y)$ на движущееся по нему материальное тело в виде функции от формы этого желоба $y = y(x)$. Класс кривых, для которых $N(y) = \text{const}$, находится из решения уравнения $N\left(y, y', y''\right) = \text{const}$. Графически проиллюстрированы возможные зависимости $y(x)$, когда $N = \text{const}$.
**Ключевые слова:** криволинейное движение, сила реакции, подвижный базис, нелинейное дифференциальное уравнение, численное решение.

Разработанный в работах авторов [1–3] метод решения задач, связанных с криволинейным движением, основан на записи динамических уравнений в подвижном базисе $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – орт касательной к произвольной точке $M$ траектории движения тела, а $\mathbf{n}$ – орт нормали в этой точке.

С помощью такого подхода легко получить общие уравнения плоского (и не только плоского) криволинейного движения с учетом любых диссипативных сил. Тривиально показать, что при движении тела по параболе сила реакции опоры $N = 0$, а при движении по брахистохроне – $N(y) = 2mg\cos\alpha$, где $m$ – масса тела, $g = |\mathbf{g}|$ – величина ускорения свободного падения, а $\alpha$ – угол между касательной к траектории и осью $x$.

Если угол $\alpha$ отсчитывать от внешней стороны, то есть угол $\alpha$ тупой, то косинус следует брать со знаком «минусом», как в работе [5].

В настоящей работе будет решаться обратная задача [4], а именно, мы хотим найти такую форму желоба $y(x)$, когда сила реакции при движении по нему материального тела массой $m$ на некотором отрезке $x_0 \le x \le x_1$ остается постоянной (см. рис. 1).

Считая $\alpha$ острым углом, запишем общее выражение для силы реакции:

$$N(y) = \frac{m\mathbf{v}^2}{R} + mg\cos\alpha, \tag{1}$$

где $R$ – радиус кривизны траектории в данной точке.

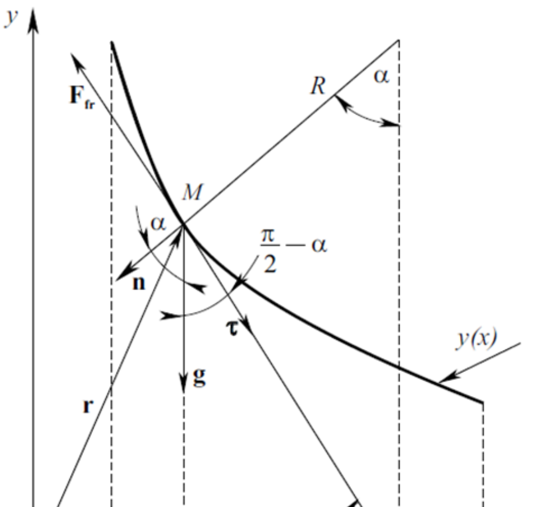



*Рис. 1. Геометрия задачи*

С учетом соотношений $y' = tg\alpha$, $\frac{1}{R} = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ выражение для силы реакции примет тогда вид:

$$N\left(y\right) = \frac{m\mathbf{v}^2 y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{mg}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{2}$$

Фигурирующую в (2) скорость нам следует найти в виде функции от формы желоба $y(x)$. Действительно, проектируя силы на подвижный орт $\boldsymbol{\tau}$, имеем

$$\dot{\mathrm{v}} = g\sin\alpha. \tag{3}$$

Из очевидной цепочки соотношений

$$\dot{\alpha} = -\frac{\mathrm{v}}{R},\ R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''},\ \sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\ d\alpha = \frac{y''dx}{1+y'^2},$$

следует, что

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2 - 2gy, \tag{4}$$

где $\mathrm{v}_0$ – начальная скорость, а движение начинается из начала координат. Подстановка (4) в (2) дает зависимость силы реакции желоба от его формы

$$N(y) = \frac{2mg}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\frac{y''\left(a-y\right)}{1+y'^2} + \frac{1}{2}\right]. \tag{5}$$

Отсюда видно, что если движение происходит по параболе (форма желоба представляет собой параболу) с уравнением $y = x - \frac{x^2}{2a}$, где длина $a = \frac{\mathrm{v}_0^2}{2g}$, из (5) немедленно следует отмеченное выше условие отсутствия реакции $N = 0$.

Класс же функций, для которых реакция постоянна $N = \mathrm{const}$, мы найдем из уравнения:

$$\frac{N\left(y\right)}{mg} = \frac{2}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\frac{y''\left(a-y\right)}{1+y'^2} + \frac{1}{2}\right] = p = \mathrm{const}. \tag{6}$$

Решение этого уравнения имеет место, если выполняются следующие два неравенства

$$0 \le p \le 1 \text{ и } y \le a.$$

В результате несложных преобразований уравнение (6) приводится к следующему трансцендентному уравнению

$$\sqrt{\left(p + \frac{1-p}{\sqrt{a}}\sqrt{a-y}\right)^2 - 1} - p\ln\left(p + \frac{1-p}{\sqrt{a}}\sqrt{a-y} + \sqrt{\left(p + \frac{1-p}{\sqrt{a}}\sqrt{a-y}\right)^2 - 1}\right) = \frac{1-p}{\sqrt{a}}x. \tag{7}$$

Для заданных граничных условий, численное решение уравнения (7) позволяет нам построить различные типы траекторий, проиллюстрированных на рис. 2.

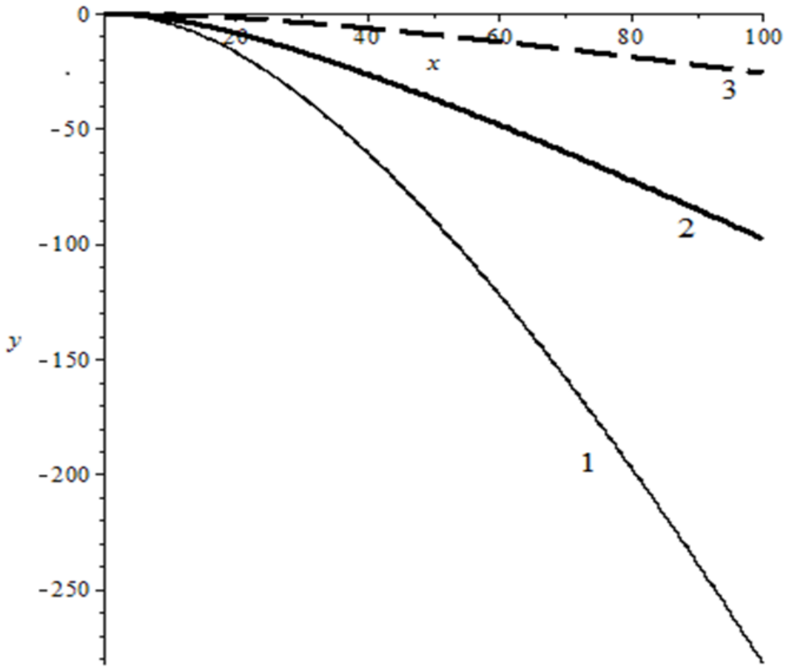



*Рис. 2. Траектории, для которых выбран постоянный геометрический фактор* $b = 10$.
*Видно, что с ростом значения* $p$ *зависимость* $y(x)$ *стремится к линейной.*
*Кривая 1 соответствует* $p = 0.1$, *кривая 2 –* $p = 0.5$ *и кривая 3 –* $p = 0.9$. *Параметр* $a = 1$

**Литература**

1. *Гладков С. О.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физ. ф-та МГУ. – 2016. – № 1. – 161101.

2. *Гладков С. О.* О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С. О. Гладков // Ученые записки физ. ф-та МГУ. – 2016. – № 4. – 164002-1-5.

3. *Гладков С. О.* Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения, и их численный анализ в некоторых частных случаях / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физ. ф-та МГУ. – 2017. – № 1. – 171101-1-5.

4. *Гладков С. О.* О классе плоских геометрических кривых с постоянной реакцией на движение по ним материальных тел / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 160. – С. 28–31.

5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1965. – 436 с.

УДК 531.332.1

# К ВОПРОСУ О ФОРМЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА В УСЛОВИЯХ ЕЕ ВРАЩЕНИЯ

**С. О. Гладков, С. Б. Богданова**

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** Получена нелинейная система динамических уравнений движения шарика, скатывающегося по вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega$ одномерному желобу произвольной формы. Из условия минимальности времени скатывания определена форма этой кривой. С учетом сил сухого и вязкого трений приведены результаты аналитического и численного решения полученной системы уравнений.

**Ключевые слова:** брахистохрона, частота вращения, силы трения, нелинейные уравнения динамики, сила реакции.

В настоящем сообщении приводится решение задачи о выяснении формы траектории движения материального тела, которое движется по вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega$ желобу при условии, чтобы время скатывания было минимальным.

Уравнения движения тела будем записывать в мгновенном подвижном ортогональном базисе с ортами $\boldsymbol{\tau}_2,\ \boldsymbol{\tau}_1,\ \mathbf{n}$, приведенном на рис. 1. Связь базиса $\boldsymbol{\tau}_2,\ \boldsymbol{\tau}_1,\ \mathbf{n}$ с декартовым неподвижным базисом $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ можно записать в виде (см. [1–3]):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi, \\ \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{i}\cos\alpha\sin\varphi - \mathbf{j}\cos\alpha\cos\varphi + \mathbf{k}\sin\alpha, \\ \mathbf{n} = \mathbf{i}\sin\alpha\sin\varphi - \mathbf{j}\sin\alpha\cos\varphi - \mathbf{k}\cos\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку $d\mathbf{l} = d\rho\cdot\mathbf{n}_1 + \rho d\varphi\cdot\boldsymbol{\tau}_2 + dz\cdot\mathbf{k}$, то с учетом того, что $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi$, а матрица обратного преобразования к (1) есть

$$\hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \cos\alpha\sin\varphi & -\cos\alpha\cos\varphi & \sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\varphi & -\sin\alpha\cos\varphi & -\cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos\alpha\sin\varphi & \sin\alpha\sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\alpha\cos\varphi & -\sin\alpha\cos\varphi \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

то в подвижном базисе $\boldsymbol{\tau}_2,\ \boldsymbol{\tau}_1,\ \mathbf{n}$ имеем

$$d\mathbf{l} = \mathbf{n}\sin\alpha\left(-d\rho - \operatorname{ctg}\alpha dz\right) - \boldsymbol{\tau}_1\cos\alpha\left(d\rho - \operatorname{tg}\alpha dz\right) + \boldsymbol{\tau}_2\rho d\varphi. \tag{2}$$

Дифференцируя по времени формулу (2) и учитывая, что $\dot{\boldsymbol{\tau}}_2 = \omega\mathbf{n}_1,\ \dot{\mathbf{n}}_1 = -\omega\boldsymbol{\tau}_2,\ \dot{\mathbf{n}} = \omega\left[\mathbf{n}_1\times\boldsymbol{\tau}_1\right]$, а $\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 = \frac{\mathrm{v}_1}{R}\mathbf{n}$, где $R$ – радиус кривизны, получим выражение для вектора полного ускорения и, соответственно, для вектора полной силы

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\Bigg\{\omega\left[\mathbf{n}_1\times\boldsymbol{\tau}_1\right]\sin\alpha\left(-\dot{\rho} - \dot{z}\operatorname{ctg}\alpha\right) + \mathbf{n}\dot{\alpha}\cos\alpha\left(-\dot{\rho} - \dot{z}\operatorname{ctg}\alpha\right) +$$
$$+\mathbf{n}\sin\alpha\left(-\ddot{\rho} - \ddot{z}\,\mathrm{ctga} + \frac{\dot{z}\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha}\right) - \frac{\mathrm{v}}{R}\cos\alpha\left(\dot{\rho} - \dot{z}\operatorname{tg}\alpha\right)\mathbf{n} + \tag{3}$$
$$+\boldsymbol{\tau}_1\dot{\alpha}\sin\alpha\left(\dot{\rho} - \dot{z}\operatorname{tg}\alpha\right) - \boldsymbol{\tau}_1\cos\alpha\left(\ddot{\rho} - \ddot{z}\operatorname{tg}\alpha - \frac{\dot{z}\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha}\right) + \rho\omega^2\mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2\dot{\rho}\omega\Bigg\}.$$

Проектируя вектор силы на нормаль к желобу $\mathbf{n}$, а также на орты $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$, и учитывая результаты работы [1], после некоторых преобразований получим полную систему динамиче-

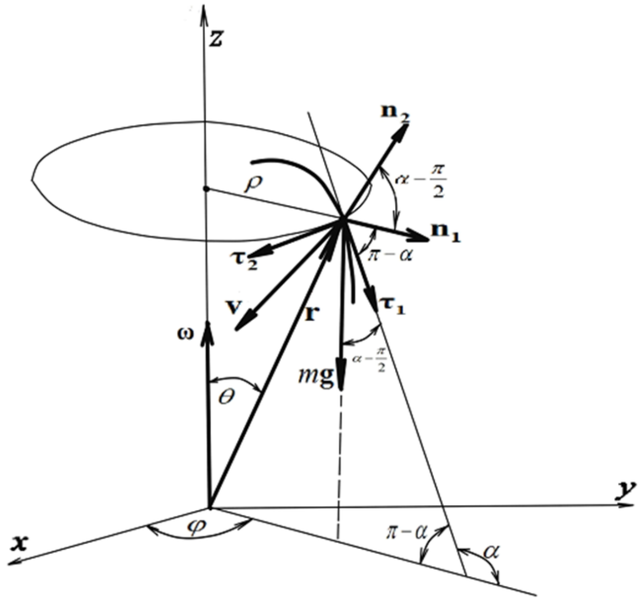



*Рис. 1. Угол $\alpha$ это внешний угол между касательной и проекцией желоба на плоскость $x-y$, угол $\varphi$ – полярный угол между осью $x$ и проекцией желоба на плоскость $x-y$*

ских уравнений движения с учетом обоих типов сил сопротивления для случая вращающейся брахистохроны.

$$\begin{cases} N = 2m\left(\omega^2\rho\sin\alpha - g\cos\alpha\right), \\ \dot{\mathrm{v}} = g\sin\alpha - \omega^2\rho\cos\alpha - \dfrac{F_{fr}}{m}, \\ \mathrm{v}\dot{\alpha} = -g\cos\alpha - \omega^2\rho\sin\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{fr} = k_1\mathrm{v} + k_2 N, \\ \dot{\rho} = -\mathrm{v}\cos\alpha, \\ \dot{z} = \mathrm{v}\sin\alpha. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что сила вязкого трения выбрана в виде, пропорциональном скорости шарика с коэффициентом пропорциональности $k_1$, $k_2$ – коэффициент сухого трения.

Из выражения (4) следует, что если $\omega = 0,$ то приведенная система переходит в уравнения работы [1], которые описывают неподвижную брахистохрону.

Вводя в (4) безразмерные аргумент $\tau = \dfrac{gt}{\mathrm{v}_0}$, параметр $\mu = \dfrac{k_1\mathrm{v}_0}{mg}$ и функции $y_1 = \dfrac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_0}$, $y_2 = \alpha$, $y_3 = \dfrac{\rho g}{\mathrm{v}_0^2}$, $y_4 = \dfrac{zg}{\mathrm{v}_0^2}$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = \sin y_2 - \lambda y_3\cos y_2 - \mu y_1 - 2k_2\left(\lambda y_3\sin y_2 - \cos y_2\right), \\ y_1 y_2' = -\cos y_2 - \lambda y_3\sin y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_3' = -y_1\cos y_2, \\ y_4' = y_1\sin y_2, \end{cases} \tag{5}$$

Результаты численного решения системы (5) показаны на рис. 2–4.

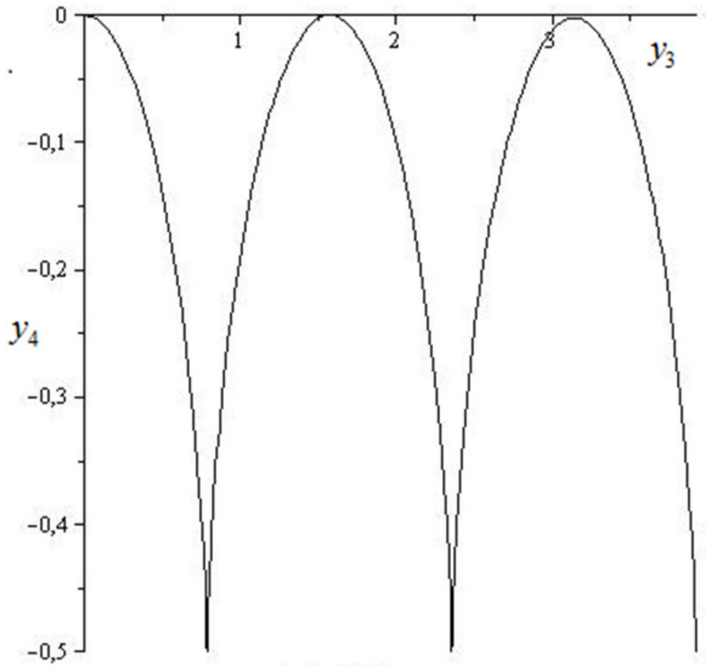



*Рис. 2. Численное решение (5) в отсутствии вращения $\lambda = 0$ и в пренебрежении силами сопротивления $k_1 = k_2 = 0$ показано в виде зависимости $y_4(y_3)$. Как и должно быть, получилась классическая брахистохрона*

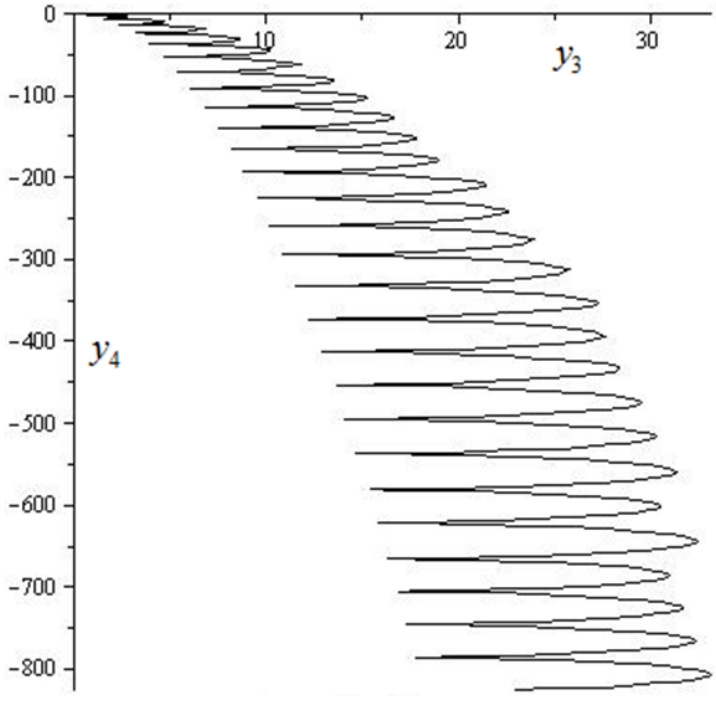



Рис. 3. Решение системы (5) при $k_1 = k_2 = 0$ и с учетом вращения для $\lambda = 5$ показано в виде зависимости $y_4(y_3)$

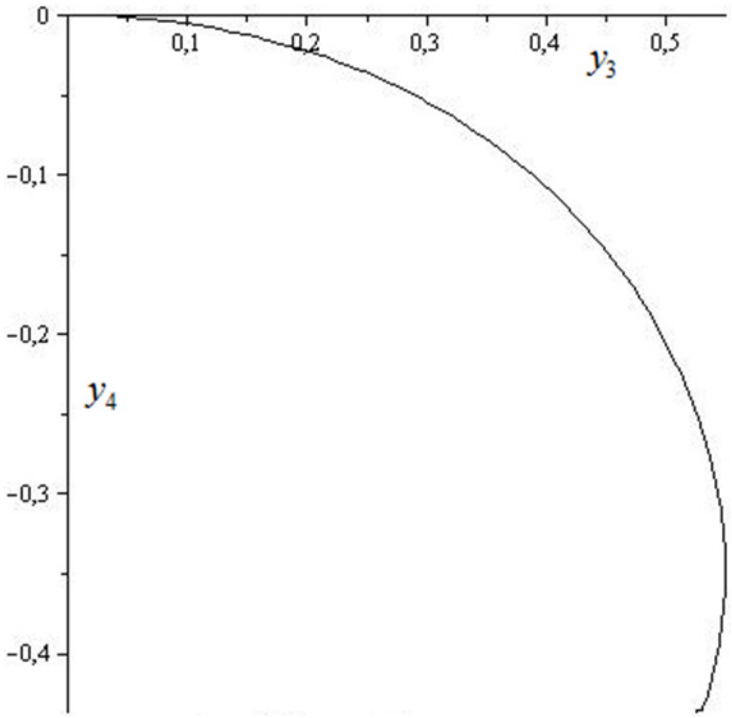



*Рис. 4. Иллюстрация формы желоба в условиях вращения* $y_4(y_3)$, *когда* $\lambda = 1$ *и при учете сил сопротивления, когда* $\mu = 0.01$, *а коэффициент сухого трения* $k_2 = 0.3$

**Литература**


1. *Гладков С. О.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 1. – 161101-1-5.

2. *Гладков С. О.* О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С. О. Гладков // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 4. – 164002-1-5.

3. *Гладков, С. О.* Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 2. – 172101.

УДК 531.332.1

# ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

**С. О. Гладков, С. Б. Богданова**

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** Дан подробный вывод динамических уравнений в виде замкнутой системы, состоящей из четырех нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих плоское криволинейное движение материальных тел. Учтены все силы сопротивления и проанализировано решение системы в некоторых частных случаях. Приведены результаты ее численного решения, которые проиллюстрированы графически.

**Ключевые слова:** криволинейное движение, закон сохранения момента импульса, нелинейные динамические уравнения.

В работе [1] была аналитически и численно решена задача о форме кривой наискорейшего спуска материального тела с учетом сил трения. Основной идеей работы была запись динамических уравнений в подвижном базисе $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к траектории, а $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной к ней по направлению движения (см. также работы [2–5]). Именно такой подход позволил решить поставленную задачу и получить полную замкнутую систему динамических уравнений материального тела с массой $m$ при учете обоих типов сил трения. Действительно, при знакомстве с обширной литературой по этому вопросу [6–11] мы не обнаружили системы общих динамических уравнений, описывающих плоское криволинейное движение, учитывающих диссипативные свойства реальной физической среды.

На рис. 1 схематически показан произвольный кусок криволинейной траектории, по которой движется тело массой $m$. Очевидно, что в этом случае уравнения можно записать в виде (см. [1])

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{v}} + \dfrac{k_2}{m}\mathrm{v} - k_1\dfrac{\mathrm{v}^2}{R} = g(\sin\alpha - k_1\cos\alpha), \\ \dfrac{\mathrm{v}^2}{R} - g\cos\alpha = \dfrac{N}{m}. \end{cases} \tag{1}$$

где $k_1$ и $k_2$ коэффициенты сухого и вязкого трения соответственно, $R$ – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке, $N$ – сила реакции желоба.

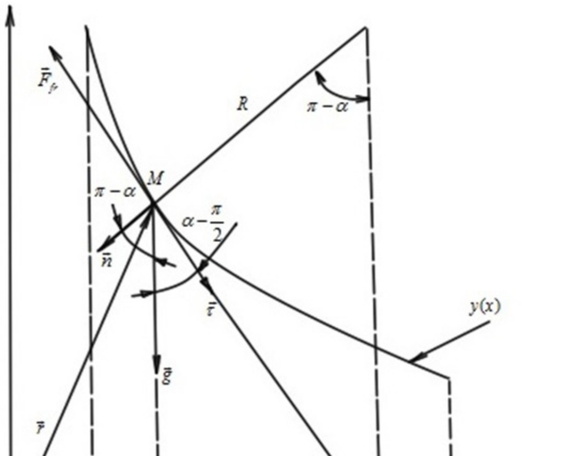



*Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи*

Как было показано в работе [1], в случае, если $N = 0$, траекторией движения будет парабола, а если $N = -2mg\cos\alpha$, то траекторией будет брахистохрона. В общем случае, когда исследуется динамика криволинейного движения по произвольной траектории систему уравнений (1) необходимо дополнить еще уравнением движения вектора момента импульса:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \tag{2}$$

где момент импульса тела относительно центра неподвижной системы координат $x - y$ есть $\mathbf{L} = m\left[\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right]$, а $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_i$, где $\mathbf{M}_i = \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i\right]$, $\mathbf{r}_i -$ радиус-вектор $i$-й силы $\mathbf{F}_i$. Для $z$ – компоненты уравнения (2) имеем

$$m\frac{d}{dt}\left[\mathrm{v}\,r\sin\left(\alpha-\varphi\right)\right] = m\,\dot{\mathrm{v}}\,r\sin\left(\alpha-\varphi\right) + m\,\mathrm{v}\frac{d}{dt}\left[r\sin\left(\alpha-\varphi\right)\right]. \tag{3}$$

С учетом (3) для системы уравнений (1) после некоторых преобразований находим следующую систему динамических уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{v}} + \dfrac{k_2}{m}\mathrm{v} + k_1\dfrac{\mathrm{v}^2}{R} = g(\sin\alpha - k_1\cos\alpha), \\ -gr\cos\alpha\cos\left(\alpha-\varphi\right) + \mathrm{v}\dfrac{d}{dt}\left[r\sin\left(\alpha-\varphi\right)\right] = \left(\dfrac{\mathrm{v}^2}{R} - g\cos\alpha\right)r\cos\left(\alpha-\varphi\right). \end{cases} \tag{4}$$

Нижнее уравнение после раскрытия производной по времени и подстановки в него формулы $\dot{\alpha} = \dfrac{\mathrm{v}}{R}$ существенно упрощается и дает

$$\dot{r} = r\dot{\varphi}\,\mathrm{ctg}\left(\alpha-\varphi\right) \tag{5}$$

После возведения в квадрат выражений для радиуса кривизны $\mathrm{v} = R\dot{\alpha} = \dfrac{dl}{dt} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$ и $R = \dfrac{\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\dot{r}^2\dot{\varphi} + r\dot{r}\ddot{\varphi} - r\ddot{r}\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^3}$ получим

$$\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)\dot{\alpha} = 2\dot{r}^2\dot{\varphi} + r\dot{r}\ddot{\varphi} - r\ddot{r}\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^3, \tag{6}$$

но поскольку $r^2\dot{\varphi}^2 = \mathrm{v}^2 - \dot{r}^2$, то из (6) следует

$$\dot{\alpha} - \dot{\varphi} = \frac{\dot{r}^2\dot{\varphi} + r\dot{r}\ddot{\varphi} - r\ddot{r}\dot{\varphi}}{\mathrm{v}^2}. \tag{7}$$

Далее, дифференцируя уравнение (5) по времени, имеем $-\dfrac{\dot{\alpha}-\dot{\varphi}}{\sin^2\left(\alpha-\varphi\right)} = \dfrac{\ddot{r}r\dot{\varphi} - \dot{r}^2\dot{\varphi} - r\dot{r}\ddot{\varphi}}{r^2\dot{\varphi}^2}$. Сравнивая это выражение с (7), а также учитывая (5), нижнее уравнение в (4) преобразуется в совсем простое

$$\dot{r} = \mathrm{v}\cos\left(\alpha-\varphi\right). \tag{8}$$

Из очевидного соотношения (см. [1]) $\dfrac{m\mathrm{v}^2}{R} = -mg\cos\alpha$ следует значительное упрощение верхнего уравнения в системе (4). В результате мы приходим к следующей системе уравнений для всех динамических переменных, в том числе и на углы $\alpha$ и $\varphi$:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{v}} + \dfrac{k_2}{m}\mathrm{v} = g\left(\sin\alpha - 2k_1\cos\alpha\right), \\ \dot{\alpha} = \pm\dfrac{g}{\mathrm{v}}\cos\alpha, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\mathrm{v}}{r}\sin\left(\alpha-\varphi\right), \\ \dot{r} = \mathrm{v}\cos\left(\alpha-\varphi\right). \end{cases} \tag{9}$$

Полный анализ уравнений (9) подробно приведен в работе [2]. Для анализа (9) удобно ввести во второе уравнение вместо знаков «плюс» – «минус» обобщающий коэффициент $p$. Такой прием позволяет нам получить целый класс новых траекторий:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{v}}+\dfrac{k_2}{m}\mathrm{v} = g\left(\sin\alpha - 2k_1\cos\alpha\right), \\ \dot{\alpha} = p\dfrac{g}{\mathrm{v}}\cos\alpha, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\mathrm{v}}{r}\sin\left(\alpha-\varphi\right), \\ \dot{r} = \mathrm{v}\cos\left(\alpha-\varphi\right). \end{cases} \tag{10}$$

При $k_1 = k_2 = 0$ решения (10) находятся в виде квадратур

$$\mathrm{v}\left(\alpha\right) = \frac{C_1}{\left|\cos\alpha\right|^{\frac{1}{p}}}, \quad \frac{pgt}{\mathrm{v}_0} = \left(-1\right)^{1/p}\int\limits_0^{\pi-\alpha}\frac{d\tau}{\cos^{1+\frac{1}{p}}\tau}. \tag{11}$$

Как было показано в [2], при $p<0$ решений не существует. Траектории движения тел при некоторых положительных значениях параметра $p$ приведены на рис. 2.

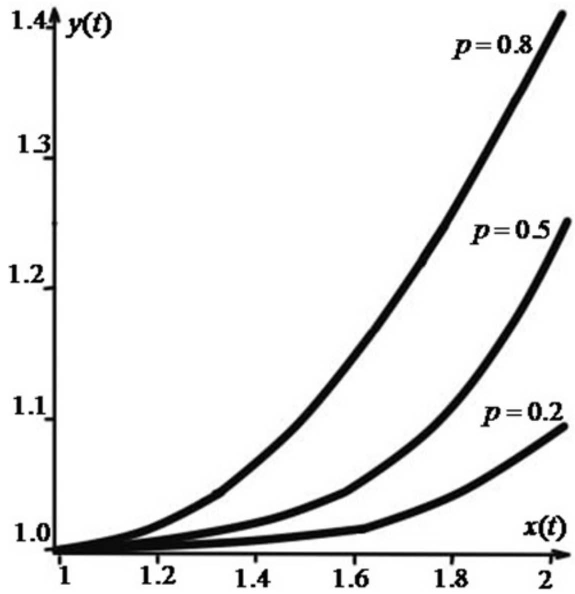



*Рис. 2. Криволинейные траектории тела в трех качественно похожих случаях, когда параметр* $p = 0.2; 0.5; 0.8$

**Литература**

1. *Гладков С. О.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне с трением / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 1. – 161001-1-5.

2. *Гладков С. О.* Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 1. – 171101.

3. *Гладков С. О.* О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С. О. Гладков // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 4. – 164002-1-5.

4. *Гладков С. О.* О классе плоских геодезических кривых в поле силы тяжести / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика. – 2019. – № 58. – С. 5–13.

5. *Гладков С. О.* К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения / С. О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 2. – 172101.

6. *Ландау Л. Д.* Механика / Л. Д.Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва : Наука, 1988. – 216 с.

7. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Механика / Д. В. Сивухин. – Москва : Физматлит, 2010. – 560 с.

8. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / А. И. Лурье. – Москва : Физмалит, 1961. – 824 с.

9. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1966. – 300 с.

10. *Добронравов В. В.* Основы аналитической механики / В. В. Добронравов. – Москва : Высшая школа, 1976. – 264 с.

11. *Коткин Г. Л.* Лекции по аналитической механике / Г. Л. Коткин, А. И. Черных, В. Г. Сербо. – Ижевск : РХД, 2010. – 236 с.

УДК 531.12

# О ДВИЖЕНИИ ШАРИКА МЕЖДУ ДВУМЯ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ЖЕСТКИМИ СФЕРАМИ ПРИ УЧЕТЕ СИЛ ТРЕНИЯ

**С. О. Гладков, С. Б. Богданова**

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** Получена нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение точечного шарика массой $m$, который начинает свое движение в вязкой жидкости между двумя концентрическими сферами из произвольной точки $M_0 = M(\theta_0, \varphi_0)$ при учете всех действующих на него сил. Найдена зависимость силы реакции от угловых переменных $\theta$ и $\varphi$, и численно проанализировано решение полученной системы уравнений. Проиллюстрирована трехмерная траектория движения шарика между сферами.

**Ключевые слова:** уравнения криволинейного движения, классическая механика, нелинейная динамика.

В этом сообщении мы приведем подробное решение задачи, суть которой состоит в описании динамики движения шарика в вязкой жидкости между двумя концентрическими жесткими сферами с учетом как вязкого, так и сухого трения, а также силы тяжести. В работе [1] (см. также [2]) рассматривается сферический маятник с учетом сил только вязкого трения, однако, сами уравнения приводятся без строгого вывода. Использование метода, суть которого (см. [3–8]) состоит в проектировании уравнений движения на мгновенный базис $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ (см. рис. 1) позволяет найти решение поставленной задачи.

Введем средний радиус $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$, и разложим вектор скорости по мгновенному базису, взятому на поверхности этой сферы $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ в виде $\mathbf{v} = \mathrm{v}_\theta \boldsymbol{\tau}_1 + \mathrm{v}_\varphi \boldsymbol{\tau}_2$, где проекции скорости:

$$\mathrm{v}_\theta = R\dot{\theta}, \ \ \mathrm{v}_\varphi = R\sin\theta\dot{\varphi}. \tag{1}$$

Дифференцируя выражение $\mathbf{v} = \mathrm{v}_\theta \boldsymbol{\tau}_1 + \mathrm{v}_\varphi \boldsymbol{\tau}_2$ по времени, получаем общее выражение для полного ускорения шарика:

$$\mathbf{a} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 + R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{\tau}_2 + R\sin\theta\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2 + R\dot{\varphi}\sin\theta\dot{\boldsymbol{\tau}}_2. \tag{2}$$

Учитывая очевидные соотношения $\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 = \frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dl_1}\frac{dl_1}{dt} = \mathrm{v}_\theta \frac{\mathbf{n}}{R} = \dot{\theta}\mathbf{n}$, $\dot{\boldsymbol{\tau}}_2 = \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dl_2}\mathrm{v}_\varphi = R\sin\theta\dot{\varphi}\frac{\mathbf{n}'}{R\sin\theta} = \dot{\varphi}\mathbf{n}'$, где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2}{2}$, а единичная нормаль $\mathbf{n}'$ направлена вдоль радиуса окружности $\rho = R\sin\theta$ и лежит в плоскости единичных векторов $\boldsymbol{\tau}_1$, $\mathbf{n}$, в результате найдем

$$\mathbf{a} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}^2\mathbf{n} + R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{\tau}_2 + R\sin\theta\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2 + R\dot{\varphi}^2\sin\theta\mathbf{n}'. \tag{3}$$

Подставим это выражение в общее уравнение движения $\mathbf{a} = \mathbf{g} + N\frac{\mathbf{n}}{m} + \frac{\mathbf{F}_c}{m}$, где $N$ – результирующая сила реакции между внешней и внутренней сферами, вектор которой определяется как $N\mathbf{n} = \frac{N_1\mathbf{n}_1 - N_2\mathbf{n}_2}{2}$, где $N_1$ – сила реакции нижней сферы, а $N_2$ – верхней, и вектор $\mathbf{n}_1$ направлен от внутренней сферы наружу, то есть от общего центра сфер, а $\mathbf{n}_2$ наоборот – к общему центру сфер от внутренней поверхности внешней сферы, $\mathbf{F}_c = -\left(k_1\mathrm{v} + k_2 N\right)\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{v}}$ – суммарная сила сопротивления, в которой $k_1$ и $k_2$ – коэффициенты вязкого и сухого трений. В итоге будем иметь

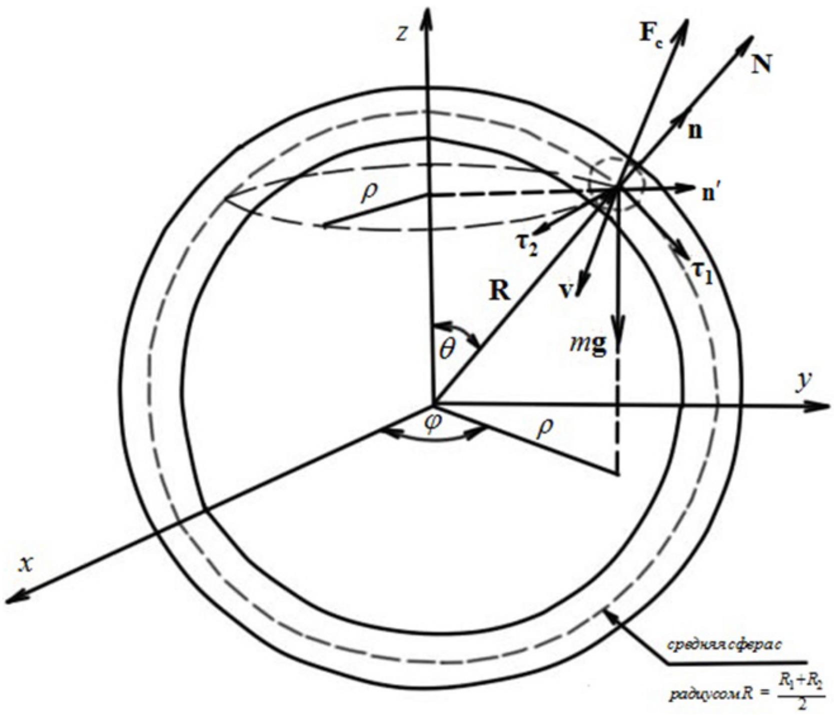



*Рис . 1.* $\mathbf{R}$ *– вектор среднего радиуса,* $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{R}}{R}$ *– единичная нормаль к нижней сфере,* $\boldsymbol{\tau}_1$ *– единичный вектор касательной (см. текст статьи),* $\boldsymbol{\tau}_2$ *– единичный вектор касательной к мгновенной окружности радиуса* $\rho$, *проведенной перпендикулярно оси* $(oz)$, $\mathbf{n}'$ *– единичный вектор нормали к этой окружности (он лежит в плоскости* $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}_1$*),* $\mathbf{v}$ *– мгновенная скорость, разложенная по единичному мгновенному базису* $\boldsymbol{\tau}_1$ *и* $\boldsymbol{\tau}_2$*,* $m\mathbf{g}$ *– сила тяжести,* $\mathbf{F}_c$ *– сила сопротивления, направленная против* $\vec{\mathbf{v}}$ *и касательная к поверхности средней сферы,* $\mathbf{N}$ *– сила реакции,* $\theta$ *– азимутальный угол,* $\varphi$ *– полярный угол сферической системы координат,* $\alpha = \pi - \theta$

$$R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}^2\frac{(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)}{2} + R\dot{\varphi}^2\sin\theta\mathbf{n}' + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{\tau}_2 + R\sin\theta\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2 =$$
$$= \mathbf{g} - \frac{k_2 R}{m\,\mathrm{v}}N\left(\dot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + \sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2\right) - \frac{k_1}{m}R\left(\dot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + \sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_2\right) + \frac{N_1\mathbf{n}_1 - N_2\mathbf{n}_2}{2m}, \tag{4}$$

где были учтены явные выражения (1) для компонент скорости.

Чтобы получить теперь искомую систему динамических уравнений, спроектируем уравнение (4) на подвижные ортогональные орты $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\mathbf{n}$. Для этого умножим его обе части скалярно на единичные вектора $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. В результате получаем соответственно

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + k_2\dfrac{N\dot{\theta}}{m\,\mathrm{v}} = \dfrac{\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}_1}{R}, \\ \ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + \gamma\dot{\varphi}\sin\theta + k_2\dfrac{N\sin\theta\dot{\varphi}}{m\,\mathrm{v}} = \dfrac{\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}_2}{R}, \\ N = \dfrac{N_1 + N_2}{2} = mR\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta - \dfrac{\mathbf{g}\mathbf{n}_1}{R}\right), \\ N = \dfrac{N_1 + N_2}{2} = mR\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dfrac{\mathbf{g}\mathbf{n}_2}{R}\right). \end{cases} \tag{5}$$

где введено вязкое затухание $\gamma = \dfrac{k_1}{m}$.

Поскольку $\mathbf{gn}_1 = -\mathbf{gn}_2 = g\cos(\pi-\theta) = -g\cos\theta$, $\mathbf{g\tau_1} = g\sin\theta$, а $\mathbf{g\tau_2} = 0$, то система (5) переходит в такую

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \gamma\dot{\alpha} + \dot{\varphi}^2 \sin\alpha\cos\alpha + k_2 \dfrac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2}}\left(\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\alpha\right) + \omega^2\sin\alpha = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\operatorname{ctg}\alpha + \gamma\dot{\varphi}\alpha + k_2 \dfrac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2}}\left(\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\alpha\right) = 0, \\ N = mR\left(\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\alpha\right). \end{cases} \tag{6}$$

где учтено, что $\mathrm{v}^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$.

Начальные условия для решения (6) можно сформулировать в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(0) = 0, \\ \dot{\theta}(0) = \dfrac{\mathrm{v}_0}{R}. \end{cases} \tag{7}$$

Можно легко показать, что параметрические зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ записываются в виде:

$$x(t) = R\sin\alpha\cos\varphi,\ \ y(t) = R\sin\alpha\sin\varphi,\ \ z(t) = -R\cos\alpha, \tag{8}$$

где $\theta = \pi - \alpha$.

Таким образом, с учетом начальных условий мы приходим к следующей замкнутой системе уравнений, определяющую траектории движения шарика:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \gamma\dot{\alpha} + \dot{\varphi}^2 \sin\alpha\cos\alpha + k_2 \dfrac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2}}\left(\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\alpha\right) + \omega^2\sin\alpha = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\operatorname{ctg}\alpha + \gamma\dot{\varphi} + k_2 \dfrac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2}}\left(\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\alpha\right) = 0, \\ x(t) = R\sin\alpha\cos\varphi, \\ y(t) = R\sin\alpha\sin\varphi, \\ z(t) = -R\cos\alpha, \\ \alpha(0) = \alpha_0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = 0, \\ \dot{\alpha}(0) = -\dfrac{\mathrm{v}_0}{R}. \end{cases} \tag{9}$$

Чтобы избавиться от особенности в знаменателе $\operatorname{ctg}\alpha$ во втором уравнении на функцию $\varphi$ при $\alpha = \pi n$, $n \in Z$, запишем $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \varepsilon^2}$, $\varepsilon \to 0$. Временные зависимости $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ при $k_2 = \gamma = 0.1$ и $\varepsilon = 0.02$ приведены на рис. 2.

Трехмерная же траектория движения шарика как результат численного моделирования системы (9) при его радиусе равным единице показана на рис. 3.

Согласно найденным численным решениям системы (9) мы можем найти также любые траектории движения в проекциях на плоскости $x-y$, $y-z$, $x-z$. Рис. 4, например, иллюстрирует соответствующую зависимость на плоскости $x-y$.

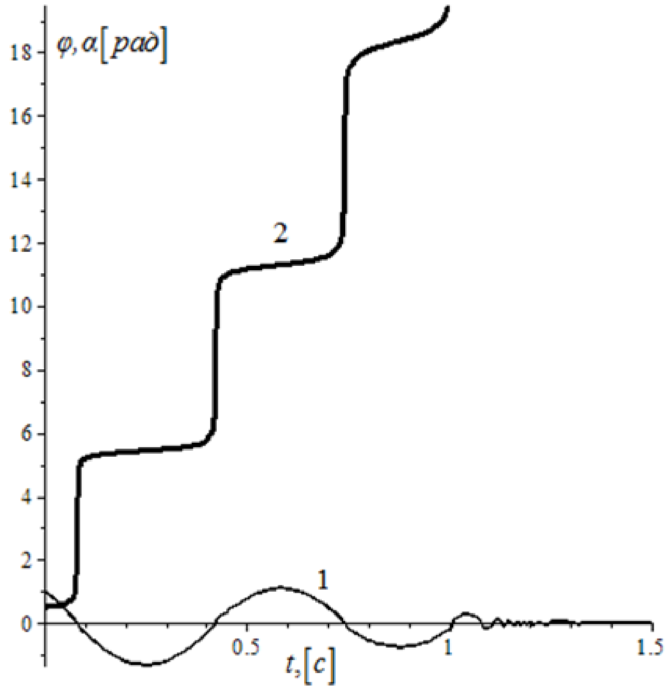



*Рис. 2. Линия 1 показывает временную зависимость азимутального угла $\alpha(t)$, а линия 2 – временную зависимость полярного угла $\varphi(t)$. Начальные условия выбраны такими*

$$\alpha(0)=\frac{\pi}{3},\ \varphi(0)=\frac{\pi}{6},\ \dot{\alpha}(0)=-10,\ \dot{\varphi}(0)=1 \text{ при } k_2=\gamma=0.1 \text{ и } \varepsilon=0.02$$

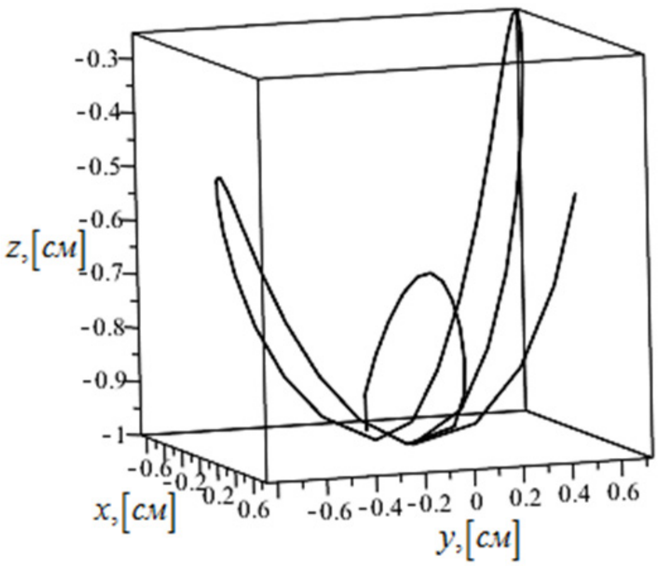



*Рис. 3. Для начальных условий $\alpha(0)=\frac{\pi}{3},\ \varphi(0)=\frac{\pi}{6},\ \dot{\alpha}(0)=-10,\ \dot{\varphi}(0)=1$ и $k_2=\gamma=0.1$ приведена траектория движения шарика по сфере в трехмерном измерении*

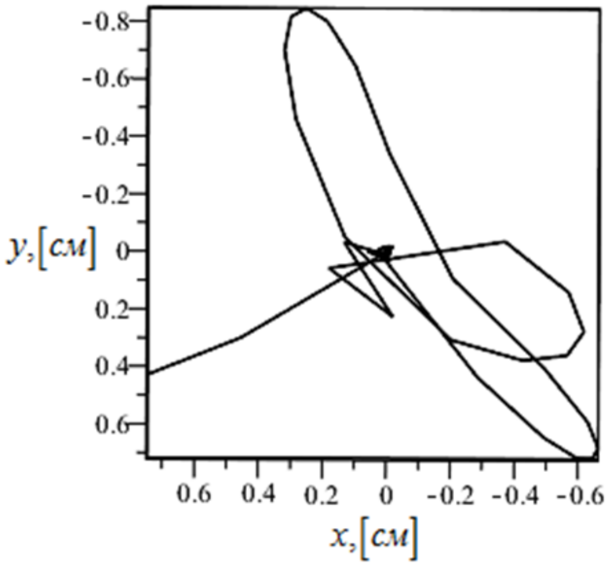



*Рис. 4. Проекция трехмерной траектории шарика, изображенной на рис. 3, на плоскость* $x - y$

**Литература**


1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т.1 / П. Аппель. – Москва : Физматлит, 1960. – 515 с.

2. *Шаин Ю. Ф.* Исследование системы уравнений, описывающих движение сферического маятника в случае наличия сопротивления / Ю. Ф. Шаин // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 9. – С. 1477–1483.

3. *Гладков С. О.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне с трением / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 1. – 161001-1-5.

4. *Гладков С. О.* Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 1. – 171101.

5. *Гладков С. О.* О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С. О. Гладков // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 4. – 164002-1-5.

6. *Гладков С. О.* О классе плоских геодезических кривых в поле силы тяжести / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Вестник Томского Государственного Университета. Математики и механика. – 2019. – № 58. – С. 5–13.

7. *Гладков С. О.* К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 2. – 172101.

8. *Gladkov S. O.* On the Moving Trajectory of a Ball in a Viscous Liquid between Two Concentric Rigid Spheres / S. O. Gladkov, S. B. Bogdanova // Mathematical and Computational Applications. – 2018. – 23. – 77.

УДК 511.84

# ОБ ОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЙ КОШИ — РИМАНА

**Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева**

*Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского*

**Аннотация.** Обобщенные условия Коши — Римана (далее УКР), как система линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, определяет эквивалентность двух четырехмерных пространственно заданных двумя наборами переменных $x_i$ и $y_i$ при $i = \overline{0,3}$. Они получены [1] как обобщение ранее известных результатов [2, 3]. В сообщении показано, что в переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_0$ эта система совпадает с системой Максвелла для электромагнитного поля, при этом предположено, следуя Дираку, возможное существование магнитных зарядов и токов. Это дает возможность дать физическую интерпретацию всем 8 компонентам решения обобщенных УКР. При принятых за основу обобщенных УКР с необходимостью появляются два скалярных поля, о которых некоторые авторы делают предположение об их существовании. Они интерпретированы как некоторые поля пространственно распределенных электрических и магнитных зарядов и токов. Эти заряды и токи определены самой системой и названы «внутренними». Введение присоединенных обобщенных УКР позволяет дать метод определения потенциалов электромагнитного поля при сделанных предположениях и определить калибровочные преобразования более общие, чем общеизвестные. Разумеется, сделав определенные ограничения, все результаты совпадают с принятыми в классической электродинамике. Автор указывает, что не делает никаких физических утверждений и все построения носят чисто математический характер.
**Ключевые слова:** кватернионы, спиноры, система Коши – Римана, уравнение Лапласа, система Максвелла.

## Введение

Теория функций комплексного переменного одна из наиболее важных ветвей математики, которая содержит как очень глубокие теоретические результаты, так и важные успехи по решению проблем физики и техники. Поэтому развитие ее методов в области функций многих переменных представляет большой интерес.

Обобщенные условия Коши — Римана (УКР) для случая восмимерного пространства двух наборов переменных $x_i$, $y_i$ при $i = 0$ были даны в работе автора [1] и имеют вид формально очень близкий к системе Коши — Римана, а именно

$$\left.\begin{aligned} D_1\chi - \psi D_2 = 0 \\ \chi\overline{D}_2 + \overline{D}_1\psi = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.1}$$

Знак минус сохранен специально, чтобы подчеркнуть сходство с системой Коши —Римана. Здесь $\chi, \psi$ кватернионные функции переменных $x_i$, $y_i$ вида

$$\chi = \chi_0(x,y) + \sum_{i=1}^{3} \chi_i(x,y) e_i, \qquad \psi = \psi_0(x,y) + \sum_{i=1}^{3} \psi_i(x,y) p_i. \tag{1.2}$$

В этих записях $x, y$ – сокращенные обозначения наборов переменных, а $e_i$ единицы системы кватернионов [4]. Часть $\psi_0$ в (1.2) обычно называют исходя из правил преобразования координат скалярной, а $\vec{\psi}$ – векторной частью. Операторы $D_1$, $D_2$ достаточно хорошо известные в математике [3], запишем как

$$\left.\begin{aligned} D_1 \\ \overline{D}_1 \end{aligned}\right\} = \frac{\partial}{\partial x_0} e_0 \pm \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} e_i, \qquad \left.\begin{aligned} D_2 \\ \overline{D}_2 \end{aligned}\right\} = \frac{\partial}{\partial y_0} e_0 \pm \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_i} e_i. \tag{1.3}$$

Чертой обозначена операция кватернионного сопряжения. Операторы $D_1\bar{D}_1$, $D_2\bar{D}_2$ совпадают с операторами Лапласа, поэтому

$$D_1\bar{D}_1 = \bar{D}_1 D_1 = \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Delta_x(4), \quad D_2\bar{D}_2 = \bar{D}_2 D_1 = \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} = \Delta_y(4). \tag{1.4}$$

Оператор волнового уравнения, который будет нужен ниже, обозначим символом

$$[4] = \Delta_x(3) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{1.5}$$

Кватернионную функцию, компоненты которой гармонической функции соответствующих переменных будем называть, возможно, не очень удачно, гармоническим кватернионом.

Выделим особо набор переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_0$ и считаем, что все функции $\chi,\psi$ зависят только от этих переменных. Тогда операторы $D_1$, $\bar{D}_1$, $D_2$, $\bar{D}_2$ можно записать

$$\left.\begin{matrix} D_1 & Q \\ \bar{D}_1 & Q \end{matrix}\right\} = \mp \operatorname{div} v\vec{q} \pm \operatorname{grad} q_0 \pm \operatorname{rot}\vec{q},$$

$$\left.\begin{matrix} Q & D_2 \\ Q & \bar{D}_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\partial q_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial y}. \tag{1.6}$$

Основная система (1.1) в этом случае согласно (1.6) имеет явный вид

$$-\operatorname{div}(x)\vec{\chi} + \operatorname{grad}(x)\chi_0 + \operatorname{rot}(x)\vec{\chi} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} - \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_0} = 0,$$

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial y_0} - \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y_0} + \operatorname{div}(x)\vec{\psi} - \operatorname{grad}(x)\psi_0 - \operatorname{rot}(x)\vec{\psi} = 0.$$

В данном случае после операторов векторного анализа в скобках указано, по каким переменным идет дифференцирование.

После выделения скалярной и векторной части имеем

$$\left.\begin{aligned} -\operatorname{div}\vec{\chi} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} = 0, \\ \operatorname{div}\vec{\psi} + \frac{\partial \chi_0}{\partial y_0} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{\chi} - \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_0} + \operatorname{grad}\chi_0 = 0, \\ -\operatorname{rot}\vec{\psi} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y_0} - \operatorname{grad}\psi_0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Первые два уравнения имеют скалярный характер, а два других векторный. Уже на этом этапе возникает подозрение о сходстве этой системы с уравнениями электродинамики Максвелла. Несколько труднее найти в системе (1.7) уравнение Дирака для частиц с $m = 0$.

Для дальнейших рассмотрений связанных с потенциалами электромагнитного поля, приведем так называемую присоединенную систему.

$$\begin{gathered} \bar{D}_1\tilde{\chi} + \tilde{\psi}D_2 = 0, \\ -\chi\bar{D}_2 + D_1\psi = 0. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Для решения поставленной задачи остановимся на неоднородных системах вида

$$\begin{gathered} D_1\chi - \psi D_2 = \mu, \\ \chi\bar{D}_2 + \bar{D}_1\psi = \nu, \end{gathered} \tag{1.9}$$

и

$$\bar{D}_1\alpha - \beta D_2 = \chi,$$
$$-\alpha\bar{D}_2 + D_1\beta = \psi. \qquad (1.10)$$

Подстановка (1.10) в (1.9) показывает, что

$$\Delta(8)\chi = \mu, \quad \Delta(8)\psi = \nu. \qquad (1.11)$$

Выбор основных переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_0$ не однозначен. С равным успехом можно выбрать набор $y_1$, $y_2$, $y_3$, $x_0$.

## 1. Система обобщенных УКР как система уравнений классической электродинамики

Для дальнейшего примем, что координата $y_0$ есть, как это принято в физике, так называемое повернутое время [6] (время Вика)

$$y_0 = ict. \qquad (2.1)$$

Разумеется, это меняет систему кватернионов и вызывает появление делителей нуля. Однако в оправдание отметим, что операция деления ниже нигде не используется.

Первый этап состоит в отождествлении компонент кватернионов $\chi,\psi$, входящих в обобщенные УКР с соответствующими электродинамическими параметрами. Это напряженности магнитного $\vec{H}$ и электрического $\vec{E}$ полей. Это нетрудно сделать опираясь на наличие, как в уравнении Максвелла, так и в выражениях (1.7) одинаковых конструкций операторов $\mathrm{div}$ и $\mathrm{rot}$.

Как подтверждают дальнейшие рассмотрения, следует выбрать

$$\chi = H_0 + \vec{H}, \quad \psi = i\left(E_0 + \vec{E}\right). \qquad (2.2)$$

Чтобы сразу охватить общий случай наличие распределенного с плотностью $\rho$ и плотностью тока $\vec{j}_э$ электрического заряда и соответствующими величинами магнитного заряда $m$, $\vec{j}_m$ примем в системе (1.9)

$$\mu = \rho + \vec{j}_э, \qquad \nu = m + \vec{j}_m. \qquad (2.3)$$

Полученная система представлена ниже

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{E} &= 4\pi\rho + \frac{1}{c}\frac{\partial H_0}{\partial t}, \\ \mathrm{div}\,\vec{H} &= 4\pi m - \frac{1}{c}\frac{\partial H_0}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,E_0 + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m, \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,H_0 + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_э. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Если исключить магнитные заряды и токи, положив $E_0 = H_0 = 0$, $\vec{j}_m = 0$, то придем к обычной форме уравнений Максвелла. Примем для системы (2.4) название модифицированная.

Вид системы (2.4) подчеркивает, что производную $\frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t}$ можно рассматривать как некоторую распределенную плотность электрического заряда, а производную $\frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t}$ как плотность магнитного заряда. Выражение $\mathrm{grad}\,H_0$, $\mathrm{grad}\,E_0$ тогда вполне естественно считать плотностями токов.

Эти плотности зарядов и токов определены системой и не являются внешними данными, в отличие от $\rho$, $m$, $\vec{j}_э$, $\vec{j}_m$. Реально учитываются и существуют только $\rho$, $\vec{j}_э$.

## 2. Плоская электромагнитная волна

Приведем простейшее решение системы (2.4) в виде плоской электромагнитной монохроматической волны для случая, когда $H_0$, $E_0$ отличны от нуля $H_0$, $E_0 \neq 0$. Для этого запишем, как это делается в общем случае [5], волновое решение в комплексной форме

$$H_i = H_{0i} e^{i\varphi}, \qquad E_i = E_{0i} e^{i\varphi}. \tag{3.1}$$

где фаза $\varphi$ равна

$$\varphi = \vec{k}\vec{r} - \omega t. \tag{3.2}$$

Здесь принято, что $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ волновой вектор и $\omega$ циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$, а $H_{0i}$, $E_{0i}$ амплитудные значения магнитного и электрического скалярных полей.

Примем следующие соотношения, которые подставим в (3.1)

$$\vec{\chi} = \vec{H},\ \vec{\psi} = i\vec{E},\ y_0 = ict, \tag{3.3}$$

$$\chi_0 = H_0,\ \psi_0 = iE_0. \tag{3.4}$$

В этом случае найдем для скалярных частей [5]

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial H_0}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.5.}$$

Перейдем к рассмотрению вопроса о плоской электромагнитной волне при сделанных предположениях о том, что $H_0, E_0 \neq 0$.

Первоначально обратимся к первой паре уравнений (3.5). Подставив (3.1) в (3.5), найдем

$$\left(\vec{H},\vec{k}\right) = -\frac{\omega}{c}E_0, \qquad \left(\vec{E},\vec{k}\right) = +\frac{\omega}{c}H_0. \tag{3.6}$$

Если $H_0, E_0 \neq 0$ (отличны от нуля) из (3.6) следует, что векторы $\vec{H}$, $\vec{E}$ не ортогональны к волновому вектору $\vec{k}$. Это означает наличие некоторой продольной электромагнитной волны.

Напомним, что $H_0, E_0$ – скалярные компоненты кватернионов $\chi, \psi$.

Напряженности $\vec{H}, \vec{E}$ рассматриваются в данной точке в определенный момент времени. Проведем через пары $\vec{E},\vec{k}$ и $\vec{H},\vec{k}$ плоскости (рис.1).

Введем единичные вектора $\vec{s},\vec{e},\vec{m}$, где $\vec{s}$ определен как $\vec{s} = \dfrac{\vec{k}}{k}$ и потому указывает направление распространений волны. Векторы $\vec{e},\vec{m}$ ортогональны к $\vec{s}$, но не ортогональны в общем случае друг другу (рис. 2).

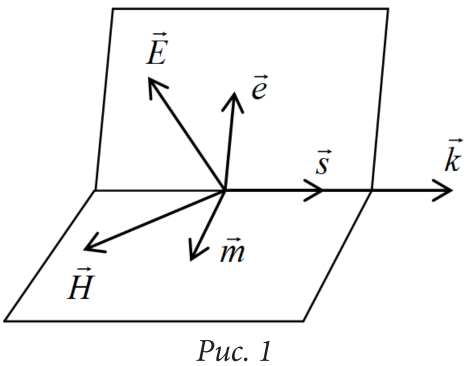



*Рис. 1*

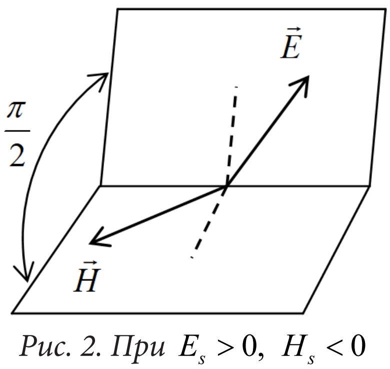



*Рис. 2. При $E_s > 0$, $H_s < 0$*

Запишем разложение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по системе $\vec{s},\vec{e}$ и $\vec{s},\vec{m}$

$$\vec{E} = E_s\vec{s} + E_e\vec{e}, \quad \vec{H} = H_s\vec{s} + H_m\vec{m}. \tag{3.7}$$

Подставив разложение (3.7) в первую пару уравнений имеем для амплитуд

$$+\left(\vec{k},\vec{E}\right)+\frac{\omega}{c}H_0=0, \quad +\left(\vec{k},\vec{H}\right)-\frac{\omega}{c}E_0=0. \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в общем случае не ортогональны к $\vec{s}$ и подставив (3.7) найдем

$$\left.\begin{aligned} E_s+H_0=0\\ H_s-E_0=0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.9}$$

Эти выражения показывают, что продольные напряженности $E_s, H_s$ совпадают с $E_0$, $H_0$, но $E_s$, $H_0$ противоположны по знаку, определенному выбором (3.5). После подстановки (3.1) во вторую пару уравнений (2.4) имеем для амплитуд $\vec{E}$, $\vec{H}$ систему алгебраических уравнений

$$+\frac{\omega}{c}\vec{E}+\left[\vec{k}\cdot\vec{H}\right]+\vec{k}H_0=0, \tag{3.10}$$

$$-\frac{\omega}{c}\vec{H}+\left[\vec{k}\cdot\vec{E}\right]+\vec{k}E_0=0. \tag{3.11}$$

Векторы $\left[\vec{k}\vec{H}\right]$, $\left[\vec{k}\vec{E}\right]$ нормальны к $\vec{k}$.

Подставим разложение (3.7) в уравнение (3.11) и, учтя свойство векторного произведения, получим

$$\frac{\omega}{c}\left(E_s\vec{s}+E_e\vec{e}\right)+kH_m\left[\vec{s}\cdot\vec{m}\right]+k\vec{s}H_0=0, \tag{3.12}$$

$$-\frac{\omega}{c}\left(H_s\vec{s}+H_m\vec{m}\right)+kE_e\left[\vec{s}\cdot\vec{e}\right]+k\vec{s}E_0=0. \tag{3.13}$$

Учитывая сделанное выше замечание и ортогональность $\vec{s},\vec{e}$ и $\vec{s},\vec{m}$ имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega}{c}E_s+kH_0=0,\\ -\frac{\omega}{c}H_s+kE_0=0. \end{aligned}\right\}.$$

Вторые соотношение (3.12), (3.13) могут быть выполнены только если $\vec{e}$, $\vec{m}$ ортогональны.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega}{c}E_e+kH_m(-1)=0,\\ -\frac{\omega}{c}H_m+kE_e=0. \end{aligned}\right\}. \tag{3.14}$$

Из этих соотношений следует, что векторы $E_e$, $E_m$ поперечные составляющие электрического и магнитного поля ортогональны.

Первые два соотношения (3.14) уже были получены ранее. Вторая пара для $E_e$, $H_m$ – обычное соотношение для поперечной волны.

Найдем угол $\alpha$, образованный напряженностями электрического $\vec{E}$ магнитного $\vec{H}$ полей

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{E},\vec{H}\right)}{\left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{H}\right|}. \tag{3.15}$$

Если проекции $H_s$, $E_s$ исчезают, то возвращаемся к полной взаимной ортогональности напряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$ и вектора $\vec{s}$.

Если $H_s$, $E_s$ малы по сравнению с $H_m$, $E_m$, то

$$\cos\alpha=\frac{H_sE_s}{H_mE_e}. \tag{3.16}$$

## 3. Введение потенциалов электромагнитного поля

Процесс введения потенциалов с точки зрения кватернионного формализма выглядит сравнительно просто. Кватернионные потенциалы $\alpha,\ \beta$ введем с помощью оператора присоединенной системы (1.10), а именно

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \bar{D}_1\alpha + \beta D_2, \\ \psi &= -\alpha\bar{D}_2 + D_1\beta. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Подстановка (4.1) в основную систему (1.1) приводит к результату, что кватернионные потенциалы $\alpha,\ \beta$ в случае отсутствия внешнего задания зарядов и токов, как электрических, так и магнитных (т. е. система (1.1) однородна) являются гармоническими кватернионами, ибо

$$\Delta(8)\alpha = 0, \qquad \Delta(8)\beta = 0. \tag{4.2}$$

Действительно, имеем

$$D_1\chi - \psi D_2 = D_1\left(\bar{D}_1\alpha + \beta D_2\right) - \left(-\alpha\bar{D}_2 + D_1\psi\right)D_2 = D_1\bar{D}_1\alpha + D_1\beta D_2 + \alpha\bar{D}_2 D_2 - D_1\psi D_2 = 0.$$

После приведения подобных имеем

$$D_1\bar{D}_1\alpha + D_2\bar{D}_2\alpha = 0. \tag{4.3}$$

Аналогично доказывается второе соотношение (4.2).

Напомним, поскольку ранее было принято условие, что все функции $\chi,\ \psi,\ \alpha,\ \beta$ зависят только от $x_i,\ y_0$. Следовательно, на самом деле

$$\Delta(8)\alpha = 0, \qquad \Delta(8)\beta = 0.$$

Если $y_0 = ict$, то оператор $\Delta(4)$ будет волновым оператором, который был обозначен

$$\left[4\right] = \Delta(3) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{4.4.}$$

При наличии магнитных зарядов и токов, кроме обычных скалярного $\varphi$ и векторного $\vec{A}$ потенциалов, имеем скалярный магнитный потенциал $b$ и векторный $\vec{B}$. Для совпадения результатов с общепринятой формой записи необходимо принять

$$\alpha = -b - \vec{A}, \qquad \beta = -i\varphi + i\vec{B}. \tag{4.5}$$

Положим, что $\varphi, b$ скалярные потенциалы электрического и магнитного полей, а $\vec{A}, \vec{B}$ соответствующие векторные. Если положить $b = 0,\ \vec{B} = 0,$ то вернемся к обычному проверенному предположению, что магнитные заряды и токи реально не существуют.

Связь (4.1) напряженностей и потенциалов в явной векторной форме выражены соотношениями

$$\begin{gathered} H_0 = -\operatorname{div}\vec{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \\ \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \operatorname{grad} b, \\ E_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{div}\vec{B}, \\ \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \operatorname{rot}\vec{B}. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Если $b = 0,\ \vec{B} = 0,$ то вернемся к обычному случаю [5]. Первое уравнение в (4.6) совпадает с уравнением Лоренца.

Используя (2.4) формулы (4.6) можно проверить непосредственно в векторной форме.

## 4. Калибровочные преобразования электромагнитных потенциалов

Перейдем к рассмотрению вопроса о калибровочных преобразованиях потенциалов в случае учета скалярных составляющих кватернионов $\chi$, $\psi$, то есть случаю $E_0, H_0 \neq 0$. Сохраним также возможность существования магнитных зарядов и токов.

Исходя из принятой системы кватернионных потенциалов легко установить, что потенциалы $\alpha$, $\beta$ определены с точностью до кватернионных функций $\eta$, $\tau$.

$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \beta' = \beta + \eta, \tag{5.1}$$

которые удовлетворяют присоединенной системе

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 \tau + \eta D_2 &= 0, \\ -\tau \bar{D}_2 + D_1 \eta &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Таким образом, при замене $\alpha$, $\beta$ на $\alpha'$, $\beta'$ функции $\chi, \psi$ не изменяются.

Решение системы (5.2) как известно и это легко проверить, может быть выражено как

$$\tau = D_1 f, \qquad \eta = f D_2, \tag{5.3}$$

где $f$ некоторый гармонический кватернион.

Возможны два различных случая. Пусть $f$ скалярный кватернион

$$f = f_0. \tag{5.4}$$

Тогда найдем согласно (1.6)

$$\tau = \operatorname{grad} f_0, \qquad \eta = -\frac{1}{ic}\frac{\partial f_0}{\partial t}.$$

Это приводит к известным соотношениям

$$\vec{A}' = \vec{A} - \operatorname{grad} f_0, \qquad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f_0}{\partial t}. \tag{5.5}$$

В этом случае никаких новых скалярных полей не появляется. Это обычная форма калибровочных преобразований, которая используется не только в классической электродинамике, но и в квантовой.

Несколько другая ситуация возникает, если $f$ векторный кватернион

$$\tau = D_1 \vec{f}, \qquad \eta = \vec{f} D_2. \tag{5.6}$$

В этом случае по (1.6) найдем

$$\tau = -\operatorname{div}\vec{f} + \operatorname{rot}\vec{f}, \qquad \eta = \frac{1}{ic}\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}. \tag{5.7}$$

В явной векторной форме это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} - \operatorname{rot}\vec{f}, \quad & \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}, \\ \varphi' &= \varphi, & b' &= b + \operatorname{div}\vec{f}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Таким образом, в этом случае затронуты $b$, $\vec{B}$, так что, если они до преобразования отсутствовали, то после преобразования (5.8) они неизбежно возникнут.

## Заключение

В данной работе показано, что обобщенная система уравнений Коши – Римана можно рассматривать как математическую модель уравнений классической электродинамики. При этом следует указать на следующие основные выводы:

1. Существует линейный дифференциальный оператор в частных производных первого порядка с алгебраической структурой, определенной обобщенными УКР, который переводит упорядоченный набор $V$ двух кватернионов $\chi$, $\psi$ в набор $R$ двух кватернионов $\mu$, $\nu$

$$DV = R. \tag{6.1}$$

Предполагается, что все компоненты $\chi, \psi$ функций непрерывно дифференцируемы в некоторой области $Q$.

2. При определенном выборе компонент кватернионов $\chi$, $\psi$ и $\mu$, $\nu$ система (6.1) совпадает с системой уравнений Максвелла для напряженностей электромагнитного поля, созданного электрическими зарядами и токами, а так же гипотетическими магнитными зарядами и токами. Рассмотрен случай отличных от нуля скалярных компонент кватернионов $\chi$, $\psi$, который приводит к выводу о существовании некоторых зарядов и токов, определенных самой системой Максвелла.

3. Указано на существование оператора $\tilde{D}$ (названного присоединенным к $D$) с указанными в п.1 свойствами, который переводит набор $P$ кватернионов $(\alpha, \beta)$ в $(\chi, \psi)$

$$\tilde{D}P = V, \tag{6.2}$$

так что

$$D\tilde{D}P = R,$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа

$$D\tilde{D} = \tilde{D}D = \Delta.$$

При этом предполагается, что все компоненты $P$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем независимым переменным в области $Q$.

4. Показано, что после соответствующего отождествления эта операция (6.2) соответствует обычной процедуре введения электромагнитных потенциалов.

5. Поскольку $P$ при данном $V$ определено неоднозначно, а именно

$$P' = P + G, \tag{6.3}$$

где набор $G$ кватернионов $(\tau, \eta)$ есть решение системы

$$\tilde{D}G = 0.$$

## Литература


1. *Гладышев Ю. А.* Кватернионные методы в электродинамике / Ю. А. Гладышев // Труды математического центра им. Н. К. Лобачевского. – 2019. – Т. 57. – С. 111–115.

2. *Moisil M. G.* Sur los quaternions monoges // Bull. Sc.Math. 55. – 1931. – P. 168–174.

3. *Fueter R.* Zur Teorie der regularen Funktionen einer quaternion // Monatsch Math Phys. 43. – 1936. – P. 69–74.

4. *Кострикин А. И.* Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Москва : Изд-во МГУ, 1980. – 319 с.

5. *Ландау Л. Д.* Теория поля (серия «Теоретическая физика», том 11) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва: Изд-во «Наука», 1973. – 504 с.

6. *Вайнштейн А. И.* Инстантонная азбука / А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман. – М. : ИТЭФ, 1981. – 84 с.

УДК 517.958

# РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

**А. В. Глушко, Е. А. Логинова, А. А. Лесных**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья посвящена изучению начально-краевой задачи типа трансмиссии для параболического уравнения, описывающего распространение тепла в полуплоскости с трещиной, представляющей собой отрезок, перпендикулярный границе. На части границы, не содержащей трещину, задано нулевое граничное условие, на остальной части границы – условия на разность температур и тепловых потоков при переходе через берега трещины. Также задано нулевое начальное условие. Задача сводится к обобщенной, для чего строятся нечетные продолжения исходных функций на нижнюю полуплоскость. Выписывается решение задачи, доказывается выполнение граничных и начального условий. Основным результатом работы можно считать асимптотические представления тепловых потоков по расстоянию до берегов трещины.
**Ключевые слова:** асимптотики, тепловые потоки, ортогональная границе трещина, задача типа трансмиссии, нестационарное уравнение, полуплоскость с разрезом, трещина-разрез, начально-краевая задача, уравнение теплопроводности, нестационарная задача.

## Введение

В настоящее время большое количество исследований посвящается классу краевых и начально-краевых задач теплопроводности, упругости, теплоупругости и т. п. для различных областей с трещинами, в частности, большое внимание уделено задачам для эллиптических уравнений [1, 2].

В представленной работе изучается нестационарная задача теплопроводности для параболического уравнения, описывающего распространение тепла в верхней полуплоскости с трещиной, перпендикулярной границе области.

Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \hat{u}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 \hat{u}(x,t)}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 \hat{u}(x,t)}{\partial x_2^2}+\frac{k^2}{4}\hat{u}=0, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+\setminus l,\ t>0\ \ l=\{x=(x_1,x_2): x_1=\pm 0, x_2\in[0;1]\},\ \ \mathbb{R}^2_+=\{x\mid x_1\in\mathbb{R},\ x_2>0\}$.

Равенство (1) дополняется на $l$ граничными условиями

$$\hat{u}(+0,x_2,t)-\hat{u}(-0,x_2,t)=\hat{q}_0(x_2,t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \hat{u}(+0,x_2,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial \hat{u}(-0,x_2,t)}{\partial x_1}=\hat{q}_1(x_2,t);\ t\ge 0,\ x_2\in(0;1), \tag{3}$$

на части границы, не содержащей трещину $l$, граничное условие имеет вид

$$\hat{u}(x_1,x_2,t)\Big|_{x_2=0}=0,\ x_1\in\mathbb{R},\ t\ge 0. \tag{4}$$

Задано нулевое начальное условие

$$u(x_1,x_2.0)=0,\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+. \tag{5}$$

Пусть выполнены равенства

$$u(x_1,x_2,t)=\begin{cases}\hat{u}(x_1,x_2,t), x_2>0\\ -\hat{u}(x_1,-x_2,t), x_2<0\end{cases};\ q_0(x_2,t)=\begin{cases}\hat{q}_0(x_2,t), x_2>0\\ -\hat{q}_0(-x_2,t), x_2<0\end{cases};$$

$$q_1(x_2,t)=\begin{cases}\hat{q}_1(x_2,t), x_2>0\\ -\hat{q}_1(-x_2,t), x_2<0\end{cases},$$

т. е. функции $\hat{u}$, $\hat{q}_0$ и $\hat{q}_1$ продолжены на нижнюю полуплоскость нечетным образом.

Пусть также $u(x_1,x_2,t)=0$, $q_0(x_2,t)=0$, $q_1(x_2,t)=0$ при $t<0$.

### 1. Основные результаты работы

**Утверждение 1.** *Обобщенная задача для задачи (1)–(5) имеет вид*

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t}-\Delta u(x_1,x_2,t)+\frac{k^2}{4}u(x_1,x_2,t)=$$
$$=q_1(x_2,t)\delta_{[-1,1]}(x_1,x_2,t)+\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(q_0(x_2,t)\delta_{[-1,1]}(x_1,x_2,t)\Big), \tag{6}$$

*где* $\delta_{[-1,1]}$ *– специальная дельта-функция [3].*

**Доказательство** утверждения 1 основано на применении обобщенной функции $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta_x u+\frac{k^2}{4}u$ из пространства $D'$ к произвольной основной функции $\varphi(x_1,x_2,t)\in D$.

**Лемма 1.** *Пусть функции* $\frac{\partial}{\partial x_1}\big(q_0(x_2,t)\delta_{[-1,1]}\big), q_1(x_2,t)\delta_{[-1,1]}$ *принадлежат пространству* $D'(\mathbb{R}^3)$, *фундаментальное решение оператора* $\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x+\frac{k^2}{4}$ *– функция* $E(x_1,x_2,t)$ *принадлежит пространству* $S'(\mathbb{R}^3)$. *Тогда решение задачи (6) можно задать формулой*

$$u(x_1,x_2,t)=E(x_1,x_2,t)*(q_1(x_2,t)\delta_{[-1,1]})+E(x_1,x_2,t)*\Big(\frac{\partial q_0(x_2,t)\delta_{[-1,1]}}{\partial x_1}\Big). \tag{7}$$

**Доказательство** леммы 1 основано на применении теоремы о свёртке с финитным функционалом [4].

Основные результаты работы представлены в теореме 1.

**Теорема 1.** *Пусть*

*1) функции* $\hat{q}_0$ *и* $\hat{q}_1$ *дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных;*

*2) функции* $\hat{q}_0$ *и* $\hat{q}_1$ *ограничены вместе со своими производными до второго порядка включительно;*

*3) выполнены равенства* $\hat{q}_0(x_2,0)=0,\ \hat{q}_1(x_2,0)=0,\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\hat{q}_1(x_2,0)=0, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\hat{q}_1(x_2,0)=0;$

*4) выполнены условия согласования* $q_0(1,t)=q_0(-1,t)=q_1(1,t)=q_1(-1,t)=0;$

*5) функции* $q_0(x_1,t),\ q_1(x_1,t)$ *принадлежит классу функций M ( [4]).*

*Тогда обобщенное решение задачи (1)–(5) имеет вид*

$$u(x,t)=\int_0^t\frac{x_1}{8\pi\tau^2}\int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{k^2}{4}\tau-\frac{x_1^2}{4\tau}}q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau-$$
$$-\int_0^t\frac{1}{4\pi\tau}\int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{k^2}{4}\tau-\frac{x_1^2}{4\tau}}q_1(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau. \tag{8}$$

*Условие (2) выполнено по непрерывности, условие (3) выполнено в смысле главного значения, т. е.* $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\partial u(\varepsilon,x_2,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial u(-\varepsilon,x_2,t)}{\partial x_1}=\hat{q}_1(x_2,t)$. *Граничное условие (4) выполнено по непрерывности. Также по непрерывности выполнено начальное условие (5).*

*Функция* $\frac{\partial}{\partial x_1}u(x,t)$ *непрерывна при* $x_2>0,\ x_1\in\mathbb{R},\ x\notin\{x_1=0;\ x_2\in(0;1)\}, t>0.$

*При $x_1 \to +0,\ x_2 \in [-1;1],\ t \in [0;T]$, где $T > 0$, справедливы асимптотические представления тепловых потоков*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-x_2}{(1-x_2)^2 + x_1^2} + \frac{1+x_2}{(1+x_2)^2 + x_1^2}\right) q_0(x_2,t) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{(1-x_2)^2 + x_1^2}{(1+x_2)^2 + x_1^2} + \frac{2x_1^2 x_2}{((1-x_2)^2 + x_1^2)((1+x_2)^2 + x_1^2)}\right)\frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2} + r(x,t), \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_1}{(x_2+1)^2 + x_1^2} - \frac{x_1}{(x_2-1)^2 + x_1^2}\right) q_0(x_2,t) - \frac{1}{4\pi}\left(\ln(\frac{(x_2+1)^2 + x_2^2}{(x_2-1)^2 + x_1^2}\right) q_1(x_2,t) + \tilde{r}, \tag{10}$$

*где $r,\ \tilde{r}$ – ограниченные на любом компакте функции.*

**Доказательство.** Введение обозначений

$$u_1(x,t) = -\int_0^t \frac{1}{4\pi\tau}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_1(\sigma, t-\tau)\, d\sigma d\tau;$$

$$u_0(x,t) = \int_0^t \frac{x_1}{8\pi\tau^2}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_0(\sigma, t-\tau)\, d\sigma d\tau$$

позволяет представить функцию $u$ в виде суммы $u = u_0 + u_1$.

Пусть $\|q(x_2,t)\| = \sup\limits_{\substack{x_2 \in [0;\,1] \\ t \in [0;\infty)}} |q(x_2,t)|$.

Для функции $u_1$ выполнена оценка $|u_1| \le ct^{1/3}\left(|1-x_2|^{1/3} + |1+x_2|\right)^{1/3}\|q_1\|$, где $c > 0$ константа, из которой по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [4] следует непрерывность интеграла $u_1$ при $x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0$.

Аналогично доказывается непрерывность функции $u_0$ при $x_2 \notin [-1;1],\ t > 0$.

При $x_2 \in [-1;1],\ t > 0$ интеграл $u_0$ рассматривается отдельно при $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$. В каждом случае выделяются непрерывные слагаемые и удаётся показать, что $\lim\limits_{x_1 \to +0} u_0 = \frac{q_0(x_2,t)}{2}$, $\lim\limits_{x_1 \to -0} u_0 = -\frac{q_0(x_2,t)}{2}$. Таким образом, показано выполнение условий (2) и (4).

Для доказательства выполнения условия (3) функция $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}$ представляется как сумма трех интегралов $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1} = P_1(x,t) + P_2(x,t) + P_3(x,t)$, где

$$P_1(x,t) = \int_0^t \frac{x_1}{8\pi\tau^2}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_1(\sigma, t-\tau)\, d\sigma d\tau,\quad P_2(x,t) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}}{8\pi\tau^2}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} e^{-\frac{k^2}{4}\tau} q_0(\sigma, t-\tau)\, d\sigma d\tau,$$

$$P_3(x,t) = -\int_0^t \frac{x_1^2}{16\pi\tau^3}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_0(\sigma, t-\tau)\, d\sigma d\tau.$$

Доказывается, что $P_1(x,t)$, аналогично интегралу $u_0(x,t)$, непрерывна при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus l;\ t \ge 0$, при $x_2 \in (-1;\,1),\ t > 0$: $\lim\limits_{x_1 \to +0} P_1 = \frac{q_0(x_2,t)}{2}$, $\lim\limits_{x_1 \to -0} P_1 = -\frac{q_0(x_2,t)}{2}$.

Для интеграла $P_2(x,t)$ доказывается представление $P_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q_0(\sigma,t)}{(\sigma-x_2)^2 + x_1^2}d\sigma + J$, где $J(+0,x_2,t) - J(-0,x_2,t) = 0$, из которого следует равенство $P_2(+0,x_2,t) - P_2(-0,x_2,t) = 0$; $t \ge 0,\ x_2 \in (-1;\,1)$.

Заметим, что функцию $q_0(\sigma,t)$ можно записать в виде

$$q_0(\sigma,t) = q_0(x_2,t) + \frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2}(\sigma - x_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q_0(x_2,t)}{\partial x_2^2}(\sigma - x_2)^2,$$

откуда следует представление

$$P_2 = -\frac{\operatorname{arctg}\frac{1-x_2}{|x_1|} + \operatorname{arctg}\frac{1+x_2}{|x_1|}}{2\pi |x_1|} q_0(x_2,t) - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(1-x_2)^2 + x_1^2}{(1+x_2)^2 + x_1^2} \frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x} + S(x,t),$$

где $S(x,t)$ непрерывна и $|S(x,t)| \le c \left\| \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_2^2} \right\|$.

Для интеграла $P_3(x,t)$ удаётся доказать равенство

$$P_3 = \frac{1}{2\pi}\left( \frac{1-x_2}{(1-x_2)^2 + x_1^2} + \frac{1+x_2}{(1+x_2)^2 + x_1^2} + \frac{1}{|x_1|}\left( \operatorname{arctg}\frac{1-x_2}{|x_1|} + \operatorname{arctg}\frac{1+x_2}{|x_1|} \right)\right) q_0(x_2,t) +$$

$$+\frac{1}{\pi} \frac{2x_1^2 x_2}{((1-x_2)^2 + x_1^2)((1+x_2)^2 + x_1^2)} \frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2} + R_1(x,t),$$

где $R_1(x,t)-$ непрерывная функция и $|R_1(x,t)| \le c \left\| \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_2^2} \right\|$.

Из полученных представлений вытекает выполнение условия (3) в смысле главного значения.

Заметим, что выполнено неравенство $|u_1(x,t)| \le 2c\sqrt{t} \to 0$ при $t \to 0$. Аналогично, можно показать, что $\lim\limits_{t\to 0} u_0(x,t) = 0$. Итак, доказано начальное условие (5).

Асимптотическое представление для теплового потока $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}$ следует из вида функций $P_1(x,t),\ P_2(x,t),\ P_3(x,t)$.

Аналогично, можно доказать асимптотическое представление функции $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_2}$, записав её как сумму нескольких интегралов и оценив каждый из них по отдельности.

**Замечание 1.** В ходе доказательства теоремы 1 также было показано, что функция $u_1(x,t)$ непрерывна при $x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \in \mathbb{R},\ t > 0$, функция $u_0(x,t)$ непрерывна на множестве $\{x,t | (x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \in \mathbb{R},\ t > 0) \setminus (x_2 \in (-1;\ 1)\}$.

## Заключение

Таким образом, выписано интегральное представление обобщенного решения представленной нестационарной задачи теплопроводности, доказано выполнение граничных и начального условий и, что является наиболее значимым результатом, построены асимптотические представления тепловых потоков по расстоянию до берегов трещины.

## Литература


1. *Chen Y. F.* The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate / Y. F. Chen, F. Erdogan // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – V.44. – P. 771.–787.

2. *Glushko A. V.* Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture «Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety»: Book of Abstracts, 26-31 August. – Kazan, 2012. – P. 269.

3. *Логинова Е. А.* Асимптотическое поведение теплового потока для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2012. – № 1. – С. 157–161.

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 527 с.

УДК 531.3

# ЛИНЕЙНО-ЗАМЕДЛЕННОЕ ДИССИПАТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИЛЫ В СЛУЧАЕ СЛАБОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

**А. С. Гришков[1], Р. С. Вдовин[1], А. М. Ерёмин[1], П. В. Захаров[2]**

*[1]Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет имени В. М. Шукшина, г. Бийск*
*[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

**Аннотация.** Рассмотрена задача об одномерном движении материальной точки под действием потенциальной силы в однородной диссипативной среде с линейным по скорости сопротивлением. Использование теоремы об изменении механической энергии системы позволило свести задачу об определении скорости диссипативного движения как функции координат к задаче об определении работы диссипативной силы. Получены общие дифференциальные уравнения относительно работы, для случая слабого сопротивления получены общие аналитические решения в квадратурах, позволяющие определить характеристики движения при произвольном потенциале.
**Ключевые слова:** движение, уравнения движения, дифференциальное уравнение, уравнение Абеля, диссипация, диссипативное движение, диссипативная среда, энергия, кинетическая энергия, потенциальная энергия, работа диссипативной силы, потенциальное поле, консервативная система, диссипативная система.

## Введение

Одномерное движение системы, состоящей из материальной точки массы $m$ в потенциальном поле, заданном функцией потенциальной энергии $U$ в однородной диссипативной среде, оказывающей линейное по скорости сопротивление, описывается уравнением

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}=-\frac{dU(x)}{dx}, \tag{1}$$

где $\alpha$ — коэффициент сопротивления среды. Подстановкой $\dot{x}=v(x)$ (1) приводится к уравнению

$$mv(x)\frac{dv(x)}{dx}+\alpha v(x)=-\frac{dU(x)}{dx}. \tag{2}$$

(2) — дифференциальное уравнение Абеля второго рода, неинтегрируемое при произвольном виде функции $U(x)$ [3, с. 37].

В [4] представлен метод, основанный на преобразовании $L\to L_0e^{\beta t}$, $p\to p_0e^{\beta t}$, где $L_0, p_0$ — лагранжиан и импульс соответствующей консервативной системы. Далее преобразованием Лежандра находится соответствующий гамильтониан, структура которого при подстановке в уравнение Гамильтона-Якоби позволяет разделить пространственную и временную части движения [4, с. 326]. Для рассматриваемого случая метод даёт уравнение

$$\frac{m}{2}\left(Q_x'(x,\alpha)\right)^2+U(x)=\beta\alpha Q(x,\alpha) \tag{3}$$

общее решение, которого также неизвестно [4, с. 328].

## 1. Энергетическая интерпретация задачи

Как мы видим, рассмотренные во введении методы приводят к неинтегрируемым дифференциальным уравнениям (2) и (3). Поэтому сделаем в уравнении (2) подведение под знак дифференциала:

$$mv(x)\frac{dv(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2(x)}{2}\right)=\frac{dT(x)}{dx},$$

где $T(x)$ — кинетическая энергия диссипативной системы. Выражая скорость $v(x)$ через $T(x)$

$$T(x)=\frac{mv^2(x)}{2}\Rightarrow v(x)=\sqrt{\frac{2}{m}T(x)}$$

и подставляя в уравнение (2), будем иметь:

$$\frac{dT(x)}{dx}+\gamma\sqrt{T(x)}=-\frac{dU(x)}{dx}, \tag{4}$$

где

$$\gamma=\alpha\sqrt{\frac{2}{m}}. \tag{5}$$

Далее введём в рассмотрение диссипативную функцию Релея [2, с. 16]

$$F=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

и воспользуемся теоремой об изменении полной механической энергии системы:

$$\frac{dE}{dt}=W,$$

где $E$ — энергия, а $W$ — мощность всех приложенных к системе непотенциаальных сил. В нашем случае непотенциальная сила только одна – диссипативная, и её мощность равна [2, с. 17]

$$W=-\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\dot{x}=-2F=-\alpha\dot{x}^2=-\alpha v^2(x),$$

таким образом,

$$\frac{dE}{dt}=-\alpha\dot{x}^2.$$

Переходя в последней формуле к конечным интервалам, т.е. интегрируя по времени, получим

$$E(t)-E_0=-\int_{t_0}^{t}\alpha v^2(x)dt,$$

где $E_0$ — полная энергия системы в начальный момент времени. Учитывая, что $dt=\dfrac{dx}{v(x)}$, перейдём к интегрированию по координате и, расписывая выражения для энергии в явном виде, получим кинетическую энергию диссипативной системы уже как функцию координаты:

$$T(x)=E_0-U(x)-\int_{x_0}^{x}\alpha v(x)dx. \tag{6}$$

Наконец, вводя обозначение

$$A(x)=\left|\int_{x_0}^{x}\alpha v(x)dx\right|, \tag{7}$$

перепишем (6) в виде

$$T(x)=E_0-U(x)-A(x). \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнение (4) и осуществляя элементарные преобразования, будем иметь:

$$\frac{dA(x)}{dx}-\gamma\sqrt{E_0-U(x)-A(x)}=0, \tag{9}$$

а учитывая, что разность $E_0-U(x)$ есть кинетическая энергия, которой обладала бы система при отсутствии сопротивления и обозначая её

$$K(x) = E_0 - U(x), \tag{10}$$

перепишем (9) в более компактном виде:

$$\frac{dA(x)}{dx} - \gamma\sqrt{K(x) - A(x)} = 0. \tag{11}$$

Функция (7) имеет физический смысл абсолютной величины работы, совершаемой над системой диссипативной силой. Таким образом, задача определения скорости диссипативного движения как функции координаты $v = v(x)$ может быть сведена к задаче отыскания работы диссипативной силы $A(x)$.

Обратим внимание на фигурирующую под радикалом в (11) разность $K(x) - A(x)$, которая согласно (8) представляет собой кинетическую энергию диссипативной системы. Уменьшаемое $K(x)$ здесь может трактоваться как кинетическая энергия т.н. связанной консервативной системы, т.е. системы, имеющей ту же массу и начальные значения скорости и координаты что и диссипативная, но движущейся так, как если бы диссипативная среда отсутствовала. Таким образом, мы снова приходим к идее определения диссипативного движения методом сравнения его со связанным консервативным движением, как и в работах [5, с. 43] и [6, с. 76]. Разница заключается в том, что в [5] и [6] мы рассматривали движение двух систем, синхронное по времени, поэтому их положение отличалось на величину диссипативной поправки, сейчас же рассматриваем движение диссипативной и консервативной систем, имеющих одну и ту же координату. С этой точки зрения работа $A(x)$ может интерпретироваться как диссипативная поправка по энергии относительно консервативного движения, определяемого функцией $K(x)$.

## 2. Случай слабого сопротивления

Уравнения (9) и (11) также не интегрируются в общем виде, однако по сравнению с исходным уравнением (4) они предоставляют несколько более широкие возможности для анализа. В частности, в случае слабого сопротивления мы можем исходя из физических соображений предполагать, что величина работы диссипативной силы $A(x)$ будет мала по сравнению с величиной $K(x)$. Поэтому, разлагая радикал в (11) в ряд Тейлора по степеням $A(x)$ и пренебрегая всеми членами степени выше первой в связи с их малостью, получим уравнение

$$\frac{dA(x)}{dx} + \frac{\gamma}{2\sqrt{K(x)}}A(x) - \gamma\sqrt{K(x)} = 0, \tag{12}$$

линейное относительно $A(x)$. Интегрируя его в пределах $\left[x_0, x\right]$, получим соотношение для $A(x)$:

$$A(x) = \gamma \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)\left(\int_{x_0}^{x}\sqrt{K(x)}\exp\left(\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)dx\right), \tag{13}$$

где функция $K(x)$ определяется выражением (10). В принципе, формула (13) даёт общее решение задачи для рассматриваемого случая слабого сопротивления. Некоторая проблема, однако, состоит в том, что для некоторых потенциалов интеграл

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{K(x)}\exp\left(\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)dx$$

в (13) может оказаться неберущимся. Поэтому преобразуем его следующим образом:

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{K(x)}\exp\left(\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)dx = \int_{x_0}^{x}K(x)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)\frac{dx}{\sqrt{K(x)}},$$

учтём, что выражение $\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}$ является производной интеграла $\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}$ под аргументом экспоненты и, применяя интегральную теорему о среднем, получим альтернативное соотношение для $A(x)$:

$$A(x)=\frac{2}{x-x_0}\left(\int\limits_{x_0}^{x}K(x)dx\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right)\right). \tag{14}$$

Таким образом, задача сводится, по существу, к взятию интегралов

$$\int\limits_{x_0}^{x}K(x)dx \tag{15}$$

и

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}} \tag{16}$$

для конкретных потенциалов $U(x)$.

Акцентируем внимание на выражении $\frac{\gamma}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}$, входящем в формулы (13) и (14). Подставим сюда значения $\gamma$ из (5) и $K(x)$ из (10) и произведём некоторые преобразования:

$$\frac{\gamma}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}=\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2}{m}}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E_0-U(x)}}=\frac{\alpha}{m}\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E_0-U(x)}}.$$

Как известно [1, с. 39], выражение $\tau(x)=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E_0-U(x)}}$ есть время, затрачиваемое на преодоление расстояния $|x-x_0|$ консервативной системой, движущейся в поле с потенциалом $U(x)$, т. е., в нашей терминологии, связанной консервативной системой. Таким образом, величина работы $A(x)$, определяющая диссипативное движение, оказывается выраженной через функции $K(x)$ и $\tau(x)$, описывающие консервативное движение связанной системы, как и в работах [5, с. 44] и [6, с. 82].

## 3. Результаты для некоторых потенциалов

Применим полученные в предыдущем подразделе формулы для описания движения в некоторых конкретных полях. Результаты будем выводить графически, используя следующую методику: чёрной пунктирной линией будем выводить график, даваемый формулами (13) или (14) для каждого конкретного потенциала, сплошной серой линией — график численного решения уравнения (11) для каждого конкретного потенциала. Для наглядности будем также выводить график кинетической энергии диссипативной системы $T(x)$, даваемый численным решением уравнения (4) и график функции $K(x)$, определяемой соотношением (10). Все вычисления и построения будем производить с использованием системы компьютерной алгебры (СКА) Maple. Численные решения дифференциальных уравнений будем производить методом Рунге — Кутты 4-5 степени, принятым в СКА Maple по умолчанию

### *3.1. Однородное поле силы тяжести*

Моделировалось падение тела массой $m=1\,кг$ с нулевой начальной скоростью в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения $g=10\,м/c^2$ в диссипативной среде с коэффициентом сопротивления $\alpha=0,01$ $(\gamma\approx 0,014)$ с начальной координатой $x_0=-15000\,м$ и конечной координатой $x=0\,м$. Общее расстояние, пройденное телом, равно 15000 *м*. Подстановка потенциала $U(x)=mgx$ в формулу (13) даёт в этом случае для $A(x)$ следующее соотношение:

$$A(x) = f(x) - f(x_0)\exp\left(\frac{\gamma}{mg}\left(\sqrt{E_0 - mgx} - \sqrt{E_0 - mgx_0}\right)\right);$$

$$f(x) = 2\left(E_0 - mgx\right) + \frac{4mg}{\gamma}\sqrt{E_0 - mgx} + \frac{4m^2g^2}{\gamma^2}.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 1.

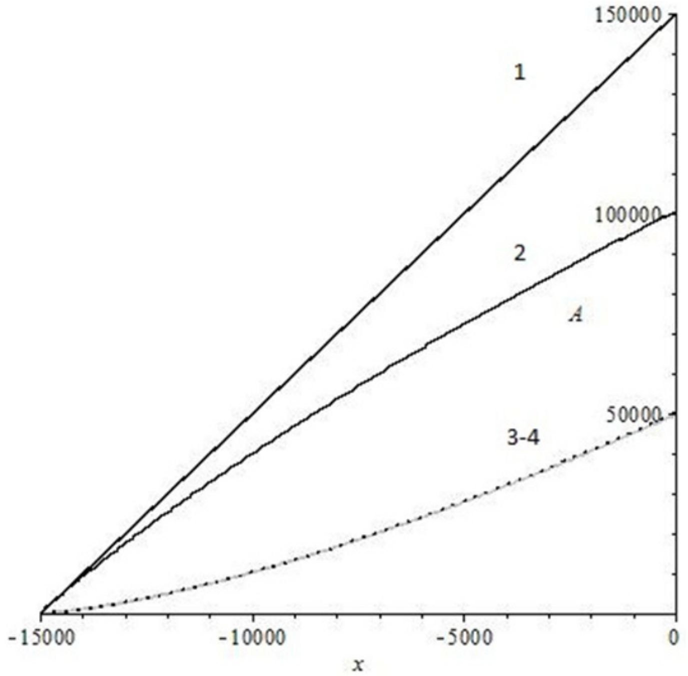



*Рис. 1. Кривая 1 — кинетическая энергия связанной консервативной системы, 2 — кинетическая энергия диссипативной системы, 3-4 — наложение графиков численного решения уравнения (11) и аналитического решения уравнения (12)*

### *3.2. Ньютоновское гравитационное поле*

Моделировалось движение материальной точки массой $m = 1\,кг$ с нулевой начальной скоростью в ньютоновском гравитационном поле точечной массы $M = 5{,}97 * 10^{24}\,кг$ в диссипативной среде с коэффициентом сопротивления $\alpha = 50$ $\left(\gamma \approx 70{,}71\right)$ с начальной координатой $x_0 = -5000\,м$ и конечной координатой $x = -1000\,м.$ Общее расстояние, пройденное телом, равно 4000 м. В данном случае интеграл в (13) получается неберущимся, поэтому подстановка потенциала $U(x) = -G\dfrac{mM}{x}$ в формулы (15) и (16) даёт для $A(x)$ следующие соотношения:

$$\int_{x_0}^{x} K(x)dx = \left(E_0x - GmM\ln(x)\right)\Big|_{x_0}^{x};$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{K(x)}} = \left(\frac{\sqrt{x\left(E_0x - GmM\right)}}{E_0} + \frac{GmM}{2E_0^{3/2}}\ln\left(\sqrt{E_0}x + \sqrt{x\left(E_0x - GmM\right)} - \frac{GmM}{2\sqrt{E_0}}\right)\right)\Bigg|_{x_0}^{x}.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 2.

Как видно из графиков, при выбранных значениях коэффициента сопротивления аналитические решения уравнения (12), даваемые формулами (13) и (14) в обоих случаях с высокой точностью совпадают с численными решениями уравнения (11).

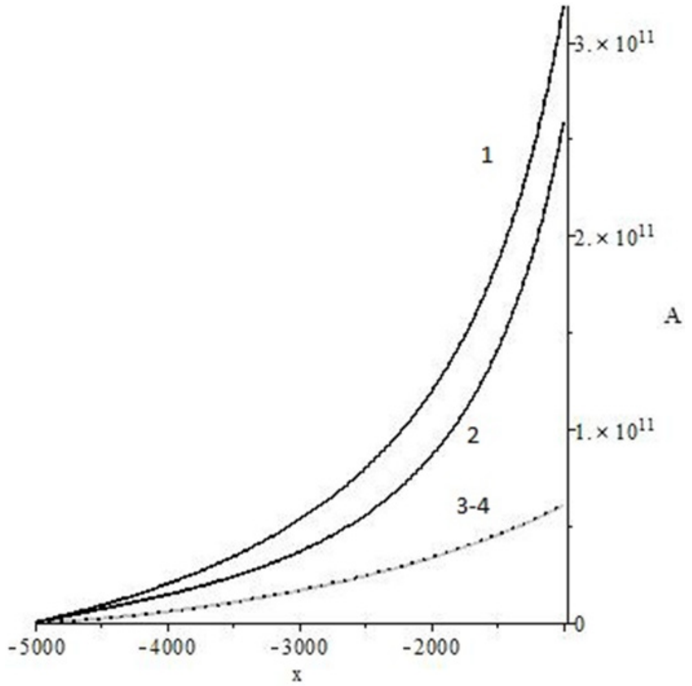



*Рис. 2. Кривая 1 — кинетическая энергия связанной консервативной системы, 2 — кинетическая энергия диссипативной системы, 3-4 – наложение графиков численного решения уравнения (11) и аналитического решения уравнения (12)*

**Заключение**

В работе рассмотрено движение диссипативной системы с одной степенью свободы. С помощью теоремы об изменении полной механической энергии задача определения скорости диссипативного движения как функции координаты была сведена к задаче об определении работы диссипативной силы. Получены общие дифференциальные уравнения относительно работы, которые для случая слабого сопротивления удалось свести к линейным дифференциальным уравнениям. Это позволило получить общие аналитические решения в квадратурах, позволяющие определить характеристики диссипативного движения в поле с произвольным потенциалом. Величина работы диссипативной силы оказалась выраженной через функции (кинетическую энергию и время), описывающие движение связанной консервативной системы. Построены графики, иллюстрирующие полученные результаты для движения в конкретных полях: однородном гравитационном поле и гравитационном поле с ньютоновским потенциалом.

**Литература**


1. *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика: Учеб. пособие в 10-ти т. Т. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 4-е изд., испр. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 216 с.

2. *Савельев, И. В.* Основы теоретической физики. Т. I. Механика и электродинамика / И. В. Савельев; – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 416 с.

3. *Зайцев, В. Ф.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – Москва : Физматлит, 1993. – 464 с.

4. *Denman, H. H.* Solution of the Hamilton-Jacobi equation for certain dissipative classical mechanical systems / H. H. Denman, L. H. Buch // J. Math. Phys. – 1973. – V. 14, № 3. – p. 326–329.

5. *Гришков, А. С.* Одномерное движение под действием потенциальной силы в однородной диссипативной среде с линейным по скорости сопротивлением / А. С. Гришков, А. М. Ерёмин // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2019. – С. 42–45.

6. *Гришков, А. С.* Одномерное движение под действием потенциальной силы в однородной диссипативной среде / А. С. Гришков, Р. С. Вдовин, А. М. Ерёмин, П. В. Захаров // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: сборник трудов международной научной конференции. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2020. – С. 75–82.

УДК 517.984.3

# О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ ЛОКАЛЬНО ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

**Е. Ю. Гусева, В. Г. Курбатов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Пусть $X$ — банахово пространство, а $T$ — линейный ограниченный оператор, действующий в $l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \le p \le \infty$. Оператор $T$ назван *локально ядерным*, если он может быть представлен в виде

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \qquad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где операторы $b_{km} : X \to X$ являются ядерными и

$$\|b_{km}\|_{\mathfrak{S}_1} \le \beta_m, \qquad k, m \in \mathbb{Z}^c,$$

здесь $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}_1}$ — ядерная норма, $\beta \in l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$ или $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$, а $g$ — специальный вес на $\mathbb{Z}^c$. Приводится аккуратная формулировка утверждения о том, что если $T$ является локально ядерным и оператор $\mathbf{1} + T$ обратим, то обратный оператор $(\mathbf{1} + T)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где $T_1$ также является локально ядерным. Этот результат применяется к операторам, действующим в $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$.

**Ключевые слова:** локально ядерный оператор, наполненная подалгебра, разностный оператор, оператор свертки, норма с весом.

Пусть $X$ — банахово пространство, а $X^*$ — его сопряженное. Символом $\mathbf{B}(X)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в $X$. Оператор $A \in \mathbf{B}(X)$ называют [16; 9, 6.3.1] *ядерным*, если он представи́м в виде

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, a_i \rangle y_i, \tag{1}$$

где $y_i \in X$, $a_i \in X^*$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \cdot \|y_i\| < \infty.$$

Коротко это принято записывать так:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes y_i.$$

Множество всех ядерных операторов $A \in \mathbf{B}(X)$ обозначим символом $\mathfrak{S}_1(X)$. Положим

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_1} = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \cdot \|y_i\|, \tag{2}$$

где инфимум берется по всем представлениям оператора $A$ в виде (1). Хорошо известно [9, 6.3.2], что множество $\mathfrak{S}_1(X)$ является идеалом в $\mathbf{B}(X)$. При этом

$$\|JA\|_{\mathfrak{S}_1(X)}, \ \|AJ\|_{\mathfrak{S}_1(X)} \le \|J\|_{\mathfrak{S}_1(X)} \|A\|_{\mathbf{B}(X)}, \qquad J \in \mathfrak{S}_1(X), \ A \in \mathbf{B}(X).$$

Идеал $\mathfrak{S}_1(X)$ является полным (банаховым) пространством относительно нормы (2).

Обозначим через $l_p = l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \le p \le \infty$, пространства последовательностей $x_n \in X$, $n \in \mathbb{Z}^c$, ограниченных по обычным нормам.

Пусть $c \in \mathbb{N}$. *Весом* на группе $\mathbb{Z}^c$ называют функцию $g : \mathbb{Z}^c \to (0, +\infty)$. Всегда будем предполагать, что вес на $\mathbb{Z}^c$ обладает следующими свойствами:

(a) $g(0) = 1$,

(b) $g(m+n) \le g(m) g(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}^c$,

(c) $g(-n) = g(n)$,

(d) $g(n) \geq 1$,

(e0) $\lim\limits_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\to\infty}} \dfrac{\ln g(nt)}{n} = 0$ для всех $t \in \mathbb{Z}^c$,

(e1) $\lim\limits_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\to\infty}} \sqrt[n]{g(nt)} = 1$ для всех $t \in \mathbb{Z}^c$.

Очевидно, что условие (d) вытекает из условий (a), (b) и (c). Также нетрудно показать, что условия (e0) и (e1) эквивалентны.

Приведем примеры [14, пример 5.21, 15] весов на группе $\mathbb{Z}^c$. Пусть $0 \leq b < 1$, $a \geq 0$ и $s, t \geq 0$, тогда функции

$$g(n) = 1,$$
$$g(n) = (1+|n|)^s,$$
$$g(n) = e^{a|n|^b}(1+|n|)^s,$$
$$g(n) = e^{a|n|^b}(1+|n|)^s \ln^t(e+|n|)$$

удовлетворяют условиям (a)–(e) из определения веса. Понятно, что в этом списке каждый предыдущий пример является частным случаем следующего.

Линейное пространство $\mathbf{B}$ называют [5, 10] *алгеброй*, если в нем определено умножение, обладающее свойствами

$$A(BC) = (AB)C,$$
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$
$$(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC.$$

Если $\mathbf{B}$ дополнительно является нормированным пространством и

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

то $\mathbf{B}$ называют *нормированной алгеброй*. Если нормированная алгебра является полным (т. е. банаховым) пространством, ее называют [5, 10] *банаховой алгеброй*.

Пусть $g$ — вес на $\mathbb{Z}^c$, а $\mathbf{B}$ — банахова алгебра. *Пространством* $l_{1,g}$ *на* $\mathbb{Z}^c$ *со значениями в* $\mathbf{B}$ *с весом* $g$ называют множество $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$, состоящее из всевозможных семейств $a = \{a_m \in \mathbf{B} : m \in \mathbb{Z}^c\}$, для которых

$$\|a\| = \|a\|_{l_{1,g}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} g(m)\|a_m\| < \infty.$$

Очевидно, что $l_{1,g}$ — линейное пространство относительно покоординатных операций сложения и умножения на скаляры. Если $g(n) \equiv 1$, то пространство $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$ совпадает с обычным пространством $l_1 = l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$. Из свойства (d) веса следует, что $l_{1,g} \subseteq l_1$. Относительно операции свертки, взятой в качестве умножения, $l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$ превращается в банахову алгебру.

Символом $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(X))$ обозначим множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$ вида

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \qquad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km} \in \mathfrak{S}_1(X)$ и выполнена оценка

$$\|b_{km}\|_{\mathfrak{S}_1(X)} \leq \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$. Операторы класса $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(X))$ назовем *локально ядерными*. Нетрудно показать, что $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(X))$ образует подалгебру (и даже идеал) в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$. Следующая теорема показывает, что эта подалгебра является наполненной в смысле [5].

**Теорема 1.** *Пусть оператор* $\mathbf{1} + T : l_p(\mathbb{Z}^c, X) \to l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, *где* $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1)$, *обратим (хотя бы при одном* $p \in [1, +\infty]$*). Тогда оператор* $\mathbf{1} + T$ *обратим при всех* $p \in [1, +\infty]$ *и обратный оператор имеет вид* $\mathbf{1} + T_1$, *где* $T_1 \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1)$.

Обозначим через $\lambda$ меру Лебега на $\mathbb{R}^c$. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^c$ — измеримое подмножество. Будем обозначать интеграл от суммируемой функции $x:\mathbb{R}^c \to \mathbb{C}$ относительно меры Лебега $\lambda$ через $\int_{\mathbb{R}^c} x(t)d\lambda(t)$ или, короче, $\int_{\mathbb{R}^c} x(t)dt$.

Обозначим через $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \le p < \infty$, пространство всех измеримых функций $u:\mathbb{R}^c \to \mathbb{C}$, ограниченных по полунорме

$$\|u\| = \|u\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^c} |u(t)|^p \, dt\right)^{1/p},$$

а через $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$ пространство всех измеримых существенно ограниченных функций $u:\mathbb{R}^c \to \mathbb{C}$ с полунормой

$$\|u\| = \|u\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}|\mathrm{u}(\mathrm{t})|.$$

Иногда удобно допускать, что функции $u \in \mathcal{L}_p$ могут быть не определены на пренебрежимом (т. е. имеющим меру нуль) множестве. Наконец, обозначим через $L_p = L_p(\mathbb{R}^c) = L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \le p \le \infty$, банахово пространство всех классов функций $u \in \mathcal{L}_p$, с отождествлением почти всюду. Подробнее см. [6]. Обычно пространства $\mathcal{L}_p$ и $L_p$ не различают.

**Предложение 2 [13; 19, 1.6.3].** *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Тогда отображение* $\varphi:\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}) \to l_p(\mathbb{Z}^c, \mathcal{L}_p([0,1)^c, \mathbb{C}))$, *определенное правилом* $\varphi(x) = \{x_m\}$, *где*

$$x_m(t) = x(t+m), \qquad t \in [0,1)^c,$$

*порождает (после отождествления эквивалентных функций) изометрический изоморфизм* $\varphi:L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}) \to l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1)^c, \mathbb{C}))$ *(будем обозначать его тем же символом* $\varphi$*).*

Так как пространства $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$ и $l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1)^c, \mathbb{C}))$ изометрически изоморфны, алгебры операторов $\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}))$ и $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1)^c, \mathbb{C})))$ также изоморфны. Обозначим через $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1) = \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1(L_p([0,1)^c, \mathbb{C})))$, $1 \le p \le \infty$, пространство всех операторов $A \in \mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}))$, соответствующих операторам класса $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(L_p([0,1)^c, \mathbb{C})))$ в соответствии с изоморфизмом $\varphi$, определенном в предложении 2. Другими словами, оператор $A$ принадлежит классу $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$ тогда и только тогда, когда оператор $T = \varphi A \varphi^{-1}$ принадлежит классу $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(L_p([0,1)^c, \mathbb{C})))$. Операторы класса $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$ также будем называть *локально ядерными*.

Следующая теорема является наиболее важным частным случаем теоремы 1.

**Теорема 3.** *Пусть* $1 \le p \le \infty$ *и оператор* $\mathbf{1} + A:L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}) \to L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, *где* $A \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$, *обратим. Тогда обратный оператор* $(\mathbf{1} + A)^{-1}$ *имеет вид* $\mathbf{1} + A_1$, *где* $A_1 \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$.

**Теорема 4.** *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Тогда для каждого оператора* $A \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$ *существует измеримая функция*

$$n:\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^c \to \mathbb{C}$$

*такая, что для любого* $x \in L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$ *в почти всех точках* $t \in \mathbb{R}^c$ *(следующий интеграл существует и)*

$$(Ax)(t) = \int_{\mathbb{R}^c} n(t,s)x(s)ds.$$

Основные результаты опубликованы в [17]; их доказательство существенно использует теорему Бохнера — Филлипса [11]. Близкие вопросы изучались в [1–4, 7, 8, 12, 14, 15, 18–20].

## Литература


1. *Баскаков, А. Г.* Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц / А. Г. Баскаков // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24, № 3. – С. 64–65.

2. *Баскаков, А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ / А. Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38, № 1. – С. 14–28.

3. *Баскаков, А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – Т. 9. – С. 3–151.

4. *Блатов, И. А.* Об оценках элементов обратных матриц и модернизации метода матричной прогонки / И. А. Блатов, А. А. Тертерян // Сиб. матем. журн. – 1992. – Т. 32, № 11. – С. 1683–1696.

5. *Бурбаки, Н.* Спектральная теория / Н. Бурбаки. Элементы математики. – М. : Мир, 1972. – 183 с.

6. *Бурбаки, Н.* Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах / Н. Бурбаки. Элементы математики. – М. : Наука, 1977. – 600 с.

7. *Курбатов, В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения / В. Г. Курбатов. – Воронеж : Издательство Воронежского университета, 1990. – 168 с.

8. *Курбатов, В. Г.* Об алгебрах разностных и интегральных операторов / В. Г. Курбатов // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24, № 2. – С. 87–88.

9. *Пич, А.* Операторные идеалы / А. Пич. – М. : Мир, 1982. – 536 с.

10. *Рудин, У.* Функциональный анализ / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 443 с.

11. *Bochner, S.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings / S. Bochner, R. S. Phillips // Ann. of Math. (2). – 1942. – Vol. 43. – P. 409–418.

12. *Fendler, G.* Convolution-dominated operators on discrete groups / G. Fendler, K. Gröchenig, M. Leinert // Integral Equations Operator Theory. – 2008. – Vol. 61, No. 4. – P. 493–509.

13. *Fournier, J. J. F.* Amalgams of $L^p$ and $l^q$ / J. J. F. Fournier, J. Stewart // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). – 1985. – Vol. 13, No. 1. – P. 1–21.

14. *Gröchenig, K.* Wiener's lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance / K. Gröchenig // Four Short Courses on Harmonic Analysis: Wavelets, Frames, Time-Frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis. – Boston–Basel–Berlin : Birkhäuser, 2010. – Applied and Numerical Harmonic Analysis. – P. 175–244.

15. *Gröchenig, K.* Symmetry and inverse-closedness of matrix algebras and functional calculus for infinite matrices / K. Gröchenig, M. Leinert // Trans. Amer. Math. Soc. – 2006. – Vol. 358, No. 6. – P. 2695–2711.

16. *Grothendieck, A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires / A. Grothendieck. Mem. Amer. Math. Soc. no. 16. – Fourth edition. – Providence, RI : American Mathematical Society, 1966. – 383 p.

17. *Guseva, E. Yu.* Inverse-closedness of the subalgebra of locally nuclear operators / E. Yu. Guseva, V. G. Kurbatov. – 2020, October. – Preprint. – arXiv: 2010.02883. – 33 p.

18. *Guseva, E. Yu.* Inverse-closedness of subalgebras of integral operators with almost periodic kernels / E. Yu. Guseva, V. G. Kurbatov // Complex Analysis and Operator Theory. – 2020. – Vol. 14, No. 1. – Paper No. 4, – 23 p.

19. *Kurbatov, V. G.* Functional differential operators and equations / V. G. Kurbatov. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. – Vol. 473 of Mathematics and its Applications. – xx+433 p.

20 *Kurbatov, V. G.* Inverse-closedness of the set of integral operators with $L_1$-continuously varying kernels / V. G. Kurbatov, V. I. Kuznetsova // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – Vol. 436, No. 1. – P. 322–338.

УДК 517.53, 517.535

# ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

**А. Е. Додонов**

*Владимирский государственный университет*
*имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых*

**Аннотация.** В работе получены оценки решений задачи Коши для неустойчивого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и для однородного уравнения Эйлера, основанные на неравенствах с рациональными мажорантами из работ [1, 2].
**Ключевые слова:** оценки решений дифференциальных уравнений.

## Введение

В работе [1] для решения $y(x) = A_1 e^{z_1 x} + A_2 e^{z_2 x} + \ldots + A_n e^{z_n x}$ устойчивого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_0 y = 0 \tag{1}$$

было получено неравенство

$$|y(x)| \le \frac{n\|r\|}{x}, \qquad r(t) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{it - z_k}\right), \qquad \|r\| = \max\nolimits_{t\in\mathbb{R}} |r(t)|, \tag{2}$$

справедливое при $x > 0$.

В работе [2] рассматривалось уравнение (1) с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n)}(0) = y_n,$$

и было показано, что в этом случае для нахождения $r(t)$ нет необходимости знать корни характеристического уравнения:

$$r(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(y_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} p_{n-j} y_{k-1-j}\right)(it)^{n-k}}{(it)^n + p_{n-1}(it)^{n-1} + \ldots + p_0}\right),$$

а оценка (2) учитывает «интерференцию» гармонических слагаемых, входящих в решение $y(x)$, а не только их модули.

## 1. Оценка решения задачи Коши для неустойчивого линейного однородного уравнения

Рассмотрим задачу Коши для неустойчивого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\tilde{y}^{(n)} + \tilde{p}_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} + \ldots + \tilde{p}_0 \tilde{y} = 0, \qquad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0, \quad \tilde{y}'(0) = \tilde{y}_1, \quad \ldots, \quad \tilde{y}^{(n)}(0) = \tilde{y}_n. \tag{3}$$

Легко проверить, что при $\alpha$, большем модуля любого из корней характеристического уравнения, решение $y(x)$ устойчивого линейного однородного дифференциального уравнения (1) с коэффициентами

$$p_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \tilde{p}_j, \qquad p_k = \sum_{j=k}^{n-1} C_j^k \alpha^{j-k} \tilde{p}_j + C_n^k \alpha^{n-k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

и начальными условиями

$$y_0=\tilde{y}_0, \qquad y_k=\sum_{j=0}^{k} c_k^j(-\alpha)^{k-j}\,\tilde{y}_j, \qquad k=1,2,\ldots,n-1, \tag{5}$$

связано с решением задачи (3) равенством $\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}y(x)$. Тогда для решения задачи (3) при $x>0$ справедливо неравенство

$$|\,\tilde{y}(x)\,|\le \frac{ne^{\alpha x}\|r\|}{x}. \tag{6}$$

Подходящее $\alpha$ можно найти, оценив границу корней характеристического уравнения, например, с помощью метода квадрирования.

## 2. Оценка решения задачи Коши для однородного уравнения Эйлера

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение Эйлера

$$\hat{p}_n(t+\beta)^n\,\hat{y}^{(n)}+\hat{p}_{n-1}(t+\beta)^{n-1}\,\hat{y}^{(n-1)}+\ldots+\hat{p}_0\hat{y}=0, \tag{7}$$

с условиями

$$\hat{y}(1-\beta)=\hat{y}_0, \quad \hat{y}'(1-\beta)=\hat{y}_1, \quad \ldots, \quad \hat{y}^{(n)}(1-\beta)=\hat{y}_n. \tag{8}$$

Как известно, заменой переменной $t+\beta=e^x$ однородное уравнение Эйлера сводится к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Пусть

$$\sigma_m(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_m\le n} z_{j_1}\ldots z_{j_m}, \quad \hat{\sigma}_0^{(k-1)}=1, \quad \hat{\sigma}_m^{(k-1)}=\sigma(1,\ldots,k-1,0,\ldots,0),$$

$$p_0=\frac{\hat{p}_0}{\hat{p}_n}, \qquad p_m=\frac{1}{\hat{p}_n}\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\hat{p}_k\hat{\sigma}_{k-m}^{(k-1)}.$$

Справедливо равенство (см., например, [3])

$$(t+\beta)^k\,\hat{y}^{(k)}=\prod_{j=0}^{k-1}(D-j)y(x), \qquad D=\frac{d}{dx}.$$

Правая часть последнего равенства имеет вид

$$\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\hat{\sigma}_m^{(k-1)}D^{k-m}y(x).$$

Отсюда видим, что уравнение (7) сводится к уравнению (1), где $y(x)=\hat{y}(e^x-\beta)$.

Начальные условия для (1), как несложно видеть, получаются из условий (8) следующим образом:

$$y_k=\left(\hat{y}(e^x-\beta)\right)_{x=0}^{(k)}.$$

Таким образом, если (1) устойчиво, для решения $\hat{y}(t)$ задачи Коши для однородного дифференциального уравнения Эйлера при $t>1-\beta$ справедливо неравенство

$$|\,\hat{y}(t)\,|\le \frac{n\|r\|}{\ln(t+\beta)}.$$

Аналогичным образом, из (6) можно получить оценку и в неустойчивом случае. Именно, если задача (7), (8) сводится к задаче (3) с неустойчивым уравнением, то, находя коэффициенты и начальные условия по формулам (4), (5), получим неравенство

$$|\,\hat{y}(t)\,|\le \frac{n(t+\beta)^{\alpha}\|r\|}{\ln(t+\beta)},$$

справедливое при $t>1-\beta$.

**Литература**

1. *Данченко, В. И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы / В. И. Данченко // Математический сборник – 2006. – Т. 197, Вып. 4 – С. 33–52.

2. *Danchenko, V. I.* Estimates for exponential sums. Applications / V. I. Danchenko, A. E. Dodonov // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 188, no 3. – P. 197–206.

3. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 4-е изд., испр. – Москва : Наука, 1971. – 576 с.

УДК 517.958

# ЗАДАЧА О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

**А. А. Домнич**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель, описывающая установившееся течение неравномерно нагретой вязкой жидкости через заданную локально-липшицеву область с отверстиями. Вводится понятие слабого решения в декартовом произведении соболевских пространств. Получены достаточные условия для существования слабых решений. Установлено энергетическое равенство, которому удовлетворяют слабые решения.
**Ключевые слова:** неизотермическое течение, вязкая жидкость, слабые решения, теорема существования, топологическая степень, метод Галеркина, энергетическое равенство.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2,3,$ — ограниченная область с локально-липшицевой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим стационарную математическую модель, описывающую неизотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости через область $\Omega$ при смешанных краевых условиях:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\theta) \ \text{ в } \ \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \\ \mathbf{T} = \mu(\theta)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) - p\mathbf{I} \ \text{ в } \ \Omega, \\ (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\theta - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) = \omega(\boldsymbol{x},\theta) \ \text{ в } \ \Omega, \\ \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \ (\mathbf{Tn})_\tau = -\varkappa(\theta)\mathbf{u}_\tau \ \text{ на } \ \partial\Omega\setminus S, \\ \theta = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega\setminus S, \\ \boldsymbol{u}_\tau = \mathbf{0}, \ |\boldsymbol{u}|^2/2 + p = h \ \text{ на } \ S, \\ k(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\psi \ \text{ на } \ S, \end{cases} \tag{A}$$

где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ — скорость течения в точке $\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}$; $\theta = \theta(\boldsymbol{x})$ — температура; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\theta)$ — плотность внешних объемных сил; $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\boldsymbol{x})$ — тензор напряжений Коши; $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$ — тензор скоростей деформации, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) = (\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^\top)/2$; $\mathbf{I}$ — единичный тензор; $p = p(\boldsymbol{x})$ — давление; $\mu(\theta) > 0$ — коэффициент вязкости; $k(\theta) > 0$ — коэффициент теплопроводности; $\varkappa(\theta) > 0$ — коэффициент проскальзывания; $\omega(\boldsymbol{x},\theta)$ — мощность тепловых источников; $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\boldsymbol{x})$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$; $S$ — плоский (прямолинейный при $d = 2$) участок границы, где происходит протекание, или объединение нескольких таких участков; $\psi, h : S \to \mathbb{R}$ — функции, характеризующие тепловой поток и напор на $S$ соответственно. Нижний индекс $\tau$ обозначает касательную составляющую вектора, т. е. $\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$.

Будем предполагать выполнение следующих шести условий:

(i) множества $S$ и $\partial\Omega\setminus S$ имеют положительную $(d-1)$-мерную меру Лебега;

(ii) справедливы включения: $h \in L^2(S)$ и $\psi \in L^2(S)$;

(iii) функции $\mu, k, \varkappa : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывны и существуют константы $\mu_i$, $k_i$, $\varkappa_i$, $i = 0,1,$ такие, что $0 < \mu_0 \le \mu(y) \le \mu_1$, $0 < k_0 \le k(y) \le k_1$ и $0 < \varkappa_0 \le \varkappa(y) \le \varkappa_1$ для любого $y \in \mathbb{R}$;

(iv) функции $\boldsymbol{f}(\cdot, y), \omega(\cdot, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримы для любого $y \in \mathbb{R}$;

(v) функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\cdot), \omega(\boldsymbol{x},\cdot) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывны для п. в. $\boldsymbol{x}\in\Omega$;

(vi) существуют функции $f_0, \omega_0 \in L^2(\Omega)$ такие, что $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, y)| \le f_0(\boldsymbol{x})$ и $|\omega(\boldsymbol{x}, y)| \le \omega_0(\boldsymbol{x})$ для любого $y \in \mathbb{R}$ и п. в. $\boldsymbol{x}\in\Omega$.

Введем необходимые обозначения и функциональные пространства. Будем использовать стандартные обозначения для пространств Соболева и Лебега. Пусть

$$\mathbb{X}_S(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega\setminus S} = 0,\ \boldsymbol{v}_\tau|_S = \mathbf{0}\},$$

$\mathbf{X}_S(\Omega)$ = замыкание множества $\mathbb{X}_S(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{H}^1(\Omega)$,

$$\mathbb{Y}_S(\Omega) = \{\eta \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \eta|_{\partial\Omega\setminus S} = 0\},$$

$\mathrm{Y}_S(\Omega)$ = замыкание множества $\mathbb{Y}_S(\Omega)$ в пространстве $H^1(\Omega)$.

Сформулируем основные результаты работы.

**Теорема 1.** *Если четверка* $(\boldsymbol{u}, \theta, \mathbf{T}, p)$ *— классическое решение задачи (A), то выполнены следующие соотношения:*

$$-\sum_{i=1}^d \int_\Omega u_i \boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}\boldsymbol{dx} + \int_S (|\boldsymbol{u}|^2/2 + h)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d\sigma + \int_\Omega \mu(\theta)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{dx} +$$

$$+\int_{\partial\Omega\setminus S} \varkappa(\theta)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}d\sigma = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\theta)\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{dx}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^d \int_\Omega u_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\eta\boldsymbol{dx} + \int_\Omega k(\theta)\nabla\theta\cdot\nabla\eta\boldsymbol{dx} + \int_S \psi\eta d\sigma = \int_\Omega \omega(\boldsymbol{x},\theta)\eta\boldsymbol{dx} \tag{2}$$

*для любых* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_S(\Omega)$ *и* $\eta \in \mathrm{Y}_S(\Omega)$.

Введем понятие слабого решения краевой задачи (A).

**Определение.** *Слабым решением* краевой задачи (A) будем называть пару функций $(\boldsymbol{u}, \theta) \in \boldsymbol{X}_S(\Omega)\times\mathrm{Y}_S(\Omega)$ такую, что выполнены тождества (1) и (2) для любых $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_S(\Omega)$ и $\eta \in \mathrm{Y}_S(\Omega)$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены допущения (i)–(vi). Тогда*

*(a) если выполнено неравенство*

$$k_0 > \frac{M_1(\Omega,S)\|h\|_{L^2(S)} + M_2(\Omega,S)\|f_0\|_{L^2(\Omega)}}{2\min\{\mu_0, \varkappa_0\}},$$

*в котором константы* $M_1(\Omega,S)$ *и* $M_2(\Omega,S)$ *определены по формулам:*

$$M_1(\Omega,S) = \|\boldsymbol{\gamma}_S\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_S(\Omega),\boldsymbol{L}^2(S))}\|\gamma_S\|^2_{\mathcal{L}(\mathrm{Y}_S(\Omega),L^4(S))},$$

$$M_2(\Omega,S) = \|\boldsymbol{\gamma}_S\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_S(\Omega),\boldsymbol{L}^2(S))}\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}_S(\Omega),\boldsymbol{L}^2(\Omega))}\|\gamma_S\|^2_{\mathcal{L}(\mathrm{Y}_S(\Omega),L^4(S))},$$

*где* $\gamma_S$ *— оператор следа,* $\mathcal{I}$ *— оператор вложения, то задача (A) имеет хотя бы одно слабое решение;*

*(b) всякое слабое решение задачи (A) удовлетворяет энергетическим равенствам:*

$$\int_\Omega \mu(\theta)|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})|^2\boldsymbol{dx} + \int_{\partial\Omega\setminus S}\varkappa(\theta)|\boldsymbol{u}|^2 d\sigma + \int_S h(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n})d\sigma = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\theta)\cdot\boldsymbol{u}\boldsymbol{dx},$$

$$\int_\Omega k(\theta)|\nabla\theta|^2\boldsymbol{dx} + \int_S\left[\psi\theta + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\theta^2/2\right]d\sigma = \int_\Omega \omega(\boldsymbol{x},\theta)\theta\boldsymbol{dx};$$

*(c) множество слабых решений задачи (A) секвенциально слабо замкнуто в пространстве* $\mathbf{X}_S(\Omega)\times\mathrm{Y}_S(\Omega)$.

**Замечание 1.** Для построения слабых решений краевой задачи (A) использовался метод Галеркина. Разрешимость соответствующих галеркинских аппроксимаций доказана с привлечением методов теории топологической степени Брауэра на основе вывода энергетических оценок приближенных решений. Предельный переход проводился с помощью известных теорем о компактности вложения соболевских пространств и компактности оператора следа.

**Замечание 2.** Линеаризованная система уравнений, описывающая протекание неравномерно нагретой несжимаемой вязкой жидкости сквозь ограниченный сосуд с двумя плоскими отверстиями, исследована в [1].

Настоящая работа выполнена совместно с Е. С. Барановским [2].

**Литература**

1. *Крейн С. Г.* Задача протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости / С. Г. Крейн, Чан Тху Ха // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. – Т. 29, № 8. – С. 1153–1158.

2. *Барановский Е. С.* О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область / Е. С. Барановский, А. А. Домнич // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 317–327.

УДК 517.956.32, 517.929

# ПОСТРОЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

**Н. В. Зайцева**

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

**Аннотация.** Для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с $n$ сдвигами по пространственной переменной построено однопараметрическое семейство гладких решений. Доказана теорема, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа разностного оператора уравнения положительна.
**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение.

Впервые дифференциально-разностное уравнение было изучено J. Bernoulli [1] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. Рассмотренное им уравнение встретилось при разработке теории звука и привлекло внимание многих других ученых (см., напр., [2] и имеющуюся там библиографию).

В настоящее время подробно исследованы задачи для дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях (см., напр., [3] и имеющуюся там библиографию). В неограниченных областях изучены задачи для параболических [4] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений с частными производными [5–7]. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига в уравнении действуют по переменной времени [8].

Рассмотрим в полуплоскости $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ гиперболическое дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial^2 u(x-h_j,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $a_j$ и $h_j$ $(j=\overline{1,n})$ — заданные вещественные числа.

Вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора $L$ уравнения (1) равна

$$\operatorname{Re}L(\xi)=-\xi^2\sum_{j=1}^{n}a_j\cos(h_j\xi).$$

Будем называть оператор: $-L$ положительным оператором, если выполняется условие

$$-\operatorname{Re}L(\xi)>0$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^1$, то есть, если справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\cos(h_j\xi)>0. \tag{2}$$

В дальнейшем будем считать оператор $-L$ положительным.

Применив классическую операционную схему Гельфанда — Шилова (см. [9]), введем по аналогии с работами [10, 11] однопараметрическое семейство функций

$$G(x,t;\xi):=\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+$$
$$+\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)},$$

где

$$\rho(\xi) := \left( \left( \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(h_j \xi) \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{n} a_j \sin(h_j \xi) \right)^2 \right)^{1/4}$$

и

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(h_j \xi)}{\sum_{j=1}^{n} a_j \cos(h_j \xi)}.$$

Отметим, что функции $\rho(\xi)$ и $\theta(\xi)$ определены корректно при всех значениях параметров $a_j$, $h_j$ $(j = \overline{1,n})$, и $\xi$.

Доказана

**Теорема.** *При выполнении условия (2) функция* $G(x,t;\xi)$ *удовлетворяет уравнению (1) при любом вещественном значении параметра* $\xi$.

Также доказано, что условие (2) не может быть выполнено, если все $n$ сдвигов в правой части уравнения (1) отличны от нуля. Рассмотрен единственно возможный случай, когда один и только один сдвиг равен нулю. Пусть, например, $h_1 = 0.$ В этом случае, условие (2) (или условие положительности оператора: $-L$) выполняется, если $a_1 > \sum_{j=2}^{n} |a_j|$.

## Литература


1. *Bernoulli, J.* Meditationes. Dechordis vibrantibis / J. Bernoulli // Commentaril Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. – 1728. – No 3. – P. 13–28.

2. *Burkhardt, H.* Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik / H. Burkhardt // Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. – 1908. – No 10. – P. 1–1804.

3. *Skubachevskii, A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications / A. L. Skubachevskii. – Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997. – 293 p.

4. *Муравник, А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А. Б. Муравник // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2014. – № 52. – С. 3–143.

5. *Муравник, А. Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений / А. Б. Муравник // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100, № 4. – С. 566–576.

6. *Muravnik, A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms / A. Muravnik // Math. Model. Nat. Phenom. – 2017. – Vol. 12, No 6. – P. 130–143.

7. Муравник, А. Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики / А. Б. Муравник // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105, № 5. – С. 747–762.

8. *Власов, В. В.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В. В. Власов, Д. А. Медведев // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2008. – № 30. – С. 3–173.

9. *Гельфанд, И. М.* Обобщенные функции. Вып. 3.: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1958. – 276 с.

10. *Зайцева, Н. В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н. В. Зайцева // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 6. – С. 745–751.

11. *Зайцева, Н. В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н. В. Зайцева // Докл. АН. – 2020. – Т. 491, № 2. – С. 44–46.

УДК 517.968.22

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПРЕДДЕЙСТВИЕМ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

**А. Н. Зарубин, Е. В. Чаплыгина**

*Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева*

**Аннотация.** исследуется задача типа Коши для функционально-дифференциального уравнения дробного порядка в классе непрерывных по Гельдеру функций.
**Ключевые слова:** дробная производная, функция Миттаг-Леффлера, опережающе-запаздывающее уравнение, дифференциально-разностные уравнения.

Развитие теории уравнений в частных производных дробного порядка является важ-ной задачей, так как основа большинства математических моделей, описывающих экономи-ческие и социально-биологические явления, — дифференциальные уравнения дробного по-рядка.

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$, опережающе-запаздывающего типа

$$\sum_{k=-1}^{1}[b_{k+1}D_0^\alpha y(x+k\tau)-a_{k+1}y(x-k\tau)]=0,\ 0<x<3\tau,\ 0<\alpha<1, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$y(x)=r(x), -\tau\le x\le 0, \tag{2}$$

$$y(x)=\rho(x), 3\tau\le x\le 4\tau, \tag{3}$$

$$D_0^{\alpha-1}y(x)\Big|_{x=j\tau}=s_j\,(j=0,1,2), \tag{4}$$

где $r(x), \rho(x), \alpha, s_j\ (j=0,1,2)$ — заданные функции и постоянные величины, причем

$$D_0^\alpha y(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha}\ — \tag{5}$$

дробная производная [1, с.43] порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$, Римана — Ли-увилля; $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция [2, с. 8].

**Задача *T*.** Найти решение $y(x)$ уравнения (1) на промежутке $0<x<3\tau$ из класса $H_\alpha$ ($0<\alpha<1$), удовлетворяющее условиям (2)–(4), условию согласования $r(0)=D_0^{\alpha-1}y(0)$, где $r(x),\ \rho(x),\ \alpha$, $s_j\ (j=0,1,2)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции и постоянные величины.

**Теорема.** *Пусть функции* $r(x),\ \rho(x)\in H_\alpha,\ a_0=a_2,\ a_1>\sqrt{2}a_0>0,\ b_0=b_2,\ b_1>\sqrt{2}b_0>0$. *Тогда решение задачи (1)–(4) в про-межутке* $0<x<3\tau$ *существует, непрерывно и единственно.*

**Доказательство.**

Опережающе-запаздывающее уравнение дробного порядка (1) сведем к системе трех уравнений дробного порядка без отклонений аргумента.

В терминах функций

$$y_k(x)=y(x),\quad x\in(x\tau,(k+1)\tau)\quad (k=0,1,2), \tag{6}$$

используя вектор

$$\overline{y}(x)=(y_0(x),y_1(x+\tau),\quad y_2(x+2\tau))^T,\quad x\in(0,\tau), \tag{7}$$

с учетом условий (2), (3) и произведя замену $x$ на $x+k\tau\ \ (k=0,1,2)$, уравнение (1) представим в форме системы трех уравнений относительно функций $y_k(x),\ x\in(k\tau,(k+1)\tau)\ \ (k=0,1,2)$

$$\mathrm{B}D_0^\alpha\overline{y}(x)=\mathrm{A}\overline{y}(x)+\overline{m}(x), \tag{8}$$

где

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{m}(x)=\begin{pmatrix} -b_0 D_0^{\alpha} r(x-\tau)+a_2 r(x-\tau) \\ 0 \\ -b_2 D_0^{\alpha}\rho(x+3\tau)+a_0\rho(x+3\tau) \end{pmatrix},$$

При $a_0=a_2,\ a_1>\sqrt{2}a_0>0$ и $b_0=b_2,\ b_1>\sqrt{2}b_0>0$ матрицы $\mathrm{A}$ и $\mathrm{B}$ [3, с. 46] являются симметрическими. Поэтому су-ществует невырожденная матрица $\mathrm{T}$, что

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}=\Lambda_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{BT}=\Lambda_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix} \beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_j=a_1-(-1)^j j\sqrt{2}a_0 2^{1-j},\ \beta_j=b_1-(-1)^j\sqrt{2}b_0 2^{1-j}\ \ (j=0,1,2)$ — собственные значения соответ-ственно матриц $\mathrm{A}$ и $\mathrm{B}$, причем

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overline{p_0} \\ \overline{p_1} \\ \overline{p_2} \end{pmatrix}.$$

Умножая слева матричное уравнение (8) на $\mathrm{T}^{-1}$, учитывая $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}=\Lambda_{\mathrm{A}}\mathrm{T}^{-1},\ \mathrm{T}^{-1}\mathrm{B}=\Lambda_{\mathrm{B}}\mathrm{T}^{-1}$, после преобразований получим три уравнения дробного порядка без отклонений аргумента

$$D_0^{\alpha}q_j(x)=\frac{\lambda_j}{\beta_j}q_j(x)+h_j(x),\quad 0<x<\tau\quad (j=0,1,2), \tag{9}$$

где

$$q_j(x)=<\overline{p_j},\overline{y}(x)>,\quad h_j(x)=\frac{1}{\beta_j}<\overline{p_j},\overline{m}(x)>\ — \tag{10}$$

скалярные произведения векторов, а

$$D_0^{\alpha-1}q_j(x)\Big|_{x=0}=c_j\quad (j=0,1,2)\ — \tag{11}$$

начальное условие, причем $c_j=<\overline{p_j,s}>,\ \overline{s}=\left(s_0,s_1,s_2\right)^{\mathrm{T}}$.

Множество решений $q_j(x),\ x\in(0,\tau)\ \ (j=0,1,2)$ уравнений (10) содержит решения $y(x)=y_j(x),\ x\in(j\tau,(j+1)\tau)\ \ (j=0,1,2)$ уравнения (1), которые, в силу (6), (7), можно выделить из (10) в виде

$$\overline{y}(x)=\mathrm{T}\begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Таким образом, поставленная задача для опережающе-запаздывающего уравнения дробного порядка (1) в промежутке $0<x<3\tau$ сведена к трем задачам для трех урав-нений дробного порядка (9) без отклонений в промежутке $0<x<\tau$ относительно функций $q_j(x)$ $(j=0,1,2)$ вида (10).

**Задача $\boldsymbol{T_j}$.** Найти на промежутке $0<x<\tau$ решение $q_j(x)\in H_\alpha$ уравнения (9), $h_j(x)\in H_\alpha$, удовлетворяющее условию (11).

**Лемма.** *Пусть функция* $h_j(x)\in H_\alpha$ $(j=0,1,2)$, *тогда решение задачи* $T_j$ *(9), (10) при* $0<x<\tau$ *существует, непрерывно и единственно.*

**Доказательство** леммы производится аналогично [1, с. 597–602]. Искомое решение $q_j(x)$ задачи $T_j$ для уравнения (9) при условии (11) имеет вид

$$q_j(x)=c_jx^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\frac{\lambda_j}{\beta_j}x^\alpha)+\int_0^x h_j(t)\left(x-t\right)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\frac{\lambda_j}{\beta_j}\left(x-t\right)^\alpha)dt, \tag{13}$$

$0<x<\tau$ $(j=0,1,2)$, где $\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(z)$ — функция [1, с. 33] Миттаг-Леффлера.

Решение $q_j(x)$, $0<x<\tau$ (13) задачи $T_j$, в совокупно-сти с равенством (12), дает решение $y(x)$, $0<x<3\tau$ исходной задачи.

Теорема доказана.

### Литература


1. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. *Кузнецов, Д. С.* Специальные функции / Д. С. Кузнецов. – Москва : Высшая школа, 1962. – 248 с.

3. *Беллман, Р.* Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – Москва : Наука, 1976. – 352 с.

УДК 517.9

# ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

**О. С. Зикиров, М. М. Сагдуллаева**

*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека*

**Аннотация.** Нелокальная задача для нагруженного уравнения теплопроводности. В этой работе доказывается однозначное решение интегральной условно краевой задачи для уравнения параболического типа.

**Ключевые слова:** краевая задача, нелокальная задача, нагруженное уравнение, функция Грина, интегральные уравнения.

Различные классы нагруженных уравнений изучались в работах Кожанов А. И. [1], Дженалиев М. Т. [2]. Как близкие к настоящей работе, отметим статьи [3, 4] которые посвящены исследованию некоторых классов нагруженных уравнений параболического типа.

В области $D=\{(x,t):\ 0<x<\ell, \quad 0<t<T\}$ рассмотривается уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t)-\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $f(x,t)$ — заданные функции.

Требуется найти в области $D$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному

$$u(x,t)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le \ell, \tag{2}$$

*граничным*

$$u_x(0,t)=\psi_1(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

*и интегральным условием*

$$\int_0^\ell u(x,t)dx=\int_0^t h(t,\tau)u_x(\ell,\tau)\,d\tau+\psi_2(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_i(t)$, $(i=\overline{1,2})$; $h(t,\tau)$ — заданные, непрерывные при $x\in[0,\ell]$, $t\in[0,T]$, $\tau\in[0,t]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям соглосования:

$$\varphi'(0)=\psi_1(0),$$

Через $C^{k,\ell}(D)$ обозначен класс функции $u(x,t)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,t)/\partial x^m\partial t^n$ для всех $m=\overline{0,k}$, $n=\overline{0,\ell}$; $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Под классом $C^{k,\nu}(D)$ понимаются определенные в области $D$ функции, у которых все частные производные порядка $k$ существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\nu\in(0,1)$.

**Определение.** Р*егулярным в области $D$ решением уравнения (1) называется дейсвительная функция $u(x,t)$, из класса $C^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

Основным результатом данной работы является следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

**Теорема 1.** *Пусть $\varphi(x)\in C[0,\ell]$, $f(x,t)\in C(\overline{D})$, $\psi_1(t)\in C[0,\mathrm{T}]$ $\psi_2(t)\in C^1[0,\mathrm{T}]$ и $h(t,\tau)\in C^1([0,\mathrm{T}]^2)$ $h(t,\tau)\ne 0$ для всех $t\in C\left[0,\mathrm{T}\right]$. Тогда решение задачи (1)–(4) существует и единственно.*

**Литература**

1. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 1166–1179.

2. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Нагруженные уравнения – как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы : Гылым. – 2010, 334 с.

3. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференциальные уравнения. – 2004. – 40:6. – С. 763–774.

4. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент : Фан, 1979. – С. 240.

УДК 517.984, 517.9

# ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

**А. С. Канзеба**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе методом Фурье получено классическое решение смешанной задачи для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией и с потенциалом специального вида в случае двухточечных краевых условий. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования, следующие из постановки задачи. Условия на потенциал позволяют просуммировать формальное решение, найденное методом Фурье, и получить явное аналитическое представление для решения задачи.
**Ключевые слова:** смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение.

В данной работе рассматривается смешанная задача для уравнения в частных производных, содержащего инволюцию $\nu(x)=1-x.$ Инволюцией называется такое отображение, что $\nu(\nu(x))=x.$ Инволюция рассматриваемого типа порождает оператор отражения, и встречается, например, в задачах классической механики. Активно исследуются как краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с такой инволюцией (см., например, работы [1–3] и библиографию в них), так и задачи для уравнений в частных производных [4–8].

## 1. Постановка задачи

Будем рассматривать следующую задачу с двухточечными краевыми условиями:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1-x}+q_1(x)u(x,t)+q_2(x)u(1-x,t),\quad t\in(-\infty,+\infty),\ x\in[0,1], \tag{1}$$

$$u(0,t)=\gamma u(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x). \tag{3}$$

Здесь $\gamma$ — комплексное число, $q_1(x)$, $q_2(x)$ — некоторые непрерывные комплексные функции. Далее будут определены условия на $q_j(x)$, при которых решение можно получить в явном виде.

Уравнение (1) представляет собой уравнение в частных производных, содержащее инволюцию $\nu(x)=1-x$ в самой функции $u(x,t)$ и в ее производной и обобщает уравнения из [4, 5, 7] (где $q_2(x)=0$). Задача для уравнения (1), но с частными краевыми условиями (закрепленный конец) рассматривалась в [6].

Решение будем искать в классе функций, непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0,1]\times(-\infty,\infty)$. Считаем, что $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным условиям, следующим из постановки задачи:

$$\begin{gathered}\varphi(x)\in C^1[0,1],\qquad \varphi(0)=\gamma\varphi(1),\\ \varphi'(1)-\gamma\varphi'(0)+\gamma\varphi(1)(q_1(0)-q_1(1))+\varphi(1)(q_2(0)-\gamma^2q_2(1))=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Согласно методу Фурье, положив в уравнении (1) $u(x,t)=y(x)T(t),$ получим следующую спектральную задачу для $y(x)$:

$$y'(1-x)+q_1(x)y(x)+q_2(x)y(1-x)=\lambda y(x),\quad y(0)=\gamma y(1), \tag{5}$$

а для $T(t)$ имеем $T(t)=e^{\lambda it}$.

## 2. Спектральная задача

Так же как в [4–7], исследование задачи (5) сводится к исследованию задачи в пространстве вектор-функций, проводится преобразование полученной системы. Всюду далее в работе считаем выполненным условие регулярности по Биркгофу $\gamma^2+1\neq 0.$

**Лемма 1.** *Число* $\lambda$ *является собственным значением, а* $y(x)$ *собственной функцией краевой задачи (5) тогда и только тогда, когда* $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T=(y(x),y(1-x))^T$ *является ненулевым решением матричного уравнения*

$$Bz'(x)+Q(x)z(x)=\lambda z(x), \tag{6}$$

*где* $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}q_1(x) & q_2(x)\\ q_2(1-x) & q_1(1-x)\end{pmatrix}$, *удовлетворяющим условиям* $z_1(0)=\gamma z_2(0),\ z_1(1/2)=z_2(1/2)$.

Замена $z(x)=\Gamma v(x)$, где $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$ приводит уравнение (6) к виду:

$$v'(x)+P(x)v(x)=\lambda Dv(x), \tag{7}$$

где $D=\Gamma^{-1}B^{-1}\Gamma=\operatorname{diag}(-i,i)$, $P(x)=\Gamma^{-1}B^{-1}Q(x)\Gamma$.

Решение уравнения (7) в общем случае может быть найдено только в асимптотической форме или численными методами. Но в частных случаях его можно получить в явном виде. Более того, такие частные случаи представляют интерес, так как служат вспомогательными (эталонными) задачами для задачи с произвольным потенциалом (см., например, [6]).

Далее будем считать, что $q_1(x)$, $q_2(x)$ непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$q_1(x)=q_1(1-x), \quad q_2(x)=-\overline{q_2(1-x)}. \tag{8}$$

Тогда в уравнении (7) $P(x)=\operatorname{diag}\left(iq_1(x)-q_2(x),-iq_1(x)-q_2(x)\right)$, и (7) распадается на два уравнения, решая которые, получим

**Лемма 2.** *Собственные значения задачи (5) простые и имеют вид* $\lambda_n=2\pi n+a$, $n\in\mathbb{Z}$, *где* $a=\int\limits_0^1 q_1(t)dt-iM$, $M=\ln\dfrac{1-\gamma i}{\gamma-i}$ *(под* $\ln z$ *понимается главное значение* $\operatorname{Ln} z$, *при* $\arg z\in[-\pi;\pi]$*), а соответствующие собственные функции имеют вид*

$$y_n(x)=\left(m(x)e^{\lambda_n ix}+im(1-x)e^{\lambda_n i(1-x)}\right)v(x),$$

*где* $m(x)=e^{-i\int_0^x q_1(\tau)d\tau}$, $v(x)=e^{\int_0^x q_2(\tau)d\tau}$.

Система $\{y_n(x)\}$, вообще говоря, не является ортогональной. В данной работе для простоты потребуем выполнение следующих дополнительных условий

$q_1(x)$ — вещественная и непрерывная функция, и $q_1(x)=q_1(1-x)$,
$q_2(x)=is(x)$, $s(x)$ — вещественная функция, и $s(x)=-s(1-x)$, число $iM$ — вещественное (9)

Тогда справедливы (8) и лемма 1, а система $\{y_n(x)\}$ ортогональна. Более общий случай (когда для $q_j(x)$ требуем только (8)) исследуется с привлечением биортогональной системы (см., например, [7]).

### 3. Формула для решения задачи

При выполнении (9) условия (4) примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\varphi(x)\in C^1[0,1], \qquad \varphi(0)=\gamma\varphi(1),\\ \varphi'(1)-\gamma\varphi'(0)+\varphi(1)q_2(0)(1+\gamma^2)=0.\end{gathered} \tag{10}$$

Формальное решение задачи (1)–(3) есть

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n y_n(x)e^{\lambda_n it}, \qquad c_n=\frac{1}{2}(\varphi,y_n).$$

Так же как в [4–7] можно показать, что этот ряд равномерно сходится по $x\in[0,1]$ и $t\in(-\infty,\infty)$. Однако, для почленного дифференцирования данного ряда условий (4) уже недостаточно. Преобразуя этот ряд, и вводя вспомогательную функцию, которая является суммой некоторого ряда по тригонометрической системе, получим основной результат работы.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия (9), (10), и* $1+\gamma^2 \neq 0$. *Тогда классическое решение задачи (1)–(3) существует и имеет вид:*

$$u(x,t) = [ip(1-x)f_0(1-x+t) + p(x)f_0(x+t)]e^{ait},$$

*где* $f_0(x)$ *— непрерывно-дифференцируемая функция, периодичная с периодом* $T=1$, *которая при* $x \in [0,1]$ *определена по формуле:*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}[\varphi(x) - i\varphi(1-x)],$$

$$p(x) = e^{iax+\int_0^x(-iq_1(\tau)+q_2(\tau))d\tau}, \quad a = \int_0^1 q_1(\tau)d\tau - iM, \quad M = \ln\frac{1-\gamma i}{\gamma - i}.$$

## Литература


1. *Андреев, А. А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом / А. А. Андреев // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 1126–1128.

2. *Бурлуцкая, М. Ш.* Функционально-дифференциальный оператор с Инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. С. Луконина, А. П. Хромов // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 414, № 4. – С. 1309–1312.

3. *Владыкина, В. Е.* Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией / В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 5. – С. 643–659.

4. *Бурлуцкая, М. Ш.* Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 435, № 2. – С. 151–154.

5. *Хромов, А. П.* Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида / А. П. Хромов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10, вып. 4. – С. 17–22.

6. *Бурлуцкая, М. Ш.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 12. – С. 2233–2246.

7. *Бурлуцкая, М. Ш.* Классическое решение смешанной задачи для уравнения с инволюцией и двухточечными краевыми условиями / М. Ш. Бурлуцкая, С. А. Череднинкова // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. – 2016. – № 3. – С. 71–79.

8. *Баскаков, А. Г.* Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Уфимск. матем. журн. – 2018. – Т. 10, № 3. – С. 11–34.

УДК 517.91

# ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

**Ш. Т. Каримов, З.Х. Комилова**

*Ферганский государственный университет*

**Аннотация.** В работе исследован аналог задачи Гурса для одного неклассического уравнения в частных производных четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами. Для решения задачи применён метод операторов преобразования. В качестве оператора преобразования использован двумерный обобщённый оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка. Решение задачи построено в явном виде.

**Ключевые слова:** оператор преобразования, обобщенный оператор Эрдейи — Кобера, оператор Бесселя, функция Бесселя — Клифорда, нормированная функция Бесселя, многомерный оператор Лапласа.

В настоящее время развитие современных технологий приводят к необходимости исследования качественно новых процессов возникающих в науке и технике. В связи с этим возникает необходимость построения адекватных математических моделей и их дальнейшее изучение, которые приводит к неклассическим дифференциальным уравнениям. Например, математическая модель линейных волн в «незамагниченной» плазме описывается уравнением [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u - u\right) + \Delta u = 0,$$

где $\Delta \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — многомерный оператор Лапласа, функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ представляет обобщенный потенциал электрического поля. В работе [1] исследована более общая математическая модель линейных волн в плазме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u - \lambda_1 u\right) + a\left(\Delta u - \lambda_2 u\right) = 0, \tag{1}$$

с различными начально-краевыми условиями, где $\lambda_1, \lambda_2, a \in R$.

К подобным уравнениям и системам уравнений приводят математические модели колебаний в молекуле ДНК [2], линеаризованная математическая модель Benney — Luke [3], математические модели Буссинеска — Лява [4] и другие.

В частности к неклассическим дифференциальным уравнениям относится модели, описываемые уравнениями смешанного типа, вырождающиеся уравнения и уравнения Соболевского типа. Уравнения Соболевского типа, иначе называемые уравнениями, неразрешенными относительно старшей производной, после известной работы Соболева [5] является объектом исследования для многих авторов.

В области теории уравнений Соболевского типа активно работают Р. Е. Шоуолтер, А. Фавини, А. Яги, Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, Н. В. Сидоров, М. В. Фалалеев, М. О. Корпусов, И. В. Мельникова, С. Г. Пятков, А. И. Кожанов, Г. А. Свиридюк, Т. Г. Сукачева, В. Е. Федоров и другие. Обзор этих исследований можно найти в монографиях [6–7].

Данная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости в классическом смысле аналога задачи Гурса для уравнения

$$L_{\alpha,\beta}^{\lambda_1,\lambda_2}(u) = P_{\alpha,\beta}(u) - \lambda_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda_2^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{2}$$

где $P_{\alpha,\beta}(u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{4\alpha\beta}{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$,

$\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in R$, причем $0 < \alpha, \beta < 1/2$.

Это уравнение относится к классу уравнений с сингулярными коэффициентами, так как коэффициенты данного уравнения имеют сингулярную особенность на линиях $x = 0$ и $y = 0$. Кроме того, линии сингулярности одновременно являются двукратными характеристиками данного уравнения.

Параметры $\alpha$ и $\beta$ входящее в уравнение (2), определяют порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha = 0$, $\beta = 0$ уравнение (2) переходит в одномерное уравнение типа (1), а при $\alpha = (n-1)/2$, $\beta = 0$ мы получим сферически симметричный случай уравнения (1), причем в последнем случае переменная $x$ выполняет роль переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ в сферической системе координат.

При $\lambda_1 = i\lambda$, $\lambda_2 = \lambda$ уравнение (2) можно представить в виде

$$L_{\alpha,\beta}^{i\lambda,\lambda}(u) \equiv P_{\alpha,\beta}(u) + \lambda^2 H_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) - \lambda^4 u = 0 \tag{3}$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$L_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) \equiv P_{\alpha,\beta}(u) + \lambda^2 h_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) - \lambda^4 u = 0, \tag{4}$$

где $H_{\alpha,\beta}^{\lambda}$ — дифференциальный оператор обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца

$$H_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 u,$$

а $h_{\alpha,\beta}^{\lambda}$ — соответствующий ему дифференциальный оператор гиперболического типа

$$h_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 u.$$

Двумерные уравнения четвертого порядка рассматривались в работах М. С. Салахитдинова, Т. Д. Джураева, А. М. Нахушева, В. И. Жегалова, В. Ф. Волкодавова, А. И. Кожанова, А. П. Солдатова и их учеников. В работе Т. Д. Джураева и А. Сопуева [8] исследованы вопросы полной классификации и приведения к каноническому виду общего линейного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

В данной работе в области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ исследуется аналог задачи Гурса для уравнения (2).

**Задача G.** Требуется найти функцию $u(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad \lim_{x \to 0} x^{2\alpha} u_x(x, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h; \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad \lim_{y \to 0} y^{2\beta} u_y(x, y) = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{6}$$

где $\varphi_k(y), \psi_k(x), (k = 1, 2)$ заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(0) = 0$.

Задача G при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ исследована в работе [9].

В силу линейности уравнения (2) сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

**Задача $G_0$.** Требуется найти функцию $u(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad 0 \le y \le h, \tag{7}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=0,\ 0\le x\le l, \tag{8}$$

где $\varphi_1(y),\ \psi_1(x)$ — заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_1'(0)=0,\ \psi_1'(0)=0.$

Для решения поставленной задачи (7)–(8) применим метод операторов преобразования [10–13]. В качестве оператора преобразования используем двумерный обобщённый оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка.

В работах [14, 15] был введен многомерный обобщенный оператор Эрдейи — Кобера

$$J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ p\end{pmatrix}f(x)=J_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}\begin{pmatrix}\alpha_1,\dots,\alpha_n\\ p_1,\dots,p_n\end{pmatrix}f(x_1,x_2,\dots,x_n)=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2x_k^{-2(\alpha_k+p_k)}}{\Gamma(\alpha_k)}\right]\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\overline{J}_{\alpha_k-1}\left(\lambda_k\sqrt{x_k^2-t_k^2}\right)}{\left(x_k^2-t_k^2\right)^{1-\alpha_k}}t_k^{2p_k+1}\right]f(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt, \tag{9}$$

исследованы его свойства и их приложение к многомерным уравнениям гиперболического [14] и параболического [15] типов с сингулярными коэффициентами, где $\alpha_k>0,\ \ p_k\ge -1/2,$ $k=\overline{1,n},\ \overline{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда (или нормированная функция Бесселя) [13], которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле $\overline{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)$, $\Gamma(\nu)$ — гамма функция [16].

Интеграл (9) является многомерным аналогом одномерного обобщенного оператора Эрдейи — Кобера с функцией Бесселя в ядре [17].

Для интеграла (9) справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть $\alpha_k>0,\ \ p_k\ge -1/2,\ \ k=\overline{1,n},\ \ f(x)\in C^{2n}(\Omega_n),\ \ x_k^{2p_k+1}B_{p_k}^{x_k}f(x)$ — интегрируемы в окрестности $x_k=0$ и $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2p_k+1}f_{x_k}(x)=0,\ k=\overline{1,n}$. Тогда имеет место равенство

$$\prod_{k=1}^{n}(B_{p_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2)J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ p\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ p\end{pmatrix}\prod_{k=1}^{n}B_{p_k}^{x_k}f(x),$$

где $\Omega_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(0,a_k)$ — декартово произведение, $a_k>0,\ k=\overline{1,n},$

$B_{p_k}^{x_k}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\dfrac{2p_k+1}{x_k}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — оператор Бесселя по переменной $x_k$.

Теорема верна и при некоторых или всех $\lambda_k=0,\ k=\overline{1,m},\ m\le n$.

Данная теорема позволяет применить оператор (9) как оператор преобразования, позволяющий преобразовать уравнения высокого четного порядка с сингулярными коэффициентами в уравнения без сингулярных коэффициентов. Этот факт применим для исследования задачи $G_0$ для уравнения (3) и (4).

Предположим, что решение задачи $G_0$ существует. Это решение ищем в виде

$$u(x,y)=J_{\lambda_1,\lambda_2}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}U(x,y), \tag{10}$$

где $U(x,y)$ — неизвестная дифференцируемая функция.

Подставляя (10) в уравнение (3) и (4) и краевым условиям (7)–(8), а затем используя теорему при $n=2,\ \ p_1=p_2=-1/2,$ получим задачу нахождения решения $U(x,y)$ уравнения

$$U_{xxyy}=0,\ \ (x,y)\in\Omega \tag{11}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x,0)=\Psi_1(x),\ \ U_y(x,0)=0,\ \ 0\le x\le l, \tag{12}$$

$$U(0,y)=\Phi_1(y),\ \ U_x(0,y)=0,\ \ 0\le y\le h, \tag{13}$$

где

$$\Phi_1(y)=\mathrm{A}_0\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y\left(y^2-s^2\right)^{-\beta}\bar{I}_{-\beta}\left(\lambda_2\sqrt{y^2-s^2}\right)s^{2\beta}\varphi_1(s)\,ds=\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}J_{\lambda_2}^{-1}\left(-\frac{1}{2},\beta\right)\varphi_1$$

$$\Psi_1(x)=B_0\frac{d}{dx}\int_0^x\left(x^2-s^2\right)^{-\alpha}\bar{I}_{-\alpha}\left(\lambda_1\sqrt{x^2-s^2}\right)s^{2\alpha}\varphi_1(s)\,ds=\frac{\Gamma(\beta+1/2)}{\sqrt{\pi}}J_{\lambda_1}^{-1}\left(-\frac{1}{2},\alpha\right)\psi_1$$

$$\mathrm{A}_0=\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)/\left[\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta)\right],\quad B_0=\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)/\left[\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)\right].$$

Решая задачу (11)–(13) находим функцию $U(x,y)$, а затем подставляем это решение в (10), при $\lambda_1=\iota\lambda$, $\lambda_2=\lambda$ получим решение задачи (3), (5), (6) в виде

$$u(x,y)=\psi_1(x)\bar{J}_{\beta-1/2}(\lambda y)+\varphi_1(y)\bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x)-\varphi_1(0)\bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x)\bar{J}_{\beta-1/2}(\lambda y)+$$
$$+\psi_2(x)\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\bar{J}_{\beta+1/2}(\lambda y)+\varphi_2(y)\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\bar{J}_{\alpha+1/2}(\lambda x).$$

Аналогично подставляя решение задач (11)–(13) в (10), при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ получим решение задач (4), (5), (6) в виде

$$u(x,y)=\psi_1(x)\bar{I}_{\beta-1/2}(\lambda y)+\varphi_1(y)\bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x)-\varphi_1(0)\bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x)\bar{I}_{\beta-1/2}(\lambda y)+$$
$$+\psi_2(x)\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\bar{I}_{\beta+1/2}(\lambda y)+\varphi_2(y)\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\bar{J}_{\alpha+1/2}(\lambda x),\qquad \text{где}\quad \bar{I}_\upsilon(z)=\bar{J}_\upsilon(iz).$$

**Литература**


1. *Габов, С. А.* Математические основы линейной теории ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме / С. А. Габов // Матем. Моделирование. – 1989. – Т. 1, № 12. – С. 133–148.

2. *Cristiansen, P. L.* On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom / P. L. Cristiansen, V. Muto, P.S. Lomdahl // Nonlinearity. – 1990. – No 4. – P. 477–501.

3. *Benney, D. J.* Interactions of permanent waves of finite amplitude / D. J. Benney, J. C. Luke // J. Math. Phys. – 1964. – No 43. – P. 309–313.

4. *Ляв, А.* Математическая теория упругости / А. Ляв. – Москва : ОНТИ, 1935.

5. *Соболев, С. Л.* Об одной краевой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР, Сер. Матем. – 1954. – Т. 18, № 2. – С. 3–50.

6. *Свешников, А. Г.* Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. Ю. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М. : Физматлит, 2007.

7. *Kozhanov, A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems / A. I. Kozhanov. – Utrecht : VSP, 1999.

8. *Джураев, Т. Д.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка / Сопуев А. – Тошкент : ФАН. 2000, 144 с.

9. *Каримов, Ш. Т.* Приложение многомерного оператора Эрдейи – Кобера к решению аналога задачи Гурса для уравнения четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами / Ш. Т. Каримов // УзМЖ. – 2016. – № 4. – С. 73–83.

10. *Carroll, R.* Transmutation Theory and Applications / R. Carroll. – North Holland, 1986. – 351 p.

11. *Kiryakova, V.* Generalized Fractional Calculus and Applications / V. Kiryakova. Long- man Sci. & Technical and J. Wiley & Sons, -Harlow and N. York, 1994. – 387 p.

12. *Катрахов, В. В.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В. В. Катрахов, С. М. Ситник // Современная математика. Фундаментальные направления. – Москва, 2018. – Т. 64, № 2. – С. 211–426.

13. *Ситник, С. М.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – М. : Физматлит, 2019. – 224 с.

14. *Karimov, Sh. T.* Multimedinsional generalized Erde`ly-Kober operator and its application to solving Cauchy prodlems for differential equations with singular coefficients / Sh. T. Karimov // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2015. – V.18, No 4. – P. 845–861.

15. *Karimov, Sh.* T. On some generalizations of the Properties of the Multimedinsional generalized Erde`ly-Kober operator and their applications in transmutation operators andapplications, Ed by V. Kravchenko and S. M. Sitnik // Sh. T. Karimov and S. M. Sitnik // Trends in Mathematics Springer, 2020. – P. 85–115.

16. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Т. 1. – М. : Наука, 1973. – 296 с.

17. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 702 с.

УДК 517.9

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА ДВУМЕРНОЙ СЕТИ

**Л. А. Ковалева**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет*

**Аннотация.** В пространстве рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа на двумерной сети, которая состоит из выпуклых плоских многоугольников. Получена формула для подсчета значения индекса задачи в пространствах Гельдера с весом $C^{\mu}_{-0}(K,F)$ и $C^{\mu}_{+0}(K,F)$.
**Ключевые слова:** задача Дирихле, индекс задачи, двумерная сеть.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим конечное множество $\mathcal{M}$ плоских выпуклых многоугольников $M$, которые попарно могут пересекаться только по своим сторонам. Совокупность отрезков $L$, являющихся сторонами одного или нескольких многоугольников, обозначим $\mathcal{L}$, а множество их концов — $F$. Объединение $K$ многоугольников $M \in \mathcal{M}$, рассматриваемых как замкнутые подмножества $\mathbb{R}^3$, называется двумерным комплексом, и сетью, если дополнительно каждый отрезок $L \in \mathcal{L}$ может служить границей не более двух многоугольников. По отношению к $K$ элементы $M \in \mathbb{M}$ называем гранями, а элементы $L \in \mathcal{L}$ — сторонами или ребрами в зависимости от того, входит $L$ в границу одной или нескольких граней. Удобно еще с каждым элементом $L \in \mathcal{L}$ связать совокупность $\mathcal{M}_L$ всех граней, граничащих с $L$.

Пусть подмножество $K^1 \subseteq \mathbb{R}^3$ означает объединение всех отрезков $L \in \mathcal{L}$, взятых без своих концов, так что замкнутое множество $F \cup K^1$ представляет собой ломаную в $\mathbb{R}^3$. Аналогично под $K^2$ условимся понимать объединение всех граней, взятых без своей границы. Множество $\mathcal{L}$ всех ребер разобьем на два попарно непересекающихся подмножества $\mathcal{L}_D$ и $\mathcal{L}_H$, первое из которых состоит из некоторого подмножества сторон. Соответствующие объединения этих ребер, взятые без своих концов, обозначим $K^1_D$ и $K^1_H$. Аналогично пусть $F_D$ состоит из точек, являющихся концами отрезков $L \in \mathcal{L}_D$. Тогда $F_H = F \setminus F_D$ состоит из точек $\tau$, для которых все отрезки $L \in \mathcal{L}$ с этим концом принадлежат $\mathcal{L}_H$.

Следуя [1], функцию $u(x) \in C(K \setminus F)$ назовем гармонической на множестве $K^2 \cup K^1_H$, если внутри каждой грани $M \in \mathcal{M}_L$ она гармонична, непрерывно дифференцируема вплоть до внутренних точек отрезка $L$ и сумма нормальных производных

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_M},$$

взятых изнутри $M$, равна нулю:

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_L} \frac{\partial u}{\partial \nu_M}\Big|_L = 0.$$

Задача Дирихле (задача $D$) заключается в отыскании гармонической на $K^2 \cup K^1_H$ функции $u \in C(K \setminus F)$ по краевому условию

$$u\Big|_{K^1_D} = f, \tag{1}$$

где правая часть $f \in C(K^1_D)$ задана.

Эта задача подробно изучена в [1] в семействе весовых гельдеровых пространств $C^{\mu}_{\lambda}(K,F)$ на произвольном двумерном комплексе. Случай двумерной сети, рассматриваемый в данной работе, позволяет несколько дополнить результаты указанной работы.

Напомним определение пространства $C^{\mu}_{\lambda}(K,F)$, $0 < \mu < 1$, с весовым порядком $\lambda \in \mathbb{R}$. Исходя из весовой функции

$$\rho_\lambda(z)=\prod\nolimits_{\tau\in F}|\,x-\tau\,|^{\lambda}$$

этого порядка, пространство $C^\mu_\lambda(K;F)$ определим как класс всех функций $\varphi\in C(K\setminus F)$, для которых функция $\psi=\rho_{\mu-\lambda}\varphi$ принадлежит классу Гельдера $C^\mu(K)$ и обращается в нуль в точках $\tau\in F$. В частности, функция $\varphi(x)$ ведет себя как $O(|\,x-\tau\,|^{\lambda_\tau})$ при $x\to\tau$. Относительно нормы $|\,\varphi\,|=|\,\psi\,|_{C^\mu}$ это пространство банахово и с возрастанием $\lambda$ семейство $(C^\mu_\lambda)$ монотонно убывает по вложению, так что можно ввести классы

$$C^\mu_{\lambda-0}=\cap_{\varepsilon>0}C^\mu_{\lambda-\varepsilon},\quad C^\mu_{\lambda+0}=\cup_{\varepsilon>0}C^\mu_{\lambda+\varepsilon}.$$

Заметим, что произведение $\varphi\psi$ двух функций $\varphi\in C^\mu_{\lambda+0}$ и $\psi\in C^\mu_{\nu-0}$ принадлежит $C^\mu_{\lambda+\nu+0}$. При $\lambda=0$ эти классы обозначаем кратко $C^\mu_{\pm0}$. Очевидно, функции $\varphi\in C^\mu_{-0}$ допускают особенности сколь угодно малого порядка (т. е. логарифмического типа), а каждая функция $\varphi\in C^\mu_{+0}$ принадлежит $C^\mu_\varepsilon$ с некоторым малым $\varepsilon>0$.

Удобно кроме того ввести конечномерное расширение $C^\mu_{(+0)}$ последнего класса путем добавления гладких функций, постоянных в окрестности точек $\tau\in F$. Аналогичный смысл имеют классы $C^\mu_{\pm0}(K^1_D,F_D)$ и $C^\mu_{(+0)}(K^1_D,F_F)$ на $K^1_D$. Ясно, что сужение функции $u\in C^\mu_\lambda(K,F)$ на $K^1_D$ принадлежит $C^\mu_\lambda(K^1_D,F_D)$, так что можно говорить о фредгольмовости задачи (1) для функций, гармонических на $K^2_H$. Более точно, по определению эта задача фредгольмова в пространстве $C^\mu_\lambda$, если однородная задача (с $f=0$) в этом классе имеет конечное число линейно независимых решений $u_1,\ldots,u_n$ и существуют такие линейно независимые функции $g_1,\ldots,g_m\in C^\mu_{-\lambda-1-0}(K^1_D,F_D)$, что условия ортогональности

$$\int_{K^1_D}f(y)g_k(y)d_1y=0,\quad 1\le k\le m,$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (1) в этом классе. Заметим, что произведение $fg_k$ под знаком интеграла принадлежит классу $C^\mu_{-1+0}$, так что интеграл имеет смысл.

Разность $æ=n-m$ называется индексом задачи. Конечномерное пространства, натянутые на функции $u_j$ и $g_j$, называются, соответственно, ядром $\ker D$ и коядром $\operatorname{coker} D$ задачи $D$.

В дальнейшем главный интерес представляют классы $C^\mu_{\pm0}$ и $C^\mu_{(+0)}$, в которых будет рассматриваться задача. Ее фредгольмовость в классе $C^\mu_{\pm0}$ определяется аналогично предыдущему с функциями $g_k$ в (2), принадлежащими $C^\mu_{-1\mp0}$. Что касается класса $C^\mu_{(+0)}$, то он является конечномерным расширением $C^\mu_{+0}$ и потому свойством фредгольмовости в этих классах задача Дирихле обладает одновременно.

Очевидно, пространство $C^\mu_{(+0)}(K,F)$ является расширением $C^\mu_{+0}$ на $n$ измерений, где $n$ — число элементов $F$. Точно также пространство $C^\mu_{(+0)}(K^1_D,F_D)$ является расширением $C^\mu_{+0}$ на $n_D$ измерений, где $n_D$ — число элементов $F_D$. Поэтому индексы $æ_{+0}$ и $æ_{(+0)}$ задачи Дирихле в соответствующих пространствах связаны соотношением $æ_{(+0)}=æ_{+0}+n-n_D$. Поскольку $F_H=F\setminus F_D$, разность $n-n_D$ есть число $n_H$ элементов множества $F_H$, так что окончательно

$$æ_{(+0)}=æ_{+0}+n_H.$$

Сформулируем теперь основной результат.

**Теорема 1.** Пусть комплекс $K$ является двумерной сетью. Тогда индекс задачи Дирихле в пространствах $C^\mu_{-0}(K,F)$ и $C^\mu_{+0}(K,F)$ принимает, соответственно, значения $æ_{-0}=n_H$ и $æ_{+0}=n_H$. В частности, индекс $æ_{(+0)}=0$ этой задачи в классе $C^\mu_{(+0)}(K,F)$ равен нулю.

**Литература**

1. *Ковалева Л. А., Солдатов А. П.* Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах // Известия РАН, сер. Матем. – 2015. – Т. 79, № 1. – С. 77–114.

УДК 517.928.7

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

**О. Г. Корольков**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена исследованию явления вынужденных колебаний линейного осциллятора под действием осциллятора Ван дер Поля. Описывается метод, основанный на применении метода малого параметра Пуанкаре и замене Боголюбова — Штокало и позволяющий получить характеристики вынужденных колебаний. Рассматриваются случаи синфазных колебаний и колебаний в противофазе. Приводится численный пример, демонстрирующий справедливость полученных результатов.

**Ключевые слова:** автоколебания, вынужденные колебания, асимптотические методы, метод малого параметра, замена Боголюбова — Штокало.

## Введение

Вынужденными колебаниями называют колебания некоторой системы, обусловленные действием некоторой периодической силы. Вынужденные колебания рассматриваются и применяются в различных областях науки и техники. Примерами могут служить колебания гребных винтов, лопаток турбины, мостов и т. д.

В настоящей работе исследуются вынужденные колебания линейного осциллятора под действием осциллятора Ван дер Поля. Данная модель пригодна для описания, например, колебательного контура, на который подаётся напряжение, исходящее от генетаров Ван дер Поля. Применяются асимптотические методы, ранее разработанные и применённые для исследования задачи о синхронизации автоколебаний [1–4].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему двух осцилляторов: затухающего линейного осциллятора (1) и осциллятора Ван дер Поля (2), колебания которого подаются на первый осциллятор:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = \nu u, \tag{1}$$

$$\ddot{u} - 2\mu\left(1-u^2\right)\dot{u} + \omega^2 u = 0, \tag{2}$$

где $x = x(t)$, $u = u(t)$; $\omega > 0$ — угловая частота осциллятора (2); малые параметры $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ характеризуют форму колебаний обоих осцилляторов, а малый параметр $\nu > 0$ характеризует силу воздействия второго осциллятора на первый. Для применения асимптотических методов к исследованию данной задачи целесообразно определить соотношения между малыми параметрами. Рассматриваемые методы справедливы при различных соотношениях, но в настоящей работе эти соотношения задаются следующим образом:

$$\mu = M\varepsilon,$$

$$\nu = N\varepsilon^{1/2},$$

где $M > 0$, $N \neq 0$. Кроме того, в настоящей работе предполагается, что угловые частоты двух осцилляторов достаточно близки в следующем смысле:

$$\omega = 1 + W\varepsilon^{1/2},$$

где $W$ — вещественное число. Заметим, что при чрезмерном сближении угловых частот осцилляторов в системе может возникнуть явление резонанса, поэтому в данной работе мы будем отслеживать амплитуду колебаний осциллятора (1).

Выполнив полярную замену

$$x = r\cos\alpha, \quad \dot{x} = -r\sin\alpha, \quad u = \rho\cos\alpha, \quad \dot{u} = -\rho\sin\alpha, \tag{3}$$

мы вводим в рассмотрение амплитуды колебаний $r = r(t)$, $\rho = \rho(t)$ и фазы $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ рассматриваемых систем. Выполнив ещё одну замену

$$\alpha = \beta + \varphi, \tag{4}$$

мы вводим в рассмотрение разность фаз $\varphi = \alpha(t) - \beta(t)$ рассматриваемых систем.

Цель настоящей работы — описать метод, позволяющий установить, имеют ли место в системе (1)–(2) вынужденные колебания осциллятора (1), а также определить их амплитуду. Под вынужденными колебаниями мы будем понимать следующее: в полученной системе существует орбитально-устойчивый предельный цикл, для которого разность фаз $\varphi(t)$ стремится при $t \to \infty$ к некоторому фиксированному числу.

## 2. Описание используемых методов решения поставленной задачи

После замен (3) и (4), а также перехода от времени $t$ к фазовой переменной $\beta$ система (1)–(2) запишется следующим образом:

$$\frac{dr}{t\beta} = F_r\left(r,\rho,\varphi,\beta,\varepsilon\right), \quad \frac{d\rho}{t\beta} = F_\rho\left(r,\rho,\varphi,\beta,\varepsilon\right), \quad \frac{d\varphi}{t\beta} = F_\varphi\left(r,\rho,\varphi,\beta,\varepsilon\right), \tag{5}$$

где функции $F_r, F_\rho, F_\varphi$ $2\pi$-периодичны по фазовой переменной $\beta$ и могут быть легко вычислены.

Далее, выполняя поиск $2\pi$-периодического решения системы (5) в виде рядов по $\varepsilon^{1/2}$ в соответствии с [5], мы найдём два решения:

$$\begin{gathered} r_1^*\left(\beta,\varepsilon\right) = -\frac{N}{W} + \varepsilon^{1/2}\frac{N}{2}\cos 2\beta + O\left(\varepsilon\right), \quad \rho_1^*\left(\beta,\varepsilon\right) = 2 + O\left(\varepsilon\right), \\ \varphi_1^*\left(\beta,\varepsilon\right) = \varepsilon^{1/2}\left(\frac{W}{2}\sin 2\beta + \frac{1}{W}\right) + O\left(\varepsilon\right); \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} r_2^*\left(\beta,\varepsilon\right) = \frac{N}{W} - \varepsilon^{1/2}\frac{N}{2}\cos 2\beta + O\left(\varepsilon\right), \quad \rho_2^*\left(\beta,\varepsilon\right) = 2 + O\left(\varepsilon\right), \\ \varphi_2^*\left(\beta,\varepsilon\right) = \pi + \varepsilon^{1/2}\left(\frac{W}{2}\sin 2\beta + \frac{1}{W}\right) + O\left(\varepsilon\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Очевидно, $2\pi$-периодическое решение (6), соответствующее нулевой разности фаз, может быть определено при $NW < 0$, тогда как $2\pi$-периодическое решение (7), соответствующее разности фаз, равной $\pi$, может быть определено при $NW > 0$. Заметим, что в случае $W = 0$, соответствующем резонансу, $2\pi$-периодическое решение системы (5) не может быть найдено. При этом, несмотря на близость собственных частот осцилляторов, резонанса в системе (1)–(2) не будет, если параметры $N$ и $W$ — одного порядка.

Исследование устойчивости найденных решений сводим к исследованию устойчивости нулевого решения линеаризованной системы, выполнив замену

$$\overline{r} = r - r_i^*\left(\beta,\varepsilon\right), \quad \overline{\rho} = \rho - \rho_i^*\left(\beta,\varepsilon\right), \quad \overline{\varphi} = \varphi - \varphi_i^*\left(\beta,\varepsilon\right), \quad \mathrm{i} = 1,2, \tag{8}$$

где $\overline{r} = \overline{r}(\beta)$, $\overline{\rho} = \overline{\rho}(\beta)$, $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(\beta)$.

Наконец, выполняя замену Боголюбова — Штокало [6], получаем систему уравнений с постоянными коэффициентами, устойчивость нулевого решения которой определяется согласно критерию Рауса — Гурвица. Для обоих решений характеристический полином записывается следующим образом:

$$\lambda^2 + 2\varepsilon^{1/2}\lambda + W^2 + O\left(\varepsilon^{1/2}\right) = 0,$$

что говорит об устойчивости найденных $2\pi$-периодическое решений (6) и (7).

Итак, при $W \neq 0$, $N \neq 0$ одного порядка в системе (1)–(2) имеют место вынужденные колебания осциллятора (1) с амплитудой $\left|\dfrac{N}{W}\right|$. Если при этом $NW < 0$, то вынужденные колебания происходят синфазно с колебаниями осциллятора (2), а в случае $NW > 0$ — в противофазе.

### 3. Вычислительный эксперимент

На рис. 1 и 2 представлены графики амплитуды вынужденных колебаний и разности фаз в системе (1)–(2) с параметрами

$$M = 0.5, \quad N = 0.5, \quad W = -0.5, \quad \varepsilon = 0.1.$$

Как видно из рис. 2, в системе имеют место вынужденные колебания, которые происходят синфазно с осциллятором (2).

На рис. 3 и 4 представлены графики амплитуды вынужденных колебаний и разности фаз в системе (1)–(2) с параметрами

$$M = 0.5, \quad N = 0.5, \quad W = 0.5, \quad \varepsilon = 0.1.$$

Как видно из рис. 4, в системе имеют место вынужденные колебания, которые происходят в противофазе с осциллятором (2).

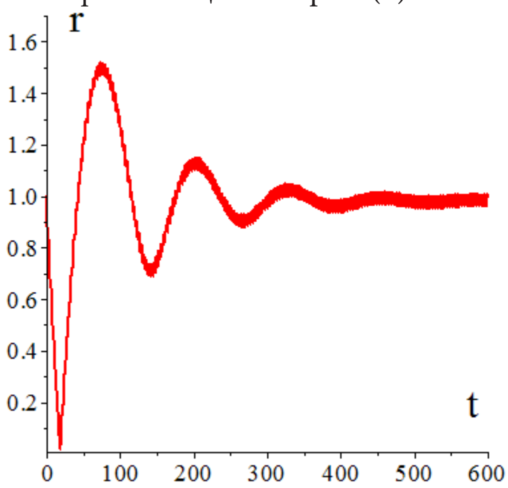



*Рис. 1. Амплитуда вынужденных колебаний при $M = 0.5, N = 0.5, W = -0.5, \varepsilon = 0.1$*

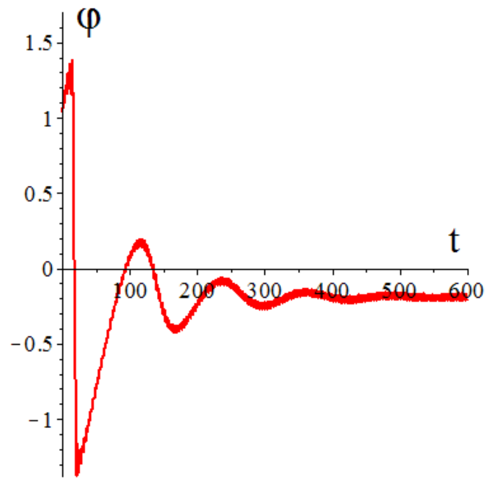



*Рис. 2. Разность фаз в системе (1)–(2) при $M = 0.5, N = 0.5, W = -0.5, \varepsilon = 0.1$*

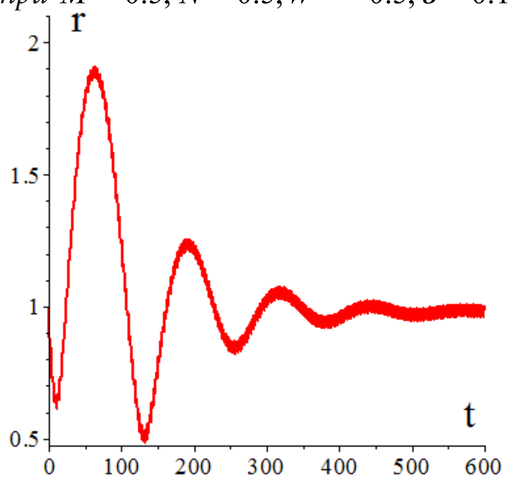



*Рис. 3. Амплитуда вынужденных колебаний при $M = 0.5, N = 0.5, W = 0.5, \varepsilon = 0.1$*

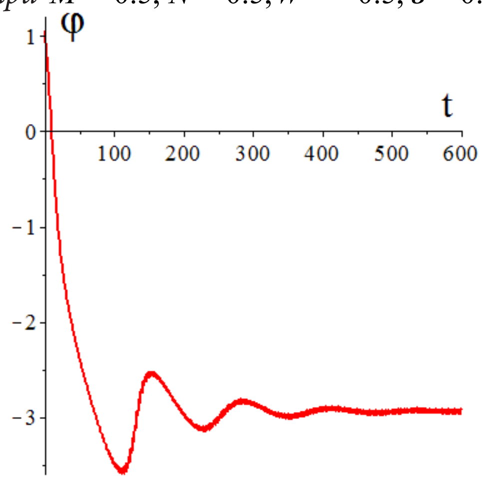



*Рис. 4. Разность фаз в системе (1)–(2) при $M = 0.5, N = 0.5, W = 0.5, \varepsilon = 0.1$*

## Заключение

В настоящей работе описан метод исследования вынужденных автоколебаний линейного осциллятора в случае, когда частоты обоих осцилляторов достаточно близки. Исследованы синфазные колебания и колебания в противофазе, определены условия, при которых система не входит в резонанс. Описанный метод может быть модифицирован и для более общего случая, например, для нелинейного осциллятора, или для осцилляторов с произвольными коэффициентами.

## Литература


1. *Корольков, О. Г.* Синхронизация автоколебаний двух близких динамических систем / О. Г. Корольков, Г. Ю. Северин, В. В. Стрыгин // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 38–40.
2. *Корольков, О. Г.* Синхронизация двух слабо связанных автоколебательных систем с близкими частотами / О. Г. Корольков, В. В. Стрыгин // Вестник Воронежского университета. Серия Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 175–180.
3. *Корольков, О. Г.* Взаимная синхронизация нескольких слабо связанных близких автоколебательных систем / О. Г. Корольков // Вестник Воронежского университета. Серия Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 2. – С. 26–33.
4. *Корольков, О. Г.* Исследование внешней синхронизации осциллятора Ван дер Поля / О. Г. Корольков, Н. С. Ни // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов международной научной конференции. – Воронеж, 2019. – С. 84–90.
5. *Малкин, И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – Москва : Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1966. – 492 с.
6. *Красносельский, М. А.* Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. – Москва : Наука, 1970.– 352 с.

УДК 517.9

# РЕШЕНИЕ СИГНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МАЙНАРДИ С ИМПУЛЬСОМ МАКСВЕЛЛА — ФЕЙЕРА

**Т. И. Костина[1,2], М. Н. Силаева[3], Алкади Хамса Мохамад[3], М. Ю. Прицепов[3]**

[1]*Воронежский государственный технический университет*
[2]*Воронежский государственный педагогический университет*
[3]*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе исследуется задача, описывающая процесс замедленной диффузии (субдиффузии), математической модели которой является дифференциальное уравнение с дробной производной. Устанавливается корректная разрешимость задачи Коши для рассматриваемого уравнения и показывается эффект замедления процесса в зависимости от порядка дробной производной.
**Ключевые слова:** субдиффузия, ядро Майнарди, операторная косинус-функция, $C_0$-полугруппа, импульс Максвелла — Фейера.

## 1. Постановка задачи и формулировка результата

В [4], в связи с изучением процессов замедленной диффузии (субдиффузии) Ф. Майнарди рассматривает задачу нахождения решения уравнения

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.1}$$

при условии

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = g(x). \tag{1.2}$$

Здесь

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(x,s)}{\partial s} ds \tag{1.3}$$

дробная производная порядка $0<\alpha<1,$ в смысле Капуто, по переменной $t,$ и приводится решение

$$u(x,t,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,t,\alpha) g(x-\xi) d\xi,$$

где $G(x,t,\alpha)$ — ядро Майнарди, имеющее вид

$$G(x,t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt-|x|p^{\alpha/2}} p^{-\alpha/2} dp = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\mu^2 t^\alpha) \cos \mu x d\mu, \tag{1.4}$$

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha)} \text{ —}$$

функция Миттаг — Леффлера.

В [6], задача (1.1)–(1.2), обобщается на случай уравнения

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t), \tag{1.5}$$

где $A$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $U(t,A)$ линейных преобразований, действующих в банаховом пространстве, с условием

$$u(0) = u_0, \tag{1.6}$$

где $u_0 \in D(A)$ — область определения оператора $A.$

Доказывается корректная разрешимость задачи (1.5)—(1.6), в том смысле, что для любого $g \in D(A)$ существует единственная вектор-функция $u(t)$, со значениями в $D(A)$ для которой определена производная $\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}$, удовлетворяющая уравнению (1.5) и выполняется оценка

$$\|u(t)\| \le M \|u_0\|. \tag{1.7}$$

В настоящей заметке приводится представление решения задачи (1.5)–(1.6), в случае, когда оператор $A$ является производящим оператором косинус-функции $C(t,A)$ и доказывается

**Теорема 1.1.** Если в уравнении (1.5) оператор $A$ является производящим оператором косинус-функции $C(t,A)$, действующей в банаховом пространстве, то решение задачи (1.5)–(1.6) существует, единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \int_{-\infty}^{\infty} G(s,t)C(s,A)u_0 ds = I_t^{1-\alpha}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(s,t)C(s,A)u_0 ds\right], \tag{1.8}$$

где $G(s,t)$ — ядро Майнарди (1.4), $I^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $(1-\alpha)$.

## 2. Необходимые понятия

Следующие понятия и факты можно найти в [1–5].

Пусть $E$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$ и $U(t,A)$ — сильно непрерывная полугруппа линейных преобразований ($C_0$-полугруппа) с производящим оператором (генератором) $A$.

Это означает, что справедливы следующие соотношения:

1) $U(t,A)U(s,A) = U(t+s,A)$, для всех $t,s \ge 0$ (2.1)

2) $U(0,A) = I$ — тождественный в $E$ оператор

3) $\lim\limits_{t\to 0+}\|U(t,A)\varphi - \varphi\| = 0$ для всех $\varphi \in E$

4) при некоторых $\mu > 0$ и $\omega \in R$ выполняется оценка $\|U(t,A)\| \le Me^{\omega t}$,

$$\lim_{t\to 0+}\left\|\frac{U(t,A)\varphi - \varphi}{t}\right\| = U'(0,A)\varphi = A\varphi, \quad \varphi \in D(A). \tag{2.2}$$

*Семейство непрерывных косинус функций* (КОФ) в $E$ определяется как семейство линейных ограниченных операторов $C(t,A)$ со следующими свойствами:

(i) $C(t+s,A) + C(t-s,A) = 2C(t,A)C(s,A)$, $t \in R = (-\infty,\infty)$ (2.3)

(ii) $C(0,A) = I$

(iii) $\lim\limits_{t\to 0}\|C(t,A)\varphi - \varphi\| = 0$, при всех $\varphi \in E$.

Для КОФ определён производящий оператор (генератор):

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{C(2t,A) - I}{2t^2}\varphi\right] = C''(0)\varphi = A\varphi. \tag{2.4}$$

## 3. Примеры

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) для

$$g(x) = \cos mx$$

при условии

$$|u(x,t)| < \infty.$$

В этом случае оператор $A$ задаётся дифференциальным выражением $Au = \frac{d^2u}{dx^2}$ в пространстве равномерно непрерывных и ограниченных на $R = (-\infty, \infty)$ функций с нормой $\|g\| = \sup\limits_{x\in R} |g(x)|$ и областью определения $D(A) = \left\{ g \in C_{[-\infty,\infty]}, \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \in C_{[-\infty,\infty]} \right\}$.

Этот оператор является генератором КОФ вида

$$C\left(t, \frac{d^2}{dx^2}\right) g(x) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)]. \tag{3.1}$$

И для $g(x) = \cos mx$ справедливо соотношение

$$C\left(t, \frac{d^2}{dx^2}\right) \cos mx = \frac{1}{2}[\cos m(x+t) + \cos m(x-t)] = \cos mt \cos mx. \tag{3.2}$$

Используя (3.2) в (1.8) получаем

$$u(x,t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt - sp^{\alpha/2}}}{p^{\alpha/2}} dp \cdot \cos msds \cdot \cos mx =$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{\alpha/2}} dp \int_0^\infty e^{-sp^{\alpha/2}} \cdot \cos msds \cdot \cos mx =$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{p^\alpha + m^2} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * t^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}(-m^2 t^\alpha) \cos mx =$$

$$= \left[ \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \sum_{n=0}^\infty \frac{(-m^2 t)^n t^{n+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} \right] \cos mx = \cos mx + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-m^2)^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha)} t^{-\alpha} * t^{n+\alpha-1} =$$

$$= \cos mx + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-m^2)^n \cdot \Gamma(n+\alpha) \cdot t^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha) n!} \cos mx == \sum_{n=0}^\infty \frac{(-m^2)^n \Gamma(n+\alpha) t^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha) n!} \cos mx = K_m(t) \cos mx. \tag{3.3}$$

**Следствие 1.** Если начальные условия задачи (1.1)–(1.2) представимы в виде тригонометрического ряда

$$g(x) = \sum_{m=0}^\infty (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

то её решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^\infty K_m(t,\alpha)(a_m \cos mx + b_m \sin mx), \tag{3.4}$$

где

$$K_m(t,\alpha) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n m^{2n} \Gamma(n+\alpha) t^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha) n!}.$$

**Следствие 2.** Если в качестве начальной функции взять импульс Максвелла — Фейера

$$g(x) = \sum_{m=1}^n (n-1-m) \cos mx, \tag{3.5}$$

изученные в [8], то получим решение задачи в виде

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^n (n+1-m) K_m(t) \cos mx. \tag{3.6}$$

**Замечание 1.** Если в задаче (1.1)–(1.2) $g(x) = \sin nx$, то приведённые рассуждения дают решение

$$u(t) = K_m(t)\sin mx. \tag{3.7}$$

Заметим, что

$$K_m(t,1) = e^{-m^2 t}.$$

И, следовательно, в этом случае, решение (3.4)имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m^2 t}(a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Если задача (1.1)–(1.2) с условием (3.5), то решение имеет вид (3.6).

На основе формулы (3.6) написана программа в среде Maple, которая при выбранных значениях параметров и начальном условии производит визуализацию решения задачи (1.1)–(1.2). Так при $g(x)$ в виде импульса Максвелла — Фейера получен график решения, изображенный на рис. 1.

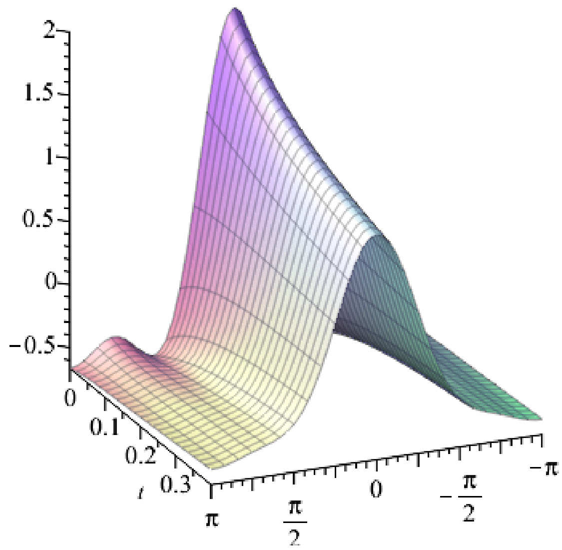



*Рис. 1. Решение задач (1.1)–(1.2), при* $\alpha = 0.5$, $g(x)$ *— импульс Максвелла — Фейера при* $n = 3$

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

**Литература**

1. *Иосида, К.* Функциональный анализ / К. Иосида ; пер. с англ. В.М. Волосова. – Москва : Мир, 1967. – 624 с.

2. *Крейн, С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве/ С. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1967. – 464 с.

3. Костин, В. А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // Доклады Академии Наук. – 2014. – Т. 455, № 2. – С. 142–146.

4. *Майнарди, Ф.* Временное уравнение дробной диффузионно-волновой функции / Ф. Майнарди // Радиофизика и квантовая электроника. – 1995. – Выпуск 38, № 1-2. – С. 20–36.

5. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

6. *Костин, А. В.* О корректной разрешимости задачи Коши для уравнения с дробной производной в банаховом пространстве / А. В. Костин, М. Н. Силаева, Алкади Хамса Мохаммад // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 2. – С. 71–79.

7. *Костин, А. В.* К теории функциональных пространств Степанова / А. В. Костин, В. А. Костин. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2007. – 259 с.

8. *Костин, В.А*. Многочлены Максвелла — Фейера и оптимизация полигармонических импульсов / В. А. Костин, Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов // Доклады Академии Наук. – 2012. – Т. 445, № 3. – С. 271–273.

УДК 517.948

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЁННЫХ МЕР

**И. Ф. Курбыко**

*Владимирский государственный университет*

**Аннотация.** Построены два класса псевдодифферециальных операторов (ПДО), действующих в пространстве обобщённых мер на бесконечномерном гильбертовом пространстве. Получены достаточные условия разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений, содержащих в правой части ПДО с символами специального вида. Такие операторы представляют своего рода обобщение на бесконечномерный случай канонических псевдодифференциальных операторов. В частном случае, если символы зависят от одного аргумента, ПДО служат обобщением дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.
**Ключевые слова:** локально выпуклое пространство, эволюционные уравнения, обобщённые меры, свёртка мер, оператор Фурье, псевдодифференциальные операторы, символы ПДО.

## Введение

Теория бесконечномерных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, а также связанных с ними эволюционных уравнений, превратилась в настоящее время в самостоятельную область нелинейного функционального анализа. Свойства таких операторов существенно, а иногда и принципиально отличаются от свойств конечномерных, а их исследование часто требует разработки новых методов (см. [1–4] и приведённую там литературу). Характерным отличием бесконечномерной теории интегрирования от её конечномерного аналога является отсутствие в бесконечномерном линейном топологическом пространстве $E$ «меры Лебега», то есть ненулевой $\sigma$-конечной меры $\mu$, дифференцируемой по подпространству $E_1 \subset E$, инвариантной относительно сдвигов такой, что $\mu(A+a)=\mu(A)$ для любого измеримого множества $A$ и элемента $a \in E$. В этой связи в бесконечномерном пространстве изучаются параллельно два ряда объектов: обобщённые функции и обобщённые меры, при этом уравнения, сопряжённые к дифференциальным уравнениям относительно функций, оказываются уравнениями относительно мер. Вопросы разрешимости дифференциальных уравнений и уравнений с ПДО в локально выпуклых пространствах обобщённых объектов рассматривались в работах С. В. Фомина, О. Г. Смолянова, А. В. Угланова, В. Ю. Бенткуса, А. Ю. Хренникова.

В настоящей работе получены условия разрешимости задачи Коши в обобщённых мерах для эволюционных уравнений, содержащих ПДО $P^*(x,D)$ и $P^*(D,y)$ с символами специального вида, зависящими от двух аргументов $(x,y) \in H \times H$, где $H$ — бесконечномерное гильбертово пространство. Класс таких операторов является обобщением бесконечномерных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, которые изучались В. Ю. Бенткусом и А. В. Углановым. Кроме того, операторы $P^*(x,D)$ и $P^*(D,y)$ являются бесконечномерными ПДО с $pq$-символом и $qp$-символом, соответственно, в смысле работы [1].

## 1. Обозначения и терминология

Всюду ниже через $M$ обозначается векторное пространство финитных комплекснозначных мер $m$, определённых на $\sigma$-алгебре борелевских подмножеств гильбертова пространства $H$, бесконечно дифференцируемых по подпространству $H_1 \subset H$. Пространство $M$ наделяется локально выпуклой топологией, задаваемой счётным набором полунорм [4, с. 7]: $\|m\|_0 = \operatorname{var} m$, $\|m\|_n = \sup\limits_{|h^n|_1 \le 1} \operatorname{var} d_{h^q}\mu (n=1,2,\ldots)$, $m \in M$. Оператор Фурье $F: m \to F[m]$, $F[m](y) = \int\limits_H e^{i(x,y)} dm(x)$, где $(x,y)$ — скалярное произведение в $H$, переводит пространство мер $M$ в пространство $Z$ комплекснозначных функций $f:H\to C$. Через $F^{-1}:f\to F^{-1}[f]$, $f\in Z$ обозначается обратное преобразование Фурье. Топология в пространстве $Z$ индуцируется из $M$ отображением $F:M\to Z$. Пространство обобщённых мер представляет пространство $Z'$, сопряженное к $Z$; пространство обобщённых функций есть пространство $M'$, сопряжённое к $M$. Пространство основных мер естественно вкладывается в пространство обобщённых мер $(M\subset Z')$ так, что для $m\in M:\left\langle m,h\right\rangle=\int\limits_H h(x)dm(x)$ для всех $h\in Z$. Сопряжённые пространства $Z'$ и $M'$ наделяются слабой топологией $\sigma=\sigma(Z',Z)$ и $\sigma=\sigma(M',M)$ [5], соответственно.

Ниже определяются классы функций, которым принадлежат символы ПДО. Через $W^\infty$ обозначается векторное пространство функций $f:H\to C$, бесконечно дифференцируемых в смысле Фреше и ограниченных на ограниченных множествах в $H$ вместе со всеми своими дифференциалами любого порядка. Через $L_0$ обозначается векторное пространство функций $p_0:H\times H\to C$ вида: $p_0(x,y)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}Q_{0j}(x)P_{0j}(y)$, удовлетворяющих условиям:

(а) $Q_{0j}=F[v_j]$, $v_j\in M$ для всех $j\in N$, причём $C_n=\sup\limits_{j\in N}\left\|v_j\right\|_n<\infty$, $n=0,1,2,\dots$;

(б) $P_{0j}\in W^\infty$ для всех $j\in N$ и для любого ограниченного множества $E\subset H$ существуют константы $c_p>0$ и $\alpha_p>1$ такие, что $\sup\limits_{y\in E}\left|P_{0j}(y)\right|\le c_p\alpha_p^{-j}$, $j\in N$;

(в) существует шар $B(0,l)\subset H$ конечного радиуса $l>0$ такой, что для всех $j\in N$ носители $supp\, v_j\subset B(0,l)$. Через $L_{01}$ обозначается подпространство пространства $L_0$, состоящее из функций $p_1(x,y)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}Q_{1j}(x)P_{1j}(y)$, удовлетворяющих условию:

(г) для всякого ограниченного множества $E\subset H$ и всех $j,n\in N$ существуют константы $c_{p1}>0$ и $\alpha_{p1}>1$ такие, что $\sup\limits_{y\in E,\left\|h^n\right\|_1\le 1}\left|d_{h^n}P_{1j}(y)\right|\le c_{p1}\alpha_{p1}^{-j}$.

Здесь $d_{h^n}P_{1j}(y)$ — дифференциал (порядка $n$) функции $P_{1j}$ в точке $y$ по направлениям $h_1,h_2,\dots,h_n$ из подпространства $H_1\subset H$.

**Определение 1.** Псевдодифференциальными операторами в пространстве функций $Z$ на бесконечномерном гильбертовом пространстве $H$ с $qp$-символом $p_0\in L_0$ и $pq$-символом $p_1\in L_{01}$ называются отображения $P(x,D):Z\to Z$ и $P(D,y):Z\to Z$, определённые равенствами:

$$P(x,D)f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}Q_{0j}(x)F[P_{0j}(y)F^{-1}[f]](x);\;\; P(D,y)f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}F[P_{1j}(y)F^{-1}[Q_{1j}f]](x) \quad (1)$$

для всех $f\in Z$ и $x\in H$.

**Определение 2.** Псевдодифференциальными операторами (ПДО) $P^*(x,D):Z'\to Z'$ и $P^*(D,y):Z'\to Z'$ в пространстве обобщённых мер $Z'$ с символами $p_0\in L_0$ и $p_1\in L_{01}$ называются отображения, сопряжённые к операторам $P(x,D)$ и $P(D,y)$, соответственно.

Согласно определениям 1–2, для всех $\mu\in Z'$ и $f\in Z$ имеем:

$$\left\langle P^*(x,D)\mu,f\right\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\left\langle\mu,F[P_{0j}F^{-1}[Q_{0j}f]]\right\rangle;\;\left\langle P^*(D,y)\mu,f\right\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\left\langle\mu,Q_{1j}F[P_{1j}F^{-1}[f]]\right\rangle.$$

Здесь $Q_{1j}F[P_{1j}F^{-1}[f]]$ есть произведение функций, равное преобразованию Фурье от свёртки мер: $F[v_{1j}*P_{1j}F^{-1}[f]]\in Z$, где $v_{1j}=F^{-1}[Q_{1j}]$. Автором доказано, что операторы $P(x,D)$ и $P(D,y)$ корректно определены равенствами (1) и являются изоморфизмами в пространстве основных функций $Z$.

## 2. Основная теорема и её доказательство

В работе [4] получено достаточное условие разрешимости задачи Коши для эволюционного уравнения $\{u'(t) = A^{*}u(t), u(t_0) = u_0\}$, где $A^{*} : X' \to X'$ — оператор, сопряжённый к линейному оператору $A : X \to X$ в локально выпуклом пространстве $X$; предполагается, что сопряжённое пространство $X'$ секвенциально полно в слабой топологии; $u : I \to X'$ — неизвестная функция; $t_0 \in R$, $0 < \Delta t < 1$; $I = (t_0 - \Delta t; t_0 + \Delta t)$ — интервал в $R$; $u_0 \in X'$ — линейный непрерывный функционал на $X$. Теорема 1 из [4] утверждает, что если для каждого $h \in X$ существует действительное число $c_h > 0$ такое, что для всех $n = 0,1,2,\ldots$ выполняется неравенство: $\left|\left\langle u_0, A^{n+1}h\right\rangle\right| \le c_h \cdot n!$, то существует решение $u = u(t)$ задачи Коши в пространстве $X'$. В настоящей работе на основании результатов из [4] доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Если для символов ПДО* $p_0(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{0j}(x)P_{0j}(y)$ *и* $p_1(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{1j}(x)P_{1j}(y)$ *существуют константы* $\{\alpha_0 > 1, c_0 > 0, 0 \le p_{0j} < p_0 < 1\}$ *и* $\{\alpha_1 > 1, c_1 > 0, 0 \le p_{1j} < p_1 < 1\}$ *такие, что для всех* $y \in H$ *и* $j = 1,2,\ldots$

$$\left|P_{0j}(y)\right| \le \frac{c_0 \left\|y\right\|^{p_{0j}}}{\alpha_0^j}; \ \left|P_{1j}(y)\right| \le \frac{c_1 \left\|y\right\|^{p_{1j}}}{\alpha_1^j}, \tag{2}$$

*причём, постоянные* $\{\alpha_0, c_0, \alpha_1, c_1\}$ *не зависят от* $j$, *тогда существует решение* $m : I \to Z'$ *задачи Коши для эволюционных уравнений* $m'(t) = P^{*}(x,D)m(t)$ *и* $m'(t) = P^{*}(D,y)m(t)$ *с начальным условием* $m(t_0) = \nu_0$, *где* $\nu_0 \in M$.

**Доказательство.** В силу свойств оператора Фурье $F : M \to Z$, переводящего меры в функции, пространство функций $Z$ представимо в виде строго индуктивного предела последовательности счётно-нормированных пространств $Z_n = F[M_n]$, где $M_n \subset M$ есть подпространство пространства $M$, состоящее из мер с носителями в шаре радиуса $n$ с топологией, задаваемой семейством норм $\left\|m\right\|_n$. Отсюда вытекает, что пространство $Z'$, как сопряжённое к $Z$, является секвенциально полным в слабой топологии. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что при условии (2), $(n+1)$-я итерация операторов $P(x,D)$ и $P(D,y)$ для всех $n = 0,1,2,\ldots$ удовлетворяет неравенству: $\left|\left\langle \nu_0, P^{n+1}\varphi\right\rangle\right| \le c_\varphi \cdot n!$, где $\varphi \in Z$, $c_\varphi > 0$. Фиксируем функцию $\varphi \in Z$, построим следующие две последовательности мер: $m_0 = F^{-1}[\varphi]$, $m_n = F^{-1}[P^n(x,D)\varphi]$ и $\eta_0 = F^{-1}[\varphi]$, $\eta_n = F^{-1}[P^n(D,y)\varphi]$ $(n = 1,2,\ldots)$. Пользуясь равенствами (1), получаем:

$$m_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j * P_j m_n, \ \eta_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(\nu_j * \eta_n). \tag{3}$$

Пользуясь свойствами операций свёртки двух комплекснозначных мер $m_1 * m_2$ и произведения меры на функцию $P\nu$, имеем: $\mathrm{var}(m_1 * m_2) \le 4\,\mathrm{var}\,m_1 \cdot \mathrm{var}\,m_2$ и $\mathrm{var}\,P_j\nu \le \sup_{x \in B(0,r_j)} \left|P_j(x)\right| \cdot \mathrm{var}\,\nu$ для всех $j \in N$ и меры $\nu \in M$, носитель которой расположен в шаре $B(0,r_j)$. Отсюда, на основании выражений (2)–(3), получаем следующие неравенства:

$$\mathrm{var}\,m_{n+1} \le 8c_0\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_0^{-j}\,\mathrm{var}\,\nu_j\right) \cdot (b+nd)^{p_0} \cdot \mathrm{var}\,m_n \le \beta(b+nd)^{p_0} \cdot \mathrm{var}\,m_n \le \beta(b+nd)^{p_0} \cdot \mathrm{var}\,m_n;$$

$$\mathrm{var}\,\eta_{n+1} \le 8\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in B(0,d+(n+1)r)} \left|P_j(x)\right| \cdot \mathrm{var}\,\nu_j\right) \cdot \mathrm{var}\,\eta_n \ \le \beta'(b+nd+d)^{p_1} \cdot \mathrm{var}\,\eta_n,$$

где постоянные $\beta = 8c_0q_0/(\alpha_0 - 1)$, $\beta' = 8c_1q_0/(\alpha_1 - 1)$ и $q_0 = \sup_{j \in N} \mathrm{var}\,\nu_j$ не зависят от номера $n$. Далее имеем:

$$\mathrm{var}\,m_{n+1} \le \beta^{n+1}[(b+nd+d) \ \cdot (b+(n-1)d+d) \cdot \ldots \cdot (b+d)]^{p_0}\,\mathrm{var}\,m_0,$$

откуда следует оценка:

$$\operatorname{var} m_{n+1} \le \beta^{n+1} \cdot (n!)^{p_0} [((b+d)/n+d)) \cdot ((b+d)/(n-1)+d) \cdot \ldots \cdot (b+d)]^{p_0} \operatorname{var} m_0 \le C_0 B^n \cdot (n!)^{p_0},$$

где $C_0 = \beta \cdot \operatorname{var} m_0 \cdot (b+d)^{p_0}$, $B = \beta \cdot (b+2d)^{p_0}$. Также получаем: $\operatorname{var} \eta_{n+1} \le C_1 B_1^n \cdot (n!)^{p_1}$, где $C_1 = \beta' \cdot \operatorname{var} \eta_0 \cdot (b+d)^{p_1}$, $B_1 = \beta \cdot (b+2d)^{p_1}$. Подберём положительные числа $C_B$ и $C_{B_1}$, независящие от $n$, так, чтобы имела место оценка степени: $B^n \le C_B (n!)^k$ и $B_1^n \le C_{B_1} (n!)^{k_1}$, где $k = (1-p_0) > 0$, $k_1 = (1-p_1) > 0$. Теперь, ясно, что в условиях теоремы существуют постоянные $Q_0 = C_0 \cdot C_B$ и $Q_1 = C_1 \cdot C_{B_1}$, зависящие только от $\varphi \in Z$, но независящие от $n$, такие, что $\operatorname{var} m_{n+1} \le Q_0 \cdot n!$ и $\operatorname{var} \eta_{n+1} \le Q_1 \cdot n!$. Рассматривая меру $\nu_0$, как линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве основных функций $Z$, вычислим

$$\left| \left\langle \nu_0, P^{n+1}(x,D)\varphi \right\rangle \right| = \left| \int_H P^{n+1}(x,D)\varphi(y) d\nu_0(x) \right| = \left| \int_H F[m_{n+1}](y) d\nu_0(x) \right| \le \int_H \left| F[m_{n+1}](y) \right| d\nu_0(x).$$

На основании определения интегрального оператора Фурье $F$, получаем оценку: $\left| \left\langle \nu_0, P^{n+1}(x,D)\varphi \right\rangle \right| \le \operatorname{var} m_{n+1} \cdot \operatorname{var} \nu_0 \le c_{\varphi 0} \cdot n!$, где $c_{\varphi 0} = Q_0 \cdot \operatorname{var} \nu_0$. Аналогично имеем: $\left| \left\langle \nu_0, P^{n+1}(D,y)\varphi \right\rangle \right| \le c_{\varphi 1} \cdot n!$, где $c_{\varphi 1} = Q_1 \cdot \operatorname{var} \nu_0$. Теорема доказана.

**Литература**


1. *Альбеверио, С.* Квантование по Шрёдингеру систем Гамильтона-Дирака и интегралы Фейнмана по суперпространству / С. Альбеверио, О. Г. Смолянов // Доклады Академии наук. – 2003. – Т. 390, № 6. – С. 727–732.

2. *Смолянов, О. Г.* Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шрёдингеру // ДАН СССР. – 1982. – Т. 263, Вып. 3. – С. 558–561.

3. *Смолянов, О. Г.* Гамильтоновы меры Фейнмана, интеграл Колмогорова и бесконечномерные псевдодифференциальные операторы / О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 488, № 3. – С. 243–247.

4. *Курбыко, И. Ф.* Об условиях разрешимости задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений в локально выпуклых пространствах // Роль инноваций в трансформации современной науки. Сборник статей Международной научно-практической конференции (10 декабря 2018 г., г. Самара). – Уфа : АЭТЕРНА, 2018. – С. 5–8.

5. *Kurbyko, I.* On the Invertibility of Infinite-Dimensional Pseudodifferential Operators / I. Kurbyko, S. Levizov // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V. 126, No 6. – P. 1607–1613.

УДК 517.958

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ПЛОСКОМ МАТЕРИАЛЕ С КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

**Е. А. Логинова, О. Е. Мануковская**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Изучается нестационарное волновое уравнение, описывающее распространение колебаний в плоском неоднородном материале с трещиной по отрезку. Предполагается отсутствие воздействий внешних сил. Уравнение дополняется граничными условиями типа сопряжения и нулевыми начальными условиями на искомую функцию и её первую производную по времени. Исходная задача сводится к обобщенной. Строится её решение как свёртка правой части получившегося уравнения с фундаментальным решением. Выписывается решение исходной задачи, доказывается выполнение начальных и граничных условий.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, плоскость с трещиной, неоднородный материал, материал с разрезом, условия типа сопряжения, разрез по отрезку, плоскость с конечным разрезом, начально-краевая задача, задача распространения колебаний, граничные условия, начальные условия.

## Введение

В последние десятилетия актуальными являются исследования начально-краевых задач для композитных материалов с трещинами. Достаточно подробно были изучены задачи теплопроводности, упругости, теплоупругости [1, 2].

В настоящей работе представлена задача, описывающая распространение колебаний в плоском неоднородном материале с разрезом. Предполагается, что воздействие внешних сил отсутствует.

Рассматривается нестационарное однородное волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}\right)=0. \qquad (1)$$

Здесь искомая функция $u(x_1,x_2,t)$ — смещение материала, $x_1$, $x_2$ — пространственные переменные, $t$ — время, $t\geq 0$. Уравнение (1) задано в плоскости с разрезом по отрезку $[-1;1]$ оси абсцисс.

Цель исследования — найти решение уравнения (1), которое будет удовлетворять граничным условиям типа сопряжения:

$$u(x_1,+0,t)-u(x_1,-0,t)=0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0,t)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x_1,-0,t)}{\partial x_2}=q(x_1,t) \qquad (3)$$

и начальным условиям

$$u(x_1,x_2,0)=0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,0)}{\partial t}=0. \qquad (5)$$

При изучении задачи (1)–(5) используется функция $\delta_{(-1;1)}$. Выпишем её определение.

**Определение 1.** Специализированной дельта-функцией будем называть функцию $\delta_{(-1;1)}$. Данная функция принадлежит множеству обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^2)$ и для функции

$\lambda(x_1,t)$, непрерывной на отрезке $[-1;1]$, и любой основной функции $\varphi(x_1,x_2,t)\in D(\mathbb{R}^3)$ выполнено равенство

$$\left(\lambda\delta_{(-1;1)},\varphi\left(x_1,x_2,t\right)\right)=\int_0^\infty\int_{-1}^1\lambda\left(x_1,t\right)\left(\delta\left(x_2\right),\varphi\left(x_1,x_2,t\right)\right)dx_1dt.$$

Здесь $\delta\left(x_2\right)$ — дельта-функция Дирака.

Основной результат сформулирован в теореме 1.

**Теорема 1.** *Пусть функция $q\left(x_1,t\right)$ принадлежит множеству функций $C^{2,0}_{x,t}\left([-1;1]\times\left[0;\infty\right)\right)$. Пусть также $q(x_1,t)$ и её первые производные ограничены по совокупности переменных. Тогда при $t>0$ решение задачи (1)–(5) представимо в виде*

$$u(x_1,x_2,t)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_1-1}^{x_1+1}\int\limits_0^t\frac{q(x_1-y_1,t-\sqrt{s^2+y_1^2+x_2^2})}{\sqrt{s^2+{y_1}^2+{x_2}^2}}dsdy_1. \tag{6}$$

*При $x_1\in(-1;1)$ выполнены граничные условия (2) и (3). Также выполнены начальные условия (4) и (5).*

Для доказательства теоремы 1 были сформулированы и доказаны следующие леммы.

## 1. Сведение исходной задачи к обобщенной

**Лемма 1.** *Пусть существует $u(x_1,x_2,t)$ — решение задачи (1)–(5). Функция $q(x_1,t)$ принадлежит пространству $D'(\mathbb{R}^2)$ и ограничена при $t\in[0,T]$, где $T>0$, а также равна нулю при $t<0$. Пусть существует продолжение решения $u(x_1,x_2,t)$ на $t<0$, то есть функция* $u(x_1,x_2,t)=\begin{cases}u(x_1,x_2,t),\ \text{при } t\ge 0;\\ 0,\ \text{при } t<0.\end{cases}$ *Тогда эта функция удовлетворяет обобщенной задаче*

$$\frac{\partial^2u(x_1,x_2,t)}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}\right)=-q(x_1)\cdot\delta_{(-1,1)}.$$

**Доказательство** леммы 1 основано на применении функционалов $\Delta u$ и $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$ к основной функции $\varphi(x_1,x_2,t)$ из $D(\mathbb{R}^3)$ в плоскости без квадрата $\Pi_\varepsilon=[-1-\varepsilon^{1/2};1+\ \varepsilon^{1/2}]\times[-\varepsilon;\varepsilon]$, окружающего трещину, и оценках получившихся выражений. При стремлении $\varepsilon$ к нулю область изучения задачи сводится к исходной.

Таким образом, получаются равенства

$$(\Delta u,\varphi(x_1,x_2,t))=(q(x_1,t)\delta_{[-1;1]},\varphi)+(\{\Delta u\},\varphi),$$

$$\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\varphi(x_1,x_2,t)\right)=\left(\left\{\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right\},\varphi(x_1,x_2,t)\right),$$

из которых следует утверждение леммы 1.

## 2. Построение решения

**Лемма 2.** *Пусть функция $q\left(x_1,t\right)\delta_{(-1;1)}$ принадлежит пространству $D'(\mathbb{R}^3)$, функция $q(x_1,t)$ непрерывна при $t\ge 0$ и обращается в ноль при $t<0$, а также ограничена в каждой полосе $0\le t\le T$, где $T>0$ — число; $E(x_1,x_2,t)\in S'(\mathbb{R}^3)$ — фундаментальное решение волнового оператора.*

*Тогда решение обобщенной задачи для задачи (1)–(5) представимо в виде*

$$u\left(x_1,x_2,t\right)=E\left(x_1,x_2,t\right)*\left(-q\left(x_1,t\right)\delta_{(-1;1)}\right).$$

**Доказательство** леммы 2 сводится к применению теоремы о свёртке с финитным функционалом.

**Лемма 3.** *Пусть функция $q(x_1,t)$ принадлежит множеству функций $C^{2,0}_{x,t}\left([-1;1]\times[0;\infty)\right)$, функции $q(x_1,t)$ и $\dfrac{\partial q(x_1,t)}{\partial t}$ ограничены по совокупности переменных. Тогда при $t>0$ решение задачи (1)–(5) (поверхностный волновой потенциал простого слоя) представимо в виде (6).*

**Доказательство.** Подействуем результатом свёртки $E(x_1,x_2,t)*(-q(x_1,t)\delta_{(-1;1)}(x_1,t)$, где $E(x,t)=\dfrac{\theta(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}$ — фундаментальное решение оператора $L=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x$, на основную функцию $\varphi(x_1,x_2,t)$. Используя определение и основные свойства свёртки ([3, 4]), а также определение 1, получим выражение

$$(E(x_1,x_2,t)*(-q(x_1,t)\delta_{(-1;1)}(x_1,t),\varphi(x_1,x_2,t)=$$

$$=(E(y,\tau)(-q(x_1,t)\delta_{(-1;1)}(x_1,t)),\eta(t)\eta(\tau)\eta(\tau^2-|y|^2)\varphi(x_1+y_1,x_2+y_2,t+\tau))=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta(\tau-|y|)}{\sqrt{\tau^2-|y|^2}}\eta(\tau)\eta(\tau^2-|y|^2)\cdot\int\limits_{\tau}^{\infty}\int\limits_{-1+y_1}^{1+y_1}q_1(\xi_1-y_1,\sigma-\tau)\varphi(\xi_1,y_2,\sigma)d\xi_1 d\sigma dy_1 dy_2 d\tau,$$

где $\theta$ — тэта-функция Хэвисайда, $\eta$ — срезающие функции, $x_1+y_1=\xi_1$, $t+\tau=\sigma$.

Из последнего равенства с учетом свойств функции Хэвисайда, функций $q(x_1,t)$ и $\varphi(x_1,x_2,t)$, а также замены переменных получаем представление (6).

### 3. Доказательство выполнения граничных и начальных условий

**Лемма 4.** *Пусть функция $q(x_1,t)$ принадлежит множеству функций $C^{2,0}_{x,t}\left([-1;1]\times[0;\infty)\right)$, функция $q(x_1,t)$ и её первые производные ограничены по совокупности переменных. Тогда при $x_1\in(-1;1)$ выполнены граничные условия (2) и (3). Также выполнены начальные условия (4)–(5).*

**Доказательство.** Для доказательства выполнения условия (2) используем оценку

$$|u(x_1,x_2,t)|\le\max|q|\left|\int\limits_{x_1-1}^{x_1+1}\int\limits_{0}^{t}\frac{1}{\sqrt{s^2+y_1^2+x_2^2}}ds dy_1\right|\le ct, \tag{7}$$

полученную путем последовательного вычисления интегралов по переменным $s$ и $y_1$.

Из неравенства (7) по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [3] можно сделать вывод о непрерывности оцениваемого интеграла по переменной $x_2$ и, следовательно, о выполнении граничного условия (2).

В ходе доказательства выполнения граничного условия (3) отдельно рассматриваются случаи $x_1\notin[-1;1]$ и $x_1\in(-1;1)$. В каждом из промежутков последовательно оцениваются при $x_2\to 0$ интегралы, входящие в представление $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$. Показано, что при $x_1\notin[-1;1]$ выражение $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ стремится к нулю при $x_2\to\pm 0$, при $x_1\in(-1;1)$ $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\to-\dfrac{q(x_1,t)}{2}$ при $x_2\to -0$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\to\dfrac{q(x_1,t)}{2}$ при $x_2\to +0$, откуда следует выполнение граничного условия (3).

Также, используя представление (6) и ограниченность $q(x_1,t)$, проведя вычисление интегралов в представлении функции $u(x_1,x_2,t)$ и последовательно их оценивая, получаем $\lim\limits_{t\to 0}|u(x_1,x_2,t)|\le 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0}u(x_1,x_2,t)=0$. Начальное условие (4) доказано.

Аналогично доказывается выполнение начального условия (5).

Из лемм (1)–(4) следует основной результат работы — теорема 1.

## Заключение

Таким образом, была изучена нестационарная задача (1)–(5), описывающая распространение колебаний в плоскости с трещиной. задача была сведена к обобщенной, построено её решение. Затем выписано решение исходной задачи в интегральном виде, доказано выполнение граничных (2) и (3) и начальных (4)–(5) условий.

## Литература


1. *Lei, W.-S.* Non oscillatory and non-singular asymptotic solutions to stress fields at interface cracks / W.- S. Lei // Willey Publishing Ltd. Fatigue Fract Engng Mater Struct. – 2017. – P. 1–18.
2. *Glushko, A. V.* Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko, V. E. Petrova, E. A. Loginova // Asymptotic Analysis. – 2016. – V. 98. – P. 285–307.
3. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – 4-е изд. перераб. и доп. – Москва : Наука, 1981. – 512 с.
4. *Глушко, А. В.* Уравнения математической физики / А. В. Глушко, А. Д. Баев, А. С. Рябенко. – Воронеж : Изд-во Воронежский государственный университет, 2011. – 520 с.

УДК 517.95

# ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**О. Х. Масаева**

*Институт прикладной математики и автоматизации*
*Кабардино-Балкарского научного центра РАН*

**Аннотация.** В данной работе в прямоугольной области рассмотрена задача Дирихле для дифференциального уравнения второго порядка с частной производной дробного порядка. При целом значении порядка дробной производной получаем уравнение Лаврентьева — Бицадзе. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости.
**Ключевые слова:** задача Дирихле, дробная производная, обобщенное уравнение Лаврентьева — Бицадзе, уравнение с дробной производной по временной переменной.

Рассмотрим в области $D=\{(x,y):\ 0<x<r,\ a<y<b\},\ a<0,\ b>0,$ уравнение

$$\mathbf{L}u(x,y)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\operatorname{sign}y\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right)u(x,y)=0, \tag{1}$$

где $1<\alpha<2,\ \dfrac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}=\partial^\alpha_{0y}$ — оператор дробного дифференцирования (в смысле Герасимова — Капуто) порядка $\alpha$ с началом в точке 0, по переменной $y$; $\partial^\alpha_{0s}g(s)=D^{\alpha-2}_{0s}\dfrac{d^2}{ds^2}g(s),\ D^\delta_{0s}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана — Лиувилля порядка $\alpha$ с началом в точке 0 [1].

Линейные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка, не превосходящего двух исследовались в работах [2–5] и др. В указанных работах в основном изучались диффузионно-волновые уравнения. Более подробную библиографию можно найти в работах [2] и [4].

В работах [6] и [7] рассматривалась задача Дирихле в области $D$ для уравнения, соответствующего уравнению Лаврентьева — Бицадзе, с другими типами дифференцирования.

Цель данной работы — это исследование задачи Дирихле для уравнения (1) в прямоугольной области.

## Постановка задачи

Пусть $D^-=D\cap\{y<0\},\ \ D^+=D\cap\{y>0\}$. Регулярным решением уравнения (1) в области $D$ назовем функцию $u=u(x,y)$ такую, что $u\in C(\overline{D})\cap C^1(D),\ u_{xx},\partial^\alpha_{0y}u\in C(D^-\cup D^+)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $D^-\cup D^+$.

**Задача.** *Найти в области $D$ регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0,y)=0,\quad u(r,y)=0,\quad a<y<b, \tag{2}$$

$$u(x,a)=\varphi(x),\quad u(x,b)=\psi(x),\quad 0<x<r, \tag{3}$$

$$\varphi(0)=\varphi(r)=0,\quad \psi(0)=\psi(r)=0,$$

$\varphi(x),\ \psi(x)$ — заданные непрерывные функции на отрезке $[0,r]$.

## Литература

1. *Нахушев, А. М.* Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. – М. : Физматлит, 2003. – 272 с.

2. *Псху, А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. – М. : Наука. – 2005. – 199 с.

3. *Agrawal, O. P.* Solution for a fractional diffision-wave equation defined in a bounded domain / O. P. Agrawal // Nonlinear Dynam. – 2002. – V. (29)-1, No 4. – P. 145–155.

4. *Kilbas, A. A.* Theory and applications of Fractional Differential Equations/ A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier, 2006. – 523 p.

5. *Mainardi, F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation / F. Mainardi // Appl. Math. Lett. –1996. – V. 9, No 6. – P. 23–28.

6. *Masaeva, O. Kh.* Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev — Bitsadze equations with a fractional derivative/ O. Kh. Masaeva //Electron. J. Differential Eq. – 2017. – V. 2017, No 74. – P. 1–8.

7. *Masaeva, O. Kh.* Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev — Bitsadze equation with a fractional derivative/ O. Kh. Masaeva // Progress in Fractional Differentiation and Applications. – 2020. – V. 6, No 3. – P. 239–244.

УДК 517.95

# ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БЕННИ — ЛЮКА С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Я. Т. Мегралиев[1], Б. К. Велиева[2]**

*[1]Бакинский государственный университет*
*[2]Гянджинский государственный университет*

**Аннотация.** Исследована одна обратная задача для линеаризованное уравнение Бенни — Люка с несамосопряженными краевыми условиями. Задача рассматривается в прямоугольной области. Дается определение классического решения поставленной задачи. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче (в определенном смысле), для которой доказывается теорема о существовании и единственности. Далее на основе этих фактов доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.
**Ключевые слова:** линейная обратная краевая задача, уравнение Бенни — Люка, существование, единственность, классического решения.

## Введение

Многие задачи математической физики, механики сплошных сред являются краевыми задачами, сводящимися к интегрированию дифференциального уравнения или системы уравнений в частных производных при заданных краевых и начальных условиях. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1]. Представляют большой интерес с точки зрения приложений дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например [2, 3]). Дифференциальные уравнения в частных производных типа Бенни — Люка имеют приложения в математической физике (см. [3]).

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения требуется определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, или же правую часть уравнения, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки.

Линейными обратными коэффициентными задачами для дифференциальных уравнений с частными производными принято называть такие задачи, в которых неизвестными являются решение уравнения, а также тот или иной коэффициент, определяющий неизвестное внешнее воздействие (правую часть).

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А. Н. Тихонова [4], М. М. Лаврентьева [5, 6], В. К. Иванова [7] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А. М. Денисова [8].

Теория обратных краевых задач для уравнений четвертого порядка все еще остается малоизученной. Обратным краевым задачам для уравнения Бенни–Люка посвящены работы [9–12]

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решений линейной обратной краевой задачи для уравнения Бенни — Люка с несамосопряженными краевыми условиями

## 1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Пусть $D_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le 1,\quad 0 \le t \le T\}$. В прямоугольнике $D_T$ рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти пару $\{u(x,t),\, a(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$ удовлетворяющих уравнению [3]

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha u_{xxxx}(x,t) - \beta u_{xxtt}(x,t) = a(t)g(x,t) + f(x,t) \quad (x,t) \in D_T, \tag{1}$$

начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

несамосопряженным граничным условиям

$$u(1,t) = 0, u_x(0,t) = u_x(1,t)\ ,\ u_{xx}(1,t) = 0,\ u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) \ \ (0 \le t \le T) \tag{3}$$

и с дополнительным условием

$$u(0,t) = h(t) \qquad (0 \le t \le T), \tag{4}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — фиксированные числа, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ — заданные функции.

Обозначим

$$\tilde{C}^{4,2}(D_T) = \left\{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{ttx}(x,t),\right.$$
$$\left. u_{ttxx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t) \in C(D_T)\right\}.$$

**Определение.** *Под классическим решением обратной краевой задачи (1)–(4) понимаем пару $\{u(x,t),\, a(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$ удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4) в обычном смысле.*

Аналогично [13], доказывается следующая

**Теорема 1.** *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[0,1]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $g(x,t) \in C(D_T)$, $g(0,t) \ne 0$ $(0 \le t \le T)$, и выполняются условия согласования*

$$\varphi(0) = h(0)\ ,\ \ \psi(0) = h'0). \tag{5}$$

*Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)–(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$ из соотношений (1)–(3) и условия*

$$h''(t) - u_{xx}(0,t) + \alpha u_{xxxx}(0,t) - \beta u_{xxtt}(0,t) = a(t)g(0,t) + f(0,t) \ \ (0 \le t \le T). \tag{6}$$

## 2. Разрешимость обратной краевой задачи

Известно [14], что последовательности функции

$$X_0(x) = 2(1-x),\ \ X_{2k-1}(x) = 4(1-x)\cos\lambda_k x,\ \ X_{2k}(x) = 4\sin\lambda_k x \ (k = 1,2,...), \tag{7}$$

$$Y_0(x) = 1,\ \ Y_{2k-1}(x) = \cos\lambda_k x,\ \ Y_{2k}(x) = x\sin\lambda_k x \ (k = 1,2,...) \tag{8}$$

образуют биортогональную систему, и система (7) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ $(k = 1,2,...)$.

Так как система (7) образует базис Рисса $L_2(0,1)$ и система (7) и (8) образует биортогональную в $L_2(0,1)$ систему функций, то первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (5) будем искать в виде

$$u(x,t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)X_{2k}(x), \tag{9}$$

где

$$u_0(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_0(x)dx,$$

$$u_{2k-1}(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_{2k-1}(x)dx,\ u_{2k}(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_{2k}(x)dx \quad (k = 1,2,...), \tag{10}$$

является решением следующей задачи:

$$u_0''(t) = F_0(t;a) \quad (0 \le t \le T), \tag{11}$$

$$u_{2k-1}''(t) + \beta_k^2 u_{2k-1}(t) = \frac{1}{1+\beta\lambda_k^2} F_{2k-1}(t;a) \quad (0 \le t \le T, k = 1,2,...), \tag{12}$$

$$u_{2k}''(t) + \beta_k^2 u_{2k}(t) = \frac{1}{1+\beta\lambda_k^2} F_{2k}(t;a) +$$

$$+\frac{2\lambda_k(1+2\alpha\lambda_k^2)}{1+\beta\lambda_k^2} u_{2k-1}(t) + \frac{2\beta\lambda_k}{1+\beta\lambda_k^2} u_{2k-1}''(t) \quad (0 \le t \le T,\ k = 1,2,...), \tag{13}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \ \ u_k'(0) = \psi_k \quad (k = 0,1,2,...), \tag{14}$$

причем

$$\beta_k^2 = \frac{\lambda_k^2(1+\alpha\lambda_k^2)}{1+\beta\lambda_k^2},$$

$$F_k(t;a) = a(t)g_k(t) + f_k(t), \quad g_k(t) = \int_0^1 g(x,t)Y_k(x)dx, \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x,t)Y_k(x)dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x)Y_k(x)dx, \quad \psi_k = \int_0^1 \psi(x)Y_k(x)dx \quad (k = 0,1,...).$$

Решая задачу (11)–(14) находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;a)d\tau, \tag{15}$$

$$u_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1}\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau, \tag{16}$$

$$u_{2k}(t) = \varphi_{2k}\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_{2k}\sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k}(\tau;a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau +$$

$$+\frac{\lambda_k(1+2\alpha\lambda_k^2+\alpha\beta\lambda_k^4)}{(1+\beta\lambda_k^2)^3}\Bigg[t\varphi_{2k-1}\sin\beta_k t + \left(\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t - t\cos\beta_k t\right)\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1} +$$

$$+\frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t\left(\int_0^\tau F_{2k-1}(\xi;a)\sin\beta_k(t-\xi)d\xi\right)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\Bigg] +$$

$$+\frac{2\beta\lambda_k}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)^2}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau. \tag{17}$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ в (9), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)–(3), (5) получаем:

$$u(x,t) = \left(\varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;a)d\tau\right)X_0(x) +$$

$$+\left\{\varphi_{2k-1}\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}X_{2k-1}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_{2k}\cos\beta_k t + \frac{1}{\beta_k}\psi_{2k}\sin\beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k}(\tau;a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau +\right.$$

$$+\frac{\lambda_k(1+2\alpha\lambda_k^2+\alpha\beta\lambda_k^4)}{(1+\beta\lambda_k^2)^3}\left[t\phi_{2k-1}\sin\beta_k t+\left(\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t-t\cos\beta_k t\right)\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t\left(\int_0^\tau F_{2k-1}(\xi;a)\sin\beta_k(t-\xi)\,d\xi\right)\sin\beta_k(t-\tau)\,d\tau\right]+$$

$$\left.+\frac{2\beta\lambda_k}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)^2}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\right\}X_{2k}(x). \tag{18}$$

Теперь, из (5), с учетом (9), имеем:

$$a(t)=\left[h(t)\right]^{-1}\left\{h''(t)-f(0,t)+4\sum_{k=1}^{\infty}((\lambda_k^2+\alpha\lambda_k^4)u_{2k-1}(t)+\beta\lambda_k^2u''_{2k-1}(t))\right\}. \tag{19}$$

Далее, из (12), с учетом (16), получаем:

$$(\lambda_k^2+\alpha\lambda_k^4)u_{2k-1}(t)+\beta\lambda_k^2u''_{2k-1}(t)=F_{2k-1}(t;a)-u''_{2k-1}(t)=\frac{\beta\lambda_k^2}{1+\beta\lambda_k^2}F_{2k-1}(t;a)-\beta_k^2u_{2k-1}(t)=$$

$$=\frac{\beta\lambda_k^2}{1+\beta\lambda_k^2}F_{2k-1}(t;a)-\beta_k^2\left(\phi_{2k-1}\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right). \tag{20}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)–(3), (6), подставим выражение (20) в (19):

$$a(t)=\left[h(t)\right]^{-1}\left\{h''(t)-f(0,t)+4\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\beta\lambda_k^2}{1+\beta\lambda_k^2}F_{2k-1}(t;a)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\beta_k^2\left(\varphi_{2k-1}\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_{2k-1}\sin\beta_k t+\frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right)\right]\right\}. \tag{21}$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (6) сведено к решению системы (18), (21) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Легко видеть, что $a(t)$ является решением уравнения (21) то пара $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$ будить решением задачи (1)–(3), (6).

1. $\alpha>0,\ \beta>0,\ h(t)\in C^2[0,T]$.
2. $\varphi(x)\in C^4[0,1],\ \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1),\ \varphi(1)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1),\ \varphi''(1)=0,\ \varphi'''(0)=\varphi'''(1),\ \varphi^{(4)}(1)=0$.
3. $\psi(x)\in C^3[0,1],\ \psi^{(4)}(x)\in L_2(0,1),\ \psi(1)=0,\ \psi'(0)=\psi'(1),\ \psi''(1)=0,\ \psi'''(0)=\psi'''(1)$.
4. $f(x,t),\ f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T),\ f(1,t)=0,\ f_x(0,t)=f_x(1,t)\ (0\le t\le T)$.
5. $g(x,t), g_x(x,t)\in C(D_T), g_{xx}(x,t)\in L_2(D_T), g(1,t)=0, g_x(0,t)=g_x(1,t), g(0,t)\ne 0\ (0\le t\le T)$.

Доказана следующая

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия 1–5 и*

$$B(T)(A(T)+2)^2<1. \tag{22}$$

*Тогда при малых значениях* $T+\|g(0,t)\|_{C[0,T]}$ *задача (1)–(3), (6) имеет единственное решение.*

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

**Теорема 3.** Пусть выполняются все условия теоремы 2 и выполнены условия согласования

$$\varphi(0)=h(0)\ ,\quad \psi(0)=h'0).$$

Тогда при малых значениях $T+\|g(0,t)\|_{C[0,T]}$ задача (1)–(4) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^5}\le R=A(T)+2)$ из $E_T^5$ единственное классическое решение.

**Литература**

1. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек. – М. : Наука, 2006. – 248 с.

2. *Шабров С. А.* Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 168–179.

3. *Benney D. J., Luke J. C.* On the interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematical Physics. – 1964. – V. 43. – P. 309–313.

4. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач // Доклады Академии наук СССР. – 1943. – Т. 39, № 4. – С. 195–198.

5. *Лаврентьев М. М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Доклады Академии наук СССР. – 1964. – Т. 157, № 3. – С. 520–521.

6. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М. : Наука, 1980. – 288 с.

7. *Иванов В. К., Васин В. В., Танина В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М. : Наука, 1978. – 206 с.

8. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. – М. : МГУ, 1994. – 206 с.

9. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной обратной задаче для нелинейного интегродифференциального уравнения Benney–Luke с вырожденным ядром // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2018. – Вып. 3. – С. 19–41.

10. *Мегралиев Я. Т., Велиева Б. К.* Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни — Люка с нелокальными условиями // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29, выпуск 2. – С. 166–182.

11. *Mehraliyev Yashar, Valiyeva Bahar.* On one nonlocal inverse boundary problem for the Benney — Luke equation with integral conditions // Journal of Physics: Conference Series. – 2019/4. – V. 1203.

12. *Mehraliyev Yashar T., K. Valiyeva Bahar & Ramazanova Aysel T.* An inverse boundary value problem for a linearized Benny–Luc equation with nonlocal boundary conditions // Cogent Mathematics & Statistics. – 2019 – 6:1. – 1634316.

13. *Мегралиев Я. Т.* Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. – 2011. – № 5. – С. 51–56.

14. *Калиев И. А., Сабитова М. М.* Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. журн. индустр. математики. – 2009. – Т. 12, № 1(37). – С. 89–97.

УДК 517.983

# РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ — КЛИФФОРДА В ЯДРЕ ПО ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

**М. В. Папкович, О. В. Скоромник**

*Полоцкий государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается многомерное интегральное уравнение первого рода с функцией Бесселя — Клиффорда в ядре по ограниченной пирамидальной области многомерного евклидова пространства специального вида. Следуя методике Я. Тамаркина, устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве суммируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для многомерного уравнения типа Абеля и для соответствующих одномерных интегральных уравнений первого рода.
**Ключевые слова:** интегральные преобразования, интегральные уравнения, функция Бесселя — Клиффорда, функция Бесселя первого рода, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

## Введение

Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, функцию Лежандра, вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), функцию Бесселя, другие специальные функции изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, §§ 39.1, 39.2]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями в ядрах основывается на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана — Лиувилля со степенными или экспоненциальными весами и использовании известных свойств дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах [1, §§ 35.1, 35.2, 37.1].

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В работе [3] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченным пирамидальным областям евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [4, с. 48], [5] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [6] (см. также [1, §§ 24.1, 28.4]).

Следуя методике Я. Тамаркина, в работах [7, 8] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a,b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области. В [9] получены решения в замкнутой форме более общих интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследована картина их разрешимости в пространстве суммируемых функций. В [10–12] аналогичные результаты получены для отдельных классов многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией Лежандра, вырожденной гипергеометрической функции Куммера, с функцией Бесселя — Клиффорда в ядрах по пирамидальным областям.

Целью настоящей работы является продолжение этих исследований. Мы даем решение в замкнутой форме еще одного многомерного интегрального уравнения с функцией Бесселя — Клиффорда в ядре по пирамидальной области и устанавливаем необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Нами приводятся вспомогательные сведения, решение рассматриваемого уравнения в квадратурах, а также устанавливаются необходимые и достаточные условия его разрешимости.

### *Предварительные сведения*

Введем некоторые обозначения [1, §28.4]. Пусть $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$ — множество натуральных чисел, $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$, $\mathrm{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathrm{R}^n$ обозначим через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k t_k$ их скалярное произведение, в частности, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ для $\mathbf{1}=(1,1,...,1)$. Пусть $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ означает $x_1>t_1,\ x_2>t_2,...,x_n>t_n$ и аналогично для знака нестрогого неравенства $\geq$, $\mathrm{R}^n_+=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{x}>0\}$, а $\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_n)\in\mathrm{N}_0^n=\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0$, где $(k_i\in\mathrm{N}_0, i=1,2,...,n)$ — мультииндекс с $\mathbf{k}!=k_1!k_2!\cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}|=k_1+k_2+...+k_n$. Для $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{k}\in\mathrm{N}_0^n$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathrm{R}^n_+$ и $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in\mathrm{R}^n_+$ положим $\mathbf{x}^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)$, $(\mathbf{x})_\mathrm{k}=(x_1)_{k_1}(x_2)_{k_2}\cdots(x_n)_{k_n}$, $\mathbf{D}^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial x_2)^{\alpha_2}...(\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma=(x_1^{\sigma_1}-t_1^{\sigma_1})(x_1^{\sigma_1}-t_1^{\sigma_1})\cdots(x_n^{\sigma_n}-t_n^{\sigma_n})$, где $(z)_n$ — символ Похгаммера: $(z)_0\equiv 1$, $(z)_k=z(z+1)...(z+k-1)=\Gamma(z+n)/\Gamma(z)\quad(z\in C; n\in\mathrm{N})$, $\lambda=(\lambda,...,\lambda)\in\mathrm{R}^n_+$.

Пусть $A=\|a_{jk}\|$ $(a_{jk}\in\mathrm{R}^1)$ — матрица порядка $n\times n$ с определителем $|A|=\det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j=(a_{j1},...,a_{jn})$, элементы обратной матрицы $A^{-1}$ обозначим через $\tilde{a}_{jk}$. Без ограничения общности положим $|A|=1$. Пусть [1, §28.4]

$$A\cdot\mathbf{x}=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x},\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{x},...,\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x}),\ (A\cdot\mathbf{x})^\alpha=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{x})^{\alpha_2}\cdots(\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{c}=(c_1,c_2,...,c_n)\in\mathrm{R}^n$ и $r\in\mathrm{R}^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq 0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq 0\}\tag{1}$$

$n$-мерную ограниченную в $\mathrm{R}^n$ пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$, основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r=0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})=0$ $(j=1,2,...,n)$. В частности, когда $A=E=\|\delta_{jk}\|$ — единичная матрица, $\mathbf{c}=(1,...,1)$ и $r=0$, $E_{1,0}(\mathbf{b})=E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{t}\leq\mathbf{b},\mathbf{1}\cdot\mathbf{t}\geq 0\}.\tag{2}$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды (1) необходимо и достаточно выполнение условия $A^{-1}\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}>0$ (соответственно $A^{-1}\mathbf{c}>0$).

Для $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$ введем функцию

$$\overline{J}_\nu[\mathbf{x}]=\prod_{j=1}^{n}\overline{J}_{\nu_j}[x_j],\tag{3}$$

представляющую собой произведение функций Бесселя — Клиффорда $\overline{J}_\mu(z)$, определяемых по формуле [1, §37.1]

$$\overline{J}_\mu(z)=\Gamma(\mu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\mu}J_\mu(z),\ |z|<\infty;\tag{4}$$

где $J_\mu(z)$ — функция Бесселя первого рода [1, §1.3], [12, гл. 7]:

$$J_\mu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\mu}}{\Gamma(\mu+k+1)k!}. \tag{5}$$

Рассматриваемое нами интегральное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}), \tag{6}$$

где $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\ (\mathbf{c},\mathbf{b}\in \mathrm{R}^n, r\in\mathrm{R}^1)$ — пирамида (1); $\mathbf{x},\mathbf{t},\alpha\in\mathrm{R}^n,\ 0<\alpha<1,\quad \lambda,\sigma\in\mathrm{R}^n_+$ и $\bar{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]$ — функция вида (3). Данное уравнение при $\sigma=1$ обобщает соответствующее одномерное интегральное уравнение [1, §37.1].

Нам понадобятся второй интеграл Сонина для функции Бесселя (5) [13, 7.7(4)]:

$$\int\limits_0^t\sqrt{\tau^\mu(t-\tau)^\nu}J_\mu(\alpha\sqrt{\tau})J_\nu(\beta\sqrt{t-\tau})d\tau=2\alpha^\mu\beta^\nu\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{-(\nu+\mu+1)}}J_{\nu+\mu+1}\left(t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right), \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}(\mu)>-1,\ \mathrm{Re}(\nu)>-1;$$

а также вспомогательное утверждение.

**Лемма 1** [1; §28] *Если функция $f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})$, определенная на $A_\mathbf{c}(\mathbf{b})\times A_\mathbf{c}(\mathbf{b})$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int\limits_{A_\mathbf{c}(\mathbf{b})}d\mathbf{t}\int\limits_{A_\mathbf{c}(\mathbf{t})}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}=\int\limits_{A_\mathbf{c}(\mathbf{b})}d\boldsymbol{\tau}\int\limits_{\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau})}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\mathbf{t}, \tag{8}$$

$$\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau})=\left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n: A\cdot\boldsymbol{\tau}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{b}\right\}, \tag{9}$$

*в предположении, что один из повторных интегралов в (8) сходится абсолютно.*

### *Решение в замкнутой форме*

Сначала дадим формальное решение уравнения (6). Заменяя в (6) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на

$$\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1},$$

где $\sigma^\mathbf{1}=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1}=t_1^{\sigma_1-1}t_2^{\sigma_2-1}\cdots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}\times\\&\times\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{t})}\left(A\cdot(\mathbf{t}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)\right)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{t}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)}\right]f(\mathbf{u})d\mathbf{u}=\\&=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}).\end{aligned} \tag{10}$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (10) согласно формуле (8):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}f(\mathbf{u})d\mathbf{u}\int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\left(A\cdot(\mathbf{t}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)\right)^{\alpha-1}\times\\&\times\bar{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{t}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)}\right]\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}=\\&=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\end{aligned} \tag{11}$$

где $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})=\left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n: A\cdot\mathbf{u}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{x}\right\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (11) вводим новые переменные

$$\mathbf{s}_j = \mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma),\ \mathbf{a}_j = (a_{j1},...,a_{jn}) \quad (j=1,...,n).$$

Далее по формуле (4) выражаем функцию Бесселя — Клиффорда $\overline{J}_\mu[z]$ через функцию Бесселя $J_\mu[z]$, используем формулу (7), для внутреннего интеграла в правой части (11) получаем:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})} \left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha} \left(A\cdot(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right)^{\alpha-1} \overline{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}\right] \overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}\right]\times$$

$$\times\sigma^1\,\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sqrt{\lambda}}{2\Gamma(\alpha)}\prod_{j=1}^{n}\left[\int\limits_0^{\mathbf{a}_j\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)}} \sqrt{\mathbf{s}_j^{-\alpha_j}\left(\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - \mathbf{s}_j\right)^{\alpha_j-1}}\times\right.$$

$$\left.\times J_{-\alpha}\left[\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{s}_j}\right] J_{\alpha_j-1}\left[\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - \mathbf{s}_j}\right]d\mathbf{s}_j\right] = \Gamma(\mathbf{1}-\alpha)\, J_0\left(\sqrt{2\lambda}\ A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right).$$

На основании этого равенство (11) принимает вид:

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0\left(\sqrt{2\lambda}\ A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right) f(\mathbf{u})d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}),$$

или

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0\left(\sqrt{2\lambda}\ A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right) f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}), \tag{12}$$

где

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha} \overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}. \tag{13}$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1}\cdot\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}},\ \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right), \tag{14}$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1},...,\frac{y_n}{d_n}\right) \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1}\cdot\mathbf{c}$, переписываем (12) в виде

$$\int\limits_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau} = \varphi(\mathbf{y}), \tag{15}$$

где $E_1(\mathbf{y})$ — модельная пирамида (2),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = f^*\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\,\mathbf{c}}\right),\ \varphi(\mathbf{y}) = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right)\prod_{j=1}^{n} d_j.$$

Для обращения уравнения (15) перепишем его в виде

$$\int\limits_{-(y_1+...+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int\limits_{-(y_1+...+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \ldots \int\limits_{-(\tau_2+...+\tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau})d\tau_1 = \varphi(\mathbf{y}). \tag{16}$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1},..., y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1}\ldots\frac{\partial}{\partial y_n}\varphi(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1}\cdot\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\,\mathbf{c}}$, учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k}\frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k=1,...,n), \tag{17}$$

где $\tilde{a}_{jk}$ $(j,k=1,...,n)$ — элементы обратной матрицы $A^{-1}$, и $J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)\right) = J_0(0) = 1$, приходим к следующей формуле решения уравнения (6):

$$f(\mathbf{x})=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}. \quad (18)$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (6) разрешимо, то его решение имеет вид (18).

***Необходимые и достаточные условия разрешимости***

Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (6) в пространстве $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$:

$$L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left|f(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}<\infty\right\}. \quad (19)$$

Введем пространство

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right)=\left\{\varphi\ :\varphi(\mathbf{x})=\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}),A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)\right\}. \quad (20)$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$ играет ту же роль для уравнения (6), что и пространство $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, §2.2]. Отметим, что если $\varphi\in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi(\mathbf{x})=h(\mathbf{x}).$$

В частности, если $A=E$ — единичная матрица, $\mathbf{c}=\mathbf{1}=(1,...,1)$ и $r=0$, (19)–(20) принимают вид соответственно

$$L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\int_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})}\left|f(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}<\infty\right\},$$

$$I_{E_{\mathbf{1}}}\left(L_1\right)=\left\{\varphi:\ \varphi(\mathbf{x})=\int_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}),(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)\right\},$$

где $h(\mathbf{x})=\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}...\dfrac{\partial}{\partial x_n}\varphi(\mathbf{x})$.

Имеет место следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a,b)$.

**Теорема 1.** *Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (6) с* $\alpha\in\mathrm{R}^n$ $(0<\alpha<1)$ *и* $\lambda,\sigma\in\mathrm{R}_+^n$ *в пространстве* $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right) \quad \mathit{(21)}$$

*и*

$$\left[f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=\left[\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=...=\left[\prod_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=0. \quad \mathit{(22)}$$

*При выполнении этих условий уравнение (6) разрешимо в* $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ *и его единственное решение дается формулой (18).*

**Доказательство.**

В модельном случае $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (15), (16). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно получается из (15), (16) после замены переменных (14) с учетом (17).

**Следствие 1.** *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left[\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in E_1(\mathbf{b}), \tag{23}$$

*с* $\alpha\in\mathrm{R}^n$ $(0<\alpha<1)$ *и* $\lambda,\sigma\in\mathrm{R}_+^n$ *разрешимо в пространстве* $L_1\left(E_1(\mathbf{b})\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})^{-\alpha}\overline{J}_{-\alpha}\left[\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{E_1}\left(L_1\right)$$

*и*

$$\left[f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\left[\frac{\partial}{\partial x_n}f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\ldots=\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=0.$$

*При выполнении этих условий уравнение (23) разрешимо в* $L_1\left(E_1(\mathbf{b})\right)$ *и его единственное решение дается формулой*

$$f(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})^{-\alpha}\,\overline{J}_{-\alpha}\left[\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}.$$

## Заключение

В работе проведено исследование многомерного интегрального уравнения с функцией Бесселя – Клиффорда по ограниченной пирамидальной области. Получено его решение в замкнутой форме, установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в пространстве суммируемых функций.

## Литература


1. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. *Репин, О. А.* Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О. А. Репин. – Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1992. – 183 с.

3. *Kilbas, A. A.* On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation / A. A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – V. 25, № 1. – P. 1–9.

4. *Михлин, С. Г.* Лекции по интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1959. – 232 с.

5. *Преображенский, Н. Г.* Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения / Н. Г. Преображенский. – Новосибирск : Ин-т. теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.

6. *Федосов, В. П.* О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.

7. *Килбас, А. А.* Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А. А. Килбас, Р. К. Райна, М. Сайго, Г. М. Сривастава // Доклады НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.

8. *Raina, K. L.* Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K. L. Raina, T. M. Srivastava, A. A. Kilbas, M. Saigo // ANZIAM J. – 2001. – V. 43, № 2. – P. 291–320.

9. *Килбас, А. А.* Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А. А. Килбас, О.В. Скоромник // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – Минск, 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.

10. *Килбас, А. А.* Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А. А. Килбас, О. В. Скоромник // Доклады академии наук (Российская Академия наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.

11. *Скоромник, О. В.* Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области / О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2014. – № 1. – С. 12–17.

12. *Скоромник, О. В.* Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя – Клиффорда в ядре по пирамидальной области / О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 2(99). – С. 5–13.

13. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.

УДК 517.9

# ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ ПЕРЕХОДА ОТ МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ К МОДЕЛИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

**М. В. Половинкина[1], И. П. Половинкин[2]**

*[1]Воронежский государственный университет инженерных технологий*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Показано, что добавление диффузионных членов к обыкновенным дифференциальным уравнениям, например к логистическим, может ослабить достаточные условия устойчивости стационарного решения.
**Ключевые слова:** диффузионная модель, стационарное решение, устойчивость, неравенство Стеклова — Пуанкаре — Фридрихса.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$\left.\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right)\right|_{x\in\partial\Omega} = B_s(x), \quad \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0, \quad \mu_s \ge 0, \quad \eta_s \ge 0, \tag{2}$$

$$u_s(x,0) = u_s^0(x), \quad s = 1, \dots, m, \tag{3}$$

где $\Omega$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu$ — единичный вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области $\Omega$, $u = (u_1(x,t), \dots, u_m(x,t))$, $\vartheta_s \ge 0$, $B_s(x) \in C(\partial\Omega)$, $u_s^0(x) \in C(\overline{\Omega})$, $s = 1, \dots, m$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\Delta$ — оператор Лапласа, определенный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

Рассмотрим специальный вид функций $F_s(u) = F_s(u_1, \dots, u_m)$:

$$F_s(u) = \sum_{k=1}^{m} b_{sk} u_k + \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{s\ell j} u_\ell u_j + f_s(x), \ f_s \in C(\overline{\Omega}), \ a_{s\ell j} = a_{sj\ell}, \ \ell, j, s = 1, \dots, m, \tag{4}$$

Пусть $w = (w_1(x), \dots, w_m(x))$ — стационарное решение системы (1), то есть решение системы

$$\vartheta_s \Delta w_s + F_s(w) = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\left(\mu_s w_s + \eta_s \frac{\partial w_s}{\partial \nu}\right)\right|_{x\in\partial\Omega} = B_s(x), \quad s = 1, \dots, m. \tag{6}$$

В настоящей работе мы интересуемся устойчивостью стационарного решения системы (1). Пусть $z = z(x,t) = u(x,t) - w(x)$ — вектор отклонений от стационарного решения. Подставим в систему (1) представление $u = w + z$. Тогда

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta(w_s + z_s) + F_s(w + z), \quad s = 1, \dots, m, \ x \in \Omega.$$

После тождественных преобразований получим равенство

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^{m} b_{sk} z_k + \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{s\ell j}(2 w_\ell z_j + z_\ell z_j) + \vartheta_s \Delta w_s + F_s(w), \quad s = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega.$$

С учетом равенства (5) последнее равенство преобразуется к виду

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^{m} b_{sk} z_k + \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{s\ell j}(2 w_\ell z_j + z_\ell z_j) \ \ s = 1, \dots, m, x \in \Omega.$$

Умножим это равенство на $z_s$ и проинтегрируем по области $\Omega$. Получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega z_s^2\,dx = \vartheta_s\int_\Omega z_s\Delta z_s\,dx + \sum_{k=1}^m \int_\Omega b_{sk}\,z_k z_s\,dx + \int_\Omega\left(2\sum_{\ell=1}^m\sum_{j=1}^n a_{s\ell j}\,w_\ell z_j z_s + \sum_{\ell=1}^m\sum_{j=1}^n a_{s\ell j}\,z_\ell\,z_j z_s\right)dx.$$

Считая отклонения $z_s$ достаточно малыми, отбросим одночлены от этих отклонений степени выше второй, после чего получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega z_s^2\,dx = \vartheta_s\int_\Omega z_s\Delta z_s\,dx + \int_\Omega\left(\sum_{k=1}^m b_{sk}\,z_k z_s + 2\sum_{\ell=1}^m\sum_{j=1}^n a_{s\ell j}\,w_\ell z_j z_s\right)dx.$$

Применим к первому слагаемому в правой части этого равенства первую формулу Грина для оператора Лапласа. Получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega z_s^2\,dx = -\vartheta_s\int_\Omega |\nabla z_s|^2\,dx - \vartheta_s\int_{\partial\Omega} g(z_s)d\Gamma + \int_\Omega\left(\sum_{k=1}^m b_{sk}\,z_k z_s + 2\sum_{\ell=1}^m\sum_{j=1}^n a_{s\ell j}\,w_\ell z_j z_s\right)dx,\quad s=1,\dots,m, \tag{7}$$

где второе слагаемое в правой части равенства представляет собой поверхностный (при $n\ge 3$) или криволинейный (при $n=2$) интеграл первого рода по границе области $\Omega$, а в случае $n=1$ сумму неотрицательных значений на концах интервала $\Omega$; $g(z_s)=0$ при $\mu_s=0$ или при $\eta_s=0$; если же $\eta_s\ne 0$, то $g(z_s)=\mu_s z_s^2/\eta_s$. В любом случае $g(z_s)\ge 0$. Сложив $m$ равенств (7), получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |z|^2\,dx = -\sum_{s=1}^m\vartheta_s\int_\Omega|\nabla z_s|^2 dx - \sum_{s=1}^m\vartheta_s\int_{\partial\Omega} g(z_s)d\Gamma + \int_\Omega\left(\sum_{s=1}^m\sum_{k=1}^m b_{sk}\,z_k z_s + 2\sum_{s=1}^m\sum_{\ell=1}^m\sum_{j=1}^m a_{s\ell j}\,w_\ell z_j z_s\right)dx,$$

или, что то же,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |z|^2 dx = -\sum_{s=1}^m\vartheta_s\int_\Omega|\nabla z_s|^2\,dx - \sum_{s=1}^m\vartheta_s\int_{\partial\Omega} g(z_s)d\Gamma + \int_\Omega\sum_{s=1}^m\sum_{k=1}^m \beta_{sk}\,z_k z_s\,dx, \tag{8}$$

где

$$\beta_{sk} = b_{sk} + 2\sum_{\ell=1}^m a_{s\ell k}\,w_\ell. \tag{9}$$

Положим

$$\Theta_{sk} = (\beta_{sk}+\beta_{ks})/2. \tag{10}$$

Тогда равенство (8) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |z|^2 dx = -\sum_{s=1}^m\vartheta_s\int_\Omega|\nabla z_s|^2 dx - \sum_{s=1}^m\vartheta_s\int_{\partial\Omega} g(z_s)d\Gamma + \int_\Omega\sum_{s=1}^m\sum_{k=1}^m \Theta_{sk}\,z_k z_s\,dx. \tag{11}$$

В преобразовании (10) нет особой надобности. Единственная цель его применения — это переход от несимметричной квадратичной формы к симметричной. Совершенно ясно, что отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^m\sum_{k=1}^m \Theta_{sk}\,z_k z_s\,dx \tag{12}$$

обеспечит отрицательность левой части равенства (11), а значит, устойчивость стационарного решения.

При отсутствии диффузионных членов, то есть при

$$\vartheta_s = 0,\ s=1,\dots,m, \tag{13}$$

переменные $x_1,\dots,x_n$ входят в уравнения (1) как параметры, производные по которым не содержатся в этих уравнениях. Это случай модели с сосредоточенными параметрами. Пусть теперь

$$\sum_{s=1}^m \vartheta_s^2 > 0, \tag{14}$$

то есть мы переходим к рассмотрению диффузионной модели с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие устойчивости стационарного решения. Для этого воспользуемся неравенством Стеклова — Пуанкаре — Фридрихса (см. [1], с. 56, [2] с. 150, [3] с. 62)

$$\int_{\Omega} \left|\nabla z_s\right|^2 dx \geq \frac{1}{d^2}\int_{\Omega} z_s^2 dx,$$

где $d = \operatorname{diam}\Omega$ — диаметр области $\Omega$. Отсюда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} |z|^2 dx \leq -\sum_{s=1}^{m}\frac{\vartheta_s}{d^2}\int_{\Omega} z_s^2\, dx - \sum_{s=1}^{m}\vartheta_s\int_{\partial\Omega} g(z_s)d\Gamma + \int_{\Omega}\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Theta_{sk}\, z_k z_s\, dx. \tag{15}$$

Теперь можно утверждать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_{sk}\, z_k z_s, \tag{16}$$

где

$$A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks}\vartheta_s / d^2.$$

Чтобы наглядно продемонстрировать, как меняются свойства модели при введении распределенных параметров посредством добавления диффузионных членов, рассмотрим случай

$$b_{sk} = 0, \quad f(x) = 0, \;\; x \in \overline{\Omega}, \;\; s,k = 1,\dots,m.$$

В этом случае вектор $w = 0$ является стационарным решением системы как в случае сосредоточенных параметров (13), так и в случае распределенных параметров (14). Однако ситуации принципиально разнятся. В бездиффузионном случае нулевой вектор не является устойчивым решением. Если же все уравнения системы содержат диффузионные члены, то есть при

$$\vartheta_s > 0, \quad s = 1,\dots,m,$$

квадратичная форма (16) примет вид

$$-\frac{1}{d^2}\sum_{s=1}^{m}\sum \vartheta_s z_s^2 \tag{17}$$

и, очевидно, будет отрицательно определенной, что означает устойчивость нулевого решения.

Другой интересный пример дает уравнение Хотеллинга

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(\xi - p)p + B\Delta p,$$

где $p$ — искомая функция, $p = p(x,y,t) \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ при каждом $t > 0$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа, $A$, $B$, $\xi$ суть заданные положительные постоянные. Это уравнение описывает рост и распространение популяции. При этом входящие в уравнение величины имеют следующий смысл: $A$ — темп роста популяции, $B$ — темп распространения, $\xi$ — коэффициент насыщенной плотности, $p$ — плотность популяции, $t$ — время.

Пусть $w(x,y)$ — стационарное решение уравнения Хотеллинга, то есть решение уравнения

$$A(\xi - w)w + B\Delta w = 0.$$

Изложенный выше метод приводит к заключению о том, что условие

$$w > \frac{\xi}{2} - \frac{B}{2Ad^2}$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения $w(x,y)$ (см. [4]). На сей раз интересно отметить, что в диффузионном случае (при $B \neq 0$) нулевое стационарное решение может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, что определяется размером области $\Omega$.

**Литература**


1. *Михлин, С. Г.* Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – Москва : Высшая школа, 1977. – 431 с.

2. *Михайлов, В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – Москва : Наука, 1976. – 392 с.

3. *Ладыженская, О. А.* Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – Москва : Наука, 1973. – 408 с.

4. *Мешков, В. З.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга / В. З. Мешков, И. П. Половинкин, М. Е. Семенов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т. 9, вып. 1. – С. 226–227.

УДК 517.929.2

# УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

**В. В. Провоторов[1], А. П. Жабко[2]**

*[1]Воронежский государственный университет*
*[2]Санкт-Петербургский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается дифференциально-разностный аналог начально-краевой задачи для уравнения параболического типа с распределенными параметрами на графе в классе суммируемых функций. Используется метод Е. Ротэ, основанный на полу-дискретизации по временной переменной начально-краевой задачи, позволяющий установить не только существование слабого решения начально-краевой задачи, но и свести изучение устойчивости дифференциально-разностной системы к анализу устойчивости слабого решения этой задачи. Полученные результаты применимы при моделировании сетеподобных процессов переноса формализмами дифференциально-разностных систем с распределенными параметрами на графе и открывают подход к анализу задач оптимального управления такими системами, включая задачи управления многомерными математическими моделями.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностное уравнение, геометрический граф, устойчивость.

Анализ дифференциально-разностной системы осуществляется в классе суммируемых функций, базируется на построении априорных оценок слабых решений дифференциально-разностного уравнения и установлении слабой компактности последовательности этих решений (см., например, работы [1–3]). Показана сепарабельность пространства слабых решений, при построении приближений решений используется специальный базис — множество обобщенных собственных функций эллиптического оператора задачи. Установлены условия, гарантирующие устойчивость решения дифференциально-разностной системы.

## 1. Обозначения, используемые понятия и утверждения

На протяжении всего текста используются понятия и обозначения, принятые в [1, 2]: $\Gamma$ — ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами $\gamma$, параметризованными отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ — множества граничных $\zeta$ и внутренних $\xi$ узлов графа, соответственно; $\Gamma_0$ — объединение всех ребер $\gamma_0$, не содержащих концевых точек; $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t)$, $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0,t)$, $t \le T < \infty$ — произвольная фиксированная постоянная. На протяжении всей работы используется интеграл Лебега по $\Gamma$ или $\Gamma_T$.

Необходимые пространства и множества: $L_p(\Gamma)$ $(p = 1,2)$ — банахово пространство измеримых на $\Gamma_0$ функций, суммируемых с $p$-й степенью (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$); $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой, определяемой соотношением $\|u\|_{2,1,\Gamma_T} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2} dt$; $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка также из $L_2(\Gamma)$; $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную первого порядка по $x$, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$; аналогично вводится пространство $W_2^1(\Gamma_T)$; $V_2(\Gamma_T)$ — множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)} \tag{1}$$

и непрерывных по $t$ в норме $L_2(\Gamma)$.

Ниже рассматривается дифференциально-разностный аналог параболического уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \quad x,t\in\Gamma_T, \tag{2}$$

где $a(x)$, $b(x)$ — фиксированные измеримые и ограниченные на $\Gamma_0$ функции, суммируемые с квадратом:

$$0 < a_* \le a(x) \le a^*, \quad |b(x)| \le \beta, \quad x\in\Gamma_0, \tag{3}$$

условия на функцию $f(x,t)$ будут представлены ниже. Уравнение (2) представляет собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре $\gamma$ графа $\Gamma$.

Введем пространство состояний системы (2) и вспомогательные пространства. Для этого в $W_2^1(\Gamma)$ рассмотрим билинейную форму $\ell(\mu,\nu) = \int\limits_\Gamma \left(a(x)\dfrac{d\mu(x)}{dx}\dfrac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x)\right)dx.$

Имеет место следующее утверждение [3, с. 92].

**Лемма.** *Пусть функция* $u(x)\in W_2^1(\Gamma)$ *такова, что* $\ell(u,\nu) - \int\limits_\Gamma f(x)\eta(x)dx = 0$ *для любой* $\eta(x)\in W_2^1(\Gamma)$ *(*$f(x)\in L_2(\Gamma)$ *— фиксированная функция). Тогда для любого ребра* $\gamma\subset\Gamma$ *сужение* $a(x)_\gamma \dfrac{du(x)_\gamma}{dx}$ *непрерывно в концевых точках ребра* $\gamma$.

Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям леммы 1 и соотношениям $\sum\limits_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma \dfrac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum\limits_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma \dfrac{du(0)_\gamma}{dx}$ во всех узлах $\xi\in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ — множества ребер $\gamma$, соответственно ориентированных «к узлу $\xi$» и «от узла $\xi$», $f(\cdot)_\gamma$ — сужение функции $f(\cdot)$ на ребро $\gamma$). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a,\Gamma)$. При этом, если допустить, что функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a,\Gamma)$.

Далее, обозначим через $\Omega_a(\Gamma_T)$ множество функций $u(x,t)\in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области $\Gamma_T$ плоскостью $t=t_0$ $(t_0\in[0,T])$ как функции класса $W_0^1(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1,t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0,t)_\gamma}{\partial x} \tag{4}$$

для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ по норме (1) обозначим через $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$; ясно, что $V^{1,0}(a,\Gamma_T)\subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (4) для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$ и для любого $t\in[0,T]$ (аналогично вводится пространство $W^1(a,\Gamma_T)$); $W^{1,0}(a,\Gamma_T)\subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Пространство $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ описывает множество состояний параболической системы, $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и $W^1(a,\Gamma_T)$ — вспомогательные пространства. Отличием элементов пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ от элементов $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ является отсутствие у последних непрерывности по временной переменной $t$.

В пространствах $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ рассмотрим параболическую систему (2), состояние которой $u(x,t)$ $(x,t\in\overline{\Gamma}_T)$ определяется слабым решением $u(x,t)$ уравнения (2) в области $\Gamma_T$, удовлетворяющим начальному и краевому условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)\in L_2(\Gamma), \quad u\big|_{x\in\partial\Gamma_T} = 0. \tag{5}$$

Приведем основные утверждения в пространстве $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$, затем — в $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, доказательства этих утверждений приведены в работе [4].

Пусть выполнены условия (3) и $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Введем билинейную форму $\ell_t(u,\eta)=\int\limits_{\Gamma_t}\left(a(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\dfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)u(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt\ \ (0\le t\le T)$ и определим решение задачи (2), (5) в пространствах $W_0^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

**Определение 1.** *Слабым решением класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи} (2), (5) называется функция $u(x,t)\in W_0^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$-\int\limits_{\Gamma_T}u(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt+\ell_T(u,\eta)=\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{\Gamma_T}f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

*для любой функции $\eta(x,t)\in W^1(a,\Gamma_T)$, равной нулю при $t=T$.*

**Определение 2.** *Слабым решением класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (2), (5) называется функция $u(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Gamma}u(x,t)\eta(x,t)dx-\int\limits_{\Gamma_t}u(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt+\ell_t(u,\eta)=\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{\Gamma_t}f(x,t)\eta(x,t)dxdt \qquad (6)$$

*при любом $t\in[0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t)\in W^1(a,\Gamma_T)$.*

В работе [4] при тех же условиях, что и выше, рассматривалась начально-краевая задача вида (2), (5) при анализе устойчивости слабого решения уравнения (2) в области $\Gamma_\infty=\Gamma_0\times(0,\infty)$, где были установлены условия, гарантирующие однозначную слабую разрешимость задачи (2), (5) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ при любом $T<\infty$, используя метод Фаэдо — Галеркина со специальным базисом — множеством обобщенных собственных функций класса $W_0^1(a,\Gamma)$ одномерного эллиптического оператора, порожденного дифференциальным выражением $\Lambda u=-\dfrac{d}{dx}\left(a(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right)+b(x)u(x)$ [5]. А именно, при условиях (3) рассматривалась спектральная задача $\Lambda\phi=\lambda\phi,\phi|_{\partial\Gamma}=0$, в классе $W_0^1(a,\Gamma)$ — задача определения множества чисел $\lambda$, каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение $\phi(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$, удовлетворяющее тождеству $\ell(\phi,\nu)=\lambda(\phi,\nu)$ при любой функции $\nu(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$. Для этой задачи установлены следующие свойства.

1. *Собственные значения вещественные и имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учетом кратностей: $\{\lambda_i\}_{i\ge1}$; соответственно нумеруются и обобщенные собственные функции: $\{\phi_i(x)\}_{i\ge1}$.*

2. *Собственные значения $\lambda_i$ положительны, за исключением, может быть, конечного числа первых; если $b(x)\ge0$, тогда собственные значения положительные.*

3. *Система обобщенных собственных функций $\{\phi_i(x)\}_{i\ge1}$ образует ортогональный базис в пространстве $W^1(a,\Gamma)$ и пространстве $L_2(\Gamma)$ (везде ниже $\|\phi_i\|_{L_2(\Gamma)}=1$).*

**Теорема 1.** *При любых $f(x)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$ и для любого $0<T<\infty$ начально-краевая задача (2), (5) слабо разрешима в пространстве $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$.*

При доказательстве теоремы строятся приближения Фаэдо — Галеркина по спектральному базису $\{\phi_i(x)\}_{i\ge1}$: приближенные решения $u^N(x,t)$ (натуральное $N$ фиксировано) задачи (2), (5) имеют вид $u^N(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{N}c_i^N(t)\phi_i(x)$, где $c_i^N(t)$ — абсолютно непрерывные на $[0,T]$ функции $(c_i'(t)\in L_2(0,T))$, определяемые из следующей системы $(i=\overline{1,N})$:

$$\left(\frac{\partial u^N}{\partial t},\phi_i\right)+\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\frac{d\phi_i(x)}{dx}+b(x)u^N(x,t)\phi_i(x)\right)dx=\left(f,\phi_i\right),c_i^N(0)=(\varphi,\phi_i).$$

Дальнейшие рассуждения основаны на априорных оценках норм слабых решений задачи (2), (5) и построении слабо сходящейся по норме $W^{1,0}(\Gamma_T)$ подпоследовательности $\{y^{N_k}\}_{k\geq 1}$ последовательности $\{u^N\}_{N\geq 1}$ к решению $u(x,t)\in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ (слабая компактность $\{u^{N_k}\}_{k\geq 1}$).

Преследуя цель простоты изложения, несколько сузим пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$, заменив его на $CL_{2,1}(\Gamma_T)\subset L_{2,1}(\Gamma_T)$ ($CL_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_{2,1}(\Gamma_T)$, непрерывных по $t$ в норме $L_2(\Gamma)$) и считая $f(x,t)\in CL_{2,1}(\Gamma_T)$ (последнее является необременительным условием в приложениях). Иными словами функции $f(x,t)$, суммируемые по переменной $t\in(0,T)$ в норме $L_2(\Gamma)$ заменяются функциями, непрерывными по переменной $t\in[0,T]$ в норме $L_2(\Gamma)$).

**Теорема 2.** *При любых $f(x)\in CL_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$ и для любого $0<T<\infty$ начально-краевая задача (2), (5) слабо разрешима в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.*

При доказательстве устанавливается, что при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ след принадлежащего пространству $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ слабого решения задачи (2), (5) (теорема 1) суть элемент $W_0^1(a,\Gamma)$ и непрерывно зависит от $t$ в норме $W_2^1(\Gamma)$ (а значит, и в норме $L_2(\Gamma)$). Слабое решение задачи (2), (5) представимо в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\varphi_i e^{-\lambda_i t}+\int_0^t f_i(\tau)e^{-\lambda_i(t-\tau)}d\tau\right)u_i(x), \tag{7}$$

учитывая разложения $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\phi_i(x)$, $\varphi_i=\int_\Gamma \varphi(x)\phi_i(x)dx$ и $f(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(t)\phi_i(x)$, $f_i(t)=\int_\Gamma f(x,t)\phi_i(x)dx$, $t\in[0,T]$. Стандартным образом устанавливается и следующее утверждение.

**Теорема 3.** *При выполнении условий теоремы 2 начально-краевая задача (2), (5) имеет единственное слабое решение в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ для любого $0<T<\infty$.*

## 2. Устойчивость дифференциальной системы (2)

В многочисленных приложениях, где необходимо исследовать свойства решений $u(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ задачи (2), (5) для произвольного конечного $T$, важно знать поведение $u(x,t)$ при $t\to+\infty$. Пусть, как и выше, $f(x,t)\in CL_{2,1}(\Gamma_T)$, причем

$$\int_t^{t+1}\|f(\cdot,\varsigma)\|^2_{L_2(\Gamma)}d\varsigma\leq A \tag{8}$$

для любого $t\geq 0$ ($A$ — фиксированная постоянная); последнее означает, что функция $f(x,t)$ определена в области $\Gamma_\infty=\Gamma_0\times[0,\infty)$ [4].

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия теоремы 2 и условие (8) для функции $f(x,t)$, тогда для слабого решения $u(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_\infty)$ задачи (2), (5) существует такая положительная постоянная $C$, что*

*а)* $\int_t^{t+1}\|u(\cdot,\varsigma)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}d\varsigma\leq C$ *для любых* $t\geq 0$, *б)* $\|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)}\leq C$ *при* $t\to+\infty$.

В дальнейшем исследовании предполагается выполнение условия $0\leq b(x)\leq\beta<\infty$, $x\in\Gamma$, гарантирующее положительность собственных значений $\lambda_i$, $i\geq 1$, и условия теоремы 4. Пусть состояние системы (2) описывается функцией $\overline{u}(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_\infty)$, являющейся слабым решением уравнения (2) в области $\Gamma_\infty$ с начальным $u\big|_{t=t_0}=\overline{\varphi}(x)$, $x\in\Gamma$, и краевым $u\big|_{x\in\partial\Gamma_\infty}=0$ условиями (здесь $\partial\Gamma_\infty=\partial\Gamma_0\times(0,\infty)$), а функция $u(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_\infty)$ — слабое решение уравнения (2) в области $\Gamma_\infty$ с начальным $u\big|_{t=t_0}=\varphi(x)$, $x\in\Gamma$, и краевым $u\big|_{x\in\partial\Gamma_\infty}=0$ условиями. Состояние $\overline{u}(x,t)$ системы (2) назовем невозмущенным, а $u(x,t)$ — возмущенным.

**Определение 3.** Невозмущенное состояние $\bar{u}(x,t)$ системы (2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любых $t_0 > 0$ и $\epsilon > 0$ существует $\delta(t_0,\epsilon) > 0$ такое, что при $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)} < \delta(t_0,\epsilon)$ выполняется $\|u(\cdot,t) - \bar{u}(\cdot,t)\|_{W^1(a,\Gamma)} < \epsilon$ при $t \geq t_0$, где $u(x,t)$ — возмущенное состояние системы (4).

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия теоремы 4 и условие* $0 \leq b(x) \leq \beta < \infty,\ x \in \Gamma$, *тогда невозмущенное состояние системы (2) в области* $\Gamma_\infty$ *устойчиво по Ляпунову.*

### 3. Дифференциально-разностная параболическая система

Используя метод Ротэ полу-дискретизации по переменной $t$ [6, с. 189], осуществим редукцию задачи (2), (5) к более простой дифференциально-разностной параболической системе, допускающей достаточно простое алгоритмическое оформление и эффективную реализацию на современной вычислительной технике. При этом доказывается теорема существования слабого решения задачи (2), (5) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ для любого $T < \infty$, указывается метод отыскания приближенного решения и путь анализа устойчивости решения дифференциально-разностной системы.

В пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ состояний $u(x,t)$ системы (2) рассмотрим начально-краевую задачу (2), (5). Рассечем область $\Gamma_T$ плоскостями $t = k\tau,\ \tau = T/M,\ k = 0,1,2,\ldots,M$, при этом сечениями $\Gamma_T$ при любом $k$ являются $\Gamma$. Уравнение (2) заменим дифференциально-разностной системой

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(k)}{dx}\right) + b(x)u(k) = f_\tau(k),\ \ u(0) = \varphi(x),\ \ u(k)\big|_{x\in\partial\Gamma} = 0. \tag{9}$$

где $f_\tau(k) := f_\tau(x,k\tau) \in L_2(\Gamma)$ и $k = 1,2,\ldots,M$.

Функции $u(k)$ $(k = 1,2,\ldots,M)$ определены как слабые решения эллиптической системы (9). Таким образом, для фиксированного $k$ соотношения (9) — краевая задача для эллиптического уравнения относительно $u(k)$.

**Замечание.** Соотношения (9) $(k = \overline{1,M})$ для фиксированного $M$ представляют собой аналог неявной разностной схемы первого порядка аппроксимации по временному переменному $t$ для начально-краевой задачи (2), (5).

**Определение 4.** *Слабым решением дифференциально-разностной системы (9) называются функции* $u(k) \in W_0^1(a,\Gamma),\ k = \overline{1,M}$, *удовлетворяющие тождеству*

$$\int_\Gamma u(k)_t \nu(x)dx + \ell(u(k),\nu(x)) = \int_\Gamma f_\tau(k)\nu(x)dx,$$

*для любой функции* $\nu(x) \in W_0^1(a,\Gamma)$; *равенство* $u(0) = \varphi(x)$ *понимается почти всюду,* $u(k)_t = \dfrac{1}{\tau}[u(k) - u(k-1)]$.

**Теорема 6.** *При выполнении условий (3) и при* $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ *функции* $u(k)$ $(k = 1,2,\ldots,M)$ *при достаточно малых* $\tau$ *(когда число* $M$ *разбиений отрезка* $[0,T]$ *достаточно большое) однозначно определяются как элементы пространства* $W_0^1(a,\Gamma)$. *Слабое решение начально-краевой задачи (2), (5) в пространстве* $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ *для любого фиксированного* $T$ *является пределом функций* $u(k)$ *при* $M \to \infty$.

### 4. Устойчивость дифференциально-разностной системы (9)

Аналогично введенным выше невозмущенному и возмущенному решениям дифференциальной системы (2) вводятся таковые для дифференциально-разностной системы (9). Обозначим их через $\bar{u}(k)$ и $u(k)$, соответственно.

**Определение 5.** *Невозмущенное состояние* $\bar{u}(k)$ *дифференциально-разностной системы (9) устойчиво, если для любых* $k_0 > 0$ *и* $\epsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta(k_0,\epsilon) > 0$, *что при выпол-*

*нении неравенства* $\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)}<\delta(k_0,\epsilon)$ *выполняется* $\|u(k)-\bar{u}(k)\|_{W^1(a,\Gamma)}<\epsilon$ *при всех* $k\geq k_0$, *где* $u(k)$ *— возмущенное состояние системы (9).*

В силу определения 4 из утверждения теоремы 6, учитывая утверждение теоремы 5, следует устойчивость невозмущенного состояния дифференциально-разностной системы (9).

Отметим, что полученные выше результаты можно распространить на многомерный случай, аналогичному приведенному в работе [7].

## Литература


1. *Zhabk, A. P.* Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph / A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. – 2019. – V. 15, iss. 4. – P. 457–471.

2. *Провоторов, В. В.* Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе / В. В. Провоторов, Е. Н. Провоторова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2017. – Т. 13, № 2. – С. 209–224.

3. *Провоторов, В. В.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе / В. В. Провоторов, А. С. Волкова. – Воронеж : Научная книга. – 2014. – 188 с.

4. *Zhabko, A. P.* Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph / A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. – 2019. – V. 15, iss. 2. – P. 187–198.

5. *Volkova, A. S.* Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value\\ problems on a geometric graph / A. S. Volkova, V. V. Provotorov // Russian Mathematics. – 2014. – Вып. 58, № 3. – С. 1–13.

6. *Ладыженская, О. А.* Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука. – 1973. – 407 с.

7. *Provotorov, V. V.* Unique weak solvability of nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in the netlike domain / V. V. Provotorov, V. I. Ryazhskikh, Yu. A. Gnilitskaya // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2017. – V. 13, iss. 3. – P. 264–277.

УДК 517.958+519.21+004.7

# ПЕРВАЯ СТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

**Д. Б. Прокопьева[1], Р. П. Шепелева[2], Н. И. Головко[2]**

[1]*Тихоокеанское высшее военно-морское училище им. С. О. Макарова*
[2]*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

**Аннотация.** В работе исследуется система массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса. Исследована первая модель стационарной СМО в виде системы дифференциальных уравнений. Доказано необходимое условие существования решения первой модели и неотрицательности характеристик числа заявок.
**Ключевые слова:** система массового обслуживания, диффузионная интенсивность дважды стохастического пуассоновского входного потока, стационарный режим.

Системы массового обслуживания применяются в качестве аналитических моделей информационных систем и их элементов, в медицинском обслуживании, при эксплуатации транспортных систем и т. д. Актуально моделирование и исследование систем массового обслуживания в информационных сетях. Различные типы СМО исследованы и описаны в теории массового обслуживания [1, 2]. При моделировании СМО особое внимание уделяют изучению дважды стохастических потоков [3].

В данной работе исследуется система массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью $\mu$. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda$ изменяется на промежутке $[\alpha,\beta]$ и представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a=0$, коэффициентом диффузии $b$ и упругими границами $\alpha,\beta$. Доказано необходимое условие существования решения первой модели и неотрицательности стационарных характеристик числа заявок в рассматриваемой стационарной СМО. Такие СМО используются при моделировании web-узлов Интернет [3].

Диффузионный процесс представляет собой марковский случайный процесс второго порядка с независимыми приращениями, диффузионные операторные моменты первого и второго порядка которого равны коэффициенту сноса $a$ и коэффициенту диффузии $b$ соответственно [4].

Обозначим через $\hat{\lambda}$ интенсивность входного потока в стационарном режиме. Пусть $q_k(x)dx = \mathsf{P}\{\nu = k, x \leqslant \hat{\lambda} < x+dx\}$, где $q_k(x)$ — стационарные характеристики числа заявок, $\nu$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $k \geqslant 0$; $f(x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant \hat{\lambda} < x+dx\}$, $f(x)$ — стационарная плотность интенсивности входного потока, $x \in [\alpha,\beta]$.

Заметим, что интегралы $\int_\alpha^\beta q_k(x)dx = p_k$, $k \geqslant 0$, представляют собой стационарное распределение числа заявок.

Функции $f(x)$, $q_k(x)$ рассматриваем в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^2[\alpha,\beta]$.

В [5] показано, что функции $q_k(x)$ $k \geqslant 0$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, названной первой моделью стационарной СМО:

$$-xq_0(x) + \mu q_1(x) + \frac{b}{2} q_0''(x) = 0, \tag{1}$$

$$xq_{k-1}\left(x\right)-\left(x+\mu\right)q_k\left(x\right)+\mu q_{k+1}\left(x\right)+\frac{b}{2}q_k''(x)=0,\quad k\geqslant 1, \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$q_k'(\alpha)=0,\quad q_k'(\beta)=0,\quad k\geqslant 0, \tag{3}$$

условием нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty}q_k(x)=f(x). \tag{4}$$

Введем производящую функцию

$$R(x,z)=\sum_{k\geqslant 0}q_k(x)z^k,\qquad |z|\leqslant 1,\quad z\in\mathbb{C}. \tag{5}$$

Обозначим область определения производящей функции

$$D_{xz}=\{(x,z):x\in[\alpha,\beta],\ |z|\leqslant 1,\ z\in\mathbb{C}\}.$$

Заметим, что ряд $R(x,z)$ равномерно сходится при $|z|\leqslant 1$, так как

$$|R(x,z)|=\left|\sum_{k\geqslant 0}q_k(x)z^k\right|\leqslant\sum_{k\geqslant 0}q_k(x)\left|z^k\right|=\sum_{k\geqslant 0}q_k(x)|z|^k\leqslant\sum_{k\geqslant 0}q_k(x)=f(x),\ z\leqslant 1.$$

Следовательно, $|R(x,z)|\leqslant f(x)$ при $|z|\leqslant 1$, т. е. производящая функция $R(x,z)$ сходится равномерно по $x,z$ на границе области $D_{xz}$ и внутри ее.

**Теорема 1.** *Производящая функция* $R(x,z)$ *удовлетворяет уравнению:*

$$R(x,z)\left[xz^2-(x+\mu)z+\mu\right]+\frac{b}{2}zR''_{xx}(x,z)=(1-z)\mu q_0(x). \tag{6}$$

**Доказательство.** Умножая каждое уравнение в (2) на $z^{k+1}$, суммируя по индексу $k\geqslant 1$ и добавляя уравнение (1), умноженное на $z$, получим уравнение относительно производящей функции

$$xz^2R(x,z)-(x+\mu)z\left(R(x,z)-q_0\left(x\right)\right)+\mu(R(x,z)-$$

$$-q_0(x)-zq_1(x))+\frac{b}{2}zR''_{xx}(x,z)-xzq_0(x)+\mu zq_1(x)=0.$$

После приведения подобных слагаемых следует уравнение (6). *Теорема доказана.*

Краевая задача относительно производящей функции $R(x,z)$:

$$R\left(x,z\right)\left[xz^2-\left(x+\mu\right)z+\mu\right]+\frac{b}{2}zR''_{xx}\left(x,z\right)-(1-z)\mu\Phi_0R(x,z)=0, \tag{7}$$

$$R_x'(\alpha,z)=0,\quad R_x'(\beta,z)=0. \tag{8}$$

Из условия нормировки (4) следует

$$R(x,1)=\sum_{k\geqslant 0}q_k(x)=f(x). \tag{9}$$

В результате суммирования уравнений (1)–(3) получим краевую задачу относительно $f(x)$: $f''(x)=0,\ f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0,$ решение которой представляет собой плотность равномерного распределения $f(x)=1/(\beta-\alpha)$.

Обозначим $\overline{\lambda}=\int_\alpha^\beta xf(x)dx$ — среднее значение интенсивности входного потока в стационарном режиме.

**Теорема 2.** *Необходимое условие существования решения первой модели стационарной СМО и неотрицательности характеристик* $q_k(x),\ k\geqslant 0,$ *имеет вид*

$$\overline{\lambda}<\mu, \tag{10}$$

*причем вероятность простоя СМО равна*

$$p_0 = \int_\alpha^\beta q_0(x)dx = \int_\alpha^\beta (1 - x/\mu) f(x)dx. \tag{11}$$

**Доказательство.** Представив выражение $xz^2 - (x+\mu)z + \mu$ в виде

$$x(z-1)\left(z - \frac{\mu}{x}\right) = (1-z)(\mu - xz)$$

преобразуем уравнение (6) к виду

$$(1-z)(\mu - xz)R(x,z) + \frac{b}{2} z R''_{xx}(x,z) = (1-z)\mu q_0(x). \tag{12}$$

Из граничных условий следует

$$\int_\alpha^\beta R''_{xx}(x,z)dx = \int_\alpha^\beta \left(R'_x(x,z)\right)'_x dx = R'_x(x,z)\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \sum_{k\geqslant 0} q'_k(x)z^k \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = 0.$$

Проинтегрировав уравнение (12) по $x \in [\alpha, \beta]$ и разделив уравнение на $1 - z$, получим

$$\int_\alpha^\beta (\mu - xz)R(x,z)dx = \mu \int_\alpha^\beta q_0(x)dx. \tag{13}$$

При $z = 1$ равенство (13) преобразуется к виду

$$\int_\alpha^\beta (\mu - x) f(x)dx = \mu \int_\alpha^\beta q_0(x)dx, \tag{14}$$

откуда следует

$$p_0 = \int_\alpha^\beta q_0(x)dx = \int_\alpha^\beta (1 - x/\mu) f(x)dx. \tag{15}$$

Представим уравнение (13) в виде

$$\mu \int_\alpha^\beta \sum_{k\geqslant 0} q_k(x)z^k\, dx - z\int_\alpha^\beta x \sum_{k\geqslant 0} q_k(x)z^k\, dx = \mu \int_\alpha^\beta q_0(x)dx,$$

откуда после приведения подобных слева и справа при $z^0$ в результате простейших преобразований получим

$$\sum_{k\geqslant 1} \int_\alpha^\beta q_k(x)dxz^k = \sum_{k\geqslant 1} \int_\alpha^\beta (x/\mu) q_{k-1}(x)dxz^k.$$

Из последнего равенства при $z^k$ следуют равенства

$$p_{k+1} = \int_\alpha^\beta q_{k+1}(x)dx = \int_\alpha^\beta (x/\mu) q_k(x)dx,\ k \geqslant 0. \tag{16}$$

Покажем, что при условии (10) вероятность $p_0$ того, что в СМО в стационарном режиме нет заявок, строго положительна.

Если $p_0 < 0$, то из (15) следует $\bar{\lambda} > \mu$, что противоречит условию (10).

Предположим, что $p_0 = 0$, тогда в (15) либо $q_0(x) \equiv 0$ либо $q_0(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$.

При $q_0(x) \equiv 0$ из (16) следует, что $p_1 = 0$. При этом либо $q_1(x) \equiv 0$ либо $q_1(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$.

Продолжая рассуждения, из (16) получим, что при $q_k(x) \equiv 0$, $k \geqslant 1$ следует, что $p_{k+1} = 0$, $k \geqslant 1$. При этом либо $q_{k+1}(x) \equiv 0$ либо $q_{k+1}(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$.

Если $q_k(x) \equiv 0$, $k \geqslant 0$, и $p_k = 0$, $k \geqslant 0$, то это противоречит условию нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Если $p_0 = 0$, т. е. $\overline{\lambda} = \mu$, функции $q_k(x)$, $k \geqslant 0$, могут принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$, то отсюда следует, что условие $\overline{\lambda} = \mu$ не является необходимым условием неотрицательности $q_k(x)$, $k \geqslant 0$. Следовательно, необходимым условием неотрицательности характеристик $q_k(x)$, $k \geqslant 0$, является условие $\overline{\lambda} < \mu$, т. е. (10). При этом неотрицательные характеристики $q_k(x)$, $k \geqslant 0$, удовлетворяют уравнениям (12), (13).

Таким образом, показано, что существует решение $R(x,z)$ краевой задачи (7)–(9) в виде ряда с неотрицательными коэффициентами $q_k(x)$, $k \geqslant 0$, т. е. показано, что (10) является необходимым условием существования стационарного режима в СМО. Теорема доказана.

**Литература**


1. *Клейнрок, Л.* Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.

2. *Климов, Г. П.* Теория массового обслуживания / Г. П. Климов. – М. : Изд-во Московского университета, 2011. – 312 с.

3. *Головко, Н. И.* Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 2, № 34. – С. 50–64.

4. *Баруча-Рид, А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения / Пер. с англ. В. В. Калашникова; ред. А. Н. Ширяева. – М. : Наука, 1969. – 511 с.

5. *Прокопьева, Д. Б.* Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головко // Известия Калининградского гос. технич. ун-та. – 2017. – № 46. – С. 184–193.

УДК 517.9

# ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ К КЛАССИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ И ДРОБНЫМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

**С. М. Ситник**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет*

**Аннотация.** В статье рассмотрены результаты, которые недавно были доказаны и опубликованы по теории операторов преобразования. Среди этих результатов содержатся такие приложения как приложения к теории потенциала, сингулярным дифференциальным уравнениям, обратным задачам.
**Ключевые слова:** Оператор преобразования, оператор Бесселя, дробные интегралы Римана — Лиувилля.

В этом тексте изложены некоторые современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям. Рассматриваются определённые типы дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, основное внимание уделяется уравнениям с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2} u(x) + \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx} u(x). \tag{1}$$

Такие уравнения относятся к сингулярным или вырождающимся, к ним также сводятся многие уравнения смешанного типа. Опишем ряд недавних публикаций и материалов по тематике операторов преобразования и их приложений подробнее.

Как указано в [1–4], теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010), ученика Ивана Александровича Киприянова. К числу важных результатов В. В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования. Им также совместно с И. А. Киприяновым были введены и изучены уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые определялись через преобразование Ханкеля при помощи операторов преобразования Сонина и Пуассона. Особо следует выделить введённый В. В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введённого им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана — Лиувилля, В. В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С. Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В. В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свёртки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие «K-следом» в честь В. В. Катрахова, который ввёл это условие и подробно изучил краевые задачи с ним. В терминах «K-следа» получается полная характеризация решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В. В. Катраховым была доказана корректность постановки, включая существование и единственность решения, априорные оценки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области. Существенные результаты были также получены В. В. Катраховым в такой классической области, как теория операторов дробного интегродифференцирования Римана — Лиувилля. Им получены новые формулы композиций и оценки весовых норм для этого класса операторов.

Монография В. В. Катрахова и С. М. Ситника [1] составлена из результатов, вошедших в докторские диссертации В. В. Катрахова (1989 г.) и С. М. Ситника (2016 г.). Результаты второго автора (ученика) развивают результаты первого автора (учителя). Надеюсь, что эта книга будет способствовать более широкой известности результатов В. В. Катрахова, которые представляют существенный интерес для теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений, а также их разработке в русле идей и методов теории операторов преобразования. Кроме того, в книге отражён вклад Ивана Александровича Киприянова и созданной им Воронежской математической школы по сингулярным и вырождающимся дифференциальным уравнениям в развитие теории дифференциальных уравнений и теории функций.

В монографии Э. Л. Шишкиной [2] развивается теория гиперболических уравнений в частных производных с операторами Бесселя, а также конструируются и обращаются гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом. В первой главе приведены необходимые обозначения, определения, вспомогательные факты и утверждения. Во второй главе изучены некоторые весовые обобщенные функции, связанные с квадратичной формой, которые в дальнейшем применяются для построения дробных степеней гиперболических операторов, а также решений гиперболических уравнений с операторами Бесселя. Объектом исследования третьей главы являются гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом, реализующие отрицательные вещественные степени сингулярного волнового оператора, т. е. волнового оператора, где вместо вторых производных действует оператор Бесселя. Исследуются вопросы ограниченности такого оператора, его свойства, а также строится обратный к нему оператор. Кроме того, в этой главе изучен гиперболический B-потенциал Рисса. В четвертой главе рассмотрены различные методы решения общего уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. Получены решения задач Коши для однородного и неоднородного уравнений указанного типа. В заключении приведены сведения об общих методах решения задач для произвольных сингулярных операторов.

Дополним, что монографии [1] и [2] переведены на английский язык и вскоре переводы будут опубликованы издательством Шпрингер.

Следует подчеркнуть, что, к сожалению, на русском языке долгое время отсутствовали специализированные монографии, посвященные общей теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Монография С. М. Ситника и Э. Л. Шишкиной [3] в определённой степени заполняет этот пробел. Изложим структуру и основное содержание монографии [3]. Отметим, что существенная часть результатов, изложенных в [3], получена авторами, часть из них публикуется там впервые.

Текст монографии разделён на три части. В первой части «Общая теория операторов преобразования» рассматриваются определение операторов преобразования, основные исторические сведения, необходимые факты из теории специальных функций, функциональных пространств и интегральных преобразований. Отметим более подробное изложение свойств преобразования Меллина, включая теорему Слейтер а также обзор основных конструкций дробного интегродифференцирования. Далее излагаются результаты о различных классах операторов преобразования: Сонина — Пуассона, Бушмана — Эрдейи, Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова. Изложены основные свойства операторов обобщённого сдвига и весовых сферических средних. Во второй части «Применение метода операторов преобразования к решению уравнений в частных производных» рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи, Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах, лемме Копсона, задаче Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу, установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений, включая задачу А. В. Бицадзе — В. И. Пашковского для уравнения Максвелла — Эйнштейна, приложения к решению некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Здесь же рассмотрен важный вопрос об эквивалентности норм пространств И. А. Киприянова и весовых пространств С. Л. Соболева, а также изучено общее уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу, включая ранее не рассмотренные в литературе случаи особых параметров и начальных условий. Также изложена теория явных представлений для дробных степеней оператора Бесселя, кратко намечены их приложения к некоторым интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка. В третьей части «Методы построения ОП для оператора Бесселя и родственных операторов» излагается принадлежащий С. М. Ситнику композиционный метод построения операторов преобразования (ITCM — Integral Transforms Composition Method). Этим методом получаются по единой схеме все известные ранее в явном виде операторы преобразования, а также построены многочисленные новые классы операторов преобразования. Рассмотрены приложения композиционного метода к решению некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений. В этой части также изложены результаты для дифференциальных операторов Бесселя, возмущённых потенциалами достаточно общего вида.

В опубликованной в 2020 г. издательством Elsevier в основанной Р. Беллманом престижной серии *Mathematics in Science and Engineering* монографии Э. Л. Шишкиной и С. М. Ситника [4] изложены на английском языке для широкой международной профессиональной аудитории основные вопросы современной теории операторов преобразования и их приложений. Существенную часть этой книги занимают результаты Э. Л. Шишкиной по теории обобщённых потенциалов и их приложениям к дифференциальным уравнениям с особенностями.

Также в 2020 г. в издательстве Springer в серии *Trends in Mathematics* был опубликован сборник работ [5] под редакцией В. В. Кравченко и С. М. Ситника по современной теории операторов преобразования. В сборник вошли работы известных математиков Amin Boumenir, Vu Kim Tuan (USA), Djurdje Cvijovic (Serbia), Tibor K. Pogany (Croatia), Sh. T. Karimov (Uzbekistan), D. B. Karp (Israel, Vietnam, Russia), E. L. Shishkina (Poland), О. В. Скоромник, Л.Е. Хвощинской (Белоруссия), Ahmed Fitouhi (Tunisia), Yu. F. Luchko (Germany), В. В. Кравченко (Мексика), а также С. М. Ситника, Л. Бритвиной, Е. Прилепкиной, С.П Хэкало, В. В. Мещерекова, К. О. Политова, А. А. Ларина, А. Б. Муравника, В. Б. Васильева, С. Бутерина, А. В. Глушака, О. Яремко, В. А. Юрко, В. Е. Фёдорова, М. М. Маламуда, А. В. Псху, В. Ф. Молчанова, М. В. Плехановой, И. П. Половинкина, М. В. Шитиковой, Н. В. Зайцевой (Россия). В этом сборнике отражён весь спектр задач современной теории операторов преобразования и их многочисленных приложений.

В 2020 г. в издательстве Springer опубликована монография В.В. Кравченко [6]. В этой монографии изложены новые подходы к решению прямых и обратных спектральных задач для уравнения Штурма--Лиувилля на полуоси и оси. На основе предложенных методов разработаны эффективные численные методы для решения этих задач, которые во многом превосходят методы, известные ранее. Методы решения одномерных обратных задач и обратных задач рассеяния традиционно тесно связаны с теорией операторов преобразования и во многом основаны на результатах этой теории.

Отметим также организованную В. В. Кравченко в октябре 2019 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования [7], получившую сладко звучащее по-русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков В. В. Кравченко, В. С. Рабинович, С. Грудский, Э. Л. Шишкина, С. Торба, М. Портер, С. М. Ситник, и ряд других.

Таким образом, теория операторов преобразования является живой и активной ветвью как теоретической математики, так и их многочисленных приложений. Операторам преобразования посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся ведущими мировыми издательствами монографий и сборников.

**Литература**


1. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2018. – Т. 64, № 2. – С. 211–426.

2. *Шишкина Э. Л.* Общее уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу и гиперболические B-потенциалы // Современная математика. Фундаментальные направления. Уравнения в частных производных. – 2019. – Т. 65, № 2. – С. 157–338.

3. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. – М. : Физматлит, 2019. – 246 с.

4. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press. – 2020. 592 p.

5. *Ed. V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik.* Transmutation Operators and Applications. In the Series: Trends in Mathematics. Springer, Birkhauser. – 2020. – XVII. – 686 p.

6. *Kravchenko V. V.* Forward and Inverse Sturm — Liouville Problems: A Method of Solution. In the Series: Frontiers in Mathematics. – Springer, 2020. – 155 p.

7. International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics — I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. – 2019.

УДК 517.98

# О РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

**И. И. Струкова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье изучаются однородные пространства функций, заданных на локально компактной абелевой группе, со значениями в комплексном банаховом пространстве. В частности, однородными являются пространства Степанова, Лебега, функций ограниченной вариации и непрерывных функций, а также многие их подпространства. Статья посвящена исследованию почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств. Для таких функций дается четыре различных определения. Первое определение приводится в терминах фактор-пространства. Второе, являющееся аналогом определения Г. Бора почти периодической функции, основывается на понятии $\varepsilon$-периода. Третье определение основано на аппроксимационной теореме. Четвертое соответствует критерию С. Бохнера почти периодичности функций. С использованием результатов теории почти периодических векторов в банаховых модулях доказывается эквивалентность всех четырех определений.

**Ключевые слова:** почти периодическая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, локально компактная абелева группа, однородное пространство, банахов модуль.

## 1. Однородные пространства функций

Символом $X$ обозначим комплексное банахово пространство, $End\, X$ — банахову алгебру линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $X$. Символом $L^1_{loc}(G,X)$ обозначим линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на локально компактной абелевой группе $G$ (классов эквивалентности) функций со значениями в $X$.

Банахово пространство $\mathcal{F}(G,X)$ функций, определенных на группе $G$, со значениями в $X$, назовем *однородным*, если выполняются следующие условия:

(a) пространство $\mathcal{F}(G,X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(G,X)$ (см. пример 1), причем вложение $\mathcal{F}(G,X)\subset S^1(G,X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

(b) в пространстве $\mathcal{F}(G,X)$ определена и ограничена сильно непрерывная группа $S(g)$, $g\in G$, операторов сдвигов функций, задаваемая формулой

$$(S(t)x)(g)=x(g+t),\ g,t\in G,\ x\in\mathcal{F}(G,X); \tag{1}$$

(c) свертка

$$(f*x)(g)=\int_G f(\tau)x(g-\tau)d\tau=\int_G f(\tau)(S(-\tau)x)(g)d\tau,\ g\in G, \tag{2}$$

двух любых функций $f\in L^1(G)$ и $x\in\mathcal{F}(G,X)$ принадлежит $\mathcal{F}(G,X)$ и выполнено неравенство $\|f*x\|\le C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C\ge 1$ (как правило, $C=1$);

(d) для любой функции $x\in\mathcal{F}(G,X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi\in C_b(G)$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi$ функция вида $\varphi x$ принадлежит пространству $\mathcal{F}(G,X)$, причем справедлива оценка $\|\varphi x\|\le\|\varphi\|\|x\|$ и отображение $t\mapsto\varphi S(t)x:G\to\mathcal{F}(G,X)$ непрерывно.

Для случая $G=\mathbb{R}$ однородные пространства функций изучались в работах [1, 2].

**Пример 1.** Указанные далее банаховы пространства функций являются однородными. Все они являются линейными подпространствами из $L^1_{loc}(G,X)$.

1. Пространства $L^p = L^p(G,X)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ (классов) функций. Нормы в данных пространствах имеют вид $\|x\|_p = \left(\int\limits_G \|x(g)\|_X^p dg\right)^{1/p}$, $p \in [1,\infty)$.

2. Пространство $L^\infty = L^\infty(G,X)$ существенно ограниченных (классов) функций с нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{g\in G} \|x(g)\|_X$.

3. Пространства Степанова $S^p = S^p(G,X)$, $p \in [1,\infty)$ (см. [3, 4]), состоящие из функций $x \in L^1_{loc}(G,X)$, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p} = \sup\limits_{g\in G}\left(\int\limits_V \|x(g+s)\|_X^p ds\right)^{1/p}$, $p \in [1,\infty)$, где $V$ — некоторая компактная окрестность нуля группы $G$. Следует заметить, что пространство $S^p(G,X)$ не зависит от выбора $V$ и соответствующие нормы эквивалентны. Кроме того, для компактной группы $G$ справедливо равенство $S^p(G,X) = L^p(G,X)$.

4. Пространство $C_b = C_b\left(G,X\right)$ ограниченных непрерывных функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{g\in G}\|x(g)\|_X$, $x \in C_b$ ($C_b\left(G,X\right)$ — замкнутое подпространство из $L^\infty(G,X)$).

5. Подпространство $C_{b,u} = C_{b,u}(G,X) \subset C_b$ равномерно непрерывных функций из $C_b$.

6. Подпространство $C_0 = C_0(G,X) \subset C_{b,u}$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций.

7. Пространства $C^k = C^k(G,X)$, $k \in \mathbb{N}$, функций, $k$ раз непрерывно дифференцируемых, с ограниченной $k$-й производной и нормой $\|x\|_{(k)} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty$.

В дальнейшем символом $\mathcal{F}(G,X)$ будем обозначать однородное пространство. Символом $\mathcal{F}_c(G,X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(G,X)$ вида $\mathcal{F}_c(G,X) = \{x \in \mathcal{F}(G,X):$ функция $g \mapsto S(g)x : G \to \mathcal{F}(G,X)$ непрерывна$\}$. Через $\mathcal{F}_0(G,X)$ будет обозначаться наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(G,X)$, содержащее все функции $\varphi x$, $x \in \mathcal{F}(G,X)$, $\varphi \in C_b(G,X)$, где функция $\varphi$ бесконечно дифференцируема и supp $\varphi$ — компакт.

Непосредственно из определения однородного пространства следует, что любое однородное пространство является банаховым $L^1(G)$-модулем, в котором действует группа $S$ сдвигов вида (1) и модульная структура задается сверткой функций (2). Таким образом, для исследования этих пространств можно применить спектральную теорию банаховых модулей над алгеброй $L^1(G)$ (см. [5, 6]). В частности, из этого следует, что пространства $\mathcal{F}_c(G,X)$ совпадают с пространствами $S$-непрерывных векторов (см. [1]).

## 2. Почти периодические векторы в банаховых модулях

Здесь приводится ряд используемых далее понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей (см. [3–6]), над банаховой алгеброй $L^1(G)$ измеримых суммируемых на локально компактной абелевой группе $G$ функций. Умножение в алгебре $L^1(G)$ осуществляется с помощью операции свертки $(f_1 * f_2)(g) = \int\limits_G f_1(g-s) f_2(s) ds$, $g \in G$, $f_1, f_2 \in L^1(G)$, и полагается $\|f\|_1 = \int\limits_G f(g)dg$ для $f \in L^1(G)$.

Пусть $T : G \to End\,\mathcal{Y}$ — сильно непрерывное изометрическое представление группы $G$ операторами из банаховой алгебры $End\,\mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ — комплексное банахово пространство. Тогда формулой

$$fx = \int\limits_G f(g)T(-g)x dg, \quad f \in L^1(G), \quad x \in \mathcal{Y}, \tag{3}$$

задается на $\mathcal{Y}$ структура банахова $L^1(G)$-модуля. Учитывая формулу (3), далее модуль $\mathcal{Y}$ будет иногда обозначаться через $(\mathcal{Y}, T)$.

Пусть $\hat{G}$ — двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы $G$. Далее через $\hat{f}:\hat{G}\to\mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье функции $f\in L^1(G):\hat{f}(\gamma)=\int\limits_G f(g)\gamma(-g)dg$, $\gamma\in\hat{G}$. Если $G=\mathbb{Z}$, то $\hat{G}$ канонически отождествляется с $\mathbb{T}$ и преобразование Фурье последовательности (функции) $f\in L^1(\mathbb{Z})=\ell^1(\mathbb{Z})$ имеет вид: $\hat{f}(\gamma)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\gamma^{-n}$, $\gamma\in\mathbb{T}$.

*Спектром Бёрлинга вектора* $x$ из банахова $L^1(G)$-модуля $(\mathcal{Y},T)$ называется множество $\Lambda(x)=\Lambda(x,T)$ характеров из группы $\hat{G}$, являющееся дополнением к множеству

$$\{\gamma\in\hat{G}: \text{существует } f\in L^1(G) \text{ такая, что } \hat{f}(\gamma)\neq 0 \text{ и } fx=0\},$$

или, что эквивалентно,

$$\Lambda(x)=\{\gamma\in\hat{G}: fx\neq 0 \text{ для любой } f\in L^1(G) \text{ с } \hat{f}(\gamma)\neq 0\}.$$

Имеют место следующие свойства спектра векторов из банахова $L^1(G)$-модуля $(\mathcal{Y},T)$ (см. [3, 4]).

**Лемма 1.** *Для любых $f\in L^1(G)$ и $x\in(\mathcal{Y},T)$ справедливы свойства :*

*1) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\hat{G}$, причем $\Lambda(x)=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $x=0$;*

*2) $\Lambda(fx)\subset(supp\ \hat{f})\cap\Lambda(x)$;*

*3) $\Lambda(Bx)\subset\Lambda(x)$ для любого оператора $B\in End\ \mathcal{Y}$, перестановочного с операторами $T(g)$, $g\in G$;*

*4) $fx=0$, если $(supp\ \hat{f})\cap\Lambda(x)=\varnothing$ и $fx=x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f}=1$ в некоторой его окрестности;*

*5) $\Lambda(x)=\{\gamma_0\}$ — одноточечное множество из $\hat{G}$ тогда и только тогда, когда вектор $x$ удовлетворяет равенствам $T(g)x=\gamma_0(g)x$, $g\in G$, и $x\neq 0$ (является собственным вектором представления $T$, отвечающим характеру $\gamma_0$).*

Множество $\Omega\subset G$ называется относительно плотным на $G$, если существует компактная окрестность $V=V_\varepsilon$ нуля группы $G$ такая, что $(g+V_\varepsilon)\cap\Omega\neq\varnothing$ для любого $g\in G$.

В следующем определении почти периодических векторов и их свойствах мы следуем [5].

Вектор $x_0$ из банахова $L^1(G)$-модуля $(\mathcal{Y},T)$ называется *почти периодическим* (относительно представления $T$), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) для любого $\varepsilon>0$ множество $\Omega_{\varepsilon,x_0}=\{\omega\in G:\|T(\omega)x_0-x_0\|<\varepsilon\}$ *$\varepsilon$-периодов* вектора $x_0$ относительно плотно на $G$;

2) орбита $\{T(g)x_0, g\in G\}$ вектора $x_0$ предкомпактна в $\mathcal{Y}$;

3) для любого $\varepsilon>0$ существуют характеры $\gamma_1,\dots,\gamma_N$ и соответствующие им собственные векторы $x_1,\dots,x_N$ представления $T$ (т. е. $T(g)x_k=x_k\gamma_k$, $g\in G$, $1\le k\le N$) такие, что $\left\|x_0-\sum\limits_{k=1}^{N}x_k\right\|<\varepsilon$;

4) функция $t\mapsto\varphi(g)=T(g)x_0$, $g\in G$, — непрерывная почти периодическая функция, т. е. $\varphi\in AP(G,\mathcal{Y})$ (см. [5]).

Множество $AP\mathcal{Y}=AP(\mathcal{Y},T)$ почти периодических векторов из $\mathcal{Y}$ образует замкнутый подмодуль из $\mathcal{Y}$.

## 3. Почти периодические на бесконечности функции

Пусть $\mathcal{F}(G,X)$ — однородное пространство определенных на группе $G$ функций со значениями в банаховом пространстве $X$. В нем действует группа сдвигов функций

$$S:G\to End\ \mathcal{F}(G,X),\quad (S(g)x)(s)=x(s+g),\quad s,g\in G, x\in\mathcal{F}(G,X).$$

Функция $x\in\mathcal{F}_c(G,X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если для любого $g\in G$ функция $S(g)x-x$ принадлежит $\mathcal{F}_0(G,X)$.

Множество функций из $\mathcal{F}(G,X)$, медленно меняющихся на бесконечности, обозначим символом $\mathcal{F}_{sl,\infty}(G,X)$. Отметим, что оно образует замкнутое подпространство банахова пространства $\mathcal{F}(G,X)$, инвариантное относительно группы сдвигов $S$.

Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(G,X)/\mathcal{F}_0(G,X)$. В $\mathcal{Y}$ действует сильно непрерывная группа изометрий

$$T(g)\tilde{x} = \widetilde{S(g)x} = S(g)x + \mathcal{F}_0(G,X), \quad g \in G, x \in \mathcal{F}(G,X).$$

Следовательно, фактор-пространство $\mathcal{Y}$ наделяется структурой банахова $L^1(G)$-модуля по представлению $T: G \to End\ \mathcal{Y}$ (см. формулу (3)).

**Определение 1.** Функция $x \in \mathcal{F}_c(G,X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если класс $\tilde{x}$ принадлежит $AP(\mathcal{Y},T)$, где $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(G,X)/\mathcal{F}_0(G,X)$.

Множество функций из $\mathcal{F}(G,X)$, почти периодических на бесконечности, обозначаемое символом $AP_\infty\mathcal{F}(G,X)$, образует замкнутое подпространство банахова пространства $\mathcal{F}(G,X)$, инвариантное относительно группы сдвигов $S$. Отметим, что для некоторых однородных пространств подпространство $AP_\infty\mathcal{F}(G,X)$ может состоять только из нулевой функции (например, для $L^p(\mathbb{R},X)$). Почти периодические на бесконечности функции из $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ рассматривались в [1, 2]. Периодические на бесконечности функции из однородных пространств изучались в работах [1, 7], равномерно непрерывные ограниченные Периодические на бесконечности функции — в работах [8, 9].

Определение почти периодической на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}_+,X)$) было дано в [3] для функций из $C_b(\mathbb{R}_+,X)$ и использовалось для описания асимптотического поведения ограниченных полугрупп операторов класса $C_0$. Следуя Г. Бору, можно дать другое (эквивалентное) определение почти периодической на бесконечности функции, используя понятие $\varepsilon$-периода (на бесконечности).

Пусть $\varepsilon > 0$. Элемент $g_0$ из группы $G$ называется *$\varepsilon$-периодом на бесконечности функции* $x \in \mathcal{F}(G,X)$, если существует компакт $K = K_\varepsilon \subset G$ такой, что $\sup\limits_{g \in G\setminus K} \|x(g+g_0) - x(g)\| < \varepsilon$. Множество $\varepsilon$-периодов на бесконечности функции $x$ обозначим символом $\Omega_\infty(\varepsilon,x)$.

**Определение 2.** Функцию $x \in \mathcal{F}(G,X)$ назовем *почти периодической на бесконечности*, если множество $\Omega_\infty(\varepsilon,x)$ относительно плотно на $G$.

Приведем еще два определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства и затем докажем эквивалентность всех четырех введенных определений.

**Определение 3.** Функция $x$ из однородного пространства $\mathcal{F}(G,X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $x_1,\ldots,x_n \in \mathcal{F}(G,X)$, представимые в виде $x_k = x_k^0\gamma_k$, $1 \le k \le n$, где $\gamma_k$ — характер из группы $\hat{G}$ и функции $x_k^0 \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(G,X)$ такие, что $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right\| < \varepsilon$.

Множество функций $M \subset \mathcal{F}(G,X)$ назовем *предкомпактным на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $x_1,\ldots,x_n$ ($\varepsilon$-сеть на бесконечности) из $M$ таких, что для любой функции $x \in M$ найдутся функции $x_\varepsilon \in \mathcal{F}_0(G,X)$ и $x_k$ $(1 \le k \le n)$ такие, что

$$\|x - x_k - x_0\| < \varepsilon.$$

**Определение 4.** Функция $x \in \mathcal{F}(G,X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если множество ее сдвигов $M = \{S(g)x, g \in G\}$ предкомпактно на бесконечности.

Отметим, что функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k\gamma_k,\ x_1,\ldots,x_N \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(G,X),\ \gamma_1,\ldots,\gamma_N \in \hat{G},$$

(обобщенные тригонометрические полиномы) являются почти периодическими на бесконечности в смысле определения 4.

Для $\mathcal{F}_c(G,X) = C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ определение 4 соответствует критерию С. Бохнера (см. [10]) почти периодичности функций, определения 3 и 1 почти периодических на бесконечности функций даны в статьях [3, 11, 12]. При $\mathcal{F}_c(G,X) = C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ пространство $AP_\infty\mathcal{F}(G,X)$ обозначается символом $AP_\infty(\mathbb{R},X)$.

**Теорема 1.** *Все четыре определения почти периодической на бесконечности функции (определения 1, 2, 3, 4) эквивалентны. Множество $AP_\infty\mathcal{F}(G,X)$ почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(G,X)$ образует банахово пространство.*

**Доказательство.** Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = \mathcal{F}(G,X)/\mathcal{F}_0(G,X)$ и определенную выше группу изометрий $\tilde{S}:\mathbb{R}\to End\,\mathcal{X}$. Для представления $T=\tilde{S}$ определение 3 соответствует свойству 3) из определения почти периодического вектора. Поскольку все свойства из определения 1 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 2, 4 и 3 соответственно.

Пусть $x\in\mathcal{F}(G,X)$ и $\tilde{x}$ — класс эквивалентности в $\mathcal{X}$, построенный по функции $x$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ множество $\Omega_\infty(x;\mathcal{F}_0;\varepsilon)\cup(-\Omega_\infty(x;\mathcal{F}_0;\varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\tilde{x},\varepsilon)$ $\varepsilon$-периодов класса $\tilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 4 и свойства 2) определения почти периодического вектора непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X}$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 3 и свойства 4) из определения почти периодического вектора. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\tilde{y})$ класса эквивалентности $\tilde{y}\in\mathcal{X}$, $\tilde{y}=y+\mathcal{F}_0$, является одноточечным множеством $(\Lambda(\tilde{y})=\{\lambda_0\})$ тогда и только тогда, когда функция $y\in\mathcal{F}(G,X)$ представима в виде $y(t)=y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t\in G$, где $y_0\in(\mathcal{F}_0)_{sl,\infty}$.

Если $\Lambda(\tilde{y})=\{\lambda_0\}$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y}=e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$ для любого $t\in G$ (см. свойство 5) из леммы 1). Следовательно, $\Lambda(\tilde{y}_0)=\{0\}$, где $y_0(s)=y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s\in G$, и поэтому $\tilde{S}(t)\setminus\tilde{y}_0=\tilde{y}_0$ для любого $t\in G$. Таким образом, $S(t)y_0-y_0\in\mathcal{F}_0(G,X)$, $t\in G$, т. е. $y_0\in(\mathcal{F}_0)_{sl,\infty}$.

И обратно: если $y=y_0\gamma_0$, где $y_0\in\mathcal{F}_0(G,X)$, $\gamma_0$ — характер из $\hat{G}$, то $\tilde{S}(g)\tilde{y}=\gamma_0(g)\,\tilde{y}$, и поэтому в силу свойства 5) из леммы 1 получим, что $\Lambda(\tilde{y})=\{\gamma_0\}$.


## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-01-00732 А.


## Литература


1. Гармонический анализ периодических и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств и гармоничных распределений / А. Г. Баскаков, В. Е. Струков, И. И. Струкова // Матем. сборник. – 2019. – Т. 210, № 10. – С. 37-90. DOI: 10.1070/SM9147.

2. *Струков, В. Е.* О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства / В. Е. Струков, И. И. Струкова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2018. – Т. 50, № 3. – С. 254–264.

3. *Баскаков, А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. – 2013. – Т. 68. – № 1. – С. 77–128. DOI: 10.4213/rm9505.

4. *Баскаков, А. Г.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. – 2005. – Т. 69. – № 3. – С. 3–54. DOI: 10.4213/im639.

5. *Баскаков, А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // СМФН. – 2004. – Т. 9.– С. 3–151. DOI: 10.1007\%2Fs10958-006-0286-4.

6. *Хьюитт, Э.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. / Э. Хьюитт, К.А. Росс. – М. : Мир, 1975. – 899 с.

7. *Струкова, И. И.* О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях / И. И. Струкова // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 4. – С. 195–205.

8. *Baskakov, A.* Harmonic analysis of functions periodic at infinity / A. Baskakov, I. Strukova // Eurasian Math. J. – 2016. – V. 7, No. 4. – P. 9–29.

9. *Струкова, И. И.* О теореме Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57. – № 1. – С. 186–198.

10. *Левитан, Б. М.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 205 с.

11. *Баскаков, А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 174–190.

12. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, И. И. Струкова, И. А. Тришина // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59, № 2. – С. 293–308.

УДК 517.956.45

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ТИПА ФЛОРИНА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

**Р. Н. Тураев**

*Чирчикский государственный педагогический университет*

**Аннотация.** В настоящей работе изучается математические модели фильтрации для квазилинейного параболического уравнения вида задач со свободной границей типа Флорина с нелинейным граничным условием. Установлены априорные оценки Шаудерского типа. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи при помощи метода неподвижной точки Шаудера.
**Ключевые слова:** задача Флорина, математические модели фильтрации, априорные оценки Шаудерского типа, принцип экстремума, нелинейная граничная условия, эквивалентность задач, существование и единственность решения.

## Введение

На сегодняшней день в современной науке наблюдается повышенный интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Здесь можно указать задачи гидро- и газодинамики, физики плазмы, теории химических реакций и др [1]. При этом многие из указанных задач для параболических уравнений приводятся к краевым задачам со свободной границей. Задачи со свободной границей возникают при математическом описании тепловых процессов, связанных с изменением агрегатного состояния вещества, движения жидкости в пористой среде. Связи с этим они находят широкое применение в металлургии, при изучении процессов сварки, электронной и плазменной обработки материалов, в теории электрических контактов, в геотермии, мерзлотоведении, теории фильтрации, математической биологии, экологии, биомедицины и т. д. [2, 3].

В основном рассматривается три типа задач со свободными границами: Стефана, Флорина и Маскета-Веригина. Одной из представителей таких задач является задача Флорина (условие для свободной границы задается в неявной для этой границы форме). Небольшую историю имеет задача Флорина, впервые она возникла в гидростроительстве при устройстве противофильтрационных завес, когда в породу основания и берегов примыканий плотин нагнетаются глинистые растворы [4, 5].

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с нелинейным граничным условием.

## Постановка задачи

Требуется найти на некотором отрезке $0 \le t \le T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \le N$, $s(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(t,x,u)u_{xx}(t,x), \ (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0)=f(t,u(t,0)),\quad 0\le t\le T,\tag{3}$$

$$u(t,s(t))=0,\quad 0\le t\le T,\tag{4}$$

$$u_x(t,s(t))=\psi(t),\quad 0\le t\le T,\tag{5}$$

где $s(t)$ — свободная (неизвестная) граница, которая определяется вместе с функциям $u(t,x)$, $a(t,x,u)$ — коэффициент фильтрации.

Задача (1)–(5) обобщает ранее рассмотренные задачи возникающие при изучении фильтрации с учетом влияния связанной воды. Именно вопросы существования и единственности классического решения однофазной одномерной задачи Флорина изучались в работах [6–9], когда $a(t,x,u)=1$ и условия (3) задано линейными. Асимптотическое поведение решения при $t\to\infty$ рассматривается в работе [10].

Всюду в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. $f(t,\xi)$ определена и непрерывна при $t\ge 0, |\xi|<\infty$, она ограничена вместе с производными в замкнутом множестве своих аргументов.

2. Функции $a(t,x,u)$, $a'_u(t,x,u)$, $a''_{uu}(t,x,u)$, $a''_{u_x}(t,x,u)$ и $a''_{xx}(t,x,u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(t,x,u)\ge a_0>0$.

3. $\varphi(x)$ трижды, $\psi(t)$ один раз непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi'''(x)$, $\psi'(t)$ удовлетворяют условию Гельдера.

4. Выполнены условия согласования в угловых точках (в т. ч. рассматриваемых в вспомогательных задачах), в частности

$$\varphi'(0)=f(0,\varphi(0)),\quad \varphi(s_0)=0,\quad \varphi'(s_0)=\psi(0)=\psi_0,$$

$$f'_t(0,\varphi(0))=a(0,0,\varphi(0))\varphi'''(0)+a'_u(0,0,\varphi(0))\varphi'(0)\cdot\varphi''(0)+a'_x(0,0,\varphi(0))\varphi''(0)-$$

$$-f'_u(0,\varphi(0))\cdot a(0,0,\varphi(0))\cdot\varphi''(0);$$

$$\psi(0)=a(0,s_0,\varphi(s_0))\varphi'''(s_0)+a'_u(0,s_0,\varphi(s_0))\varphi'(s_0)\cdot\varphi''(s_0)+a_x(0,s_0,\varphi(s_0))\cdot\varphi'(s_0).$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются априорные оценки для решений $u(t,x)$.

**Лемма 1.** *Пусть $\varphi(x)\le 0$ и для любого $u(t,x)$ справедливо неравенство $f(t,u)\ge\psi(t)\ge\psi_0>0$, $\dfrac{f(t,u)-f(t,0)}{u}\ge f_0=\text{const}>0$. Тогда для решения задачи (1)–(5) в области $\bar{D}$ справедлива оценка*

$$-M_1\le u(t,x)\le 0,\tag{6}$$

*где* $M_1=\max\left\{\dfrac{1}{f_0}\left[\max\limits_{0\le t\le T}|f(t,0)|,\max\limits_{0\le x\le s_0}|\varphi(x)|\right]\right\}.$

Далее, устанавливаются некоторые априорные оценки для решений и их производные. Чтобы оценить $u_x(t,x)$, а также исследовать характер и гладкость свободной границы $s(t)$, мы перейдем к задаче типа Стефана. Для этого поставленную задачу (1)–(5) сведем к эквивалентной задаче (типа Стефана) для функций $s(t)$, $u_x(t,x)$.

Обозначим $u_x(t,x)=v(t,x)$. Тогда из задачи (1)–(5) получим следующую задачу

$$v_t(t,x)=a(t,x,u)v_{xx}(t,x)+a_{u'}(t,x,u)v(t,x)\cdot v_x(t,x)+a'_x(t,x,u)v_x(t,x),\quad (t,x)\in D,\tag{7}$$

$$v(0,x)=\varphi'(x),\quad 0\le x\le s_0,\tag{8}$$

$$v(t,0)=f(t,u(t,0)),\quad 0\le t\le T,\tag{9}$$

$$v(t,s(t))=\psi(t),\quad 0\le t\le T,\tag{10}$$

$$\psi(t)\cdot\dot{s}(t)=-a(t,s(t),0)v_x(t,s(t)),\quad 0\le t\le T.\tag{11}$$

*Лемма 2. Пусть* $\varphi'(x) \geq \psi(t) \geq \psi_0 > 0$ *и для ограниченных* $u(t,x)$ *справедливо неравенство* $f(t,u) \geq \psi(t) \geq \psi(0)$, *а также выполнены условии леммы 1. Тогда справедлива следующая оценка*

$$0 < \psi_0 \leq \psi(t) \leq v(t,x) = u_x(t,x) \leq M_2, \quad (t,x) \in \bar{D}, \tag{12}$$

*где* $M_2 = \max\left\{\max_x |\varphi'(x)|, \max_t |\psi(t)|, \max_t |f(t,u(t,0))|\right\}$.

Теперь изучается поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени.

**Теорема 1.** *Пусть* $\psi'(t) \geq 0$, $a'_u(t,x,u) \geq 0$, $a'_x(t,x,u) \geq 0$ *и выполнены условии леммы 2. Тогда существует такая постоянная* $N$, *зависящая от заданных функций, что справедливы неравенства*

$$0 < \dot{s}(t) \leq N, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{13}$$

*где* $N = \max\left\{\max_{0\leq x\leq s_0} \frac{|\varphi'(x) - f_0|}{s_0 - x}, \max_{0\leq t\leq T} \frac{|\psi(t) - f(t)|}{s_0}\right\}$.

Далее устанавливаются априорные оценки $|v_x|$, $|v|_{1+\gamma}^D$ и $|v|_{2+\gamma}^D$ в норм Гельдера. На основе установленных оценок доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученных и первоначальных задач методом неподвижной точки Шаудера [12].

## Литература


1. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. – М. : Едиториал УРСС, 2003.– 784 с.

2. *Fasano A.* Mathematical Models of Some Diffusive Processes with Free Boundaries. MAT - Serie A. – 2004. – 8. – P. 11–19.

3. *Murray J. D.* Mathematical Biology: Spatial Models and Biomedical Applications. – New York: Springer-Verlag, 2004, 811 p.

4. *Takhirov J., Turaev R.* The free boundary problem without initial condition // J. Math. Sci. – 2012. – 187, No. 1. – P. 86–100.

5. *Флорин В. А.* Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористой с учетом влияния связанной воды // Изв. АН СССР. – 1951, ОТН, №11. – С. 1625–1649.

6. *Вентцель Т. Д.* Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 131, № 5. С. 1000–1003.

7. *Нгуен Дин Чи* Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения // Вестник МГУ. Сер 1. Мат.Мех. – 1966. – № 2. – С. 40–54.

8. *Нгуен Дин Чи* Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения // Вестник МГУ. – 1966. № 5. – С. 51–62.

9. *Syons D. M., Martin R. N.* A moving boundary problem modeling diffusion with nonlinear absorption //J.Differ.Equat. – 1984. – 51, No.2. – P. 267–294.

10. *Бочарова И. В.* Об асимптотике решений одной задачи со свободной границей для уравнения теплопроводности.// Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 143, № 2. – С. 259–261.

11. *Кружков С. Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Труды Моск. Матем. общ.ва. – 1967. – Т. 16. – С. 329–346.

12. *Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н.* Задача с нелокальным условием на свободной границе // Укр. Мат. Журнал. – 2012. – Т. 64, № 1. – С. 38–46.

УДК 517.956.227

# СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**А. К. Уринов, К. Т. Каримов**

*Ферганский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе, в областях состоящей из частей шара, для уравнения эллиптического типа с двумя сингулярными коэффициентами сформулирована спектральная задача Дирихле — Неймана. Выделена область значений параметра $\lambda$, где нет собственных значений задачи, и найдены счетное число собственных значений задачи и построены собственные функции соответствующих найденным собственным значениям.
**Ключевые слова:** эллиптическое уравнение, сингулярный коэффициент, функция Гаусса, функция Аппеля, собственные значения, собственные функция.

## 1. Введение. Постановка задачи

Известно, что в последнее время интенсивно исследуются спектральные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных разного типа. Научно-исследовательские работы, проведенные по спектральной теории, условно можно разделить на два направления. Первое из них — это доказательство теорем о единственности решения краевых задач для уравнений со спектральным параметром, а второе — нахождение собственных значений и собственных функций рассматриваемых краевых задач. Научные исследования по второму направлению в настоящее время интенсивно продолжаются и развиваются. Нахождению собственных значений и собственных функций краевых задач для различных уравнений эллиптических и смешанных типов на плоскости посвящено много исследований, среди которых следует отметить работы [1, 2] и др. Задачи такого типа для трехмерных эллиптических и смешанных уравнений также хорошо изучены, например, в работах [3–5].

Данная работа является продолжением работы [3], где изучена спектральные задачи Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами.

Пусть $\Omega$ — трехмерная область, ограниченная частью сферы

$$S_0 = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y > 0,\ z > 0 \right\}$$

и двумя полукругами

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) : x^2 + z^2 < 1,\ y = 0,\ \ z > 0 \right\},\ S_2 = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 < 1,\ \ y > 0,\ \ z = 0 \right\}.$$

В области $\Omega$ рассмотрим уравнение эллиптического типа в виде

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x, y, z)$ — неизвестная функция, $\lambda$ — числовой параметр, а $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$.

**Задача $\mathbf{DN}_\lambda$**. Найти значения параметра $\lambda$ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению (1) в области $\Omega$ и краевому условию

$$u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \overline{S}_0, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in S_1, \tag{3}$$

$$\lim_{z \to 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in S_2. \tag{4}$$

## 2. Исследование задачи $\mathbf{DN}_\lambda$ при $\lambda \le 0$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Если* $\lambda \le 0$, *то задача* $\mathrm{DN}_\lambda$ *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. В области $\Omega$ справедливо тождество

$$y^{2\beta}z^{2\gamma}u\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\beta}{y}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z+\lambda u\right)=$$

$$=\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x\right)_x+\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y\right)_y+\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z\right)_z-y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\lambda u^2\right)=0.$$

Интегрируем это тождество по области $\Omega^\varepsilon_{\delta_1,\delta_2}\subset\Omega$, ограниченной при $z\ge\delta_1$, $y\ge\delta_2$ частью сферы

$$\tilde S_0=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=(1-\varepsilon)^2,\ z\ge\delta_1,\ y\ge\delta_2\right\}$$

и при $z=\delta_1$, $y=\delta_2$ кругами

$$\tilde S_1=\left\{(x,y,z):x^2+z^2<(1-\varepsilon)^2, y=\delta_2, z\ge\delta_1\right\},$$

$$\tilde S_2=\left\{(x,y,z):x^2+y^2<(1-\varepsilon)^2, y\ge\delta_2, z=\delta_1\right\},$$

где $\varepsilon$, $\delta_1$ и $\delta_2$ — достаточно малые положительные числа. В результате имеем

$$\iiint\limits_{pt\Omega^\varepsilon_{\delta_1,\delta_2}}\left[\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x\right)_x+\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y\right)_y+\left(y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z\right)_z\right]dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{pt\Omega^\varepsilon_{\delta_1,\delta_2}}\left[y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\lambda u^2\right)\right]dxdydz.$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского [6] к интегралу в левой стороне последнего равенства, получим

$$\iint\limits_{\tilde S_0}y^{2\beta}z^{2\gamma}u\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iint\limits_{\tilde S_1}\delta_2^{2\beta}z^{2\gamma}u(x,\delta_2,z)u_z(x,\delta_2,z)dxdz-$$

$$-\iint\limits_{\tilde S_2}y^{2\beta}\delta_1^{2\gamma}u(x,y,\delta_1)u_z(x,y,\delta_1)dxdy=\iiint\limits_{pt\Omega^\varepsilon_{\delta_1,\delta_2}}\left[y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\lambda u^2\right)\right]dxdydz, \qquad (5)$$

где $n$ — внешняя нормаль к $\tilde S_0$.

Отсюда, переходим к пределу при $\varepsilon$, $\delta_1$, $\delta_2\to 0$. Тогда $\Omega^\varepsilon_{\delta_1,\delta_2}\to\Omega$ и учитывая краевые условия (2)–(4), а также $u$, $u_x$, $u_y$, $u_z\in C(\Omega)$, получаем

$$\iiint\limits_{pt\Omega}\left[y^{2\beta}z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\lambda u^2\right)\right]dxdydz=0.$$

В силу $\lambda\le 0$, из этого равенства, следует, что $u_x\equiv u_y\equiv u_z\equiv 0$ в $\Omega$. Следовательно, $u(x,y,z)\equiv\mathrm{const}$, $(x,y,z)\in\Omega$. Так как $u\in C(\overline\Omega)$ и $u(x,y,z)\big|_{\overline S_0}=0$, то $u(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\overline\Omega$. Отсюда следует утверждение теоремы.

## 3. Исследование задачи $\mathbf{DN}_\lambda$ при $\lambda > 0$

В области $\Omega$ введем сферические координаты $(r,\theta,\varphi)$, связанные с декартовыми координатами $(x,y,z)$ по формулам

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta,$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta$ — угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью $z$, а $\varphi$ — угол между вектором $\overrightarrow{OM'}$ и осью $x$, где $O=O(0,0,0)$, $M=M(x,y,z)$, $M'=M'(x,y,0)$.

В координатах $(r,\theta,\varphi)$ уравнение (1) принимает вид

$$u_{rr}+\frac{2\left(1+\beta+\gamma\right)}{r}u_r+$$
$$+\frac{1}{r^2}\left[u_{\theta\theta}+\left[\left(1+2\beta\right)ctg\theta-2\gamma tg\theta\right]u_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}+\frac{2\beta ctg\varphi}{\sin^2\theta}u_\varphi\right]+\lambda u=0. \qquad (6)$$

К уравнению (6), применим метод разделения переменных. Сначала, представим неизвестную функцию в виде $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Q(\theta,\varphi)$ и подставим в уравнение (6). Далее, вводя константу разделения переменных $\chi$, получим два дифференциальных уравнения

$$r^2R''(r)+2(1+\beta+\gamma)rR'(r)+(\lambda r^2-\chi)R(r)=0,\quad 0<r<1;$$
$$Q_{\theta\theta}+\left[\left(1+2\beta\right)ctg\theta-2\gamma tg\theta\right]Q_\theta+$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta}Q_{\varphi\varphi}+\frac{2\beta ctg\varphi}{\sin^2\theta}Q_\varphi+\chi Q=0,\quad 0<\theta<\pi/2,\quad 0<\varphi<\pi. \qquad (7)$$

Теперь, полагая $Q(\theta,\varphi)=T(\theta)S(\varphi)$, из уравнения (7) получим

$$\frac{\sin^2\theta}{T\left(\theta\right)}\left[T''\left(\theta\right)+\left[\left(1+2\beta\right)ctg\theta-2\gamma tg\theta\right]T'\left(\theta\right)\right]+\chi\sin^2\theta=-\frac{S''\left(\varphi\right)+2\beta ctg\varphi S'\left(\varphi\right)}{S\left(\varphi\right)}. \qquad (8)$$

Вводя еще одну константу разделения переменных $\mu$, из (8) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$S''\left(\varphi\right)+2\beta ctg\varphi S'\left(\varphi\right)+\mu S\left(\varphi\right)=0,\quad 0<\varphi<\pi,$$
$$\sin^2\theta\left\{T''\left(\theta\right)+\left[\left(1+2\beta\right)ctg\theta-2\gamma tg\theta\right]T'\left(\theta\right)\right\}+(\chi\sin^2\theta-\mu)T\left(\theta\right)=0,\quad 0<\theta<\pi/2.$$

Граничные условия (2) и условия $u(x,y,z)\in C(\overline{\Omega})$, приводят к граничным условиям для функции $R(r)$: $R(1)=0$ и $\left|R(0)\right|<+\infty$. Для фиксированных переменных $r$ и $\varphi$, из условий (4) и $u(x,y,z)\in C(\overline{\Omega})$, получим условие для функции $T(\theta)$: $\left|T(0)\right|<+\infty$, $\lim\limits_{\theta\to\pi/2}\left(\cos\theta\right)^{2\gamma}T'(\theta)=0.$ Из условий (3) для функции $S(\varphi)$ получим следующие условия $\lim\limits_{\varphi\to 0}(\sin\varphi)^{2\beta}S'(\varphi)=0$, $\lim\limits_{\varphi\to\pi}(\sin\varphi)^{2\beta}S'(\varphi)=0.$

В результате, исходная трехмерная задача распадается на три одномерные задачи на собственные значения:

$$r^2R''(r)+2(1+\beta+\gamma)rR'(r)+(\lambda r^2-\chi)R(r)=0,\ \ 0<r<1,$$
$$\left|R(0)\right|<+\infty,\ \ R(1)=0;$$
$$T''\left(\theta\right)+\left[\left(1+2\beta\right)ctg\theta-2\gamma tg\theta\right]T'\left(\theta\right)+\left(\chi-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)T\left(\theta\right)=0,\ \ 0<\theta<\pi/2,$$
$$\left|T(0)\right|<+\infty,\quad \lim_{\theta\to\pi/2}(\cos\theta)^{2\gamma}T'(\theta)=0;$$
$$S''(\varphi)+2\beta ctg\varphi S'(\varphi)(\varphi)+\mu S(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\pi,$$
$$\lim_{\varphi\to 0}(\sin\varphi)^{2\beta}S'(\varphi)=0,\quad \lim_{\varphi\to\pi}(\sin\varphi)^{2\beta}S'(\varphi)=0.$$

Исследование этих одномерных задач показало, что собственными значениями задачи $\mathrm{DN}_\lambda$ являются числа $\lambda_{ml}=\sigma_{ml}^2$, $m,l\in N$, а соответствующие собственные функции имеют вид

$$u_{nlm}(x,y,z)=b_{nml}r^{-(1/2+\beta+\gamma)}J_{\nu_l}(\sigma_{ml}r)F\left(-n,n+2\beta;\beta+\frac{1}{2};\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\times$$
$$\times F_3\left(1/2+\beta+\gamma+l,\beta+n/2,-l,-n/2,1+\beta;\sin^2\theta,1\right),$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя [7], $F(...)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [8], $\nu_l=2l+1/2+\beta+\gamma$, $l\in N$, $\sigma_{ml}$ — нули функции $J_{\nu_l}(x)$, $F_3(a,a',b,b';c;w,z)$, $(\left|w\right|,\left|z\right|<1)$ — гипергеометрическая функция Аппеля [8], $b_{nml}\neq 0$ — произвольные постоянные,

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varphi=\mathrm{arctg}(y/x),\quad \theta=\arccos(z/r).$$

**Замечание.** Аналогичным способом можно изучить различные задачи для уравнения (1) в области $\Omega$, задавая на различных плоскостях границы $\partial\Omega$, условия Дирихле и Неймана.

### Литература


1. *Салахитдинов, М. С.* К спектральной теории уравнений смешанного типа /М. С. Салахитдинов, А. К. Уринов. –Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. – 355 с.

2. *Пономарев, С. М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Пономарев Сергей Михайлович; Москва, 1981.

3. *Каримов, К.Т.* Спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами / К.Т. Каримов // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2017. – № 18. – С. 7–19.

4. *Urinov, A. K.* The unique solvability of boundary value problems for a 3D elliptic equation with three singular coefficients / A. K.Urinov, K. T. Karimov //Russian Mathematics. – 2019. – No 2. – P. 61–72.

5. *Urinov, A. K.* The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-Cylindrical Domain / A. K. Urinov, K. T. Karimov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – № 9. – P. 1891–1902.

6. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 3. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 656 с.

7. *Ватсон, Г. Н.* Теория бесселевых функций Т. 1. / Г. Н. Ватсон. – Москва : Изд. ИЛ., 1949. – 798 с.

8. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Москва : Наука, 1973. – 296 с.

УДК 517.9

# О ЗАДАЧЕ РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

**О. В. Чернова**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет*

**Аннотация.** Рассматривается задача Римана — Гильберта для эллиптической системы первого порядка в бесконечной области на плоскости. В работе сформулирован критерий федгольмовой разрешимости задачи, когда матричные коэффициенты системы принадлежат весовому пространству Гельдера.
**Ключевые слова:** эллиптическая система, задача Римана — Гильберта, индекс.

Пусть область $D \in \mathbb{C}$ бесконечна и ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, составленным из простых контуров $\Gamma_i$, $i = 1, \ldots, m.$ В этой области рассмотрим эллиптическую систему первого порядка

$$U_y - AU_x + aU + b\overline{U} = F, \tag{1}$$

где матрица $A \in \mathbb{C}^{l \times l}$ не имеет вещественных собственных значений и $l \times l$-матричные коэффициенты $a$, $b$ принадлежат весовому пространству Гельдера $C^{\mu}_{\delta_0}(\overline{D}, \infty)$, $\delta_0 < -1$, определенному в [1].

Пусть $\sigma_1$ $(\sigma_2)$ — множество собственных значений матрицы $A$ $(\overline{A})$, лежащих в верхней полуплоскости и $l_1$ $(l_2)$ — число этих значений, взятое с учетом кратности, так что $l = l_1 + l_2$. Тогда существуют такие матрицы $B_k \in \mathbb{C}^{l \times l_k}$, $k = 1, 2$, и жордановы матрицы $J_k \in \mathbb{C}^{l_k \times l_k}$ с собственными значениями $\nu \in \sigma_k$, что $AB_k = B_k J_k$ и $\det(B_1, B_2, \overline{B}_1, \overline{B}_2) \neq 0$.

Исходя из заданной $l \times l$-матрицы-функции $C(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$, $\mu < \nu$ для системы (1) рассмотрим краевую задачу Римана — Гильберта

$$\mathrm{Re}\, CU^{+} \Big|_{\Gamma} = f, \tag{2}$$

где + означает граничное значение функции $U$ на $\Gamma$. Эту задачу естественно рассматривать в классе функций $U \in C^1(D) \cap C^{\mu}_{\delta}(\overline{D}, \infty)$, для которых $U_y - AU_x \in C^{\mu}_{\delta-1}(\overline{D}, \infty)$ с некоторым $-1 < \delta < 0$.

Теорема. Условие обратимости матрицы-функции $G = (CB_1, \overline{C}B_2)$ необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1), (2) и ее индекс дается формулой

$$æ = -2\,\mathrm{Ind}\, G - ml,$$

где $\mathrm{Ind}\, G$ есть индекс Коши матрицы-функции $G$ на контуре $\Gamma$, который ориентирован положительно по отношению к области $D$.

## Литература

1. *Солдатов, А. П.* Задача Римана — Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами / А. П. Солдатов, О. В. Чернова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2018. – Т. 149. – С. 95–102.

УДК 517.9

# ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Г. Н. Шевченко, А. Ю. Борисенко**

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики*

**Аннотация.** В статье изучается разрешимость третьей краевой задачи для модельного линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа в единичном квадрате для случая разрывных условий сопряжения на характеристиках этого уравнения. При решении поставленной третьей краевой задачи используется известное решение Даламбера для этого гиперболического уравнения. В работе выясняются условия однозначной разрешимости сформулированной задачи. В результате получено точное решение исходной задачи в явном виде.
**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, третья краевая задача, характеристики, условия сопряжения.

Для дифференциального уравнения с частными производными гиперболического типа задача Дирихле в прямоугольнике с непрерывными условиями сопряжения на характеристиках рассматривалась в работе М. М. Хачева [1], с разрывными условиями сопряжения на характеристиках — в работах [2–5]. Задача Неймана для гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными изучалась в работах [6–8]. Предлагаемая работа является продолжением исследований в этом направлении, когда для гиперболического дифференциального уравнения второго порядка на всей границе рассматриваемой области задается краевое условие третьего рода, которое обобщает условие задач Дирихле и Неймана.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

в квадрате с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$. Введем обозначения

$$D_1 = \{(x;y) : y < x, y < 1-x, y > 0\},\ D_2 = \{(x;y) : y < x, y > 1-x, x < 1\},$$

$$D_3 = \{(x;y) : y > x, y > 1-x, y < 1\},\ D_4 = \{(x;y) : y > x, y < 1-x, x > 0\}, D = \bigcup_{i=1}^{4} D_i.$$

**Третья краевая задача.** Найти функцию $U(x;y)$ непрерывную в замкнутых областях $\overline{D_i}, i = \overline{1,4}$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x;y)$ — дважды непрерывно дифференцируемое в $D$ решение уравнения (1),

2) $u(x;y)$ удовлетворяет краевым условиям третьего рода:

$$\left[\frac{\partial u(x;y)}{\partial y} + \alpha_1(x)u(x;y)\right]\Bigg|_{y=0} = \nu_1(x),\ 0 \le x \le 1,\ \left[\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} + \alpha_2(y)u(x;y)\right]\Bigg|_{x=1} = \nu_2(x),\ 0 \le y \le 1,$$

$$\left[\frac{\partial u(x;y)}{\partial y} + \alpha_3(x)u(x;y)\right]\Bigg|_{y=1} = \nu_3(x),\ 0 \le x \le 1,\ \left[\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} + \alpha_4(y)u(x;y)\right]\Bigg|_{x=0} = \nu_4(x),\ 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

где известные функции $\alpha_i, \nu_i \in C[0;1] \cap C^1(0;1),\ i = \overline{1,4},$

3) $u(x;y)$ удовлетворяет на характеристиках уравнения (1) $x - y = 0$ и $x + y = 1$ условиям сопряжения:

$$\lim_{y \to x+0} u(x;y) = a_1(x) \cdot \lim_{y \to x-0} u(x;y) + b_1(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to 1-x-0} u(x;y) = a_2(x)\cdot \lim_{y\to 1-x+0} u(x;y) + b_2(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1,$$
$$\lim_{y\to x-0} u(x;y) = a_3(x)\cdot \lim_{y\to x+0} u(x;y) + b_3(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{3}$$
$$\lim_{y\to 1-x+0} u(x;y) = a_4(x)\cdot \lim_{y\to 1-x-0} u(x;y) + b_4(x),\quad 0\le x\le \frac{1}{2}.$$

Заданные функции $a_1(x),\ a_4(x),\ b_1(x),\ b_4(x)$ принадлежат классу $C[0,1/2]\bigcap C^2(0,1/2)$, а функции $a_2(x),\ a_3(x),\ b_2(x),\ b_3(x)$ из класса $C[1/2,1]\bigcap C^2(1/2,1)$.

Известно, что общее решение уравнения (1), которое называют решением Даламбера, имеет вид:

$$u(x;y) = Q_1(x-y) + Q_2(x+y), \tag{4}$$

где $Q_1$ и $Q_2$ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Найдем в области $D_1$ решение краевой задачи для уравнения (1) с условиями:

$$u(x;y)\big|_{y=0} = \tau_1(x), \left[\frac{\partial u(x;y)}{\partial y} + \alpha_1(x)\cdot u(x;y)\right]\Bigg|_{y=0} = \nu_1(x), 0\le x\le 1, \tag{5}$$

где заданные функции $\tau_1(x)\in C[0,1]\bigcap C^2(0,1),\ \nu_1(x)\in C[0,1]\bigcap C^1(0,1)$.

Подставим решение Даламбера (4) в краевые условия (5):

$$\begin{cases} Q_1(x) + Q_2(x) = \tau_1(x) \\ -Q_1'(x) + Q_2'(x) + \alpha_1(x)\tau_1(x) = \nu_1(x),\ 0\le x\le 1. \end{cases} \tag{6}$$

Получим систему двух уравнений, одно из которых дифференциальное, относительно неизвестных функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Обе части второго уравнения системы (6) интегрируем по промежутку $[0;x]$, где $x\in[0;1]$:

$$\begin{cases} Q_1(x) + Q_2(x) = \tau_1(x) \\ -Q_1(x) + Q_2(x) = \int\limits_0^x \nu_1(t)dt - \int\limits_0^x \alpha_1(t)\tau_1(t)dt - Q_1(0) + Q_2(0). \end{cases}$$

Откуда находим

$$\begin{cases} Q_1(x) = \dfrac{1}{2}\left[\tau_1(x) - \int\limits_0^x \nu_1(t)dt + \int\limits_0^x \alpha_1(t)\tau_1(t)dt + Q_1(0) - Q_2(0)\right] \\ Q_2(x) = \dfrac{1}{2}\left[\tau_1(x) + \int\limits_0^x \nu_1(t)dt - \int\limits_0^x \alpha_1(t)\tau_1(t)dt - Q_1(0) + Q_2(0)\right] \end{cases}. \tag{7}$$

Подставляя формулы (7) в общее решение (4), получим решение задачи (1), (5)

$$u_1(x;y) = \frac{1}{2}\left[\tau_1(x-y) + \tau_1(x+y) + \int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_1(t)dt - \int\limits_{x-y}^{x+y} \alpha_1(t)\tau_1(t)dt\right]. \tag{8}$$

В области $D_2$ также находим решение краевой задачи для уравнения (1) с условиями

$$u(x;y)\big|_{x=1} = \tau_2(y), \left[\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} + \alpha_2(y)u(x;y)\right]\Bigg|_{x=1} = \nu_2(y),\quad 0\le y\le 1,$$

где заданные функции $\tau_2(y)\in C[0,1]\bigcap C^2(0,1), \nu_2(y)\in C[0,1]\bigcap C^1(0,1)$,

$$u_2(x;y) = \frac{1}{2}\left[\tau_2(1-x+y) + \tau_2(x+y-1) - \int\limits_{x+y-1}^{1-x+y} \nu_2(t)dt + \int\limits_{x+y-1}^{1-x+y} \alpha_2(t)\tau_2(t)dt\right]. \tag{9}$$

Аналогично в области $D_3$ находим решение для уравнения (1) задачи с краевыми условиями:

$$u(x;y)\big|_{y=1}=\tau_3(x),\left[\frac{\partial u(x;y)}{\partial y}+\alpha_3(x)u(x;y)\right]\Bigg|_{y=1}=\nu_3(x),\quad 0\le x\le 1,$$

где заданные функции $\tau_3(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu_3(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$, которое имеет вид

$$u_3(x;y)=\frac{1}{2}\left[\tau_3(x-y+1)+\tau_3(x+y-1)-\int\limits_{x+y-1}^{x-y+1}\nu_3(t)dt+\int\limits_{x+y-1}^{x-y+1}\alpha_3(t)\tau_3(t)dt\right].\qquad(10)$$

Также в области $D_4$ найдем решение краевой задачи для уравнения (1) с условиями:

$$u(x;y)\big|_{x=0}=\tau_4(y),\ \left[\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}+\alpha_4(y)u(x;y)\right]\Bigg|_{x=0}=\nu_4(y),\quad 0\le y\le 1,$$

где заданные функции $\tau_4(y)\in C[0,1]\cap C^2(0,1),\nu_4(y)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$.

Запишем это решение

$$u_4(x;y)=\frac{1}{2}\left[\tau_4(-x+y)+\tau_4(x+y)+\int\limits_{-x+y}^{x+y}\nu_4(t)dt-\int\limits_{-x+y}^{x+y}\alpha_4(t)\tau_4(t)dt\right].\qquad(11)$$

Используя условия сопряжения (3) и решения (8)–(11), получаем

$$\frac{1}{2}\left[\tau_4(0)+\tau_4(2x)+\int\limits_0^{2x}\nu_4(t)dt-\int\limits_0^{2x}\alpha_4(t)\cdot\tau_4(t)dt\right]=$$

$$=a_1(x)\cdot\frac{1}{2}\left[\tau_1(0)+\tau_1(2x)+\int\limits_0^{2x}\nu_1(t)dt-\int\limits_0^{2x}\alpha_1(t)\cdot\tau_1(t)dt\right]+b_1(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2}\left[\tau_1(2x-1)+\tau_1(1)+\int\limits_{2x-1}^{1}\nu_1(t)dt-\int\limits_{2x-1}^{1}\alpha_1(t)\cdot\tau_1(t)dt\right]=$$

$$=a_2(x)\cdot\frac{1}{2}\left[\tau_2(2-2x)+\tau_2(0)-\int\limits_0^{2-2x}\nu_2(t)dt+\int\limits_0^{2-2x}\alpha_2(t)\cdot\tau_2(t)dt\right]+b_2(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1$$

$$\frac{1}{2}\left[\tau_2(1)+\tau_2(2x-1)-\int\limits_{2x-1}^{1}\nu_2(t)dt+\int\limits_{2x-1}^{1}\alpha_2(t)\cdot\tau_2(t)dt\right]=$$

$$=a_3(x)\cdot\frac{1}{2}\left[\tau_3(1)+\tau_3(2x-1)-\int\limits_{2x-1}^{1}\nu_3(t)dt+\int\limits_{2x-1}^{1}\alpha_3(t)\cdot\tau_3(t)dt\right]+b_3(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1$$

$$\frac{1}{2}\left[\tau_3(2x)+\tau_3(0)-\int\limits_0^{2x}\nu_3(t)dt+\int\limits_0^{2x}\alpha_3(t)\cdot\tau_3(t)dt\right]=$$

$$=a_4(x)\cdot\frac{1}{2}\left[\tau_4(1-2x)+\tau_4(1)+\int\limits_{1-2x}^{1}\nu_4(t)dt-\int\limits_{1-2x}^{1}\alpha_4(t)\cdot\tau_4(t)dt\right]+b_4(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}$$

систему четырех интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tau_i,\ i=\overline{1,4}$.

Обе части интегральных уравнений полученной системы продифференцируем по $x$, положив для упрощения $a_i(x)=a_i-\text{const}$,

$$\left[\tau_4'(2x)-a_1\tau_1'(2x)\right]-\left[\alpha_4(2x)\cdot\tau_4(2x)-a_1\alpha_1(2x)\cdot\tau_1(2x)\right]=$$

$$=b_1'(x)+a_1\nu_1(2x)-\nu_4(2x),\ 0\le x\le\frac{1}{2}$$

$$\left[\tau_1'(2x-1)+a_2\tau_2'(2-2x)\right]+\left[\alpha_1(2x-1)\cdot\tau_1(2x-1)+a_2\alpha_2(2-2x)\cdot\tau_2(2-2x)\right]=$$
$$=b_2'(x)+a_2\nu_2(2-2x)+\nu_1(2x-1),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1$$
$$\left[\tau_2'(2x-1)-a_3\tau_3'(2x-1)\right]-\left[\alpha_2(2x-1)\cdot\tau_2(2x-1)-a_3\alpha_3(2x-1)\cdot\tau_3(2x-1)\right]=$$
$$=b_3'(x)+a_3\nu_3(2x-1)-\nu_2(2x-1),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1$$
$$\left[\tau_3'(2x)+a_4\tau_4'(1-2x)\right]+\left[\alpha_3(2x)\cdot\tau_3(2x)+a_4\alpha_4(1-2x)\cdot\tau_4(1-2x)\right]=$$
$$=b_4'(x)+a_4\nu_4(1-2x)+\nu_3(2x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}.$$

В полученной системе дифференциальных уравнений положим, что $\alpha_2(t)=-\alpha_1(1-t)$, $\alpha_3(t)=-\alpha_1(1-t)$, $\alpha_4(t)=\alpha_1(t)$ $\forall t\in[0;1]$, тогда она примет вид

$$\frac{1}{2}\left[\tau_4(2x)-a_1\tau_1(2x)\right]'-\alpha_1(2x)\left[\tau_4(2x)-a_1\tau_1(2x)\right]=b_1'(x)+a_1\nu_1(2x)-\nu_4(2x),\ 0\le x\le\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}\left[\tau_1(2x-1)-a_2\tau_2(2-2x)\right]'+\alpha_1(2x-1)\left[\tau_1(2x-1)-a_2\tau_2(2-2x)\right]=$$
$$=b_2'(x)+a_2\nu_2(2-2x)+\nu_1(2x-1),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1,$$
$$\frac{1}{2}\left[\tau_2(2x-1)-a_3\tau_3(2x-1)\right]'+\alpha_1(2-2x)\left[\tau_2(2x-1)-a_3\tau_3(2x-1)\right]=$$
$$=b_3'(x)+a_3\nu_3(2x-1)-\nu_2(2x-1),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1,$$
$$\frac{1}{2}\left[\tau_3(2x)-a_4\tau_4(1-2x)\right]'-\alpha_1(1-2x)\left[\tau_3(2x)-a_4\tau_4(1-2x)\right]=$$
$$=b_4'(x)+a_4\nu_4(1-2x)+\nu_3(2x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}.$$

Решая данную систему четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка, получаем

$$\begin{cases}\tau_4(2x)-a_1\tau_1(2x)=\varphi_1(x), & 0\le x\le\frac{1}{2},\\ \tau_1(2x-1)-a_2\tau_2(2-2x)=\varphi_2(x), & \frac{1}{2}\le x\le 1,\\ \tau_2(2x-1)-a_3\tau_3(2x-1)=\varphi_3(x), & \frac{1}{2}\le x\le 1,\\ \tau_3(2x)-a_4\tau_4(1-2x)=\varphi_4(x), & 0\le x\le\frac{1}{2},\end{cases}\tag{12}$$

где

$$\varphi_1(x)=\exp\left[2\int_0^x\alpha_1(2\xi)d\xi\right]\cdot\left\{2\int_0^x\left[b_1'(\xi)+a_1\nu_1(2\xi)-\nu_4(2\xi)\right]\cdot\exp\left[-2\int_0^\xi\alpha_1(2\eta)d\eta\right]d\xi+C_1\right\},$$

$$\varphi_2(x) = \exp\left[-2\int_{\frac{1}{2}}^{x} \alpha_1(2\xi-1)d\xi\right]\times$$

$$\times\left\{2\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left[b_2'(\xi)+a_2\nu_2(2-2\xi)+\nu_1(2\xi-1)\right]\cdot\exp\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{\xi}\alpha_1(2\eta-1)d\eta\right]d\xi+C_2\right\},$$

$$\varphi_3(x) = \exp\left[-2\int_{\frac{1}{2}}^{x} \alpha_1(2-2\xi)d\xi\right]\times$$

$$\times\left\{2\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left[b_3'(\xi)+a_3\nu_3(2\xi-1)-\nu_2(2\xi-1)\right]\cdot\exp\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{\xi}\alpha_1(2-2\eta)d\eta\right]d\xi+C_3\right\},$$

$$\varphi_4(x) = \exp\left[2\int_{0}^{x} \alpha_1(1-2\xi)d\xi\right]\times$$

$$\times\left\{2\int_{0}^{x}\left[b_4'(\xi)+a_4\nu_4(1-2\xi)+\nu_3(2\xi)\right]\cdot\exp\left[-2\int_{0}^{\xi}\alpha_1(1-2\eta)d\eta\right]d\xi+C_4\right\},$$

$C_i$ — произвольные постоянные величины, $i=\overline{1,4},$ систему четырех функциональных уравнений относительно $\tau_i$.

Для нахождения постоянных величин $C_i$ положим в первом и четвертом уравнениях системы (12) $x=0,$ а во втором и третьем $x=\dfrac{1}{2}.$

$$\{\tau_4(0)-a_1\tau_1(0)=C_1,\ \tau_1(0)-a_2\tau_2(1)=C_2,\ \tau_2(0)-a_3\tau_3(0)=C_3,\ \tau_3(0)-a_4\tau_4(1)=C_4 \qquad (13)$$

Если в первом соотношении условий сопряжения (3) положить x = 0 , получим

$$u_4(0,0)=a_1(0)u_1(0;0)+b_1(0),$$

то есть

$$\tau_4(0)-a_1\tau_1(0)=b_1(0). \qquad (14)$$

Сравнивая (14) с первым уравнением системы (13), получаем, что $C_1=b_1(0).$

Во втором соотношении условий сопряжения (3) положим $x=1,$ получим $u_1(1;0)=a_2(1)u_2(1;0)+b_2(1)$ или $\tau_1(1)=a_2\tau_2(0)+b_2(1).$ Откуда

$$\tau_1(1)-a_2\tau_2(0)=b_2(1). \qquad (15)$$

При $x=1$ второе уравнение системы (12) принимает вид

$$\tau_1(1)-a_2\tau_2(0)=\exp\left[-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\alpha_1(2\xi-1)d\xi\right]\times$$
$$\times\left\{2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[b_2'(\xi)+a_2\nu_2(2-2\xi)+\nu_1(2\xi-1)\right]\cdot\exp\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{\xi}\alpha_1(2\eta-1)d\eta\right]d\xi+C_2\right\}. \qquad (16)$$

Из (15) и (16) находим, что

$$C_2 = b_2(1)\cdot\exp\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\alpha_1(2\xi-1)d\xi\right] - 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[b_2'(\xi)+a_2\nu_2(2-2\xi)+\nu_1(2\xi-1)\right]\exp\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{\xi}\alpha_1(2\eta-1)\cdot d\eta\right]d\xi.$$

В третьем условии сопряжения (3) поставим $x=1$ $u_2(1;1)=a_3(1)u_3(1;1)+b_3(1)$ или $\tau_2(1)=a_3\tau_3(1)+b_3(1).$ Тогда

$$\tau_2(1)-a_3\tau_3(1)=b_3(1). \tag{17}$$

Положив в третьем уравнении системы (12) $x=1,$ получим

$$\begin{gathered}\tau_2(1)-a_3\tau_3(1)=\exp\left[-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\alpha_1(2-2\xi)d\xi\right]\times\\ \times\left\{2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[b_3'(\xi)+a_3\nu_3(2\xi-1)-\nu_2(2\xi-1)\right]\cdot\exp\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{\xi}\alpha_1(2-2\eta)d\eta\right]d\xi+C_3\right\}.\end{gathered} \tag{18}$$

Из (17) и (18) имеем

$$C_3=b_3(1)\cdot\exp\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\alpha_1(2-2\xi)d\xi\right]-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[b_3'(\xi)+a_3\nu_3(2\xi-1)-\nu_2(2\xi-1)\right]\exp\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{\xi}\alpha_1(2-2\eta)\cdot d\eta\right]d\xi.$$

Если в четвертом условии сопряжения (3) положить $x=0,$ то получим $u_3(0;1)=a_4(0)u_4(0;1)+b_4(0)$ или $\tau_3(0)=a_4\tau_4(1)+b_4(0).$ То есть

$$\tau_3(0)-a_4\tau_4(1)=b_4(0). \tag{19}$$

Найдем вид четвертого уравнения системы (12) при $x=0$:

$$\tau_3(0)-a_4\tau_4(1)=C_4. \tag{20}$$

Из равенств (19) и (20) следует, что $C_4=b_4(0).$

Таким образом, все постоянные величины $C_i$ найдены. Приступим к решению системы функциональных уравнений (12).

Из первого уравнения этой системы находим

$$\tau_4(t)=a_1\tau_1(t)+\varphi_1\left(\frac{t}{2}\right),\quad 0\le t\le 1 \tag{21}$$

и подставляем в четвертое уравнение

$$\tau_3(t)=a_4\left[a_1\tau_1(1-t)+\varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right)\right]+\varphi_4\left(\frac{t}{2}\right),\quad 0\le t\le 1. \tag{22}$$

Подставляя (22) в третье уравнение системы (12), получим

$$\tau_2(t)=a_3\left\{a_4\left[a_1\tau_1(1-t)+\varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right)\right]+\varphi_4\left(\frac{t}{2}\right)\right\}+\varphi_3\left(\frac{1+t}{2}\right),\quad 0\le t\le 1. \tag{23}$$

Из второго уравнения системы (12) и равенства (23)

$$\tau_1(t)=a_2\cdot a_3\left\{a_4\left[a_1\tau_1(t)+\varphi_1\left(\frac{t}{2}\right)\right]+\varphi_4\left(\frac{1-t}{2}\right)\right\}+a_2\cdot\varphi_3\left(\frac{2-t}{2}\right)+\varphi_2\left(\frac{1+t}{2}\right),\ 0\le t\le 1.$$

Откуда

$$\tau_1(t) = (1 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{-1} \times$$
$$\times\left[a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) + a_2 \cdot a_3 \cdot \varphi_4\left(\frac{1-t}{2}\right) + a_2 \cdot \varphi_3\left(\frac{2-t}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{1+t}{2}\right)\right],\ 0 \le t \le 1, \tag{24}$$

где $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \neq 1$.

Следует отметить, что это ограничение исключает возможность, при постановке третьей краевой задачи, использования непрерывных условий сопряжения одновременно на всех характеристиках $x - y = 0$ и $x + y = 1$ уравнения (1).

Формулу (24) подставляем в равенства (21), (22), (23)

$$\tau_4(t) = (1 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{-1} \times$$
$$\times\left[a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \varphi_4\left(\frac{1-t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot \varphi_3\left(\frac{2-t}{2}\right) + a_1 \cdot \varphi_2\left(\frac{1+t}{2}\right)\right] + \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right), \tag{25}$$

$$\tau_3(t) = (1 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{-1} \times$$
$$\times\left[a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4^2 \cdot \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot \varphi_3\left(\frac{1+t}{2}\right) + a_1 \cdot a_4 \cdot \varphi_2\left(\frac{2-t}{2}\right)\right] + \tag{26}$$
$$+ a_4 \cdot \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) + \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$\tau_2(t) = (1 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{-1} \times$$
$$\times\left[a_1 \cdot a_2 \cdot a_3^2 \cdot a_4^2 \cdot \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3^2 \cdot a_4 \cdot \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_3\left(\frac{1+t}{2}\right) + \right. \tag{27}$$
$$\left. + a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_2\left(\frac{2-t}{2}\right) + a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right)\right] + a_3 \cdot \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right) + \varphi_3\left(\frac{1+t}{2}\right),\ 0 \le t \le 1$$

Подставив найденные по формулам (24)–(27) функции $\tau_i(t),\ i = \overline{1,4}$ в (8)–(11), получим единственное решение задачи (1)–(3) в следующем виде:

$$u(x;y) = \begin{cases} u_1(x;y), (x;y) \in D_1 \\ u_2(x;y), (x;y) \in D_2 \\ u_3(x;y), (x;y) \in D_3 \\ u_4(x;y), (x;y) \in D_4. \end{cases}$$

**Литература**


1. *Хачев М. М.* Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 1. – С. 151–160.

2. *Шевченко Г. Н.* О разрешимости задачи Дирихле для гиперболического уравнения, вырождающегося на всей границе области // Сборник научных трудов SWorld по материалам Международной научно – практической конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития 2012». – Выпуск 3, Т. 2 – Одесса : Куприенко, 2012. – С. 87–89.

3. *Абдурахманова Н. С., Шевченко Г. Н.* Первая краевая задача для гиперболического уравнения, вырождающегося на всей границе области // «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем». Сборник статей VII Международной научно-технической конференции. – Пенза, 2012. – С. 17–20.

4. *Шевченко Г. Н.* Первая краевая задача для одного гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Наука и мир. Международный научный журнал. – 2017. – Т. 1, №15(45). – С. 19–22.

5. *Шевченко Г. Н.* Задача Дирихле для гиперболического уравнения в квадрате с разрывными условиями сопряжения на характеристиках // Аллея науки. – 2018. – Т. 2, №5(21). – С. 401–404.

6. *Шевченко Г. Н.* О разрешимости задачи Неймана для гиперболического уравнения, вырождающегося на всей границе области // Сборник научных трудов SWorld. – Выпуск 3(36), Т. 27 – Одесса: Куприенко С. В., 2014. – С. 74–76.

7. *Шевченко Г. Н.* Вторая краевая задача для вырождающегося гиперболического уравнения // Наука и мир. Международный научный журнал. – 2014. – Т. 1, №12(16). – С. 26–29.

8. *Борисенко А. Ю., Шевченко Г. Н.* Задача Неймана для гиперболического уравнения в квадрате с разрывными условиями сопряжения на характеристиках // Наука и мир. Международный научный журнал. – 2019. – Т. 1, №5(69). – С.14–17.

УДК 517.9

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫМ ЯДРОМ

**А. Н. Шелковой**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе исследуются спектральные свойства интегро-дифференциального оператора второго порядка с интегрируемым с квадратом ядром. Получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций этого оператора.
**Ключевые слова:** спектр оператора, дифференциальный оператор второго порядка, асимптотика спектра, метод подобных операторов.

## 1. Введение

Пусть $L_2[0,1]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x,y)=\int_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$. Через $W_2^2[0,1]$ обозначим пространство Соболева

$$\{x\in L_2[0,1]: x' \text{ абсолютно непрерывна, } x''\in L_2[0,1]\}.$$

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор

$$L: D(L)\subset L_2[0,1]\to L_2[0,1],$$

задаваемый выражением вида

$$(Lx)(t)=-\ddot{x}(t)-\int_0^1 K(t,s)x(s)ds, \tag{1}$$

с ядром $K\in L_2([0,1]^2)$, с областью определения $D(L)=\{x\in W_2^2[0,1],\ x(0)=x(1)=0\}$ и краевыми условиями

$$x(0)=x(1)=0. \tag{2}$$

В данной статье также рассматривается интегро-дифференциальный оператор

$$L: D(L)\subset L_2[0,1]\to L_2[0,1],$$

порождаемый интегро-дифференциальным выражением вида

$$(Lx)(t)=-\ddot{x}(t)-[\dot{x}(0)a_0(t)-\dot{x}(1)a_1(t)]-\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \tag{3}$$

и краевыми условиями (2).

Такого класса оператор возникает при переходе к сопряженному при исследовании оператора, действующего в $L_2[0,1]$, задаваемого выражением

$$(Ly)(t)=-\ddot{y}(t)-\int_0^1 K(t,s)y(s)ds$$

и нелокальными краевыми условиями:

$$\begin{cases} y(0)=\int_0^1 a_0(t)y(t)dt, \\ y(1)=\int_0^1 a_1(t)y(t)dt. \end{cases}$$

Здесь $a_0$ и $a_1$ — функции из $L_2[0,1]$, $K\in L_2([0,1]^2)$.

Для исследования спектра оператора $L$ рассмотрим сопряженный ему оператор $L^*$ (см. [5]), который задается дифференциальным выражением

$$(L^*x)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

В настоящей статье для исследования спектральных свойств рассматриваемого класса применяется вариант метода подобных операторов, позволяющий получить оценку сходимости спектральных разложений рассматриваемых операторов.

Приведем основные определения и теоремы метода подобных операторов.

Пусть $H$ — бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство.

**Определение 1.** Два оператора $A_i : D(A_i) \subset H \to H,\ i = 1,2,$ называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\ H$ (т. е. $U^{-1} \in End\,H$, $End\,H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$), такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и выполняется равенство $A_1Ux = UA_2x,\ x \in D(A_2)$. $U$ называется оператором преобразования подобия оператора $A_1$ в $A_2$.

**Определение 2.** Линейный оператор $C : D(C) \subset H \to H$ называется подчиненным оператору $A : D(A) \subset H \to H,$ если выполнены следующие два условия:

1) $D(C) \supseteq D(A)$;

2) существует постоянная $M > 0,$ такая, что

$$\|Cx\| \le M(\|Ax\| + \|x\|) \quad \forall x \in D(A).$$

**Определение 3.** Тройка $(\mathcal{U}, J, \Gamma),\ J : \mathcal{U} \to \mathcal{U},\ \Gamma : \mathcal{U} \to End\ H,$ называется допустимой для оператора $A,$ а $\mathcal{U}$ — допустимым пространством возмущений, если:

1) $\mathcal{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в банахово пространство $L_A(H)$ линейных операторов, подчиненных оператору $A$;

2) $J, \Gamma$ — трансформаторы (т. е. линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов);

3) $(\Gamma X)x \in D(A)\ \ \forall x \in D(A)$ и имеет место равенство:

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX, X \in \mathcal{U},$$

(равенство понимается как равенство элементов из $\mathcal{U}$);

4) $X\Gamma Y,\ (\Gamma Y)X \in \mathcal{U},\ X, Y \in \mathcal{U},$ и существуют постоянные $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0,$ такие, что $\|\Gamma\| \le \gamma_1$ и $\max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \le \gamma_2 \|X\|_* \|Y\|_*$;

5) выполнены условия:

а) $\mathrm{Im}\Gamma X \subset D(A)$ и $A\Gamma X \in End\ H$ или

б) $\forall X \in \mathcal{U}$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует число $\nu_\varepsilon \in \rho(A)$ ($\rho(A)$ — резольвентное множество оператора $A$), такое, что $\|XR(\nu_\varepsilon, A)\|_\infty < \varepsilon,$ где $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\| \le 1}\|Xx\|$ — норма оператора в $End\ H$; $R(\nu_\varepsilon, A) = (A - \nu_\varepsilon I)^{-1}$.

Здесь $Im\,\Gamma X$ — образ оператора $\Gamma X$. Непрерывность вложения банахова пространства $\mathcal{U}$ в $L_A(H)$ означает, что существует постоянная $M_0 > 0,$ такая, что $\|B\|_A \le M_0 \|B\|_*\ \ \forall B \in \mathcal{U}$. Пусть $A : D(A) \subset H \to H$ — нормальный оператор (см., например, [14]) (частный случай нормального-самосопряженный оператор), т. е. $D(A) = D(A^*),\ \|Ax\| = \|A^*x\|,\ x \in D(A),$ спектр которого представим в виде:

$$\sigma(A) = \bigcup_{j \ge 1} \sigma_j,\ \ 0 \,\overline{\in}\, \sigma(A),$$

где $\sigma_j,\ j \ge 1,$ — взаимно непересекающиеся компактные множества, такие, что

$$dist(0,\sigma_1) < dist(0,\sigma_2) < \ldots, \lim_{n\to\infty} dist(0,\sigma_n) = \infty.$$

Пусть $P_j$, $j \ge 1$, — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_j$, $A_j = AP_j$, $j = 1,2,\ldots$, $A_j \in End\ H$, $|\sigma_j| = \sup_{\lambda\in\sigma_j} |\lambda|$. В качестве пространства возмущений $\mathcal{U}$ рассматриваются операторы $B : D(A) \subset H \to H$, допускающие представление

$$B = B_0 A, \quad B_0 \in \sigma_2(H)$$

(здесь $\sigma_2(H)$ — идеал операторов Гильберта — Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве $H$, с нормой $\|\cdot\|_2$), причем существуют две ненулевые последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, $\{\beta_j\}_1^\infty$, такие, что имеет место оценка:

$$\|P_j B_0 P_i\| \le c\cdot\alpha_j\cdot\beta_i,\ i,j = 1,2,\ldots,$$

для некоторой постоянной $c > 0$.

Наименьшая из констант, удовлетворяющих этому неравенству, определяет норму в $\mathcal{U}$. Пусть $n$ — некоторое натуральное число, положим $\Delta_n = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k$, $P(\Delta_n, A)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\Delta_n$.

Положим $Q_1 = Q_{1n} = P(\Delta_n, A) = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$, $Q_2 = Q_{2n} = I - Q_{1n}$. Трансформаторы $J_n : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и $\Gamma_n : \mathcal{U} \to \sigma_2(H)$, $n \ge 1$, определяются следующим образом:

$$J_n X = Q_1 X Q_1 + Q_2 X Q_2,$$

$$\Gamma_n X = \Gamma_n^{(1)} X + \Gamma_n^{(2)} X,$$

где

$$\Gamma_n^{(1)} X = \sum_{m\ge n+1}\sum_{k=1}^{n} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k), \quad \Gamma_n^{(2)} X = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k\ge n+1} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k).$$

На операторных блоках $P_m X_0 P_k A$ трансформатор $\Gamma_n$ определяется как решение уравнения

$$AP_m Y_{0mk} - Y_{0mk} AP_k = P_m X_0 P_k,$$

удовлетворяющее условию

$$P_m Y_{0mk} P_k = Y_{0mk},$$

где $k \ge n+1$, $m \le n$ либо $k \le n$, $m \ge n+1$. Для всех остальных значений $m$ и $k$ полагается $\Gamma_n(P_m X_0 P_k A) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $n$ — натуральное число, такое, что*

$$\gamma_1(n) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k\ge n+1} \frac{|\sigma_k|^2\ \beta_k^2\alpha_m^2 + \beta_m^2\alpha_k^2\,|\sigma_m|^2}{(dist(\sigma_m,\sigma_k))^2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \max\left\{\max_{j\le n}\left\{\sum_{k\ge n+1}\frac{|\sigma_k|\,\alpha_k\beta_k}{dist(\sigma_j,\sigma_k)}\right\}, \sup_{j\ge n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|\sigma_k|\,\alpha_k\beta_k}{dist(\sigma_j,\sigma_k)}\right\}\right\} < \infty,$$

*причем выполнено условие*

$$2\max\{\gamma_1(n),\gamma_2(n)\} + \gamma_1(n) + \gamma_2(n) < 1,$$

*тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n)$, где $X^*(n) \in \mathcal{U}$ имеет вид*:

$$X^*(n) = X_{11}^*(n) + X_{12}^*(n) + X_{21}^*(n) + X_{22}^*(n), \tag{5}$$

*где $X_{ij}^*(n) = Q_i X^*(n) Q_j$, $i, j = 1,2$, есть решение системы уравнений*

$$\begin{cases} X_{ii} = B_{ij}\Gamma X_{ji} + B_{ii}, & (i=1, j=2)\vee(i=2, j=1); \\ X_{ij} = F_{ij}(X_{ij}), \end{cases}$$

*где оператор $F_{ij} : \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ij}$ задается формулой*

$$F_{ij}(X) = B_{ii}\Gamma X - (\Gamma X)B_{jj} - (\Gamma X)(B_{ji}\Gamma X) + B_{ij},$$

$B_{ij} = Q_i B Q_j$, $i, j = 1, 2$, *— блоки оператора* $B \in \mathcal{U}$, *являющегося возмущением оператора* $A$, *допустимое пространство возмущений* $\mathcal{U}$ *является прямой суммой четырех замкнутых подпространств вида*

$$\mathcal{U}_{ij} = \{Q_i X Q_j, X \in \mathcal{U}\}, \quad i, j = 1, 2.$$

*Оператор преобразования подобия имеет вид* $I + \Gamma_n X^*(n)$.

**Теорема 2.** *Пусть операторы* $A$ *и* $B \in \mathcal{U}$ *таковы, что* $\gamma_1(n) \to 0$, $\gamma_2(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда, начиная с некоторого* $n_0$, *оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - J_n X^*(n)$, $n \geq n_0$, *где* $X^*(n)$ *представимо в виде (5) и* $\left\| P(\Delta_n, A) - P(\tilde{\Delta}_n, A - B) \right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *причем*

$$\tilde{\Delta}_n = \sigma((A - J_n X^*(n)) \quad P(\Delta_n, A)H) \subset \sigma(A - B),$$

*где* $P(\tilde{\Delta}_n, A - B)$ *— проектор Рисса, построенный по спектральному множеству* $\tilde{\Delta}_n$ *оператора* $A - B$.

**Следствие.** *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда*

$$\left\| (I - P(\tilde{\Delta}_n, A - B))x - \sum_{i \geq n+1} P_i X \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

*для любого фиксированного* $x \in H$.

## 2. Основные результаты

Перейдем к исследованию спектральных свойств оператора $L : D(L) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, задаваемого выражением (1). Методом исследования оператора $L$ является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1–20]. Представим его в виде $Lx = Ax - Bx$, где $A$ порождается дифференциальным выражением $Ax = -\ddot{x}$,

$$D(A) = \{x \in L_2[0,1] : x,\ \dot{x} \in C[0,1],\ \ddot{x} \in L_2[0,1],$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = 0\},$$

с краевыми условиями (2) и

$$(Bx)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds, \quad t \in [0,1],\ x \in D(A). \tag{6}$$

Оператор $A$ будем считать невозмущенным оператором, $B$ — возмущением, которое представляет собой интегральный оператор с ядром $K \in L_2([0,1]^2)$. Рассматриваемый оператор $A$ — самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, который имеет простые собственные значения $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, а собственные функции, отвечающие этим собственным значениям, $e_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t$, $n \geq 1$, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ (см., например, [1]). Положим $\Delta_1(n) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $P_n = P(\Delta_1(n), A)$, $P_j = P(\lambda_j, A)$ — проектор Рисса, $j = 1, 2, \ldots$.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $Lx = Ax - Bx$, мы получим следующие результаты.

**Теорема 3.** *Оператор* $B : D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, *задаваемый соотношением (6), представим в виде*

$$B = B_0 A,$$

*где* $B_0 \in \sigma_2(L_2[0,1])$ $(\sigma_2(L_2[0,1])$ *— идеал операторов Гильберта — Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве* $L_2[0,1])$, *и*

$$\left\| P_i B_0 P_j \right\| \leq \alpha_i \beta_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

*где* $P_i$ *— проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству* $\sigma_i = \{\pi^2 i^2\}$, $(P_i x = (x, e_i)e_i, (\cdot,\cdot)$ *— скалярное произведение в* $L_2[0,1])$,

$$\alpha_i=\frac{1}{2}\sup_j\frac{|K_{ij}^{\sin}|}{j},\ \ K_{ij}^{\sin}=\int_0^1\int_0^1 K(t,s)\sin\pi jt\sin\pi is\,dt\,ds,$$

$$\beta_j=\frac{1}{\pi^2 j},\quad i,j=1,2,\ldots.$$

**Теорема 4.** *Пусть для любых функций* $K\in L_2([0,1]^2)$ *для последовательностей величин* $\gamma_1$ *и* $\gamma_2$, *определенных формулами*

$$\gamma_1(n)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\sum_{\substack{m\ge1\\ m\ne n}}\frac{n^2\left(\sup\limits_j\frac{|K_{mj}^{\sin}|}{j}\right)^2+m^2\left(\sup\limits_j\frac{|K_{nj}^{\sin}|}{j}\right)^2}{|n^2-m^2|^2}\right)^{1/2}<\infty,$$

$$\gamma_2(n)=\frac{1}{2\pi^2}\max\left\{\frac{n\sup\limits_j\frac{|K_{nj}^{\sin}|}{j}}{2n-1},\sum_{\substack{m\ge1\\ m\ne n}}\frac{m\sup\limits_j\frac{|K_{mj}^{\sin}|}{j}}{|n^2-m^2|}\right\}<\infty,$$

*выполнены условия:*

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_1(n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_2(n)=0.$$

*Тогда спектр* $\sigma(A-B)$ *оператора* $A-B$ *представим в виде*

$$\sigma(A-B)=\tilde{\sigma}_m\cup\bigcup_{n\ge m+1}\tilde{\sigma}_n,$$

*где* $\tilde{\sigma}_n$, $n\ge m+1$, *— одноточечные множества, а* $\tilde{\sigma}_m$ *— конечное множество с числом точек, не превосходящим m. Для собственных значений* $\tilde{\lambda}_n$ *из* $\tilde{\sigma}_n$ *имеет место оценка:*

$$\left|\tilde{\lambda}_n-\pi^2n^2-\frac{1}{2}|K_{nn}^{\sin}|+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{m\ge1\\ m\ne n}}\frac{|K_{mn}^{\sin}|\cdot|K_{nm}^{\sin}|}{n^2-m^2}\right|\le\text{const}\cdot n\cdot\sup_j\frac{|K_{nj}^{\sin}|}{j}\cdot\gamma_2(n).$$

*Для собственных функций* $\tilde{e}_n(t)$ *оператора (1) справедлива оценка:*

$$\left(\int_0^1\left|\tilde{e}_n(t)-\sqrt{2}\sin\pi nt+\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\sum_{\substack{m=1\\ m\ne n}}^{\infty}\frac{|K_{mn}^{\sin}|}{n^2-m^2}\sin\pi mt\right|^2dt\right)^{1/2}\le\text{const}\cdot n\cdot\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\ne n}}^{\infty}\frac{\sup\limits_j\frac{|K_{nj}^{\sin}|}{j}}{|n^2-m^2|^2}\right)^{1/2},$$

*где* $K_{ij}^{\sin}=\int_0^1\int_0^1 K(t,s)\sin\pi jt\sin\pi is\,dt\,ds$ *— коэффициенты разложения функции* $K(t,s)$ *в ряд Фурье по синусам.*

*Для последовательностей* $\gamma_1$ *и* $\gamma_2$, *заданных формулами*

$$\gamma_1(n)=\left(\sum_{m=1}^{n}\sum_{i\ge n+1}\frac{|\lambda_i|^2\beta_i^2\alpha_m^2+\beta_m^2\alpha_i^2|\lambda_m|^2}{|\lambda_m-\lambda_i|^2}\right)^{1/2}<\infty,$$

$$\gamma_2(n)=\max\left\{\max_{j\le n}\Big\{\sum_{i\ge n+1}\frac{|\lambda_i|\alpha_i\beta_i}{|\lambda_j-\lambda_i|}\Big\};\sup_{j\ge n+1}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\frac{|\lambda_i|\alpha_i\beta_i}{|\lambda_j-\lambda_i|}\Big\}\right\}<\infty,$$

*выполняются условия*

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_1(n)=0,\quad\lim_{n\to\infty}\gamma_2(n)=0.$$

На основе приведенной выше леммы сформулируем утверждение, справедливое для рассматриваемого оператора (1).

**Теорема 5.** *Пусть функция* $K \in L_2([0,1]^2)$. *Тогда, начиная с некоторого натурального* $n_0$, *оператор* $A-B$ *подобен оператору* $A-J_n X^*(n)$, $n \geq n_0$, *где* $X^*(n)$ *представим в виде (5), и* $\left\| P(\Delta_1(n), A) - P(\tilde{\Delta}_1(n), A-B) \right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Учитывая, что норма в последнем выражении берётся в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, получим окончательную оценку:

$$\left( \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^{n} \left( \int_0^1 x(s) \tilde{e}_j(s) ds \right) \tilde{e}_j(t) - 2 \sum_{j=1}^{n} \left( \int_0^1 x(s) \sin \pi js ds \right) \sin \pi jt \right]^2 dt \right)^{1/2} \to 0$$

для любого фиксированного $x$ из $L_2[0,1]$ при $n \to \infty$, где $\tilde{e}_j$ — собственные (и, возможно, присоединённые), функции оператора $A-B$.

## Литература


1. *Баскаков, А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. – 165 с.

2. *Баскаков, А. Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24, № 1. – С. 21–39.

3. *Баскаков, А. Г.* Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы в аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50, № 3. – С. 435–437.

4. *Баскаков, А. Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 3–32.

5. *Баскаков, А. Г.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 8. – С. 1424–1433.

6. *Баскаков, А. Г.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Изв. РАН. Сер. матем. – 2011. – Т. 75, № 3. – С. 3–28.

7. *Баскаков, А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами / А. Г. Баскаков, В. Б. Диденко // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 323–338.

8. *Ульянова, Е. Л.* Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерными: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Е. Л. Ульянова. – Воронеж, 1998. – 100 с.

9. *Ульянова, Е. Л.* О некоторых спектральных свойствах одного класса дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / Е. Л. Ульянова, А. Н. Шелковой // Вестник ВГУ, Серия физика, математика. – 2002. – № 2. – С. 106–110.

10. *Шелковой, А. Н.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / А. Н. Шелковой. – Воронеж, 2004. – 144 с.

11. *Шелковой, А. Н.* Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А. Н. Шелковой // Вестник факультета прикладной математики и механики. – 2000. – № 2. – С. 226–235.

12. *Шелковой, А. Н.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А. Н. Шелковой // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2016. – № 13. – С. 72–80.

13. *Шелковой, А. Н.* Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 4. – С. 18–33.
14. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Т. 3: Спектральные операторы / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М. : Мир, 1974. – 661 с.
15. *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.

УДК 517.9

# СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ И УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА — ПУАССОНА — ДАРБУ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

**Э. Л. Шишкина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Связь некоторых видов случайных блужданий на прямой и гиперболических уравнений типа уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу, впервые была обнаружена Сидни Гольдштейном и Марком Кацем. В статье приведено решение обобщенного линейного гиперболического уравнения типа уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу дробного порядка.
**Ключевые слова:** обобщение уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу, дробный оператор Бесселя, случайные —блуждания.

Наряду с диффузионными моделями стохастических блужданий изучаются модели, связанные с волновыми уравнениями. Первый вклад в этой области восходит к Сидни Гольдштейну [1] (1951). Он рассмотрел простейшее случайное блуждание на вещественной прямой, при котором частица, помещенная в начало координат в момент времени 0, движется с двумя конечными скоростями $\pm c$ изменяя свою текущую скорость в соответствии с простейшим пуассоновским процессом с постоянным параметром $\lambda$. Им было обнаружено, что распределение положения частицы $x$ во время $t$ является решением телеграфного уравнения вида

$$u_{tt}(x,t)+2\lambda u_t(x,t)=c^2u_{xx}(x,t).$$

Затем эта модель была детально рассмотрена Марком Кацем в [2] и Энцо Орсингером в [3]. Естественные обобщения на случай Пуассоновского процесса с функцией интенсивности $\lambda=\lambda(t)\in C^1(\mathbb{R})$ и на многомерный случай были рассмотрены в [4–7]. Модели случайных блужданий с дробными производными были рассмотрены в [8, 9].

В [10] было показано, что уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2a}{t}\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad a>0,\qquad t>0,\qquad x\in\mathbb{R},\qquad u=u(x,t) \tag{1}$$

определяет вероятностный закон случайного блуждания на $\mathbb{R}$. Явное распределение $p(x,t)$ положения произвольно движущихся частиц получаются путем решения начальной задачи для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (1).

В работе [7] поставлена, но не решена задача о нахождении решения дробной версии уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу вида (multi-dimensional fractional diffusion-wave equation)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2a}{t}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{\beta}u=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad 0<\beta<1, \tag{2}$$

$$u=u(x,t),\qquad x\in\mathbb{R},\qquad t>0.$$

При $\beta\in(0,1/2)$ случае частица в среднем движется медленнее, чем при рассмотрении модели (1), которая соответствует $\beta=1$. При $1/2<\beta<1$ частица в среднем движется быстрее.

Оператор $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t}=B_\gamma$ называется оператором Бесселя [11].

Определим дробную степень оператора Бесселя $B_\gamma$. В [12] явные формулы были выведены в виде композиций дробных интегралов Эрдейи — Кобера на пространствах распределения. Важный шаг был сделан в [13], в котором явные определения были получены в терминах гипергеометрических функций Гаусса. Более общий класс дифференциальных гипербесселевых операторов, связанных с интегральным преобразованием Обрешкова, был рассмотрен И. Димовски и В. Киряковой [14–16]. В [17–20] представления для дробных степеней оператора Бесселя были получены с использованием функций Лежандра в качестве ядер, и на их основе общие определения были упрощены и унифицированы с использованием стандартных обозначений дробного исчисления. В указанных работах были также получены важные обобщенные формулы Тейлора, которые устанавливают связь между целочисленными степенями оператора Бесселя (вместо производных в классической формуле Тейлора) с дробной степенью оператора Бесселя в качестве интегрального остатка. Дальнейшие исследования дробных степеней оператора $B_\gamma$ приведены в [21–23].

Пусть $\alpha>0$, $\gamma>0$. **Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси** $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ для $f\in L[0,\infty)$ определим формулой

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=(IB^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma}\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{x^2}\right)f(y)dy. \tag{3}$$

Пусть $n=[\alpha]+1$, $f\in L[0,\infty)$, $IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-}f, IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-}f\in C^{2n}(0,\infty)$. **Левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси типа Герасимова — Капуто** определим равенством

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=(IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+}B^n_\gamma f)(x). \tag{4}$$

Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_t u(x,t)=u_{xx}(x,t),\qquad 0\le\alpha<1/2, \tag{5}$$

с условиями

$$u(x,0)=1,\qquad u_t(x,0)=0. \tag{6}$$

Применяя преобразование Фурье к (5)–(6), получим

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_t \hat{u}(\xi,t)=-\xi^2\hat{u}(\xi,t),\qquad 0\le\alpha<1/2, \tag{7}$$

с условиями

$$\hat{u}(\xi,0)=1,\qquad \hat{u}_t(\xi,0)=0. \tag{8}$$

Решение задачи (7)–(8) получено в [22] и имеет вид

$$\hat{u}(\xi,t)=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,{}_2\Psi_2\left[\left.\begin{matrix}\left(1+\frac{\gamma}{2},\alpha\right),(1,1)\\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha)\end{matrix}\right|-\xi^2x^{2\alpha}\right],$$

где ${}_p\Psi_q$ — функция функции Фокса — Райта, являющаяся обобщением обобщенной гипергеометрической функции ${}_pF_q$, и имеет представление вида

$${}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1) & (a_2,A_2) & \dots & (a_p,A_p)\\ (b_1,B_1) & (b_2,B_2) & \dots & (b_q,B_q)\end{matrix};z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_1+A_1n)\cdots\Gamma(a_p+A_pn)}{\Gamma(b_1+B_1n)\cdots\Gamma(b_q+B_qn)}\frac{z^n}{n!}.$$

Тогда

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{A_\gamma t}(\mathcal{P}^\gamma_t)^{-1}t^{1-\alpha}H^{1,0}_{1,1}\left[|x|t^{-\alpha}\left|\begin{matrix}(\gamma+1-\alpha,\alpha)\\(0,1)\end{matrix}\right.\right],$$

где $A_\gamma=\dfrac{\pi}{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}$,

$$(\mathcal{P}^\gamma_x)^{-1}g(x)=\frac{2\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n\int\limits_0^x g(z)(x^2-z^2)^{n-\frac{\gamma}{2}-1}z^\gamma dz,$$

$n = \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1$, $H_{p,q}^{m,n}$ — H-функция Фокса, обобщающая G-функцию Мейера, определяется как интеграл Меллина — Барнса

$$H_{p,q}^{m,n}\left[ z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1)\ (a_2, A_2)\ \ldots\ (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1)\ (b_2, B_2)\ \ldots\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + B_j s) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod\limits_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j + A_j s)} z^{-s}\, ds,$$

где $L$ — некоторый контур, разделяющий полюса двух множителей в числителе.

**Литература**


1. *Goldstein, S.* On diffusion by discontinuous movements and thetelegraph equation / S. Goldstein // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1951. – V. 4. – P. 129–156.

2. *Katz, M.* A stochastic model related to the telegrapher's equation / M. Katz // Rocky Mountain J. Math. – 1974. – V. 4. – P. 497–509.

3. *Orsingher, E.* Hyperbolic equations arising in random models / E. Orsingher // Stochastic Process Appl. – 1985. – No 21. – P. 93–106.

4. *Orsingher, E.* A planar random motion governed by the two-dimensional telegraph equation / E. Orsingher // J. Appl. Probab. – 1986. – \No 23. – P. 385–397.

5. *Orsingher, E.* Probability law, flow function, maximum distribution of wave-governed random motions, and their connections with Kirchhoff's laws / E. Orsingher // Stochastic Process Appl. – 1990. – No 34. – P. 49–66.

6. *Iacus, S.* Statistical analysis of the inhomogeneous telegrapher's process / S. Iacus // Statistics & Probability Letters. – 2001. – No 55. – P. 83–88.

7. *Garra, R.* Random flights related to the Euler — Poisson — Darboux equation / R. Garra, E. Orsingher // Markov processes and related fields. – 2016. – No 22. – P. 87–110.

8. *Metzler, R.* The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // Physics Report. – 2000. – No 339. – P. 1–77.

9. *Gorenflo, R. R.* Discrete and continuous random walk models for space-time fractional diffusion / R. R. Gorenflo, A. Vivoli, F. Mainardi // Nonlinear Dynamics. – 2004. – V. 38. – P. 101–116.

10. *De Gregorio, A.* Flying randomly in $R^d$ with Dirichlet displacements / A. De Gregorio, E. Orsingher // Stoch. Process. Appl. – 2012. – V. 122, No 2. – P. 676–713.

11. *Киприянов, И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. – Москва : Наука-Физматлит, 1997. – 204 с.

12. *McBride, A. C.* Fractional calculus and integral transforms of generalized functions / A. C. McBride. – London : Pitman, 1979. – 179 p.

13. *Sprinkhuizen-Kuyper, I. G.* A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator / I. G. Sprinkhuizen-Kuyper // J. Math. Analysis and Applications. – 1979. – V. 72. – P. 674–702.

14. *Dimovski, I. H.* Convolutional Calculus / I. H. Dimovski. – Kluwer : Dordrecht, 1990. – 184 p.

15. *Dimovski, I. H.* Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's *G*-function / I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova // in: "Complex Analysis and Applications'83" (Proc. Intern. Conf. Varna 1983), Sofia. – 1985. – P. 45–66.

16. *Kiryakova, V.* Generalized fractional calculus and applications / V. Kiryakova. – London : Pitman. Notes Math. 301, Longman Scientific & Technical, Harlow, Co-publ. New York: John Wiley, 1994. – 388 p.

17. *Ситник, С. М.* О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям / С. М. Ситник // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2010. – Т. 12, № 2. – С. 69–75.

18. *Ситник, С. М.* Об обобщении формулы Хилле — Тамаркина для резольвенты на случай операторов дробного интегрирования Бесселя / С. М. Ситник // III Международная конференция: «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик. – 2006. – С. 269–270.

19. *Ситник, С. М.* Формула Тэйлора для операторов типа Бесселя / С. М. Ситник, Д. С. Коновалова // В сб.: Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы «Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения – VII» – Воронеж. – 1996. – С. 102.

20. *Sitnik, S. M.* Transmutations and applications: A survey / S. M. Sitnik – arXiv:1012.3741v1, 2010. – 141 p.

21. *Shishkina, E. L.* On fractional powers of Bessel operators / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions. – 2017. – V. 8, No 1. – P. 49–67.

22. *Shishkina, E. L.* A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov – Caputo type / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // Mathematics. – 2019. – V. 7, No 12. – P. 1–21.

23. *Ситник, С. М.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 224 с.

УДК 517.9

# ВЕСОВОЕ СФЕРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ И ЕГО ОБРАЩЕНИЕ

**Э. Л. Шишкина[1], Н. И. Лобанова[2]**

[1]*Воронежский государственный университет*
[2]*Муниципальное учреждение дополнительного образования «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района»*

**Аннотация.** В этой статье получена одна из формул обращения для весового сферического среднего. Задача обращения весового сферического среднего имеет множество приложений в различных математических, физических и биологических областях. Прежде всего, эта проблема напрямую связана с обратными задачами для гиперболических уравнений. Во-вторых, если мы имеем дело с различными методами визуализации, такими как компьютерная томография, радар и сонар, а функции сигналов имеют радиальную симметрию, то мы приходим к задаче обращения весового сферического среднего.
**Ключевые слова:** весовое сферическое среднее, оператор Бесселя, гиперболический B-потенциал Рисса.

Неотъемлемой частью теории дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа являются сферические средние

$$M(x,r,u)=\frac{1}{|S_n(1)|}\int\limits_{S_n(1)}u(x+\beta r)dS, \qquad x=(x_1,...,x_n), \tag{1}$$

где $S_n(1)$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат, $\beta$ — координата на этой сфере, $|S_n(1)|$ — площадь такой сферы. В случае, когда рассматриваются уравнения гиперболического типа с оператором Бесселя вида $(B_\nu)_t=\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\nu}{t}\frac{d}{dt}$, вместо сферических средних возникают весовые сферические средние (2).

Восстановление функции по известному подмножеству ее сферических средних (1) широко известная задача в прикладной математике. Его связь с фотоакустическими изображениями заключается в следующем.

Пусть скорость распространения звука в среде будет постоянной величиной. Тогда давление в определенный момент времени выражается через среднее сферическое давления и его производной по времени в некоторый предыдущий момент времени [1]. Отсюда следует, что для получения фотоакустического изображения требуется восстановить функцию по ее сферическому среднему.

Задача восстановления функции $f$ с носителем в шаре $B\in\mathbb{R}^n$, если сферические средние $f$ известны по всем геодезическим сферам с центром на границе $\partial B$, была решена, например, в [1]. Примечательно, что формулы восстановления в этой работе различны для четной и нечетной размерности евклидова пространства $n$.

В этой работе мы рассмотрим весовое сферическое среднее (см. [2–4]) функции $f(x)$, $x\in\overline{\mathbb{R}}^n_+$ для $n\geq 2$ вида

$$(M_t^\gamma f)(x)=(M_t^\gamma)_x[f(x)]=\frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(n)}{}^\gamma\mathbb{T}_x^{t\theta}f(x)\theta^\gamma dS, \tag{2}$$

где

$$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, x_1>0,\ldots,x_n>0\},$$

$\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n),\ \gamma_i>0,\ i=1,...,n,\ |\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n,\ \theta^\gamma=\prod_{i=1}^n\theta_i^{\gamma_i},\ S_1^+(n)=\{\theta:|\theta|=1,\theta\in\mathbb{R}_+^n\}$ — часть сферы в $\mathbb{R}_+^n$ и $|S_1^+(n)|_\gamma$ дается формулой

$$|S_1^+(n)|_\gamma=\int\limits_{S_1^+(n)}x^\gamma dS=\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}.$$

В формуле (2) ${}^\gamma\mathbb{T}_x^y$ — многомерный обобщенный сдвиг

$$({}^\gamma\mathbb{T}_x^y f)(t,x)=({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}...{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n}f)(t,x).$$

Каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i},\ i=1,\ldots,n$ дается формулой (см. [5], стр. 122, формула (5.19))

$$({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}f)(t,x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\times f(t,x_1,...,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},...,x_n)\,d\varphi_i,$$

$\gamma_i>0,\ i=1,...,n.$ При $\gamma_i=0$ обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ определен как

$${}^0T_{x_i}^{y_i}=\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}.$$

Для $n=1$ положим $M_t^\gamma[f(x)]={}^\gamma T_x^t f(x).$

**Теорема.** Пусть $f=f(x)\in C^2(\mathbb{R}_+^n),$ такая что $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_i=0}=0,\ i=1,...,n$ и

$$(\mathbb{M}_t^{\gamma,k}f)(x)=\frac{t^{k-n-|\gamma|}}{2C(k-n-|\gamma|+1)}\Big(\mathcal{P}_t^{k-n-|\gamma|+1}t^{n+|\gamma|-1}(M_\rho^\gamma f)(x)\Big)(t),$$

где $M_\rho^\gamma f$ — весовое сферическое среднее (2) функции $f$,

$$\mathcal{P}_t^\nu=\frac{2C(\nu)}{t^{\nu-1}}\int\limits_0^t\left(t^2-\tau^2\right)^{\frac{\nu}{2}-1}f(\tau)d\tau,$$

— оператор Пуассона, $C(\nu)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}.$ Тогда функция $f$ может быть восстановлена по ее весовому сферическому среднему по формуле

$$f(x)=\frac{e^{-t}|S_1^+(n)|_\gamma}{N(2m,\gamma,n)}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\Delta_\gamma)_x\right)^m e^t\int\limits_0^\infty e^{-\tau}(\mathbb{M}_\tau^{\gamma,2m}f)(x)d\tau,$$

где

$$N(\alpha,\gamma,n)=\frac{2^{\alpha-n-1}}{\sqrt{\pi}}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$(\Delta_\gamma)_x=\sum_{i=1}^n(B_{\gamma_i})_{x_i},\qquad (B_{\gamma_i})_{x_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad \gamma_i\ge 0,\qquad i=1,...,n.$$

## Литература

1. *Finch, D.* Determining a function from its mean values over a family of spheres / D. Finch, S. Patch, K. Rakesh // SIAM J. Math. Anal. – 2004. – V. 35, No 5. – P. 1213–1240.

2. *Ляхов, Л. Н.* Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин, Э. Л. Шишкина // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 516–528.

3. *Ляхов, Л. Н.* Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени / Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин, Э. Л. Шишкина // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 533–538.

4. *Ситник С. М.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 224 с.

5. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. М. Левитан // Успехи матем наук. — 1951. — Т. VI, В. 2(42). – С. 102–143.

УДК 517.968.7

# НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

**А. И. Эгамов**

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского*

**Аннотация.** В настоящей статье приведен пример начально-краевой задачи для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Показано существование его решения, единственность. Приведена связь его решения и решения линейной начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Исходное уравнение является представителем класса интегро-дифференциальных уравнений, которое изучалось автором в различных работах.
**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, начально-краевая задача, гиперболическое уравнение.

В настоящей статье приведен пример начально-краевой задачи для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, изучение которого и подробное описание приведено в [1]. Показана связь его и линейной начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Там же в [1] приведены пять примеров из этого класса, еще два примера рассмотрены в [2–3].

Рассмотрим управляемый процесс колебаний тонкой однородной струны. На процесс колебаний струны осуществляется некое воздействие для достижения определённых целей. Запишем математическую постановку задачи.

## Основная начально-краевая задача

На множестве $Q=(0,l)\times(0,T)$, $l>0$, $T>0$; найти функцию $y(x,t)$ — дважды непрерывно дифференцируемую по $t$ и дважды непрерывно дифференцируемую по $x$; непрерывную дифференцируемую по $t$ и непрерывно дифференцируемую по $x$ в $\overline{Q}=[0,l]\times[0,T]$ — решение уравнения

$$y''_{tt}(x,t)=a^2y''_{xx}(x,t)+u(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям второго рода

$$y'_x\left(0,t\right)=y'_x\left(l,t\right)=0, \tag{2}$$

и начальным

$$y(x,0)=\varphi(x), \quad y'_t(x,0)=\psi(x) \tag{3}$$

с условиями связи типа (2), наложенными на начальные функции. Здесь $a$ — константа, $u(x,t)$ — некое управление, функции $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$ задают начальные данные струны, $\varphi(x)\in C^1[0,l]$, $\psi(x)\in C[0,l]$, и они удовлетворяют условиям связи (2).

Пусть управление с обратной связью — непрерывная функция $u(x,t)$:

$$u(x,t)=(b(x)-R[y])y(x,t)-2Q[y]y'_t(x,t), \tag{4}$$

где операторы $Q[y]:C^2(\overline{Q})\to C^1[0,T]$, $R[y]:C^2(\overline{Q})\to C[0,T]$.

Определим более подробно операторы

$$Q[y]\equiv q(t)=\int_0^l b(x)y(x,t)dx, \quad q(0)=0, \quad R[y]\equiv r(t)=q'_t(t)+q^2(t),$$

$$R[y] \equiv r(t) = \int_0^l b(x) y_t'(x,t)dx + \left( \int_0^l b(x) y(x,t)dx \right)^2,$$

где $b(x)$ — непрерывная функция. Производную и интеграл можно менять местами [5]. Кроме того, справедливы равенства:

$$\int_0^l \psi(x)dx = 1, \qquad \int_0^l b(x)\varphi(x)dx = 0. \tag{5}$$

Поэтому уравнение (1) перепишется в виде

$$y_{tt}''(x,t) = a^2 y_{xx}''(x,t) + y(x,t)\left( b(x) - \int_0^l b(x) y_t'(x,t)dx - \left( \int_0^l b(x) y(x,t)dx \right)^2 \right) -$$

$$-2y_t'(x,t)\int_0^l b(x) y(x,t)dx.$$

## Вспомогательная начально-краевая задача

Пусть функция $z(x,t)$ — классическое решение гиперболического уравнения на множестве $Q$:

$$z_{tt}''(x,t) = a^2 z_{xx}''(x,t) + b(x) z(x,t), \tag{6}$$

с граничными и начальными условиями

$$z_x'(0,t) = z_x'(l,t) = 0, \qquad z(x,0) = \varphi(x), \qquad z_t'(x,0) = \psi(x). \tag{7}$$

Функции $b(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены выше. Известно [4], что существует единственное решение задачи (6), (7).

## Основная теорема

Пусть $P(t) = \int_0^l z_t'(x,t)dx$. Из [1] следует справедливость следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть* $P(t) \neq 0$ *на отрезке* $t \in [0,T]$. *Решение нелинейной задачи (1)-(5) выражается через решение линейной задачи (5)-(7):*

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{\int_0^l z_t'(x,t)dx} \equiv \frac{z(x,t)}{P(t)}. \tag{8}$$

Учитывая (8), нетрудно видеть, что

$$Q[y] \equiv q(t) = \frac{P_t'(t)}{P(t)}; \;\; R[y] \equiv r(t) = \frac{P_{tt}''(t)}{P(t)}. \tag{9}$$

Таким образом, решение нелинейной задачи (1)-(5) сводится к решению линейной задачи (5)-(7), поэтому, далее, можно применять методы решения для линейных задач, например, при лучшей гладкости начальных функций метод разделения переменных.

## Литература

1. *Бураго, П. Н.* О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // П. Н. Бураго, А. И. Эгамов // Журн. Средневолж. матем. о-ва. 2019. - Т. 21, № 4. - С. 413–429. - doi: 10.15507/2079-6900.21.201904.413-429.

2. *Эгамов, А. И.* Об одном специфическом уравнении гиперболического типа / А. И. Эгамов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов конференции. Воронеж. 11–13 ноября 2019 г. – ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет». Издательство: Научно-исследовательские публикации, 2020. – С. 141–144.

3. *Эгамов, А. И.* Об одной начально-краевой для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения / А. И. Эгамов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – Суздаль. 3–8 июля 2020 г. Суздаль, 2020. – С. 182–183.

4. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики. Учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М. : Физматлит, 2004. – 400 с.

5. *Позняк, Э. Г.* Основы Математического анализа. Часть 2 / Э. Г. Позняк, В. А. Ильин. – Москва : Физматлит, 2002. – 464 с.

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

UDC 519.723

# ENCODING AND CRYPTO TRANSFORMATIONS BASED ON THE ENTROPY APPROACH

**B. N. Voronkov[1], A. S. Schegolevatykh[2]**

*[1]Voronezh State University*
*[2]JSC "Concern "Sozvezdie", Voronezh*

**Annotation.** The probabilistic approach is considered to choose unknown function, used for coding and crypto operations. The choice optimum parameter channel relationship and source of the message are Motivated.
**Keywords:** probability of the code opening, entropy, an unknown function, probability density, code distance.

## Introduction

In connection with broad use information channel at present it is necessary to use functions, that must be unknown for external watcher. For instance, it is crypto operation, identification and authentication of the messages in communication networks. In enumerated system by entry it is limited ensemble discrete elementary signal. Output of such systems is also collection discrete signal, but their type is changed depending on application. In system of the crypto operation useful signal (the cryptogram) usually has same format, as input. Additionally function of the crypto operation must be reversible. In system of the identifications useful signal usually presents by the four digit decimal number, with which compare the personal number of the user. The binary code most often introduces in a system of the authentications useful signal.

## Entropy approach method

The specified functions are expected unknown for external watcher. We shall elaborate the degree to lacks of information to functions. We shall consider that external watcher has some information on of these functions, for instance, way of its reception. From that volume of the knowledges, what he disposes, watcher defines, to what ensemble belongs the sought function. There is full information beside external watcher about this ensemble function, however he does not know, what exactly function is used in concrete event. The model of the specified system is brought in Fig. 1. The system is divided on two parts, one of which completely known external watcher, but the second contains information, an unknown him. The known block capable to execute one of possible $M$ function.

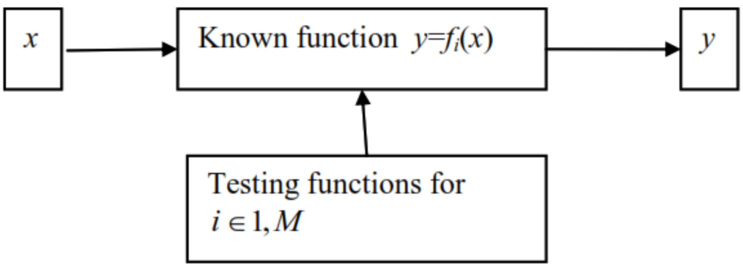



*Fig. 1. Structured model of searching the unknown function*

We consider that watcher must know features of the function for final number of importances of the argument $x$. These features with information on ensemble function is used by watcher for estimation of importances $y$. Intuitively it is expected that this uncertainty must decrease with increase the number unknown pair $(x, y)$ until watcher will not be able exactly to select one function from ensemble, which must belong to искомая function. We shall build the probabilistic model to sought function. We consider that sought function presents itself image ensemble element x on ensemble of $q$ elements u. For real function of importance pair $(x, y)$ are also considered real.

Probabilistic model describes as

$$y = f_a(x), \tag{1}$$

where $a$ – an uniformly distribuied stochastic variable of the set $A$, portioned on numerical ensemble $a = \overline{1, M}$, i. e.,

$$P[a = i] = \frac{1}{M}, \quad \forall i = \overline{1, M}. \tag{2}$$

We shall select the sought subset $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{j}$, where $y_i = f_a(x_i)$. It is possible to exclude from $\{f_i(x)\}_{i=1}^{M}$ all functions, which do not fall into subset points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{j}$. The remaining uncertainty $y_{j+1}$ to given input signal is defined by conditional probability for each possible output signal $y_{j+1}$:

$$P\left[Y_{j+1} \middle| \overline{x}_{j+1}, \overline{Y}_j = \overline{y}_j\right] = \frac{Q_{j+1}(\overline{x}_{j+1}, \overline{y}_{j+1})}{Q_j(\overline{x}_j, \overline{y}_j)}, \tag{3}$$

where $Q(\cdot)$ – an function amount in ensemble $F$, having points in argument $(\cdot)$; vectors mean collection of variables

$$\overline{x}_j = (x_1, ..., x_j),$$
$$\overline{y}_j = (y_1, ..., y_j).$$

As measures for estimation of $Y_{j+1}$ use conditional entropy

$$H_j(\overline{x}_{j+1}) = -\sum_{\overline{y}_{j+1}} P\left[\overline{Y}_{j+1} = \overline{y}_{j+1} \middle| \overline{x}_{j+1}\right] \log\left(P\left[Y_{j+1} = y_{j+1} \middle| \overline{x}_{j+1}, \overline{Y}_j = \overline{y}_j\right]\right), \tag{4}$$

where

$$P\left[\overline{Y}_{j+1} = \overline{y}_{j+1} \middle| \overline{x}_{j+1}\right] = \frac{Q_{j+1}(\vec{x}_{j+1}, \vec{y}_{j+1})}{M}. \tag{5}$$

Entropy is limited from below by $\log(q)$, i. e.,

$$H_j(\overline{x}_{j+1}) \geq \log(q). \tag{6}$$

We define entropy $H_j(x_1)$ as

$$H_j(x_1) = -\sum_{\overline{y}_{j+1}} P\left[Y_1 = y_1 \middle| x_1\right] \log\left(P\left[Y_1 = y_1 \middle| x_1\right]\right). \tag{7}$$

We define the uncertainty of $y_1$, when pais $(x_i, y_i)$ are beforehand given. Conditional probability, coming from formula (4), possible expressed as

$$P\left[Y_{j+1} = y_{j+1} \middle| \overline{x}_{j+1}, \overline{Y}_j = \overline{y}_j\right] = \frac{P(\overline{Y}_{j+1} = \overline{y}_{j+1} | \overline{x}_{j+1})}{P(\overline{Y}_j = \overline{y}_j | \overline{x}_j)}. \tag{8}$$

Now we calculate the cumulative amount of conditional entropy for given to sequence $x_1, ...., x_j$. Equations (4) and (8) give

$$\sum_{j=0}^{i-1} H_j(\overline{x}_{j+1}) = -\sum_{\overline{y}_{ij+1}} P\left[\overline{Y}_j = \overline{y}_j \middle| \overline{x}_i\right] \log\left(P\left[\overline{Y}_i = \overline{y}_i \middle| \overline{x}_i\right]\right). \tag{9}$$

Substituting (5) in (9), we get

$$\sum_{j=0}^{i-1} H_j(\overline{x}_{j+1}) = -\sum_{\overline{y}_{ij+1}} \frac{Q_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)}{M} \log \frac{Q_i(\overline{x}, \overline{y})}{M}. \tag{10}$$

Here $Q_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ means the number of functions in $F$, containing points $(x_1, y_1), \ldots, (x_i, y_i)$.

For given sequences amount in expression (10) is not decrease when increase $i$, since all entropies are rice.

The amount (10) is a maximum, when more one functions satisfies the ensemble a point for all possible values of $\overline{y}_i$. Then

$$\max \sum_{j=0}^{i-1} H_j(\overline{x}_{j+1}) = \log M. \tag{11}$$

The maximum of the expression (11) is reached for a certain sequence $x_1, ...., x_i$ is reached when if two set functions of $F$ are not equal.

Expressions (6)-(11) define the standard situation for different samples. Beside user of the network has a choice. He can show a preference maximizations an uncertainty $H_j(\cdot)$ for each j for count $q$ possible equiprobable values $y_{j+1}$. He can choose $F$, losing maximum uncertainty for each $j$, as from $j = 0$ and so on, enlarging $j$. Expressions (6) and (11) then give

$$\log M \le \sum_{j=0}^{i-1} \log q. \tag{12}$$

On the other hand, user to telecommunications can show a preference unknown function even though large number pairs $(x, y)$ known external watcher. Then the equation (11) points to low uncertainty of the estimation $y$. Note in equation (6) that conditional entropy $H_j$ is limited overhand $\log(q)$. We shall consider unknown functions that

$$H_j(\overline{x}_{j+1}) = \begin{cases} \log(q), j \le k-1 \\ 0, j \ge k-1 \end{cases}, \quad \forall \vec{x}_{j+1}, \tag{13}$$

then equation (11) will take type

$$k = \frac{\log M}{\log q}, \quad \text{or} \quad q^k = M. \tag{14}$$

Entropy in formula (4) has a maximum if and only if all conditional probabilities are equal, i. e.,

$$P\left[Y_{j+1} \middle| \overline{x}_{j+1}, \overline{Y}_j = \overline{y}_j\right] = \frac{1}{q}. \tag{15}$$

Equations (3), (13) and (15) give

$$Q_{j+1}(\overline{x}_{j+1}, \overline{y}_{j+1}) = \frac{1}{q} Q_j(\overline{x}_j, y_j), \quad j \le k-1. \tag{16}$$

What follows from expressions (5), (7), (13), equation (16) fair for $j = 0$ if define

$$Q_0 = M. \tag{17}$$

Equations (16) and (17) show that necessary and sufficient condition for unknown function to have a maximum uncertainty, what follows from expression (13), will

$$Q_j(\overline{x}_j, \overline{y}_j) = \frac{M}{q}. \tag{18}$$

Equations (14) and (18) for $j = k$ give the maximum uncertainty condition, when

$$Q_k(\overline{x}_k, \overline{y}_k) = 1, \forall(\overline{x}, \vec{y}). \tag{19}$$

Now we shall show that this also sufficient conditions for maximum uncertainty. The expression (19) shows that exactly one importance of the function gets through determined set points $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Then exactly $q$ function get through points $(x_1, y_1), ..., (x_{k-1}, y_{k-1})$ for $q$ different samples $y_k$. Consequently,

$$Q_{k-1}(\overline{x}_{k-1}, \overline{y}_{k-1}) = q.$$

Repeating argument p times, we shall get,

$$Q_{k-p}(\overline{x}_{k-p}, \overline{y}_{k-p}) = q^p.$$

It is received the same result as in formula (18), if substitute $M$ from expression (14) and change $p$ on $k - j$.

Consequently, an unknown function has a maximum uncertainty if Hamming distance more, then $n-k$.

If ensemble $q^k$ function, for which Hamming distance more, than $n-k$, that it without fall has an unknown function with maximum uncertainty. Two different functions in this ensemble are not coincide for $k$ different arguments. Thereby,

$$Q_k(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \le 1.$$

Since, the full set $q^k$ function falls into ensemble, that must be one, taking only one importance in current whole of ensemble of possible importances. Thence, i. e., this function possesses the maximum uncertainty.

The finding unknown function with maximum uncertainty is directly connected with existence of the codes to dimension $n$, built from alphabet, consisting of $q$ symbols with minimum Hamming distance $n-k+1$, where $k$ — a number of information symbols. The linear codes of Galois field GF(q) for this event are considered in [2].

Probability $p(m)$ from zeroes $m$ is $p(m) = p^m(1-p)$, where $m = 0, 1, \ldots$ Adding on all possible lengths $m$, we have probability of the appearance free amount zeroes

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^m(1-p) = (1-p)\sum_{m=0}^{\infty} p^m = \frac{1-p}{1-p} = 1. \tag{20}$$

Average number of sent symbols we find. For this it is necessary to pack product of probability of the appearance on number of the numerals, sent in each event. Average length such series will

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot p^m(1-p) = p(1-p)\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot p^{m-1} = \frac{p(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}. \tag{21}$$

For error correction, the number which $s > 2$, is not enough condition to between combinations of the code with a minimum code distance $d - 2s + 1$, it is necessary to provide the length of the code $n$ should satisfy the condition

$$n = 2^k - 1. \tag{22}$$

Herewith $n$ will always be an uneven number; $k$ defines from (14) is the choice of the number checking symbols $n_K$ and is connected with $n_K$ and $s$ by following correlation:

$$n_K \le ks = [\log_2(n+1)]s. \tag{23}$$

On the other hand, number checking symbols $n_K$ is defined forming polynomial and is its degree. Under greater length code $k$ becomes very large, that causes wholly determined difficulties under technical realization encoding and decoding device. At part of information bits occasionally remains unused. In such events for determination comfortable to use expression

$$2^k - 1 = nC, \tag{24}$$

where $C$ is one of the multiplicands, on which decomposes the number $n$.

The relations between $n$, $C$ and $k$ are presented in table 1.

For instance, with $k = 10$ lengths to code combination can be equal 1023 $(C = 1)$ and 341 $(C = 3)$, and 33 $(C = 31)$, and 31 $(C = 33)$. Understandable that $n$ can not be less than $n_K = k \cdot s$. $C$ influences upon choice of the minimum polynomial serial numbers, since indices originally chosen polynomial multiply with $C$. Building forming polynomial is produced with the help of so named minimum polynomial, which are prime irreducible polynomials, shown in table 2 [2].

The generating polynomial presents itself product uneven minimum polynomial and is their least common multiple (LCM). Maximum order $\rho$ defines number last from chosen tabular minimum polynomials

$$\rho = 2s - 1.$$

The polynomial order is used at determination of the number of the multiplicands. For instance if $s = 6$, then $\rho = 2s - 1 = 11$. Since for construction $K(x)$ are used only uneven polynomials, that them

Table 1

| No | $k$ | $n=2^h-1$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 7 | 1 |
| 2 | 4 | 15 | 5; 3 |
| 3 | 5 | 31 | 1 |
| 4 | 6 | 63 | 7;; 3; 3 |
| 5 | 7 | 127 | 1 |
| 6 | 8 | 255 | 17; 5; 3 |
| 7 | 9 | 511 | 7; 3; 7 |
| 8 | 10 | 1023 | 3; 11; 3 |
| 9 | 11 | 2047 | 89; 23 |
| 10 | 12 | 4095 | 3; 3; 5’ 7; 13 |

Table 2

| No | Polynomial degree | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 1 | 111 | 1011 | 10011 | 100101 | 1000011 | 10001001 | 100011101 | 1000010001 |
| 3 | | | 1101 | 11111 | 111101 | 1010111 | 10001111 | 101110111 | 1001011001 |
| 5 | | | | 111 | 110111 | 1100111 | 10011101 | 111110011 | 1100110001 |
| 7 | | | | 11001 | 101111 | 1001001 | 11110111 | 101101001 | 1010011001 |
| 9 | | | | | 110111 | 1101 | 10111111 | 110111101 | 1100010011 |
| 11 | | | | | 111011 | 1101101 | 11010101 | 111100111 | 1000101101 |
| 13 | | | | | | | 10000011 | 100101011 | 1001110111 |
| 15 | | | | | | | | 111010111 | 1101100001 |
| 17 | | | | | | | | 010011 | 1011011001 |
| 19 | | | | | | | 11001011 | 101100101 | 1110000101 |
| 21 | | | | | | | 11100101 | 110001011 | 1000010111 |
| 23 | | | | | | | | 101100011 | 1111101001 |
| 25 | | | | | | | | 100011011 | 1111100011 |
| 27 | | | | | | | | 100111111 | 1110001111 |
| 29 | | | | | | | | | 1101101011 |

will be: $M_1(x)$, $M_3(x)$, $M_5(x)$,... Senior of them has an order $\rho$. As it seen, number of the multiplicands $K(x)$ is 6, i. e., the number of corrected errors. Thereby, number minimum polynomial, participating in construction of generating polynomials, is $L=s$, but the senior degree is $l=k$ ($l$ references in tabl. 2 column, from which is chosen polynomial for construction $K(x)$).

The generating polynomial, obtained as a result of chosen minimum, polynomial multiplication

$$\beta = n_K \le ls = k \cdot s,$$

or in usual form

$$K(x) = LGM[M_1(x)\cdot M_3(x)...M(x)].$$

Decoding the BCH codes is produced by the same methods, as decoding cyclic codes with. However whereas, practically all BCH codes are presented by combinations with $n \ge 15$, can appear the more complex variants, when for finding and corrections errors necessary to produce the large number of cyclic shifts. In this case for relief possible combination, got after $k$ times shifts and summations with the remainder, shift not to the right, but on $n-k$ shifts to the left. This reasonable does only under condition $k > n/2$.

As an illustration of the stated material shall consider the determination maximum amount information bit of the systematic code, correcting single error if possible length of the code is 10 symbols.

The decision. In binary code for correction of the single error correlation between number information bit and amount correcting bit must satisfy the following correlations:

$$n_K \geq \log_2(n+1), \quad n = n_K + n_И,$$

where $n$ – a general length of the code combination.

This inequality possible to solve graphically, using software package Mathcad. The scheme of the decision is brought in Fig. 2.

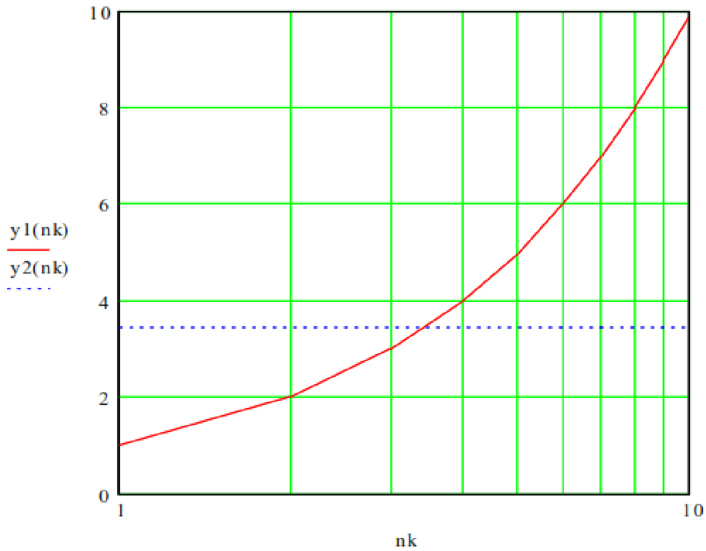



*Fig. 2. The scheme of the decision*

The decision is $n_K \geq 3{,}459$, i. e. for an integer number it is $n_K = 4$. The maximum number information digits are $10 - 4 = 6$.

**Conclusion**

Got results show that use unknown function with maximum uncertainty allows to build the communications network, which worker signals have a minimum Hamming distance, as well as form the pseudorandom signals, providing maximum privacy under given range of the action. The results of the functioning can be applying for building of the codes, providing given probability of the correction bit error [3], as well as for making cipher cryptostability [4].

**References**

1. *Hamming, R. W.* Coding and Information Theory / R. W. Hamming. – New York : McGraw-Hill, 1980. – 258 p.

2. *Peterson, W. W.* Error-Correcting Codes / W. W. Peterson, E. J. Weldon. – New York : MIT Press, 1972. – 560 p.

3. *Schegolevatyh, A. S.* Increasing noiseproof factor channel relationship, using cyclic codes / A. S. Schegolevatyh //Theory and technology radio communications, 2019. – P. 96 – 101.

4. *Stollings, W.* Cryptography and protection of the networks: principles and practice / W. Stollings. – M. : Publishing house "Williams", 2001. – 672 p.

УДК 519.688

# АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ОСЦИЛЛОГРАММ ПРИ МОНИТОРИРОВАНИИ СОСТОЯНИЯ КАРДИОЛОГИЧЕСКИХ БОЛЬНЫХ

**Г. В. Абрамов, Д. Г. Абрамов, И. П. Половинкин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Развитие медицинских информационных систем требует совершенствования средств диагностики и мониторинга. Такие средства должны предоставлять расширенную диагностику и автоматическую обработку информации. Перспективным с этой точки зрения является метод объемной компрессионной осциллометрии. Однако в настоящее время результаты диагностики требуют корректировки опытных врачей. В работе рассмотрена модель процессов при измерении артериального давления, проведено сравнение с экспериментальными данными и предложен алгоритм определения артериального давления. Приборы, построенные на основе этого алгоритма, позволят проводить расширенное мониторирование состояния пациентов без непосредственного участия врача, а встраивание их в медицинскую систему позволит оперативно реагировать на изменение состояния больных.

**Ключевые слова:** алгоритм определения артериального давления, объемная компрессионная осциллометрия, осцилляция, мониторинг состояния больных, артериальное давление, медицинская информационная система, математическое моделирование.

## Введение

Медицинские информационные системы (МИС) являются базой для мониторинга здоровья человека. Они выполняют различные задачи (накопления данных, диагностики, мониторирования и консультации, а также обеспечения процесса медицинского обслуживания). Одним из путей повышения эффективности таких систем является совершенствование средств диагностики и мониторинга состояния больных. Получение объективных характеристик течения болезни позволяет врачу оперативно корректировать процесс лечения. Особенно это важно для болезней, представляющих угрозу жизни. Первое место в мире по причинам смертности являются болезни сердечно-сосудистой системы. При лечении заболеваний сердечно-сосудистой системы одним из основных показателей является артериальное давление. Поэтому исследования, направленные на совершенствование систем мониторинга, являются актуальными.

Для измерения артериального давления в настоящее время используются тонометры, принцип работы которых основан на фиксации тонов Короткова. Этот метод является основан на фиксации высокочастотных колебаний стенки артерии и окружающих тканей, которые возникают на фоне волны резкого расправления, пережатого внешним давлением сосуда [1]. Появление тонов определяется свойствами стенок артерии и окружающих тканей. При измерении, так как измерения косвенные, предполагается, что свойства стенок артерий, окружающих тканей у всех пациентов обладают одинаковыми свойствами. И возникновение звуковых колебаний обусловлено только изменением артериального давления и не зависит от других параметров, т. е. не учитываются индивидуальные особенности организма человека. Но индивидуальные особенности человека оказывают влияние на результаты измерений. Известны феномены «бесконечный тон Короткова», «аускультативный провал», при которых корректное определение артериального давления данным методом невозможно.

В качестве альтернативы можно рассматривать осциллометрические методы. В последние годы создана целая индустрия по производству автоматических и полуавтоматических измерителей АД, работающих по осциллометрическому методу. Этот метод базируется на анализе пульсаций (осцилляций) давления воздуха в компрессионной манжете, возникающих в процессе сравнения величины этого давления с артериальным давлением. Считается, что возникновение этих осцилляций непосредственно не связано с равенством этих двух величин, что заставляет искать лишь корреляционные зависимости между осцилляциями и величиной АД, а затем на основе этих зависимостей вычислять предполагаемые значения величин систолического и диастолического значений артериального давления [2].

Известна разновидность осциллографического метода: метод объемной компрессионной осциллометрии (ОКО), использующий интегрирование осциллограммных кривых. На основе имеются разработки для определения АД по колебаниям давления в манжете при наборе или сбросе давления [3]. Это дает возможность проводить более точную диагностику пациентов. Однако существующие алгоритмы для определения АД имеют достаточно большую погрешность и требует корректировку высококвалифицированного врача.

Поэтому актуальна разработка алгоритма для автоматического определения артериального давления на основе анализа основных процессов, проходящих в сердечно-сосудистой системе, а также алгоритмов работы системы измерения. Предпочтение при этом получают алгоритмы, реализованные без сложных алгоритмических и математических решений. Это позволит производить достаточно дешевые и надежные приборы для диагностики состояний пациентов, позволяющие выделять их индивидуальные особенности. Разработка алгоритма проводится на основе математической модели процессов при измерении артериального давления.

## 1. Материалы и методы

### *1.1. Математическая модель процессов при измерении артериального давления*

При рассмотрении процессов при измерении артериального давления необходимо учитывать, что необходимо кровеносная система имеет сложную замкнутую структуру (рис. 1). Измерение проводится при компрессии одной из крупных артерий (плечевой), что может оказывать влияние на всю систему. Анализируемая кривая изменения давления строится на основе давления в манжете.

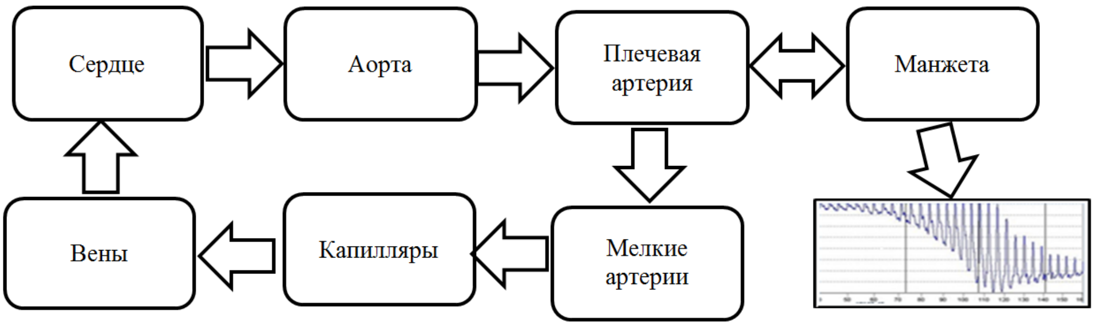



*Рис. 1. Схема элементов системы при измерении артериального давления*

Основными взаимодействующими элементами являются плечевая артерия и манжета. В плечевой артерии можно выделить две области: первая – до места пережатия артерии манжетой, в которой сечение артерии при измерении не изменяется и вторая – в которой происходит компрессия артерии (рис. 2.). Манжета воздействует на плечевую артерию, уменьшая сечение артерии. Артерия при изменении сечения воздействует на манжету через область компрессии, вызывая в манжете колебания давления, которые регистрируются и обрабатываются вычислительным устройством. Алгоритм работы, которого и необходимо определить.

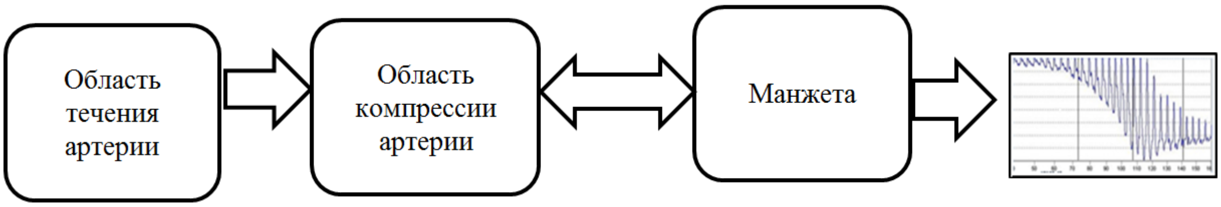



*Рис. 2. Расчетная схема*

При моделировании были приняты допущения, наиболее часто используемые при моделировании процессов гемодинамики [4, 5], включая: движение рассматривается одномерное, жидкость (кровь) предполагается несжимаемой, артерии являются сосудами с эластичными стенками, течение крови полагается ламинарным. В аорте давление изменяется от диастолического до систолического, а в манжете давление линейно увеличивается. Изменение артериального давления в артерии представлялось в виде ряда:

$$P_a = \sum_{i=1}^{N} (a_n \sin(\omega_i t) + \varphi_i), \tag{1}$$

где $a_n$, $\omega_i$, $\varphi_i$ параметры колебаний давления в артерии.

И поскольку важно только максимальное и минимальное давление за период, то в расчётах использовалась только первая гармоника.

В простейшем случае процессы гемодинамики можно описать в совместном решении уравнений несжимаемой жидкости и уравнений динамики эластичной оболочки сосуда [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\partial (us)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{p}{\rho}\right) = F_e \end{cases} \tag{2}$$

где $t$ – время, $x$ – продольная координата, $s$ – площадь поперечного сечения сосуда, $u$ – осредненная по поперечному сечению скорость движения крови вдоль сосуда, $p$ – осредненное артериальное давление, $\rho$ – плотность крови, которая считается постоянной, $F_e$ – внешние силы. Вязкостные силы не учтены.

Для замыкания системы (2) можно использовать линейную аппроксимацию $s = s(p)$ [5].

На втором этапе можно рассмотреть только влияние внешнего воздействия на плечевую артерию [5]:

$$s(p) = \begin{cases} s_{min} - \dfrac{s_{max} - s_{min}}{p_{max} - p_{min}}(p - p_{ext} - p_{min}), & p_{min} < p < p_{max} \\ s_{min}, & p < p_{min} \\ s_{max}, & p_{max} < p \end{cases} \tag{3}$$

где $p_{ext}$ – внешнее давление, $s_{min}$, $s_{max}$, $p_{min}$, $p_{max}$ – характеристики артерии.

Давление в манжете рассчитывалось на основе уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$p = \frac{mRT}{MV_м},$$

где $m$ – масса воздуха в манжете, $R$ – универсальная газовая постоянная, $T$ – температура воздуха в манжете, $M$ – молярная масса, $V_м$ – объем манжеты. При компрессии плечевой артерии объем манжеты будет изменяться на объем пережимаемой артерии. Эти колебания и будет фиксировать датчик давления. Изменение давления будет иметь вид, представленный на рис. 3.

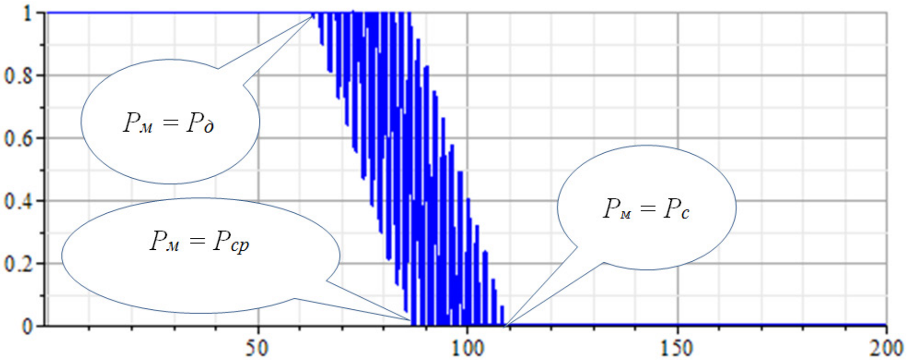



*Рис. 3. Изменение давления на втором этапе*

В точке $P_м = P_д$ после того, как давление в манжете превысит диастолическое давление в манжете будут наблюдаться колебания, увеличивающиеся по амплитуде. После того, как давление в манжете превысит среднее $P_{ср}$ амплитуда начнет уменьшаться.

## 2. Результаты и обсуждения

### *1.2. Разработка алгоритма определения артериального давления методом ОКО*

Основной проблемой, которую должен решать алгоритм – это определение точек 1 и 2 на осциллограмме. Реальные кривые могут существенно отличаться от модельной, представленной на рис. 3 (например, рис. 4).

Предложен следующий алгоритм определения артериального давления:

1. Определяют минимальные значения для осцилляций в манжете во время измерения артериального давления;
2. Полученные данные аппроксимируют аналитической зависимостью на участке уменьшения;
3. Определяют точку перегиба данной кривой (если их несколько, то используют наиболее близкую к минимуму);
4. В точке перегиба строят касательную;
5. Строят две горизонтальные прямые: первую – по среднему значению на участке, соответствующему давлению в манжете 20–40 мм рт. ст.; вторую - по минимальному значению минимальных значений осцилляций на участке правее точки перегиба;
6. Абсцисса точки пересечения касательной и первой прямой определяет диастолическое давление $P_д$;
7. Абсцисса точки пересечения касательной и второй прямой определяет среднее давление $P_{ср}$;
8. Систолическое давление $P_с$ рассчитывают по формуле: $P_с = P_д + 2(P_{ср} - P_д)$.

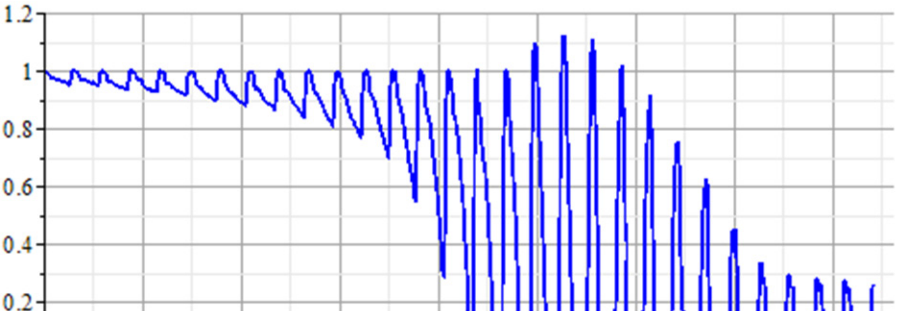


*Рис. 4. Экспериментальная осциллограмма для больного с диагнозом ишемическая болезнь сердца: стабильная стенокардия напряжения*

### *1.2. Оценка работы алгоритма*

Разработанное модельное представление позволяет оценить работоспособность предложенного алгоритма. Для этого процессы, оказывающие наибольшее влияние на форму кривой. Это влияние других сосудов влияние других сосудов и явление гемодинамического удара. Математическая модель позволяет провести оценку указанных факторов.

При компрессии плеча сжимается не только плечевая артерия, но и более мелкие сосуды (артериолы, мет артериолы и др.). Для оценки влияния этих сосудов на осциллограмму проводилось аналогично плечевой артерии. Давление в них меньше, поэтому в левой части графика присутствуют колебания меньшей амплитуды и на меньших давлениях.

Для оценки влияния гемодинамического удара увеличение давления в артерии считалось, что оно происходит мгновенно в точке соответствующей среднему давлению (рис. 5).

Анализ результатов показывает качественно достаточно хорошую адекватность в зоне, соответствующей измерению артериального давления.

Разработанный алгоритм позволяет из исследуемого графика выделить три зоны: правая – колебания вызываются другими кровеносными сосудами и не определяют давление в плечевой артерии. Эта зона выделяется проведением касательной в точке перегиба. Вторая зона необходима для определения артериального давления по предложенному алгоритму. Третья – это эффект гемодинамического удара, который определяется жесткостью сосудов и не характеризует артериальное давление.

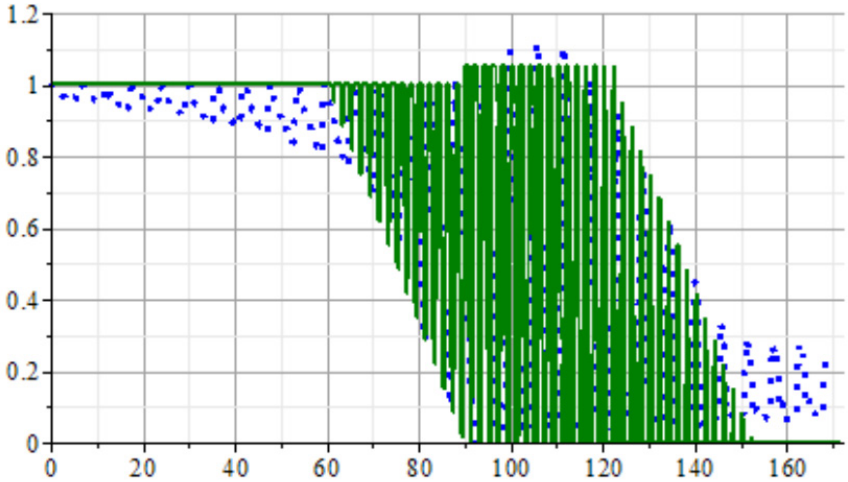



*Рис. 5 Осциллограмм, полученная по модели и экспериментальная у больного с диагнозом ишемическая болезнь сердца: стабильная стенокардия напряжения*

### Заключение

Проведенные исследования показывают, что разработанный алгоритм может быть положен в основу алгоритма функционирования приборов для исследования состояния сердечно-сосудистой системы при измерении артериального давления, а предложенные методы позволяют исследовать процесс измерения.

Это позволит повысить точность определения артериального давления, дополнительных параметров, которые рассчитываются на основе полученных данных, а, следовательно, повысит точность диагностики сердечно-сосудистых заболеваний, снизить вероятность принятия ошибочных решений при лечении. Приборы, построенные на основе этого алгоритма, позволят проводить расширенное мониторирование состояния пациентов без непосредственного участия врача, а встраивание их в медицинскую систему позволит оперативно реагировать на изменение состояния больных.

**Литература**

1. *Григорян С. С.* О механизме генерации звуков Короткова / С. С. Григорян, Ю. З. Саакян, А. К. Патурян // Доклады Академии наук. – 1980. – Т. 251, № 3. – С. 570–574.

2. *Романовская А. М.* Физические и метрологические аспекты методов измерения артериального давления с применением компрессионной манжеты / А. М. Романовская, В. Ф. Романовский // Мир измерений. – 2018. – № 2. – С. 32–43.

3. *Дегтярев В. А.* Новый неинвазивный метод измерения артериального давления / В. А. Дегтярев // Функциональная диагностика. – 2008. – № 1. – С. 95–101.

4. *Астраханцева Е. В.* Математическое моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов / Е. В. Астраханцева, В. Ю. Гидаспов, Д. Л. Ревизников // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, № 8. – С. 61–80.

5. *Астраханцева Е. В.* Численное моделирование гемодинамических процессов в артериальном дереве. Исследование влияния пережатия сосуда на параметры течения / Е. В. Астраханцева, В. Ю. Гидаспов, У. Г. Пирумов, Д. Л. Ревизников // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 8. – С. 25–36.

УДК 681.3.07

# О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ И ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

**А. А. Арзамасцев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В настоящее время в системах видео-компьютерной коррекции зрения пациентов часто используются специальные программы. В наших работах [2,3] в качестве интеллектуального модуля таких программ, обеспечивающих адаптацию режима их работы к индивидуальным свойствам пациента является обучаемая искусственная нейронная сеть. В этом случае, при использовании такой программы, речь идет по сути дела о взаимодействии двух нейронных сетей: биологической нейронной сети пациента и искусственной нейронной сети программы, используемой для коррекции зрения. Некоторые особенности такого взаимодействия обсуждаются в докладе.
**Ключевые слова:** искусственная нейронная сеть, биологическая нейронная сеть, взаимодействие, видео-компьютерная коррекции зрения.

В настоящее время при построении систем искусственного интеллекта (ИИ) часто используют различные виды искусственных нейронных сетей [1] (ИНС-модели). ИНС-модели используются в качестве интеллектуального ядра программ, предназначенных для взаимодействия с пользователем (тестирования, контроля, управления и т. д.). Во многих случаях такого взаимодействия биологического объекта (человека или животного) с системами ИИ, базируемых на ИНС-моделях, речь может идти о взаимодействии двух нейронных систем: биологической нейронной сети и искусственной нейронной сети.

Примерами систем, в которых осуществляются такие взаимодействия являются: различные типы адаптивных тренажеров, учитывающих индивидуальные особенности обучаемых и изменяющих свои параметры при участии ИНС-модели, некоторые компьютерные игры, бионические роботизированные интеллектуальные протезы, системы трейдинга, а также интеллектуальные системы управления различными техническими объектами, допускающие настройку на индивидуальные характеристики оператора.

Нейронные сети в таких случаях находятся в динамическом взаимодействии. Биологическая нейронная сеть меняет свои настройки (скорость реакции, приоритеты и чувствительность к различным раздражителям и, возможно, элементы структуры). ИНС, в свою очередь, исследует эти изменения и изменяет программу ИИ, а в ряде случаев и ИНС-модель. Это приводит к изменению свойств программы ИИ, что в свою очередь изменяет свойства биологического объекта. Этот процесс является итерационным и повторяется до тех пор, пока в этих взаимодействиях не устанавливается некоторое устойчивое состояние.

В докладе рассматривается пример взаимодействия двух нейронных систем в процессе видео-компьютерной коррекции зрения с использованием наших программ [1,2]: динамика свойств нейронной системы пациента, выраженная в изменении расстояния бинокулярного зрения; динамика значений коэффициентов ИНС-модели; появление области стабилизации этих значений, позволяющей определить оптимальную интенсивность и длительность тренировок пациента и избежать переобучения.

## Благодарности

Разработка программ и исследования выполнены в рамках сотрудничества с тамбовским филиалом федерального государственного автономного учреждения «Межотраслевой научно-технический комплекс “Микрохирургия глаза” имени академика С.Н. Федорова» Министерства здравоохранения Российской Федерации «Разработка информационной системы для видео-компьютерной коррекции зрения с использованием элементов искусственного интеллекта», при поддержаке Фонда содействия малых форм предприятий в научно-технической сфере, договоры № 3065ГУ1/2014 и № 6499ГУ2/2015) и договорами №№ 01-2013, 02-2013, 01-2014, 04-2014, 05-2014, 06-2014, 01-2015, 02-2015 с ООО «Научно-производственная компания ЭКСПЕРТНЫЕ СИСТЕМЫ».

**Литература**

1. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. – М. : ООО «И. Д. Вильямс, 2016. – 1104 с.

2. *Арзамасцев, А. А.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программа для лечения косоглазия у детей «Маленький волшебник»» / А. А. Арзамасцев, О.Л. Фабрикантов, Н.К. Белоусов, Ю. В. Матросова // № 2013618972, зарегистр. в ФГБУ ФИПС 24.09.2013 г.

3. *Арзамасцев, А. А.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программа для лечения косоглазия у детей «Я вижу!»» / А. А. Арзамасцев, Н. К. Белоусов, О. Л. Фабрикантов, Ю. В. Матросова // № 2014616969, зарегистр. в ФГБУ ФИПС 09.07.2014 г.

УДК 519.254

# АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ЗНАНИЙ ОБ ОБЪЕКТАХ, ЗАДАННЫХ МАССИВАМИ ЭМПИРИЧЕСКИХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНС-МОДЕЛЕЙ

**А. А. Арзамасцев[1], Н. А. Зенкова[2], Н. А. Казаков[1]**

*[1]Воронежский государственный университет*
*[2]Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина*

**Аннотация.** В настоящее время в связи со существенным ростом числа объектов из области естественных наук, информационных технологий, а также социальной сферы, требующих изучения и математического описания наблюдается значительный интерес к методикам Data Mining – добыче полезных знаний об объекте из данных, описывающих его состояние или поведение. Большая часть указанных методик базируется на традиционных приемах построения математических моделей и их параметрической идентификации. Рассматриваемая в докладе методика базируется на обнаружении в объекте на основе его эмпирических данных некоторых характерных особенностей: динамических и статических характеристик; запаздывания по различным каналам; инерционности каналов или инерционности, совмещенной с запаздыванием; различной чувствительности каналов; байпаса и определенных классов нелинейностей. Рассмотрены объекты, для которых характерно постоянное поступление новых данных, что влечет необходимость переучивания модели. В качестве инструмента получения знаний в данной работе используется аппарат искусственных нейронных сетей (ИНС-модели), включающий в себя конструктор структур, что позволяет оперативно изменять структуру ИНС-моделей и алгоритмы машинного обучения, что позволяет успешно решать задачи параметрической идентификации. Алгоритмы и методики извлечения знаний об объектах заданных массивами эмпирических данных обсуждаются в докладе.
**Ключевые слова:** алгоритмы, методы, анализ данных, анализ больших данных, извлечение знаний из данных, искусственные нейронные сети (ИНС), ИНС-модель, машинное обучение.

## Введение

В настоящее время в различных областях естественных наук, информационных технологий, а также широком спектре общественных наук и социальной сферы возникает проблема построения математической модели объекта, опираясь лишь на знания о его входах и выходах. Такая задача возникает в естественных науках при изучении принципиально новых объектов, физические законы и механизмы работы которых неизвестны. В объектах социальной сферы подобная ситуация возникает из-за слабой формализованности данной области и значительного количества эмпирического материала. Построение адекватной объекту математической модели в свою очередь упрощает его изучение и позволяет добывать новые знания о его механизмах, взаимосвязях и т. д.

В отечественной и зарубежной литературе подобная проблема называется задачей структурной и параметрической идентификации «черного ящика», структурной идентификацией систем (System Identification) и «извлечения» или «добычи» знаний из данных ( Data Mining).

Обычно, при решении подобных проблем авторы отталкиваются от существующих математических положений и методов, например, теорем Вейерштрасса, Колмогорова и т. д.

Рассматриваемая в докладе методика базируется на обнаружении в объекте на основе его эмпирических данных некоторых характерных особенностей: динамических и статических характеристик; запаздывания по различным каналам; инерционности или инерционности, совмещенной с запаздыванием; различных чувствительностей каналов; байпаса и определенных классов нелинейностей. Особое внимание уделяется объектам, для которых характерно постоянное поступление новых данных, что влечет необходимость переучивания модели.

В качестве инструмента получения знаний в данной работе используется аппарат искусственных нейронных сетей (ИНС), включающий в себя конструктор структур и алгоритмы машинного обучения. Наличие указанных компонентов позволяет успешно решать задачи структурной и параметрической идентификации. Математические и компьютерные модели, полученные с использованием ИНС на основе эмпирических данных мы называем ИНС-моделями.

В докладе обсуждаются алгоритмы и методики извлечения знаний об объектах, заданных массивами эмпирических данных. Данная статья имеет постановочный характер.

### Общая постановка задачи

Традиционное представление объекта для целей моделирования показано на рис. 1. Вектор входных координат $\mathbf{X}$ – это не зависящие от пользователя входные параметры, вектор $\mathbf{U}$ – входные варьируемые параметры, с помощью которых пользователь может оказывать воздействие на объект (управлять им), вектор $\mathbf{Y}$ – это интересующие пользователя свойства объекта. Необходимо отметить, что сам объект не «различает» $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$, но такое представление удобно с точки зрения пользователя.

В нашем случае, объект, показанный на рис. 1, задан прямоугольной таблицей $\mathbf{A}[(n+m+k),z]$, где $z$ – число записей в таблице. Имеют место следующие особенности: число записей $z$ – произвольное, оно может быть избыточным, а может быть и недостаточным для нашей задачи, измерения элементов массива $a[i,j]$ сделаны с известной погрешностью, причем эта погрешность может быть различной для всей входов и выходов.

Необходимо найти оптимальную (в некотором смысле) систему связей, характеризующую объект $\mathbf{Y}=\mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{P})$. Здесь $\mathbf{F}$ представляет собой оператор связи, $\mathbf{P}$ – вектор оптимизируемых (настроечных) параметров. Такая система связей объекта представляет собой его математическую модель, которую в дальнейшем можно изучать, проводить с ней вычислительные эксперименты, т. е. извлекать новые знания.

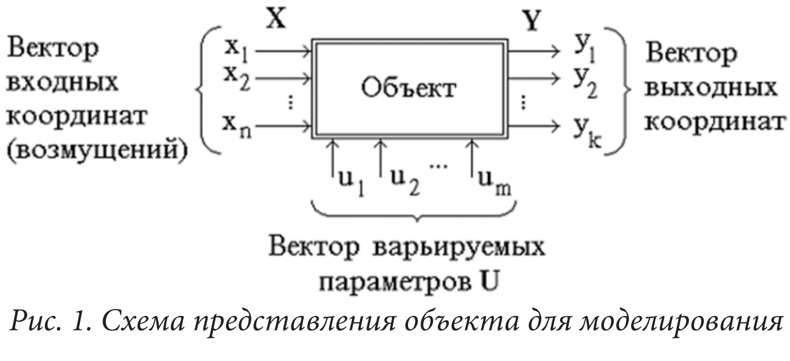



*Рис. 1. Схема представления объекта для моделирования*

Отметим, что в качестве оператора $\mathbf{F}$ в математическом моделировании используются различные математические аппараты, например, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных, методы математической статистики и т. д. В нашей работе в качестве инструмента моделирования и извлечения знаний об объекте, заданном массивом эмпирических данных будем использовать аппарат искусственных нейронных сетей (ИНС). Математические (компьютерные) модели, полученные с использованием ИНС на основе эмпирических данных будем называть ИНС-моделями. В данном случае в качестве вектора настроечных оптимизируемых параметров выступает вектор весовых коэффициентов нейронов $\mathbf{W}$.

Выбор аппарата ИНС обусловлен следующими причинами: 1) как правило, программные продукты, реализующие модели ИНС, включают в себя конструктор структур, что позволяет оперативно адаптировать структурную схему модели без изменения методики ее параметрической идентификации; 2) они содержат готовые и хорошо отлаженные алгоритмы машинного обучения, что позволяет успешно решать задачи параметрической идентификации; 3) наличие значительного числа специализированных библиотек для языков Python, Mathematica, MATLAB (например, Theano, TensorFlow, Keras для Python); 4) возможность распараллеливания вычислений, высокая адаптивность к эмпирическим данным и толерантность к их ошибкам.

### Основные задачи

Автоматическое распознавание динамического или статического характера объекта на основании лишь эмпирических данных в общем случае представляет собой сложную проблему. Однако, если в таблице имеется столбец, соответствующий времени, то задача существенно упрощается. В общем виде алгоритм, позволяющий работать с динамическими объектами, выглядит следующим образом: 1) выявляем столбец данных, ответственный за временные характеристики объекта; если такой имеется, то переходим к пункту 2, если нет, алгоритм заканчивает свою работу (объект статический), осуществляем переход к алгоритму анализа статических данных; 2) выявляем, является ли динамическая последовательность временным рядом, если да, то определяем шаг такого ряда, если нет используем какой-либо из методов интерполирования (например, интерполирование сплайнами) для получения из исходной, таблицы, представляющей собой временные ряды, переходим к алгоритму анализа временных рядов.

Алгоритм работы с данными статического типа имеет следующий вид: 1) создаем простейшую ИНС-модель с известным числом входов $(n+m)$ и выходов – $k$, в качестве такой модели может служить ИНС с одним нейроном в скрытом слое; 2) запускаем один из алгоритмов машинного обучения и оцениваем результат оптимизации; может быть использовано несколько алгоритмов машинного обучения; результатом оптимизации часто является погрешность работы ИНС-модели с оптимальными значениями коэффициентов по сравнению с эмпирическими данными; если значение погрешности имеет допустимый уровень, то считается, что ИНС-модель адекватна, ее можно использовать для получения новых знаний об объекте, действие алгоритма на этом заканчивается; если величина погрешности велика, то переходим к пункту 3; 3) наращиваем структуру сети с возможным изменением передаточных функций нейронов (алгоритмы наращивания структур и критерии остановки предложены в наших предыдущих работах); переходим к пункту 2.

Необходимо отметить, что данный алгоритм является наиболее апробированным в наших предыдущих работах, он также допускает распараллеливание, что существенно уменьшает время решения задачи.

Алгоритм работы с временными рядами с использованием ИНС-моделей включает несколько этапов: 1) вычисление взаимнокорреляционных функций для временных рядов и формирование заключений о наличии запаздываний по различным каналам; 2) проверка возможной инерционности каналов путем сведения инерционности высокой размерности к инерционности первого и второго порядков и чистого запаздывания, что приводит к преобразованию таблицы исходных данных; 3) выбор $g$ – порядка аппроксимации для $g$-точечной схемы ИНС-модели; 4) преобразование таблицы исходных данных в соответствии с выбранным значением $g$ и запаздываниями по отдельным каналам; 5) запуск одного или нескольких алгоритмов машинного обучения и оценка результата оптимизации; при необходимости наращиваем структуру ИНС-модели; если значение погрешности имеет допустимый уровень, то считается, что ИНС-модель адекватна, ее можно использовать для получения новых знаний об объекте, действие алгоритма на этом заканчивается; если величина погрешности велика, то изменяем величину $g$ и переходим к пункту 3.

Во многих случаях объект устроен таким образом, что в нем происходит постоянное поступление новых данных, т. е. нижняя граница таблицы $\mathbf{A}-z$ является подвижной. Такая ситуация возникает, например, в том случае, когда на сервере осуществляется накопление данных с большого числа источников – терминалов. Очевидно, что в этом случае необходимо «переучивание» модели и определение оптимального времени для периода «переучивания», а также оценка стационарности/нестационарности объекта и его ИНС-модели, проблемы, представляющие собой новые задачи анализа данных.

В общем виде алгоритм построения ИНС-модели и анализа данных выглядит следующим образом: 1) определение оценки периода первичного накопления данных в таблице, предшествующего первому обучению ИНС-модели; такая оценка может быть проведена на основании интегральной скорости накопления данных и теоремы Колмогорова, позволяющей вычислить число степеней свободы необходимой ИНС-модели; 2) аппроксимация процесса обучения (уменьшения погрешности в процессе обучения) дифференциальным уравнением первого порядка и определение коэффициента скорости этого процесса; 3) осуществление пробного (на частичной выборке) переобучения ИНС-модели через некоторый, заданный промежуток времени; если значение коэффициента скорости меняется несущественно, значит объект является стационарным и переобучение в пределах этого времени не требуется; если коэффициент скорости обучения меняется существенным образом по сравнению с предыдущим значением, объект является нестационарным и требуется переобучение; снова переходим к пункту 3. Такой алгоритм является бесконечным и работает, пока работает сам объект.

## Пример использования данного подхода

Далее рассмотрим пример извлечения знаний из массива данных с использованием приведенной методики. Объект представляет собой биотехнологический процесс, в котором осуществляется утилизация отходов производства этанола с выработкой бактериальной биомассы. Реальные данные взяты из опыта эксплуатации процесса на ОАО «Биохим», г. Рассказово, Тамбовская область. Выбор объекта для апробации методики связан с тем, что в нашем распоряжении имеется значительный объем эмпирических данных.

На рис. 2 показан фрагмент файла данных, полученных с технологического процесса. Здесь приведены численные значения входных параметров: расхода отхода производства этанола – $G$, м$^3$/ч, его концентрации – $S_0$, кг/м$^3$ (по БПК), температур в секциях реактора – $T_1-T_4$, °С, кислотности среды в секциях реактора – $\mathrm{pH}_1-\mathrm{pH}_4$ и выходных параметров: концентраций биомассы в секциях – $x_1-x_4$, кг/м$^3$ и концентраций субстрата в секциях реактора – $s_1-s_4$, кг/м$^3$ (по БПК).

| G | s0 | T1 | T2 | T3 | T4 | ph1 | ph2 | ph3 | pH4 | x1 | x2 | x3 | x4 | s1 | s2 | s3 | s4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,54 | 29,75 | 20,63 | 25,11 | 27,06 | 30,40 | 7,90 | 7,75 | 8,70 | 8,49 | 10,18 | 13,78 | 15,53 | 15,89 | 14,47 | 5,46 | 1,08 | 0,20 |
| 9,45 | 29,35 | 20,14 | 24,22 | 28,36 | 30,56 | 7,62 | 7,66 | 8,39 | 9,12 | 8,86 | 12,50 | 15,13 | 15,73 | 17,50 | 8,41 | 1,82 | 0,33 |
| 9,77 | 29,20 | 19,73 | 24,78 | 28,30 | 29,61 | 7,08 | 8,09 | 8,95 | 9,03 | 6,85 | 12,02 | 14,92 | 15,55 | 22,10 | 9,19 | 1,93 | 0,36 |
| 10,38 | 30,83 | 19,38 | 24,87 | 27,37 | 30,33 | 7,95 | 8,31 | 8,69 | 9,22 | 8,50 | 13,52 | 15,52 | 15,95 | 18,91 | 6,35 | 1,35 | 0,26 |
| 10,05 | 29,68 | 20,02 | 24,71 | 28,02 | 29,71 | 7,54 | 7,59 | 8,30 | 8,62 | 7,93 | 11,48 | 14,68 | 15,55 | 19,58 | 10,73 | 2,71 | 0,54 |
| 9,11 | 30,54 | 20,87 | 24,37 | 28,96 | 30,30 | 7,23 | 8,44 | 8,85 | 9,04 | 8,29 | 13,96 | 15,98 | 16,33 | 20,30 | 6,11 | 1,08 | 0,18 |
| 9,86 | 31,22 | 19,42 | 24,50 | 28,09 | 30,23 | 7,23 | 8,48 | 8,14 | 9,05 | 7,05 | 13,10 | 15,58 | 16,22 | 23,29 | 8,17 | 1,97 | 0,36 |
| 9,08 | 28,96 | 20,39 | 25,85 | 27,71 | 30,00 | 7,31 | 8,15 | 8,43 | 8,85 | 8,30 | 13,61 | 15,42 | 15,80 | 18,94 | 5,67 | 1,13 | 0,19 |
| 9,27 | 30,26 | 19,53 | 25,80 | 27,76 | 30,58 | 7,14 | 7,64 | 8,26 | 8,89 | 7,34 | 11,87 | 15,21 | 16,06 | 22,26 | 10,94 | 2,59 | 0,46 |
| 10,62 | 29,79 | 19,25 | 25,90 | 27,91 | 30,89 | 7,87 | 7,65 | 8,49 | 9,00 | 7,90 | 11,72 | 14,67 | 15,43 | 19,30 | 9,74 | 2,39 | 0,48 |
| 10,98 | 28,70 | 19,08 | 24,02 | 27,01 | 30,44 | 7,85 | 7,73 | 8,66 | 9,21 | 7,38 | 10,67 | 13,92 | 14,86 | 19,36 | 11,15 | 3,01 | 0,67 |
| 10,71 | 29,36 | 19,58 | 24,63 | 27,09 | 29,25 | 7,84 | 8,43 | 8,33 | 8,99 | 7,93 | 12,79 | 14,78 | 15,31 | 18,78 | 6,64 | 1,66 | 0,34 |
| 9,41 | 29,46 | 20,87 | 24,32 | 28,65 | 30,40 | 7,91 | 7,64 | 8,89 | 8,42 | 10,57 | 13,69 | 15,50 | 15,84 | 13,36 | 5,56 | 1,03 | 0,19 |
| 10,37 | 30,66 | 19,59 | 25,98 | 27,09 | 30,20 | 7,57 | 7,99 | 8,74 | 9,03 | 7,55 | 12,63 | 15,24 | 15,86 | 21,14 | 8,43 | 1,89 | 0,36 |
| 10,05 | 30,96 | 19,94 | 25,08 | 28,09 | 30,60 | 7,12 | 8,13 | 8,65 | 9,11 | 6,83 | 12,39 | 15,39 | 16,05 | 23,44 | 9,55 | 2,05 | 0,39 |
| 10,02 | 31,41 | 20,62 | 24,96 | 27,44 | 29,56 | 7,81 | 7,57 | 8,44 | 8,88 | 9,48 | 13,03 | 15,63 | 16,24 | 17,25 | 8,37 | 1,87 | 0,34 |

*Рис. 2. Фрагмент файла данных наблюдений за биотехнологическим процессом*

Таким образом, полный файл данных представляет собой прямоугольную матрицу, содержащую 1000 строк, каждая из которых характеризует состояние биореактора и 18 столбцов, элементы каждого из которых характеризуют один из параметров состояния данного процесса. Необходимо на основе этих данных найти систему связей в виде математической модели $\mathbf{Y}=\mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{P})$.

Поскольку в данной работе речь идет о разработке модели, имеющей в качестве интеллектуального ядра модель на основе искусственных нейронных сетей (ИНС-модель), то предыдущее уравнение можно переписать в виде $\mathbf{Y} = \mathbf{F_S}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{W})$, где, $\mathbf{X}$ – вектор входных координат (возмущений) объекта, $\mathbf{U}$ – вектор варьируемых параметров (управляющих воздействий), $\mathbf{Y}$ – вектор выходных координат, численно выражающий интересующие свойства объекта; $\mathbf{W}$ – вектор весовых коэффициентов ИНС-модели, размерность которого определяет также ее число степеней свободы для настройки (обучения) по эмпирическим данным; $\mathbf{F_S}$ – оператор связи, зависящий от структуры ИНС-модели – $\mathbf{S}$.

В нашем случае $\mathbf{X}$ представляет собой вектор с двумя координатами $G$ и $S_0$, $\mathbf{U}$ – вектор с восемью координатами $T_1 - T_4$ и $\mathrm{pH}_1 - \mathrm{pH}_4$, $\mathbf{Y}$ – вектор с восемью координатами $x_1 - x_4$ и $s_1 - s_4$.

Искомая ИНС-модель должна быть нелинейной, так как, например, в нее в качестве входных величин входят pH (показатель кислотности) среды, являющийся логарифмической функцией концентрации ионов водорода и температура, зависимость от которой основных показателей процесса выражается экспоненциальным уравнением Аррениуса, а кинетика такого процесса обычно соответствует гиперболической модели Моно.

По данным объекта разрабатывали ИНС-модель с использованием нашего программного обеспечения [1–3].

На рис. 3 и 4 показан процесс обучения ИНС-модели с определенной конфигурацией. В данном случае речь идет об обучении ИНС с десятью входными нейронами, тремя нейронами в скрытом слое (линейная, квадратичная и кубическая функции) с использованием градиентного метода. Из этих рисунков видно, что среднеквадратическая погрешность ИНС-модели быстро уменьшается, т. е. сеть с такой конфигурацией быстро обучается на основе эмпирических данных. В логарифмических координатах процесс обучения выглядит линейным (коэффициент корреляции с линейной зависимостью составляет 0,98), что позволяет прогнозировать число тактов обучения, необходимых для достижения заданной среднеквадратической погрешности (см. рис. 4).

На рис. 5–8 показаны корреляции эмпирических данных и значений $x_1$, рассчитанных по ИНС-модели для различных структур ИНС. Из этих рисунков следует, что наилучшая структура ИНС-модели, соответствующей эмпирическим данным и определенная по среднеквадратической погрешности: десять входных нейронов, три нейрона с линейной, квадратичной и кубической передаточными функциями в скрытом слое и один выходной нейрон.

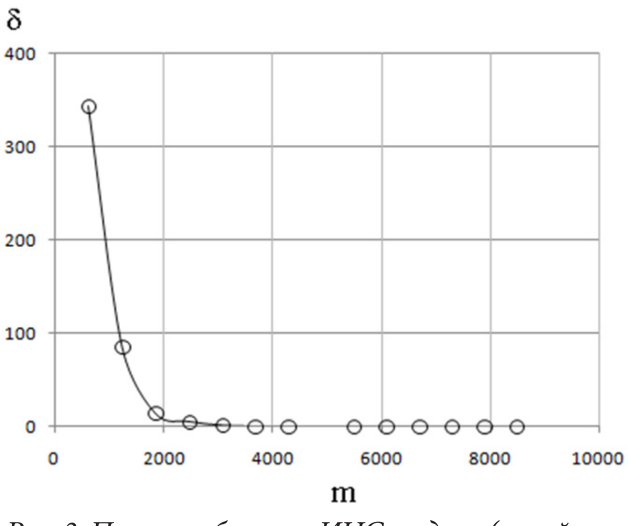



*Рис. 3. Процесс обучения ИНС-модели (линейная, квадратичная и кубическая функции нейронов) градиентным методом. $\delta$ – среднеквадратическая погрешность, $m$ – число тактов обучения*

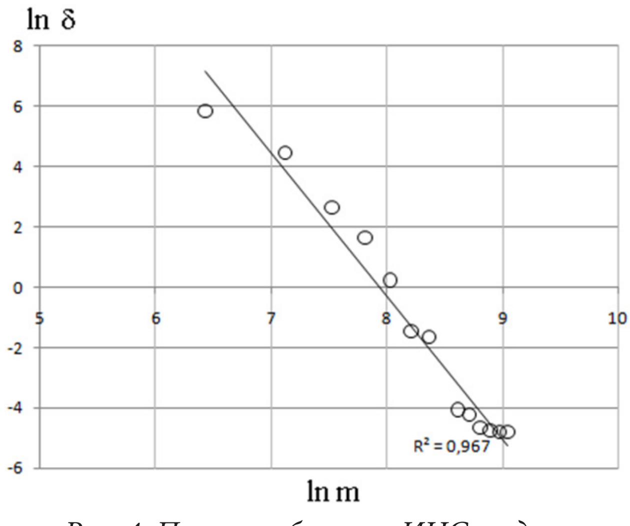



*Рис. 4. Процесс обучения ИНС-модели (линейная, квадратичная и кубическая функции нейронов) градиентным методом. В логарифмических координатах*

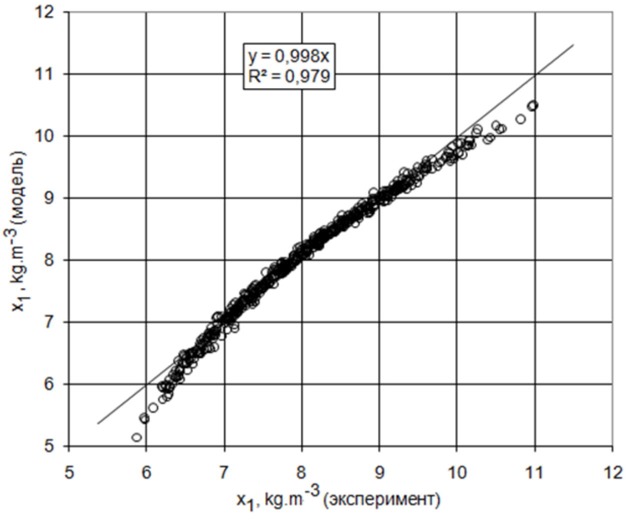



*Рис. 5. Корреляция реальных данных – $x_1$ и расчетов $x_1$ по ИНС-модели для нейронной сети с одним линейным нейроном. Изображена корреляционная зависимость для 500 первых данных*

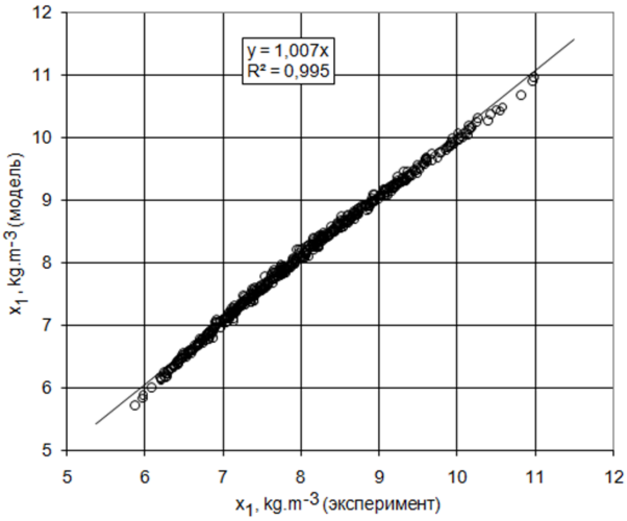



*Рис. 6. Корреляция реальных данных – $x_1$ и расчетов $x_1$ по ИНС-модели для нейронной сети с одним линейным и одним квадратичным нейронами. Изображена корреляционная зависимость для 500 первых данных*

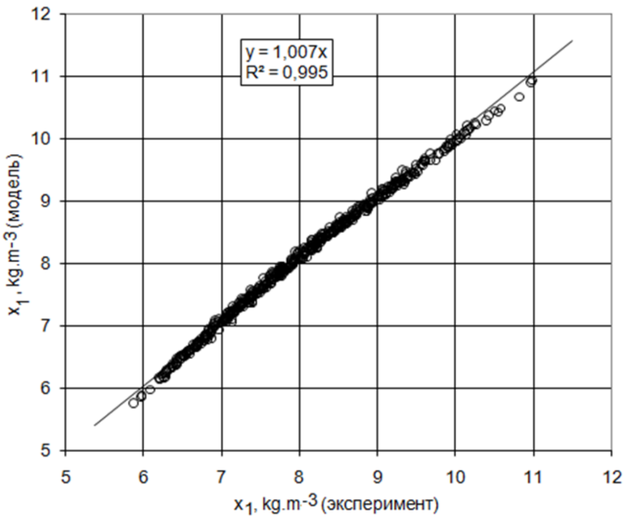



*Рис. 7. Корреляция реальных данных – $x_1$ и расчетов $x_1$ по ИНС-модели для нейронной сети с одним линейным, одним квадратичным и одним кубическим нейронами. Изображена корреляционная зависимость для 500 первых данных*

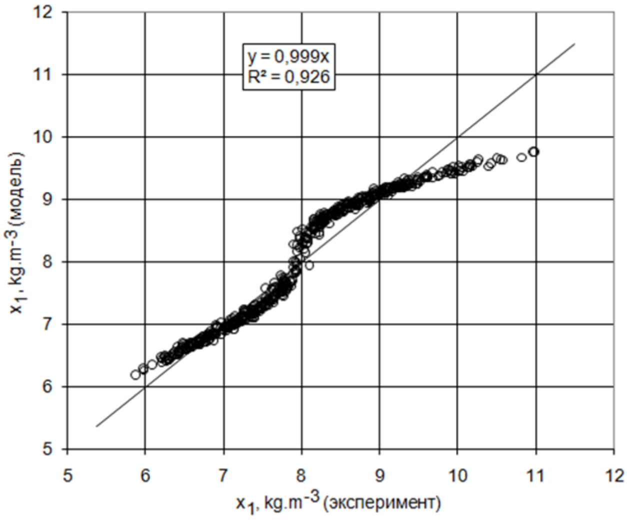



*Рис. 8. Корреляция реальных данных – $x_1$ и расчетов $x_1$ по ИНС-модели для нейронной сети с одним сигмоидальным нейроном. Изображена корреляционная зависимость для 500 первых данных*

В табл. 1 приведены основные параметры моделей, корреляции для которых приведены на рисунках 5–8. На рис. 9 приведена также и схема ИНС-модели.

Из корреляционных зависимостей, приведенных на рис. 10, 11 видно, что использование ИНС-модели со структурой, показанной на рис. 9, позволяет адекватно представить выходные параметры технологического процесса, являющиеся функциями 10 переменных, что указывает на возможность использования предложенной методики анализа данных.

Таким образом, использование ИНС-моделей позволяет получать адекватное представление объектов, заданных большими массивами эмпирических данных.

Таблица 1

*Основные показатели описания эмпирических данных объекта с использованием различных ИНС-моделей*

| Характеристика скрытого слоя | Коэффициент корреляции расчетных и эмпирических данных | Средняя квадратическая ошибка ИНС-модели | Максимальная относительная погрешность, % | Время обучения ИНС-модели, мин |
|---|---|---|---|---|
| Один линейный нейрон | 0,989 | 0,02178 | 0,980 | 1,5 |
| Линейный и квадратичный нейроны | 0,997 | 0,00837 | 0,996 | 3 |
| Линейный, квадратичный и кубический нейроны | 0,997 | 0,00826 | 0,996 | 4,3 |
| Сигмоидальный нейрон | 0,962 | 0,07659 | 0,930 | 3 |

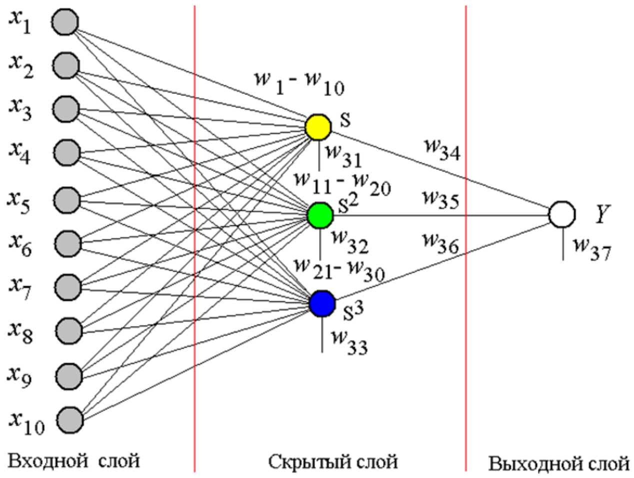



*Рис. 9. Структура ИНС-модели, обеспечивающей адекватное представление эмпирической информации для технологического процесса*

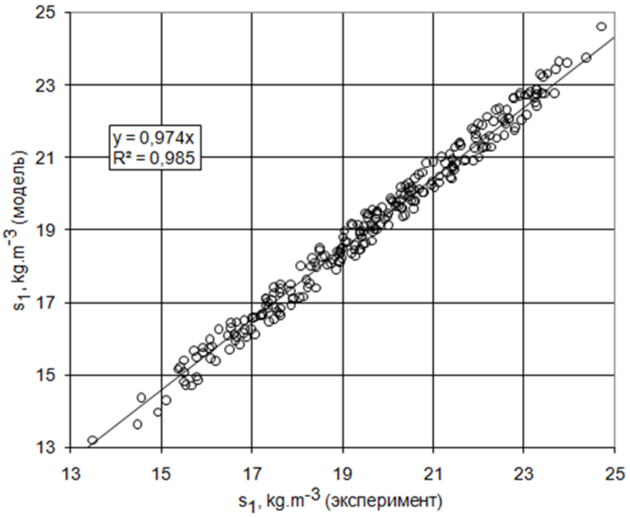



*Рис. 10. Корреляция реальных данных – $s_1$ и расчетов $s_1$ по ИНС-модели для нейронной сети, показанной на рис. 9. Изображена корреляционная зависимость для 250 первых данных*

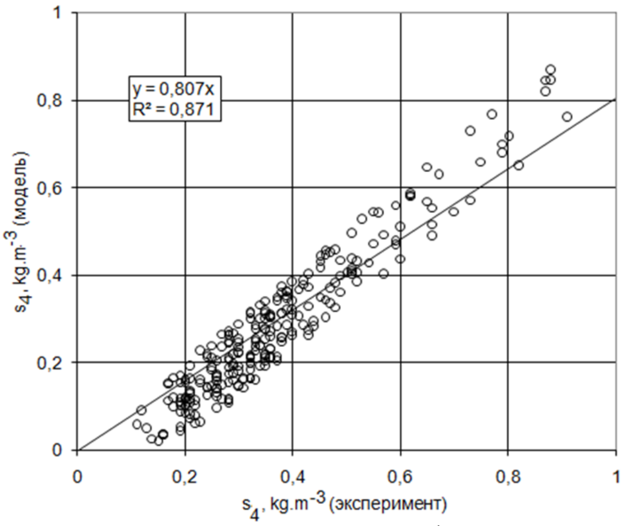



*Рис. 11. Корреляция реальных данных – $s_4$ и расчетов $s_4$ по ИНС-модели для нейронной сети, показанной на рис. 9. Изображена корреляционная зависимость для 250 первых данных*

## Выводы

Сформулированы основные задачи, решение которых позволит реализовать технологию извлечения знаний об объекте, заданном массивом эмпирических данных с использованием ИНС-моделей.

Приведенный пример, свидетельствует о возможности применения такого подхода.

Формализация приведенных алгоритмов приведена в докладе.

## Литература


1. *Арзамасцев, А. А.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для моделирования нейронных сетей с параметрически изменяющимися активационными функциями нейронов» / А. А. Арзамасцев, М. А. Кисляков, Н. А. Зенкова // № 2017619671, зарегистр. в ФГБУ ФИПС 01.09.2017 г.

2. *Арзамасцев, А. А.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Симулятор искусственной нейронной сети с реализацией модульного принципа обучения» / А. А. Арзамасцев, В. П. Рыков, О. В. Крючин // № 2012618141, зарегистр. в ФГБУ ФИПС 07.09.2012 г.

3. *Арзамасцев, А. А.* Технология построения медицинской экспертной системы на основе аппарата искусственных нейронных сетей / А. А. Арзамасцев, Н. А. Зенкова, А. В. Неудахин // Информационные технологии. – 2009. – № 8. – С. 60–63.

УДК ***

# ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС УЧЕТА И АНАЛИЗА СРЕДСТВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ДОБЫЧИ ГАЗА

**Д. И. Баглай, И. А. Смирнов**

*Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет)*

**Аннотация.** Объектом автоматизации является процессы учёта, технического обслуживания, ремонта и хранения средств и систем автоматизации. Основой процесса учёта является единый каталог оборудования и единый каталог товарно-материальных ценностей, используемых для нужд технического обслуживания и ремонта. На данный момент единого перечня оборудования в формализованном виде на предприятии не существует. Каждым подразделением, осуществляющим техобслуживание и ремонт оборудования, ведётся отдельный перечень оборудования в виде Excel-таблиц. На основе указанных перечней осуществляется планирование всех видов технического обслуживания и ремонта. Перечни охватывают не всё существующее оборудование и постоянно обновляются. Информация о единице оборудования, содержащаяся в перечне, неполная, слабо структурированная. Документация на оборудование представлена в основном на бумажном носителе. В электронном виде существуют лишь каталоги производителей на некоторые единицы оборудования.

**Ключевые слова:** автоматизированная информационная система, графики обслуживания, программный модуль.

Программный комплекс предназначен для учёта средств и систем автоматизации, получения актуальной информации о состоянии оборудования автоматизации, управления процессами технического обслуживания, и ремонта средств и систем автоматизации объектов добычи газа. Основными пользователями программного комплекса являются эксплуатирующие службы газовых промыслов и нефтегазопромысловых управлений. Информация, присутствующая в системе, предоставляется в виде отчётов, графиков и сводок сотрудникам производственных подразделений предприятия в согласованной на этапе проектирования программного комплекса.

Основными целями программного комплекса учета средств и систем автоматизации являются:

– обеспечение технически и экономически обоснованного (оптимального) уровня эксплуатационной надёжности оборудования при одновременном снижении материальных, трудовых и, как следствие, финансовых затрат предприятия;

– обеспечение возможности централизованного и оперативного управления процессами технического обслуживания, ремонта и хранения оборудования;

– создание, для части оборудования, условий перехода от календарного планирования обслуживания, к обслуживанию по фактической наработке и состоянию.

Программный комплекс учета средств и систем автоматизации является централизованной системой с распределенными WEB-интерфейсами (сервисами). Система является восстанавливаемой и обслуживаемой многофункциональной системой, рассчитанной на длительное непрерывное функционирование. Режим работы Системы — непрерывный, с плановыми остановами для проведения обновления программного обеспечения и проведения профилактических работ.

Для разработки автоматизированной информационной системы были выбраны: программная платформа NET Framework, язык программирования C#. Выбранные инструментальные средства: Microsoft Visual Studio, Microsoft SQL Server. Технологией для формирования базы данных является: Entity Framework. Для построения web-интерфейса приложения использовался JavaScript-овый framework ExtJS.

Функциональная структура программного комплекса включает в себя несколько модулей и предназначена для двух групп пользователей.


*Рис. 1. Функциональная структура программного комплекса*

Паспортизация представляет собой учёт оборудования в разрезе типов, моделей, производителей с привязкой к объектной модели и АСУ ТП системам.

Модуль паспортизации оборудования позволяет вести единый каталог оборудования.

Подсистема выполняет следующие функции:

– ввод и модификация нормативно-справочной информации (НСИ), в т. ч. иерархического каталога оборудования предприятия;

– регистрация местоположения оборудования;

– регистрация результатов проведенных мероприятий по обслуживанию оборудования;

– регистрация данных наработки оборудования;

– классификация видов повреждений и причин их возникновения;

– хранение электронных копий конструкторской и эксплуатационной документации на оборудование;

– импорт и экспорт информации;

– аутентификация и разделения прав доступа пользователей при работе с данными электронного каталога.

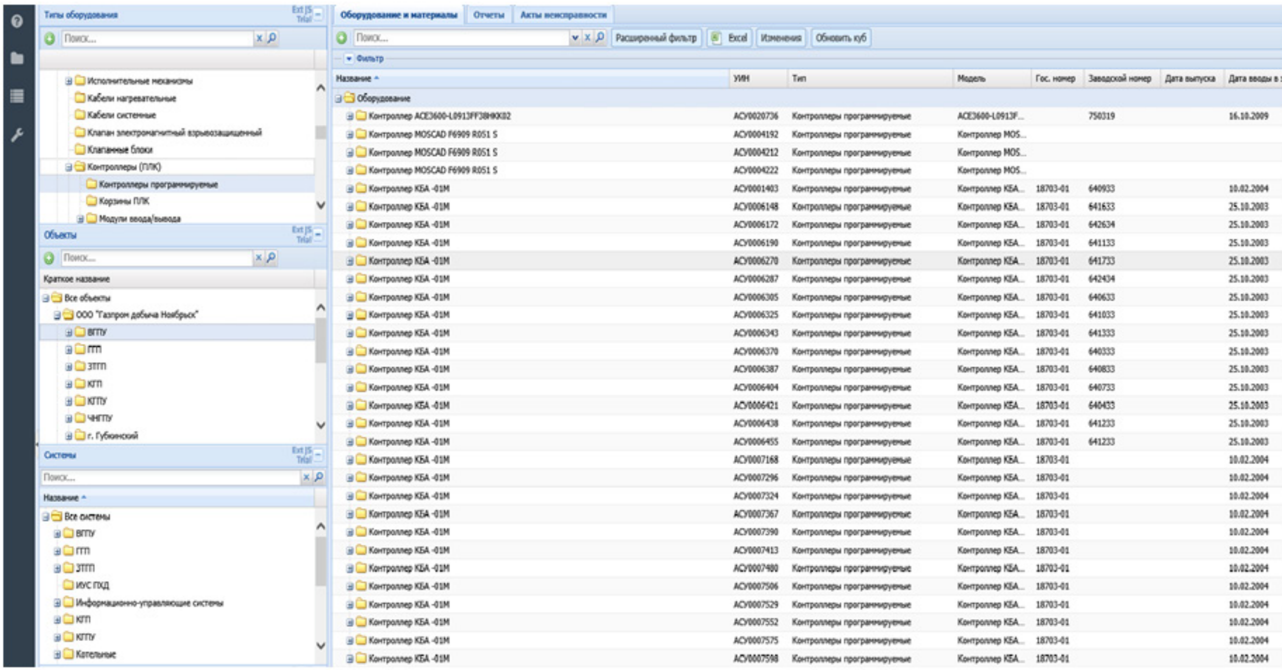



*Рис. 2. Справочник оборудования и материалов*

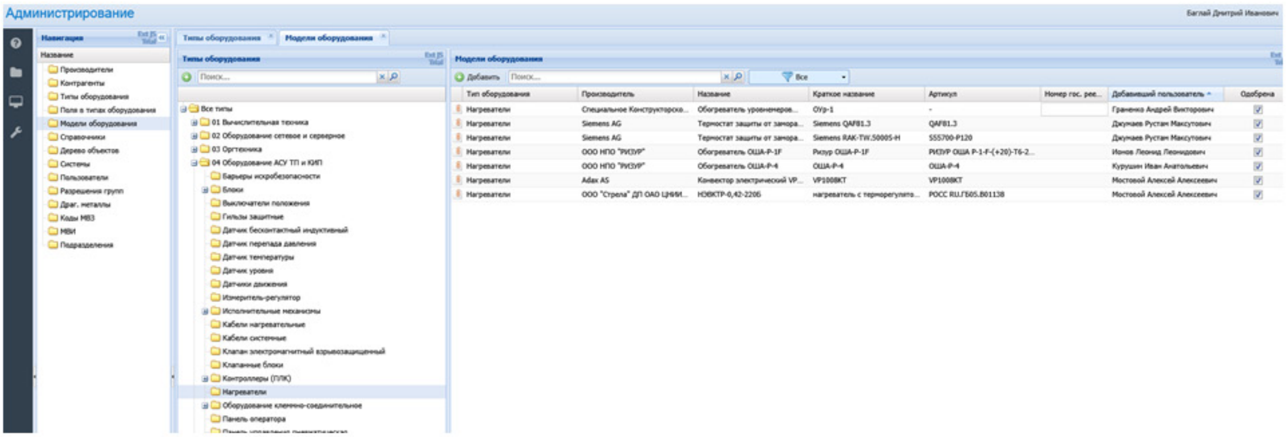



*Рис. 3. Модуль модели и оборудование*

Все справочники поддерживают древовидную структуру. При вводе новых записей в справочник моделей для исключения дублирования и ошибок, создана функция подтверждения данных администратором системы (рис. 3).

Справочник оборудование и материалы является одним из самых основных модулей системы в котором реализована функция справочник типов, представляющий собой конструктор, с описанием характеристик оборудования. Для каждого типа оборудования выбирается из справочника необходимый набор полей (рис. 4).

Форма представления выбранных полей для описания единицы оборудования представляется в динамическом виде (рис. 5).

Разработанная автоматизированная информационная система является гибким настраиваемым программным комплексом, позволяющим оперативно вести учёт состояния оборудования на протяжении жизненного цикла (поставка, установка, обслуживание, перемещение, ремонт, вывод из эксплуатации).

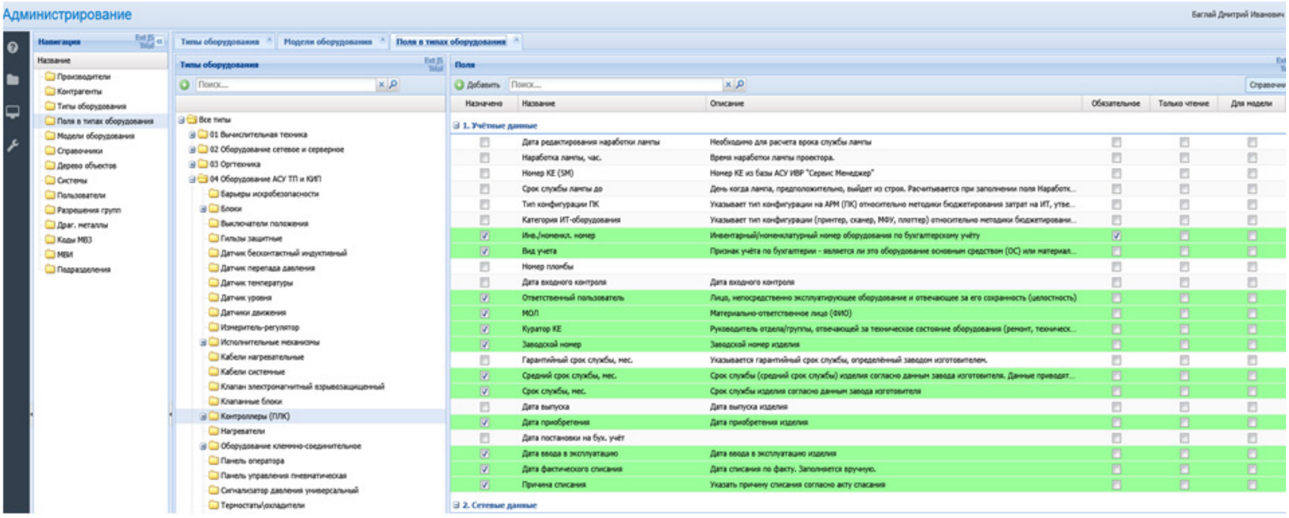


*Рис. 4. Модуль поля в типах оборудования*

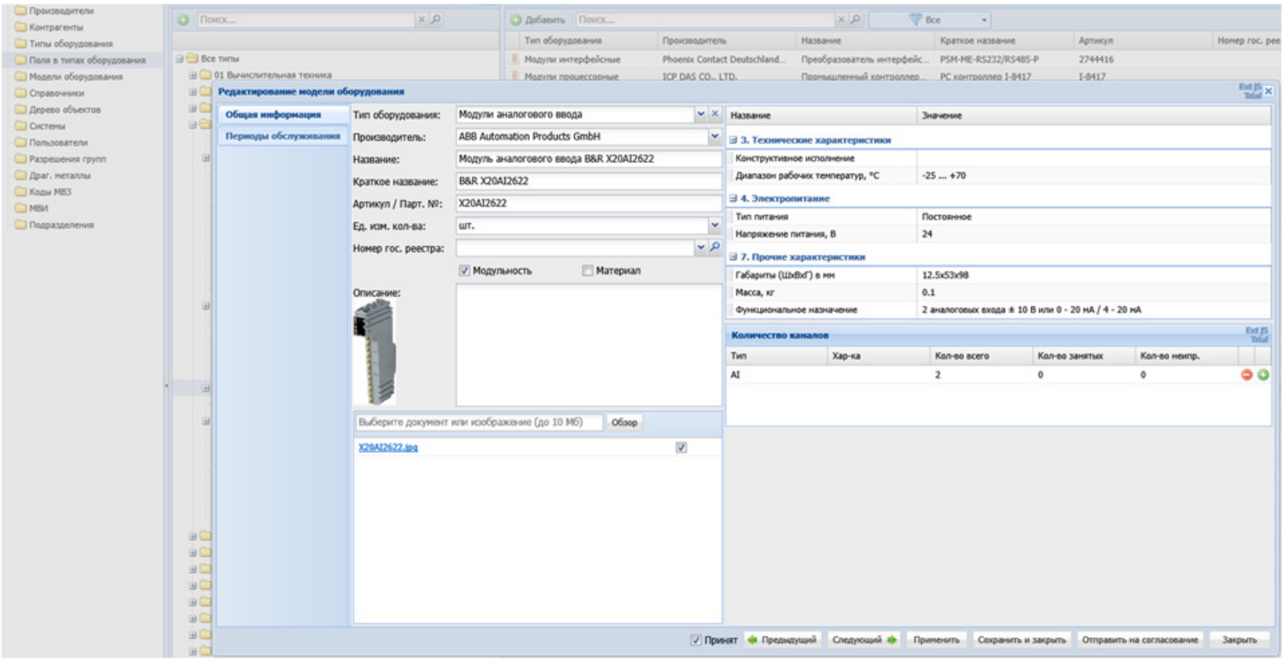


*Рис. 5. Форма данных оборудования*

Система обеспечивает решение следующих задач:

– паспортизация производственных фондов;

– построение структуры учёта оборудования;

– учёт состояния оборудования на протяжении жизненного цикла (поставка, установка, обслуживание, перемещение, ремонт, вывод из эксплуатации);

– планирование работ, обеспечение потребностей в ресурсах;

– формирование перспективного плана обслуживания на указанный период времени с учётом пересечений разных видов технического обслуживания;

– планирование обслуживания оборудования по календарному принципу, фактической наработке, фактическому состоянию и отказу.

– отслеживание гарантийного срока службы оборудования, срока предельной Программа предоставляет пользователю эффективный интерфейс, позволяет заменить бумажные паспорта, планы, графики, журналы электронными, ускоряет поиск нужной информации, упрощает процесс составления и формирования графиков планово-предупредительных ремонтов (ППР).

**Литература**

1. *Баранчеев, В. П.* Управление инновациями: Учебник для вузов / В. П. Баранчеев, Н. П. Масленникова, В. М. Мишин. – М. : Юрайт, 2012. – 711 с. – https://urait.ru/bcode/445971

2. *Гвоздева, В. А.* Основы построения автоматизированных информационных систем: учеб. пособие для вузов / В. А. Гвоздева. – М. : Форум, 2017. – 320 с.

3. *Норенков, И. П.* Автоматизированные информационные системы : учеб.пособие для вузов / И. П. Норенков. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 342 с.

4. *Тоэлсен, Э.* Язык программирования C# 2010 и платформа .NET 4, 5-е изд. : пер. с англ. – М. : ООО «И.Д. Вильямс», 2011. – 1392с.

5. *Халин, В. Г.* Системы поддержки принятия решений : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / В. Г. Халин [и др.]; под ред. В. Г. Халина, Г. В. Черновой. – М. : Издательство Юрайт, 2015. – 494 с.

6. *Ясницкий, Л. Н.* Интеллектуальные системы: учебник / Л. Н. Ясницкий. – М. : Лаборатория знаний, 2016. – 221 с.

УДК 004.7

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА ОБНАРУЖЕНИЯ DDoS-АТАК

**М. А. Бушнева**

*Волгоградский государственный университет*

**Аннотация.** Обнаружение DDoS-атаки является актуальной и сложной задачей. Чем раньше атака будет обнаружено, тем раньше можно будет начать применять средства защиты от нее, и тем меньше пострадает информационная система. Предложен метод обнаружения DDoS-атак, учитывающий изменение параметров функционирования сети. Произведено экспериментальное исследование.
**Ключевые слова:** информационная система, DDoS-атака, функциональная модель, атака, обнаружение DDoS-атак, метод обнаружения атак, статистический метод обнаружения атак, архитектура программного комплекса, интегрированная архитектура, медленные атаки типа отказ в обслуживании.

Информационная система – это упорядоченный набор программного, аппаратного и другого вспомогательного инструментария, который обеспечивает надежное и долгосрочное хранение больших объемов информации, исследований и обработки данных в соответствии с требованиями предметной области, сохраняя при этом практическое взаимодействие с пользователями системы.

В XXI в. в архитектуре информационных систем существует тенденция использовать массивно-параллельные или распределённые серверные инструменты и передавать многие компоненты информационной системы как можно ближе к данным на стороне сервера базы данных. Такие архитектуры обеспечивают информационные системы высокой пропускной способностью, а также возможностью масштабировать их горизонтально по мере роста объёмов данных. Наиболее распространенным из них является интегрированная архитектура.

В интегрированной архитектуре нет четкого разделения компонентов информационной системы между сервером и клиентом (рис. 1).

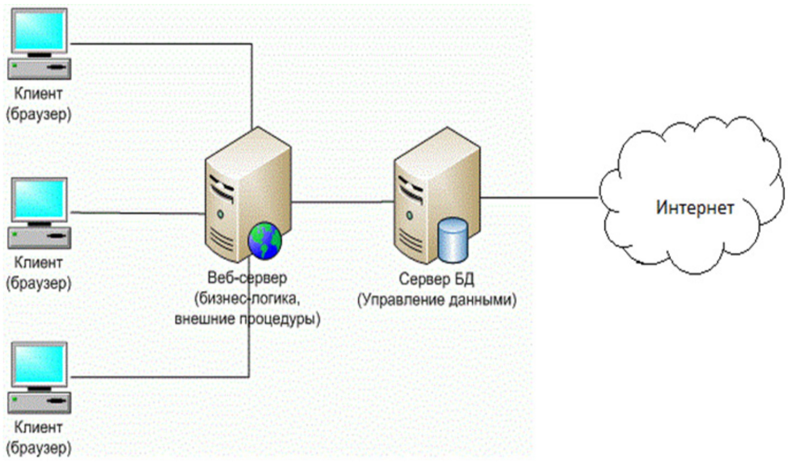



*Рис. 1. Интегрированная архитектура*

Любая часть информационной системы в такой архитектуре может, в зависимости от ситуации, функционировать как сервер или как клиент любого другого компонента. Архитектура интегрированной информационной системы, частным случаем которой является сервис-ориентированная архитектура, то есть запись, указывающая начало авторизации (start of authority – SOA), позволяет решать проблемы, связанные с интеграцией информационной системы и созданием так называемых унаследованных систем, а также проблемы, которые возникнут при переходе на новые программно-аппаратные средства для организации информационной системы. Кроме того, при использовании информационной системы, основанной на архитектуре интеграции, проще и дешевле увеличить пропускную способность, добавив подходящее оборудование при изменении требований к приложениям [1–2].

Сеть стала неотъемлемой частью современных информационных систем. По отношению к системе сеть может быть, как внешней, так и внутренней. Внешние сети не контролируются, поэтому могут стать источником угроз. Одними из наиболее распространенных атак являются DDoS-атаки, для обнаружения которых анализируют проходящий трафик, выявляя нестандартную сетевую активность и ошибки.

DDoS-атака – комплекс действий, которая может полностью или частично заблокировать интернет-ресурс. Почти все интернет-ресурсы могут стать жертвами. Ситуаций, когда хакер единолично может организовать DDoS-атаку, в наше время практически не существует. Обычно потенциальные нарушители безопасности прибегают к использованию сети компьютеров, зараженных вирусом. Сеть таких компьютеров называется ботнетом. Обычно в ботнетах присутствует координирующий сервер. Когда злоумышленник решает провести атаку, он отправляет команду на сервер координации, который затем сигнализирует каждому боту, что ему необходимо начать отправление вредоносных сетевых запросов [3].

Одним из видов DDoS-атак являются медленные атаки типа отказ в обслуживании. Их особенностью является использование недостатка в механизме рестарта протокола TCP. Исходя из особенностей атаки, необходимо строить средства обнаружения и противодействия.

Для обнаружения DDoS-атак используются следующие методы:

1) сигнатурный метод;
2) статистический метод;
3) кластерный метод;
4) нейросетевой метод.

Для анализа методов обнаружения DDoS атак необходимо определить критерии, по которым они будут выбираться. Были выделены следующие критерии:

1. Скорость работы. Для обнаружения DDoS атаки очень важна скорость, при которой метод будет выполняться. Данный критерий имеет значения: высокая, средняя, низкая.

2. Время предварительной подготовки. Для метода, который должен обнаружить стремительную атаку, необходимо, чтобы он требовал, как можно меньшие временные и материальные затраты. Данный критерий может принимать значения: высокое, среднее, низкое.

3. Необходимость хранения собираемых характеристик. Данный параметр показывает, должен ли пользователь хранить собранные во время работы метода характеристики для успешного обнаружения DDoS атаки. Значения для данного критерия: требуется, не требуется.

4. Квалификация пользователя. Показывает, должен ли пользователь, выполняющий проверку информационной системы на наличие DDoS атак, иметь специальной квалификацией. Значения данного критерия: высокая, низкая.

В ходе анализа методов обнаружения DDoS-атак, в ходе которого выяснилось, что наиболее рациональным методом является статистический метод. Преимущество данного метода в том, что, несмотря на необходимость хранения собираемых характеристик, он обеспечивает высокую скорость работы, низкое время предварительной подготовки и не требует высокой квалификации пользователя.

Программный комплекс обнаружения DDoS-атак статистическим методом может использоваться специалистом по информационной безопасности. В качестве входных данных программный комплекс использует сетевые пакеты, полученные из сети. Программный комплекс использует статистический метод обнаружение DDoS-атаки, учитывая сезонность. Результатом использования программного комплекса станет решение, была ли произведена DDoS-атака.

Функциональная модель программного комплекса состоит из:

1. Блок «Расчет параметров сетевой активности» – на вход подаются сетевые пакеты, на выходе параметры сетевого трафика, используются программный комплекс и специалист информационной безопасности, учитывается статистический метод.

2. Блок «Обновление профиля сетевой активности» – на вход подаются параметры сетевого трафика, на выходе профиль сетевой активности, используются программный комплекс и специалист информационной безопасности, учитывается метод учета сезонности.

3. Блок «Проверка допустимых границ» – на вход подаются параметры сетевого трафика, на выходе решение о DDoS-атаке, используются программный комплекс и специалист информационной безопасности, учитывается профиль сетевой активности.

Функциональная модель представлена на рис. 2.

Метод, получая сетевые пакеты, производит расчет параметров сетевой активности с использованием статистического метода, далее параметры сетевого трафика сравниваются с допустимыми границами активности, после чего выносится решение, была ли совершена DDoS-атака [4].

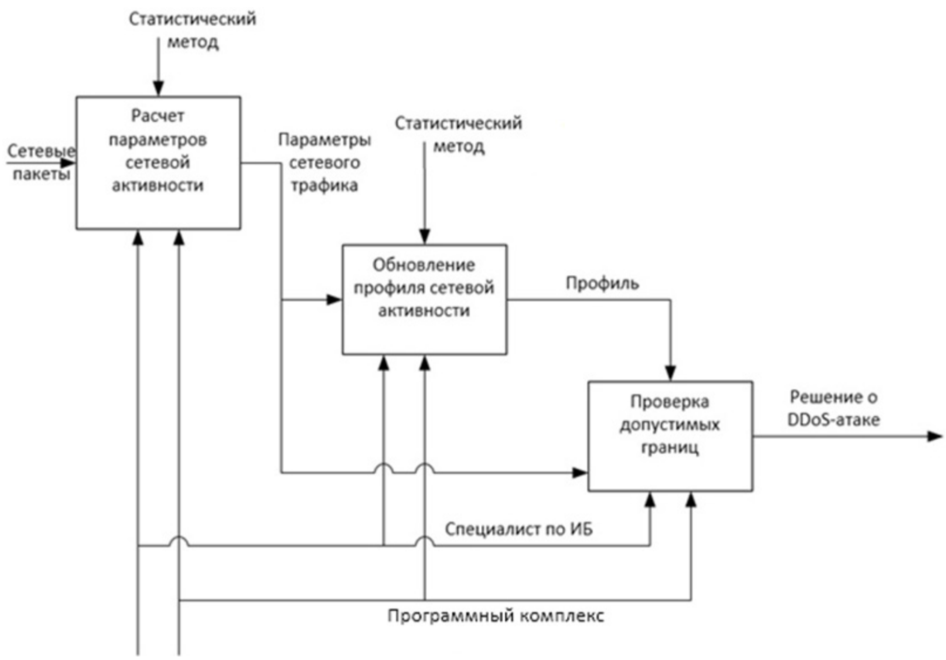



*Рис. 2. Функциональная модель обнаружения DDoS-атак*

Архитектура программного комплекса состоит из следующих модулей (рис. 3):

1. Пользовательский интерфейс.
2. Модуль получения данных об активности.
3. Модуль расчета.
4. Модуль принятия решения о DDoS-атаке.

Модуль получения данных об активности отвечает за обработку данных, полученных из внешнего источника данных и пользовательского интерфейса, и передачу их в модуль расчета.

В модуле расчета происходит расчет параметров сетевой активности статистическим методом.

Модуль принятия решения об DDoS-атаке производит сравнение сетевого трафика с допустимыми границами активности, учитывая сезонность, и выносит решение, произошла ли атака.

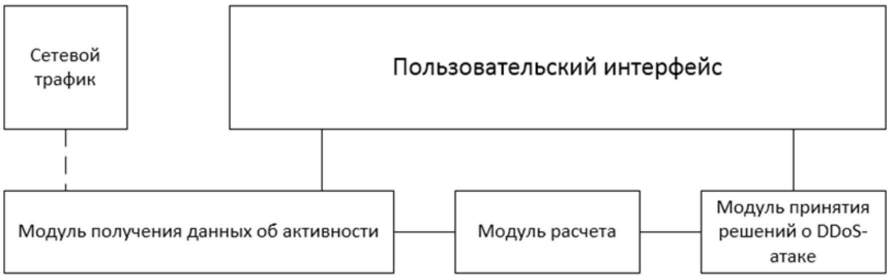



*Рис. 3. Архитектура программного комплекса*

Интерфейс программного комплекса состоит из поля выбора дня анализа трафика, которое устанавливает границы сравнения активности, поля вывода сетевых запросов, в которой указывается статистика сетевого трафика и кнопок запуска расчета сетевой активности (рис. 4).

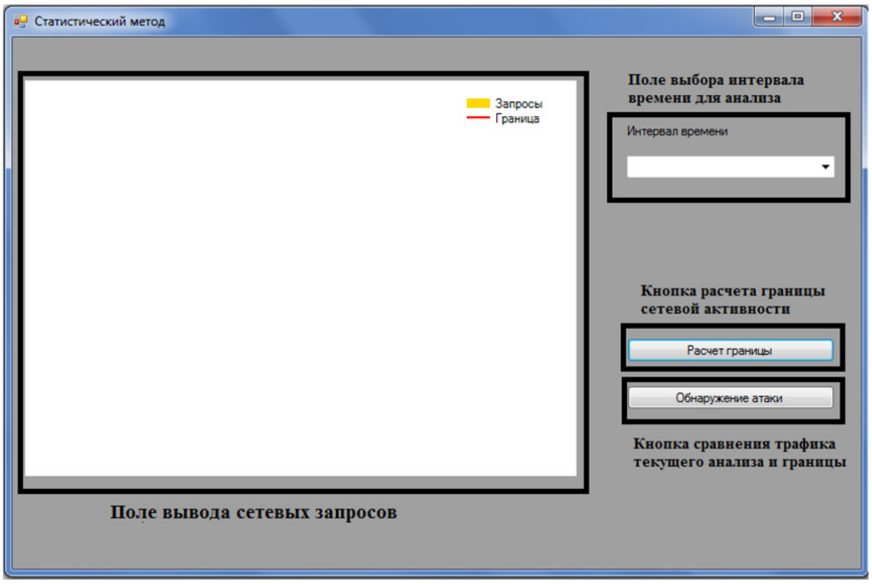



*Рис. 4. Интерфейс программного комплекса (Экранная копия)*

При необходимости провести расчет порогового значения для входящего трафика нужно выбрать интервал времени, за который будет происходить анализ, нажать на кнопку «Расчет границы», после чего программный комплекс проведет расчет текущего трафика и выведет результат анализа на пользовательский интерфейс, а значение границы для этого временного интервала обновится.

Для анализа сетевого трафика на наличие атаки, необходимо выбрать временной интервал анализа, нажать на кнопку «Обнаружение атаки» для запуска работы программного комплекса и вынесения решения о наличии атаки в дополнительном окне сообщения.

Блок-схема алгоритма разрабатываемой программного комплекса представлена на рис. 5. Алгоритм получения данных состоит из следующих шагов:

Шаг 1: запуск программного комплекса.

Шаг 2: на этом шаге формируется массив полученных сетевых запросов для расчета порогового значения.

Шаг 3: на этом шаге значения границы рассчитываются по статистическому методу с учетом сезонности.

Шаг 4: на этом шаге формируется массив значений текущей сетевой активности.

Шаг 5: на этом шаге текущая активность рассчитывается по статистическому методу.

Шаг 6: на этом шаге происходит сравнение массива пороговых значений и массива текущей активности.

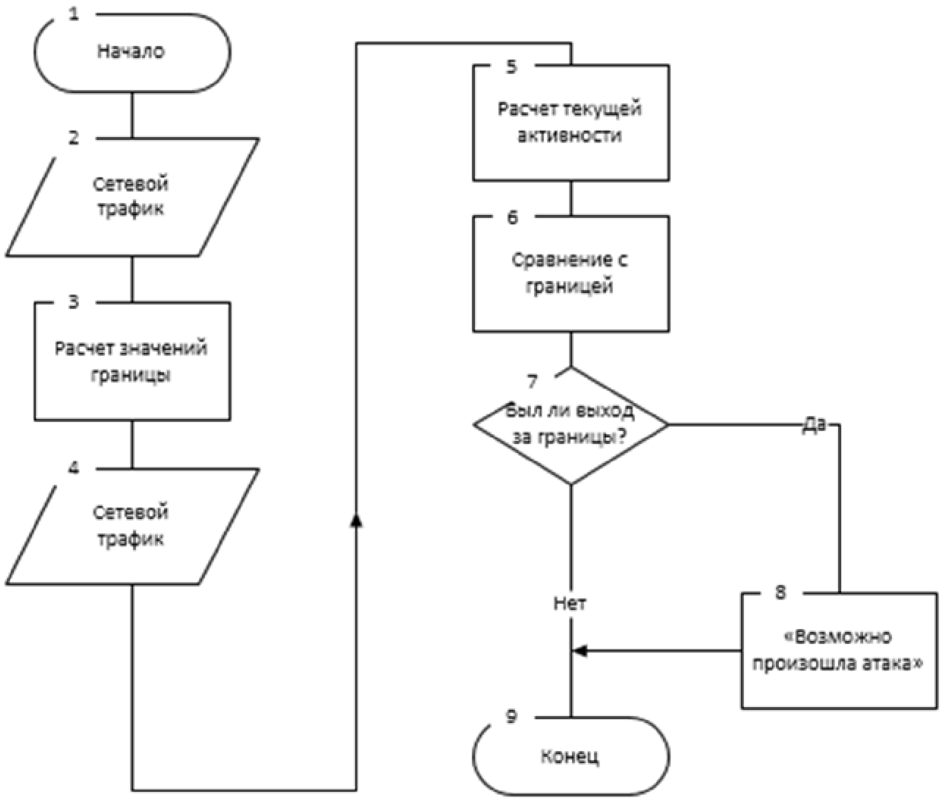



*Рис. 5. Блок-схема алгоритма программного комплекса*

Шаг 7: на данном шаге определяется, произошел ли выход за границы. Если да, то переходим на Шаг 8, если нет – на Шаг 9.

Шаг 8: на этом шаге на пользовательский интерфейс выводится сообщение о возможной атаке.

Шаг 9: вывод сообщения с принятым решением о наличии атаки на пользовательском интерфейсе.

Для проверки достижения поставленной цели было проведено экспериментальное исследование. Задачей экспериментального исследования является обнаружение DDoS-атак. Эксперименты проводятся на отдельно стоящем хосте с установленной операционной системой Windows.

Для решения поставленной задачи необходимо провести 3 эксперимента, включающие в себя:

1) расчет порогового значения трафика;
2) анализ трафика системы в целом;
3) анализ трафика отдельного сервиса.

Для эксперимента был выбран временной интервал в 5 минут. Результаты экспериментов представлены в табл. 1.

Таблица 1

*Результаты проведенных экспериментов*

| Наименование эксперимента | Максимальное количество поступившего трафика | Пороговое значение | Была ли совершена атака |
|---|---|---|---|
| Эксперимент 1 | 2700 | – | – |
| Эксперимент 2 | 1900 | 2700 | Нет |
| Эксперимент 3 | 2400 | 1750 | Да |

При анализе результатов экспериментов, в ходе которых были рассчитаны допустимые границы и проверен входящий трафик на соответствие заданному порогу, было выявлено, что анализ входящего трафика отдельного сервиса является наилучшим способом выявления DDoS-атак.

## Литература


1. Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://bigenc.ru/technology_and_technique/text/3444940

2. ИНТУИТ «Архитектурные особенности проектирования и разработки Веб-приложений» [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.intuit.ru/studies/courses/611/467/lecture/28784

3. *Рубан И. В., Прибыльнов Д. В., Лошаков Е. С.* Метод выявления низкоскоростной атаки типа «отказ в обслуживании // Наука и техника Воздушных Сил Вооруженных Сил Украины. – 2013. – № 4(13). – С. 85–88.

4. *Терновой О. С., Шатохин А. С.* Раннее обнаружение DDOS-атак статистическими методами при учете сезонности // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники – 2012. – №1–2. – С. 104–107.

5. Федеральный закон Российской Федерации от 27 июля 2006 г. № 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_61798/

6. ГОСТ Р 50739-95 Средства вычислительной техники. Защита от несанкционированного доступа к информации. Общие технические требования [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://docs.cntd.ru/document/gost-r-50739-95

УДК 681.5.017

# ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАТФОРМЫ ГЬЮ-СТЮАРТА

**Т. В. Бушуева[1], М. Ю. Гольцова[2]**

*[1]Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова*
*[2]Первый Санкт-Петербургский государственный медицинский университет им. акад. И. П. Павлова*

**Аннотация.** В статье описывается построенная параметрическая модель платформы Гью-Стюарта в среде MSC Adams. Представлена конфигурация модели и описано назначение ее варьируемых параметров. Координаты точек расположения сферических шарниров заданы в полярной системе. Смоделировано типовое движение — поворот стола при действии на него постоянной нагрузки и определены необходимые усилия в актуаторах для обеспечения движения с заданной скоростью. Описаны направления дальнейшего возможного использования модели.
**Ключевые слова:** платформа Гью-Стюарта, гексапод, параметрическая модель, MSC Adams, оптимизация, сферические шарниры, линейный актуатор, расчет нагрузки, виртуальное прототипирование.

## Введение

Роботы с параллельной кинематикой обладают превосходными характеристиками: они могут достигать высоких скоростей, обладают отличными динамическими характеристиками и хорошей повторяемостью движений. Одним из таких роботов является так называемая платформа Гью-Стюарта, которая также известна под зарегистрированным компанией Geodetic Technology товарным знаком «гексапод» (hexapod). Платформа Гью-Стюарта широко используется на практике, например, при построении динамических виртуальных тренажеров для обучения и тренировки персонала управляемых машин (военной и гражданской техники), для создания универсальных металлообрабатывающих роботизированных технологических комплексов, в медицинской ортопедии и т. д. [1].

При проектировании конструкции платформы под конкретное применение разработчики сталкиваются с рядом трудностей, связанных со сложной механической структурой. Во-первых, в механизме могут возникать особые положения, когда происходит исчезновение степеней свободы или наоборот появляется избыточная и неуправляемая подвижность, что влечет за собой невозможность движения в целом, либо в отдельных направлениях. Во-вторых, с целью получения необходимых эксплуатационных характеристик требуется решать задачу оптимизации, решение которой существенно усложняется ввиду возможного наличия особых положений. И в целом на кинематику и динамику оказывают влияния многие факторы, такие как зазоры в пассивных соединениях, ошибки сборки, нелинейные явления в механических компонентах и т. д., которые ухудшают стабильность и точность [2]. Одним из путей преодоления этих трудностей является применения технологий компьютерного моделирования и виртуального прототипирования [3]. Вопросы математического и компьютерного моделирования платформы Гью-Стюарта рассмотрены в большом числе работы, например, [1, 4–5]. В этой работе описывается параметрическая модель платформы Гью-Стюарта, разработанная в среде MSC Adams.

## Описание параметрической модели платформы Гью-Стюарта

Внешний вид параметрической модели платформы Гью-Стюарта, построенной в среде Adams, представлен на рис. 1.

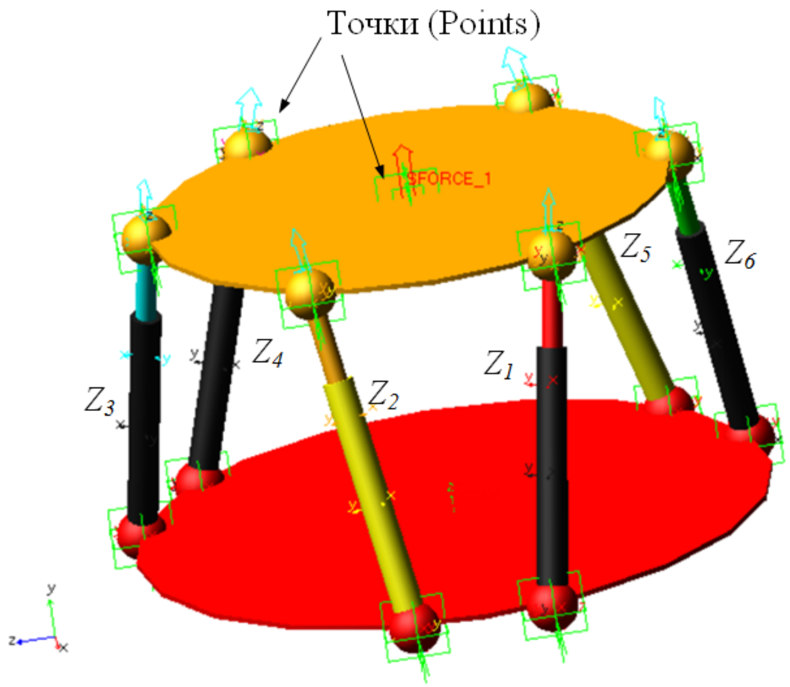



*Рис. 1. Параметрическая модель платформы Гью-Стюарта*

Конфигурация платформы Гью-Стюарта, определяющая кинематические и динамические характеристики, зависит от размера стола и основания, а также мест крепления сервоприводов (линейных актуаторов). Поэтому были заданы следующие варьируемые параметры модели: радиус стола (*VTableR*) и основания (*VBaseR*), высота стола (*VH*), наружный (*VActOuterR*) и внутренний (VActInnerR) диаметры сервоприводов, линейная скорость перемещения рабочих элементов актуаторов (*VSpeed*). Места крепления актуаторов удобно задать в полярной системе координат. Для этого требуется параметрически задать шесть углов для стола и шесть для основания. Координаты точек, на основании которых будет строиться параметрическая модель, представлены в табл. 1. В качестве ограничений движения используются по шесть сферических шарниров для стола и основания, а также шесть поступательных шарниров для реализации актуаторов.

У гексапода существует несколько типовых движений, определяющих его рабочую зону: наклон (tilt), втягивание (pull), поворот (slew), сдвиг (shift), подъем (lift), наклон (lean). Направления скоростей приводов определяет выполняемое движение. Например, для поворота стола скорости движения рядом стоящих приводов должны быть противоположны, то есть $Z_1 = -Z_2 = Z_3 = -Z_4 = Z_5 = -Z_6$. Остальные движения формируются аналогичным образом.

Для решения задачи определения максимальной нагрузки на привод можно задать линейные движения с помощью соответствующего генератора (Translational Joint Motion), тогда измерители на этих движителях по соответствующим осям покажут силу, которую необходимо развить на каждом из приводов для того, чтобы обеспечить движение со скоростью равной по модулю параметру *VSpeed*. Нагрузка на стол моделируется при помощи однокомпонентной силы (SForce). В качестве примера, на рис. 2 представлены модули усилий на всех приводах при повороте стола гексапода. Скорости движения на каждом приводе заданы по синусоидальному закону, при котором модуль скорости движения актуатора определяется как $V_{ai} = VSpeed * \sin(time)$, где $time$ – модельное время. По полученным усилиям и скорости их изменения можно производить подбор сервоприводов для этого режима движения.

Таблица 1

*Координаты точек, определяющие конфигурацию параметрической модели платформы Гью-Стюарта*

| Точка | Координаты | | |
|---|---|---|---|
| | *X* | *Y* | *Z* |
| *PH* | 0.0 | (*VH*) | 0.0 |
| *P0* | (*VBaseR* * cos(*VPhi0*)) | 0.0 | (VBaseR * sin(*VPhi0*)) |
| *P1* | (*VBaseR* * cos(*VPhi1*)) | 0.0 | (VBaseR * sin(*VPhi1*)) |
| *P2* | (*VBaseR* * cos(*VPhi2*)) | 0.0 | (VBaseR * sin(*VPhi2*)) |
| *P3* | (*VBaseR* * cos(*VPhi3*)) | 0.0 | (VBaseR * sin(*VPhi3*)) |
| *P4* | (*VBaseR* * cos(*VPhi4*)) | 0.0 | (VBaseR * sin(*VPhi4*)) |
| *P5* | (*VBaseR* * cos(*VPhi5*)) | 0.0 | (VBaseR * sin(*VPhi5*)) |
| *P0_2* | (*VTableR* * cos(*VPhi0_2*)) | (*VH*) | (VTableR * sin(*VPhi0_2*)) |
| *P1_2* | (*VTableR* * cos(*VPhi1_2*)) | (*VH*) | (VTableR * sin(*VPhi1_2*)) |
| *P2_2* | (*VTableR* * cos(*VPhi2_2*)) | (*VH*) | (VTableR * sin(*VPhi2_2*)) |
| *P3_2* | (*VTableR* * cos(*VPhi3_2*)) | (*VH*) | (VTableR * sin(*VPhi3_2*)) |
| *P4_2* | (*VTableR* * cos(*VPhi4_2*)) | (*VH*) | (VTableR * sin(*VPhi4_2*)) |
| *P5_2* | (*VTableR* * cos(VPhi5_2)) | (*VH*) | (VTableR * sin(*VPhi5_2*)) |

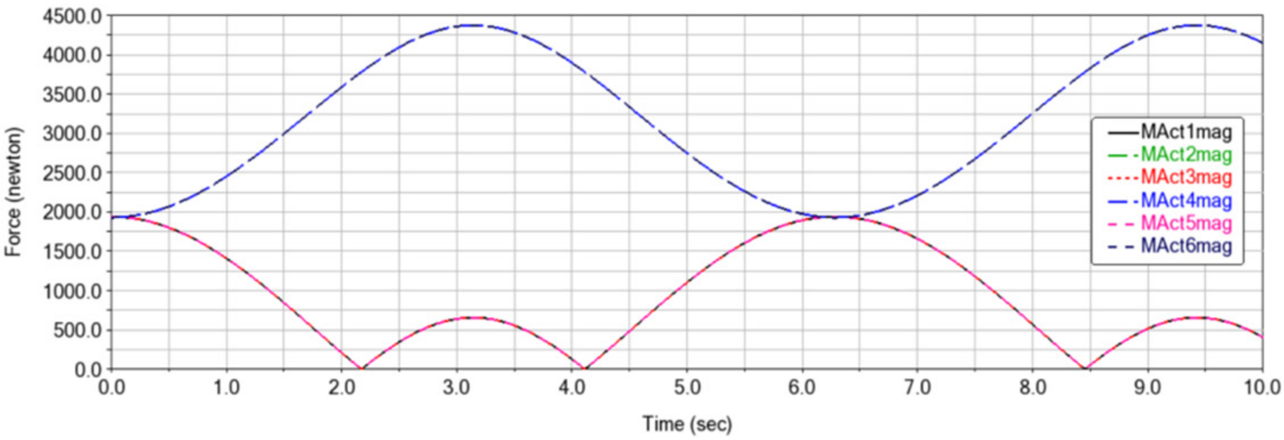



*Рис. 2. Силы, необходимые для поворота стола платформы Гью-Стюарта с заданной скоростью*

**Заключение**

Построенная параметрическая модель позволяет легко изменить длину и ход привода, а также взаимное их расположение. При этом появляется возможность проведения анализа чувствительности изменения параметров на характеристики гексапода, и проводить оптимизацию встроенными средствами Adams. Для этого возможно создания скрипта, изменяющего параметры модели, запускающий расчет модели и проводящий анализ полученных результатов. Это поможет оптимизировать геометрическую модель, определить оптимальное расположение шарниров при известных данных о сервоприводе (длине привода и ходе).

**Литература**

1. Динамика платформы Стюарта / Б. Р. Андриевский, Д. Г. Арсеньев, С. А. Зегжда [и др.] // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т. 62. – № 3. – С. 489–504.

2. *Rosenzveig V.* Minimal representation for the control of the Adept Quattro with rigid platform via leg observation considering a hidden robot model / V. Rosenzveig, S. Briot, P. Martinet // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS2013) Tokyo Big Sight Japan. – 2013.

3. *Коренева Т. Ю.* Моделирование динамики системы управления манипуляционного робота и его механических элементов / Т. Ю. Коренева, Д. А. Бушуев, Д. А. Юдин // Сб. докл. междунар. науч.-техн. конф. БГТУ им. В. Г. Шухова «Наукоемкие технологии и инновации», (Белгород, 6–7 октября 2017 г.) Белгород: БГТУ им. В.Г. Шухова. – 2016. – С. 43–47.

4. *Cheng Y.* The multi-body system modeling of the Gough–Stewart platform for vibration control / Y. Chen, G. Ren, S.L. Dai // J. Sound Vib. – 2004. – 27(3) – P. 599– 614.

5. Davliakos I. Model-based control of a 6-dof electrohydraulic Stewart-Gough platform / I. Davliakos, E. Papadopoulos // Mechanism and Machine Theory. – 2008.

УДК 004.912

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

**Ю. М. Вишняков, Р. Ю. Вишняков**

*Кубанский государственный университет*

**Аннотация.** В статье формулируется формализованный подход к идентификации семантических объектов в текстовых потоках. Рассуждения строятся на основе теоретических положений вычислительной теории семантической интерпретации и используют вычислительное представление семантики текстовых фрагментов, их сравнения на семантическую близость. Предлагаемый подход позволяет выявлять семантические следы объектов в текстовых потоках и по ним проводить их идентификацию. Характерная особенность предложенного подхода состоит в использовании для идентификации семантики, отображенной в грамматические структуры текстов, что присуще человекоподобному пониманию речи.

**Ключевые слова:** семантический объект, семантический след, семантический распознаватель, идентификация, семантическое сравнение, текстовый фрагмент, семантическая близость, критерий семантической близости.

Сегодня можно констатировать тот факт, что возможности и успехи информационных технологий и высокая производительность компьютеров уже позволяют практически подступиться к таким задачам искусственного интеллекта как моделирование и обработка естественно-языковой информации. И несмотря на отсутствие приемлемых естественно-языковых формализаций, обусловленных неоднозначностью отношения грамматической и смысловой форм речи, а также в связи с практическими успехами надежды начали возлагать на машинное обучение и нейронные сети, ренессанс которых наблюдается. [1, 2].

Практические успехи в обработке естественно-языковой информации нейронными сетями, тем не менее, требовали тщательного составления обучающих выборок и тонкой настройки сети на специфику обрабатываемых текстов. Связано это с тем, что «физика» обучения нейросетей такова, что вначале нужно выявить и отобразить на структуру и состояния сети характерные слова и их статистически устойчивые связи, а это может быть выполнено в процессе обучения на тщательно подобранных больших наборах текстов, являющимися как можно более близкими по смыслу к предполагаемым к обработке текстам.

Хотелось бы, нисколько не умаляя нейросетевой подход,  указать на две его характерные особенности. Во-первых, в основе нейросетевого обучения и узнавания лежат устойчивые частотные характеристики слов и их связей, хотя это в некотором смысле и завуалировано в обучении. И, во-вторых, утверждение об идентичности обрабатываемого текста и обучающих выборок является не более чем допущением, основанным на субъективном мнении. А что будет, если допущение начинает не выполняться? Например, думается, что нейросеть, настроенная на извлечение информации из новостных каналов СМИ, с обработкой научно-технической информации из специальной области знаний не справится. В лучшем случае потребуется ее глубокая перенастройки, а возможно и реорганизация.

В данной статье предлагается иной подход, развиваемый авторами под именем вычислительной теории семантической интерпретации [3–5], в рамках которого разработано семантическое сравнение текстов основе грамматических связей и зависимостей.

Задача. Для понимания существа вопроса проведем аналогию между текстовой обработкой и обработкой видеопотоков. Пусть имеется некоторая гипотетическая система (устройство, программа), на вход которой подается поток текстовых данных (текстов). Системе требуется определить, присутствует ли в данном текстовом потоке некоторый семантический объект. Очевидно, что присутствие семантического объекта в текстовом потоке может быть только лингвистическое, поэтому его обнаружение и выявление может быть осуществлено по оставляемым им характерным лингвистическим «следам». В дальнейшем такую систему распознавания семантического объекта в текстовом потоке, будем называть семантическим распознавателем.

Решение. Теперь обсудим понятие семантического объекта. Под семантическим объектом будем понимать некоторый предмет, явление или событие, имеющее индивидуальное, присущее только ему смысловое содержание. Это содержание лингвистически отображается и выражается в естественно-языковых конструкциях или иначе в лингвистическом описании. Лингвистическое описание образуют слова, словосочетания, предложения и целостные тексты, возможно организованные определенным образом. Вопросы формализации лингвистических описаний пока опустим, поскольку для разных целей они могут существенно различаться. Но, в общем случае можно говорить о составных элементах лингвистического описания, которые образуют лингвистические характеристики объекта.

Придадим некоторую формализацию рассуждениям. Пусть лингвистическое описание семантического объекта представляется множеством его лингвистических характеристик $Q = \{q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n\}$. Для каждой характеристики $q_i$ введем меру ее присутствия $0 \le w_i \le 1$ в текстовом потоке, а пару $(w_i,\ q_i)$ будем называть следом характеристики $q_i$ в текстовом потоке. Множество $\{(w_i,\ q_i),\ i = 1 \ldots n\}$ образует след семантического объекта в текстовом потоке.

Теперь сконструируем функцию распознавания семантического объекта $P,$ для чего придадим каждой семантической характеристике вес $p_i$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_1^n p_i = 1, \\ 0 \le p_i \le 1. \end{gathered} \tag{1}$$

Саму функцию распознавания представим в виде:

$$\begin{gathered} P = \textstyle\sum_1^n p_i w_i = 1, \\ 0 \le P \le 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Таким образом, если $P = 1,$ то семантический объект в текстовом потоке идентифицирован полностью по всем характеристикам, если $P = 0,$ то семантический объект не идентифицирован ни по одной характеристике. Подобным образом можно было бы сконструировать мультипликативную функцию распознавания, что в нашем случае не является принципиальным.

Нетрудно заметить, что приданием значений весам $p_i$ занимается пользователь при настройке семантического распознавателя на решение конкретной задачи идентификации. В этом случаю каким-либо характеристикам уделяется большее внимание, а каким-то — меньшее.

Более принципиальным является формирование и вычисление меры присутствия $w_i$ характеристики $q_i$ в следе семантического объекта. А здесь нужно сравнивать тексты на смысловую близость, что является весьма непростой задачей, существенно зависящей от приятой модели семантики. В нашем случае мы предлагаем формировать следы объекта с использованием вычислительной теории семантической интерпретации, в рамках которой сформировано понятие семантической близости текстов и предложены соответствующие процедуры их вычисления. Рассуждения проиллюстрируем примерами.

Рассмотрим простой частный случай. Пусть семантический объект представлен всего одной лингвистической характеристикой (цепочкой) $q =$ «*международное признание образовательных программ российских вузов*» и нужно в потоке текстов найти след $(w, q).$ Очевидно, что это будут такие тексты, в которых речь идет о международном признании образовательных программ российских вузов.

Конкретизируя (2) для нашего случая, функция распознавания примет вид:

$$P = w. \tag{3}$$

Заметим, что в рассматриваемом примере лингвистическая характеристика семантического объекта всего одна, поэтому отождествим ее с именем семантического объекта. О таких ситуациях говорят, что имя объекта является литеральным, т. е. выраженным в своем названии.

*Ремарка.* Международное признание можно продвигать по разным линиям, в том числе, например, посредством профессиональной аккредитация образовательных программ в соответствующих международных агентствах. В таком признании образовательной программы «Информатика и вычислительная техника» в аккредитационной комиссии ABET (США, 2005), которое было проведено впервые в России, авторы принимали самое непосредственное участие во время своей работы в Таганрогском государственном радиотехническом университете.

Теперь обратимся к базовым положениям вычислительной теории семантической интерпретации, которые нам понадобятся [3–5]. Пусть в естественном языке задана некоторая цепочка $q$ слов $a_i$ вида:

$$q = a_1 a_2 \ldots a_n. \tag{4}$$

Эта цепочка представляет целостный по смыслу тестовый фрагмент (предложение или его часть). Целостность означает, что все слова в цепочке $q$ входят в словосочетания, образуя отношение непосредственного подчинения на множестве слов текстового фрагмента, которое является однозначным.

Если обозначить через $S(a_i)$ множество смысловых значений слова $a_i$ из (4), то множество $S(q)$ смысловых значений $q$ в общем виде можно представить некоторым функционалом вида:

$$S(q) = \Phi\left(S(a_1),\ S(a_2),\ \ldots,\ S(a_n)\right) \tag{5}$$

называемым функционалом смысловыразительности, причем $S(q) \subset S(a_i)$, если $a_i$ главное слово $q$.

Выделим в $q$ какое-либо словосочетание $ab$, в котором $a$ — главное слово, а $b$ — зависимое. Представим эту зависимость формулой вида:

$$\overrightarrow{a:b}, \tag{6}$$

где стрелка показывает направление зависимости. Если слово $a$ входит главным словом в несколько словосочетаний с зависимыми словами $b_1, b_2, ..., b_p$, то данное обстоятельство представляется следующей записью:

$$\overrightarrow{a:\{b_1,\ b_2 \ldots b_p\}} \tag{7}$$

и такая запись (формулу) называется контекстной связкой слова $a$.

Поскольку смысловое значение словосочетания есть подмножество смысловых значений его главного слова, задаваемое смыслом зависимого слова, образующего контекст в словосочетании, смысловое значение словосочетания представляется следующей формулой:

$$S\left(\overrightarrow{a:b}\right) = S(a)|_{S(b)}\,. \tag{8}$$

Для (8) справедливы соотношения:

$$S\left(\overrightarrow{a:b}\right) \subset S(a),\ S\left(\overrightarrow{a:b}\right) \neq S\left(\overrightarrow{b:a}\right),\ S\left(\overrightarrow{a:a}\right) = S(a). \tag{9}$$

Распространим (8) на весь текстовый фрагмент $q$, тогда, если в $q$ слово $a_i$ является главным, то всегда выполняется соотношение:

$$S(q) \subset S(a_i), \tag{10}$$

т. е. смысл цепочки $q$ является подмножеством множества смыслов его главного слова $a_i$.

Для словосочетания определяется операция контекстного уточнения смысла главного слова зависимым следующим образом:

$$S\left(\overrightarrow{a:b}\right) = S(a) \overrightarrow{\cap} S(b). \tag{11}$$

где $\overrightarrow{\cap}$ — операция контекстного уточнения смысла. Стрелка над операцией задает направление зависимости слов в словосочетании. Распространив (11) на контекстную связку (7), получим:

$$S\left(\overrightarrow{a:\{b_1,\ b_2\ldots b_p\}}\right)=S\left(\overrightarrow{a:b_1}\right)\cap S\left(\overrightarrow{a:b_2}\right)\cap\ldots\cap S\left(\overrightarrow{a:b_p}\right), \tag{12}$$

или иначе:

$$S\left(\overrightarrow{a:\left(b_1,\ \ldots,\ b_p\right)}\right)=\bigcap\nolimits_1^p S\left(\overrightarrow{a:b_i}\right). \tag{13}$$

Здесь $\cap$ — операция пересечения множеств.

Теперь с учетом (8)–(13) для семантического объекта $q$ можно раскрыть выражение его функционала для $S(q)$. Для этого закодируем латинскими буквами слова в $q$ следующим образом:

$$q=\text{"}\underbrace{\text{международное}}_{a}\ \underbrace{\text{признание}}_{b}\ \underbrace{\text{образовательных}}_{c}\ \underbrace{\text{программ}}_{d}\ \underbrace{\text{российских}}_{e}\ \underbrace{\text{вузов}}_{f}\text{"}$$

С учетом кодировки функционала $S(q)$ представляется следующим выражением:

$$S(q)=(S(a)\overrightarrow{\cap}S(b)\cap S(b)\overrightarrow{\cap}((S(d)\overrightarrow{\cap}S(c)\cap((S(d)\overrightarrow{\cap}(S(e)\overrightarrow{\cap}S(f))), \tag{14}$$

Теперь осудим сравнение тестов на семантическую близость. Предлагаемый в вычислительной теории семантической интерпретации подход основан на сравнениях вычислительных процедур и не требует задания семантических значений слов. Эти значения априори предполагаются одинаковыми. Сами вычислительные процедуры приводятся к некоторой базе сравнения, в качестве которой выступает нотация записи математических выражений в виде обратной польской записи (ОПЗ). Такая нотация не содержит скобок и ее вычисление выполняется последовательно за один проход слева направо.

В работах авторов сконструированы процедуры перехода к представлению функционал смысла в нотации ОПЗ, Так, в нотации ОПЗ операция контекстного уточнения смысла (11) будет иметь вид:

$$S\left(\overrightarrow{a:b}\right)=S(b)S(a)\overleftarrow{\cap}. \tag{15}$$

и для сохранения зависимости слов стрелка над операцией меняет направление. ОПЗ контекстной связки (12) с учетом (15) принимает следующий вид:

$$S\left(\overrightarrow{a:\left(b_1,\ \ldots,\ b_p\right)}\right)=\underbrace{S(b_1)S(a)}_{1}\overleftarrow{\cap}\underbrace{S(b_1)S(a)}_{2}\overleftarrow{\cap}\ldots\underbrace{S(b_1)S(a)}_{p}\overleftarrow{\cap}\underbrace{p\cap}, \tag{16}$$

где $p$ соответствует арности операции пересечения.

С учетом (15) и (16) ОПЗ функционала смысла для $q$ (14) примет вид:

$$S(a)=S(a)S(b)\overleftarrow{\cap}S(c)S(d)\overleftarrow{\cap}S(f)S(e)\overleftarrow{\cap}S(d)\overleftarrow{\cap}\cap S(b)\overleftarrow{\cap}\cap. \tag{17}$$

Пошаговая процедура вычисления данной ОПЗ представляется следующим образом:

$$S(a)=\underbrace{S(a)S(b)\overleftarrow{\cap}}_{r_1}S(c)S(d)\overleftarrow{\cap}S(f)S(e)\overleftarrow{\cap}S(d)\overleftarrow{\cap}\cap S(b)\overleftarrow{\cap}\cap$$

$$S(a)=r_1\underbrace{S(c)S(d)\overleftarrow{\cap}}_{r_2}S(f)S(e)\overleftarrow{\cap}S(d)\overleftarrow{\cap}\cap S(b)\overleftarrow{\cap}\cap$$

$$S(a)=r_1r_2\underbrace{S(f)S(e)\overleftarrow{\cap}}_{r_3}S(d)\overleftarrow{\cap}\cap S(b)\overleftarrow{\cap}\cap$$

$$S(a)=r_1r_2\underbrace{r_3S(d)\overleftarrow{\cap}}_{r_4}\cap S(b)\overleftarrow{\cap}\cap$$

$$S(a) = r_1 \underbrace{r_2 r_4 \cap}_{r_5} S(b) \overleftarrow{\cap} \cap$$

$$S(a) = r_1 \underbrace{r_5 S(b) \overleftarrow{\cap}}_{r_6} \cap$$

$$S(a) = \underbrace{r_1 r_6 \cap}_{r_7}$$

$$S(a) = r_7$$

Здесь вводимые переменные $r_i$ являются временными и предназначены для хранения промежуточных результатов каждого шага.

Графическое представление вычислительной процедуры. Для этого в ОПЗ каждой операции ставится в соответствие графический элемент, в котором прямоугольник представляет операцию, круглые вершины слева — входные данные, справа — выходные данные (результат). Такой графическое представление операции названо элементом смысла. Объединяя элементы смысла выражения (17) в порядке, задаваемом вычислительной процедурой, получим графическое представление всей вычислительной процедуры, которое называется семантической схемой. Семантическая схема лингвистической характеристики $q$, представляемой ОПЗ (17) представлена на рис. 1:

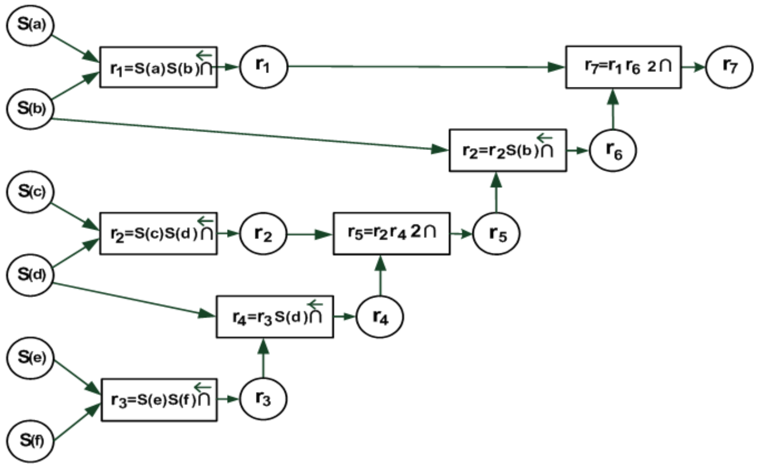



*Рис. 1. Семантическая схема лингвистической характеристики q*

Теперь рассмотрим непосредственно сравнение цепочек на семантическую близость. Пусть требуется семантически сравнить $q$ с некоторой цепочкой $t$ вида:

$$q = b_1 b_2 \ldots b_m. \tag{18}$$

Для эго введем критерий семантической близости [2] следующим образом:

$$Cprox\big(S(q),\ S(t)\big) \in D;$$

$$D = \big[0 \ldots 1\big]. \tag{19}$$

Здесь $Cprox$ — критерий семантической близости, $S(q)$ — множество смысловых значений $q$, $S(t)$ — множество смысловых значений цепочки $t$, $D$ — интервал значений $Cprox$. Если $Cprox = 0$, то близость между $q$ и $t$ отсутствует, при $Cprox = 1$ имеет место полное семантическое равенство.

Отметим, что в общем случае всегда справедливо соотношение:

$$Cprox\big(S(q),\ S(t)\big) \neq Cprox\big(S(t),\ S(q)\big). \tag{20}$$

Представим критерий семантической близости в виде доли совпадающих элементов смысла в семантической схеме цепочек $q$ и $t$ к общему числу элементов смысла $q$:

$$Cprox\big(S(q),\ S(t)\big) = \frac{p}{m}. \tag{21}$$

Здесь $m$ — число элементов смысла в семантической схеме $q$, $p$ — число совпадающих элементов смысла семантических схемах $q$ и $t$ соответственно. Частным случаем (21) является частотный критерий релевантности, когда $m$ представляет число слов в текстовом $q$, а $p$ — число слов из $q$, совпадающих со словами в $t$.

Рассмотрим процесс идентификации семантического объекта $q$. Пусть задан некоторый текстовый поток и в нем встречаются цепочки вида:

$t_1$ = *правительство России проводит политику, направленную на международное признание образовательных программ российских вузов*;

$t_2$ = *образовательные программы российских вузов нуждаются в международном признании*;

$t_3$ = *международное признание образовательных программ поднимает репутационный рейтинг российских вузов*;

$t_4$ = *международное признание вузов увеличивает возможности России по привлечению иностранных студентов*;

$t_5$ = *международные программы академических обменов и участие в них российских ученых способствуют улучшению образовательного процесса вузов России.*

1. Сравнение на семантическую близость цепочки $q$ с цепочкой $t_1$.

*Правительство России проводит политику, направленную на* ***международное признание образовательных программ российских вузов****.*

Здесь цепочка $q$ является подстрокой в цепочке $t_1$ (выделено жирным шрифтом) и ее семантическая схема полностью укладывается в семантическую схему цепочки $t_1$, поэтому $Cprox\big(S(q),\ S(t_1)\big) = 1$.

2. Сравнение на семантическую близость цепочки $q$ с цепочкой $t_2$.

***Образовательные программы российских вузов нуждаются в международном признании***

В $t_2$ также подчеркиванием выделены подстроки, совпадающие с фрагментами $q$. На семантической схеме $q$, показанной на рис. 2, жирными линиями выделены совпадающие элементы смысла.

Семантическая схема $q$ содержит 5 совпадающих элементов смысла, поэтому $Cprox\big(S(q),\ S(t_2)\big) = \frac{5}{7} = 0,71.$

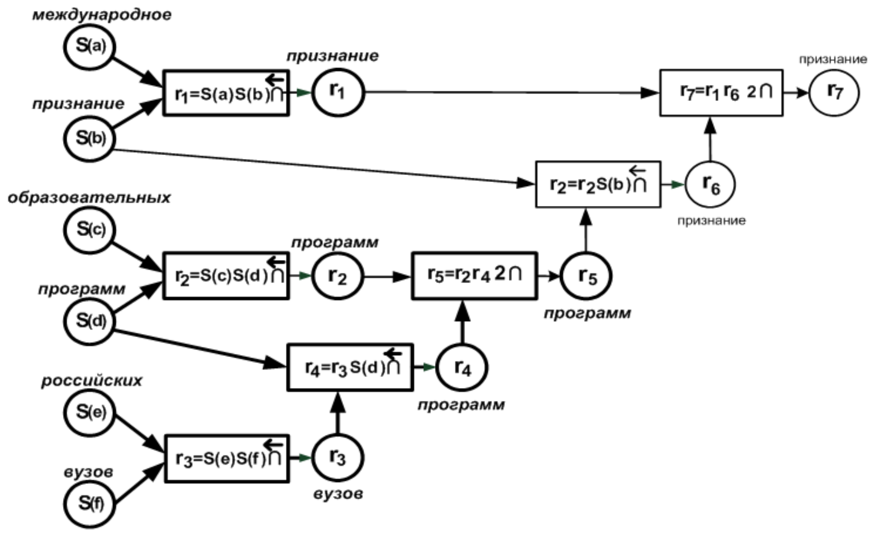



*Рис. 2. Результат сравнения на семантическую близость лингвистической характеристики $q$ с цепочкой $t_2$*

3. Сравнение на семантическую близость цепочки $q$ с цепочкой $t_3$.

***Международное признание образовательных программ*** *поднимает репутационный рейтинг российских вузов*

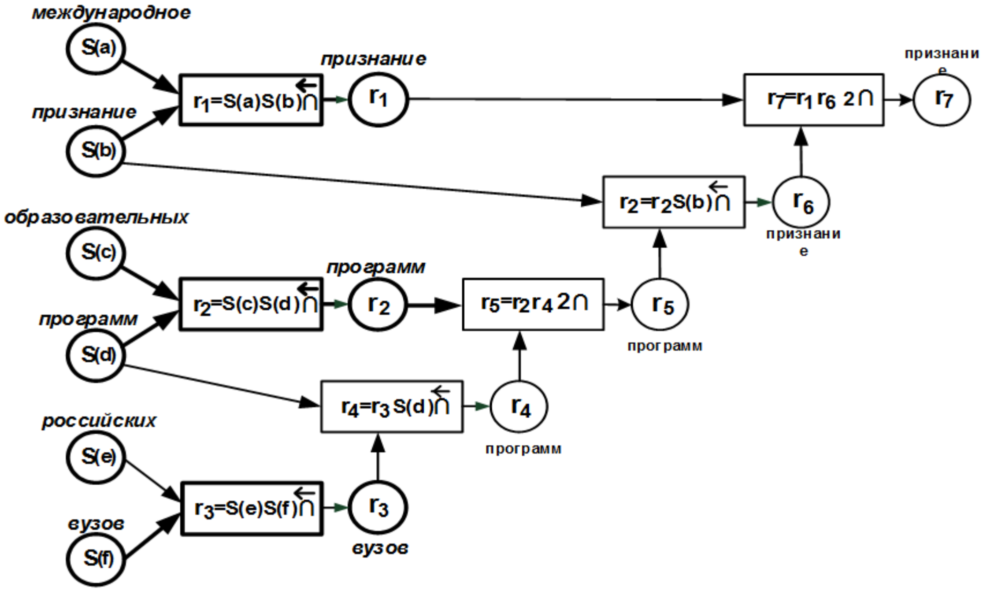



*Рис. 3. Результат сравнения на семантическую близость лингвистической характеристики $q$ с цепочкой $t_3$*

Нетрудно увидеть, что семантические схемы $q$ и $t_3$ имеют всего три совпадающих элемента смысла, поэтому $Cprox\left(S\left(q\right),\ S\left(t_2\right)\right)=\dfrac{3}{7}=0,43.$

4. Сравнение на семантическую близость цепочки $q$ с цепочкой $t_4$.

***Международное признание вузов*** *увеличивает возможности России по привлечению иностранных студентов.*

Из рисунка видно, что семантические схемы цепочек $q$ и $t_4$ имеют только один совпадающий элемент смысла и критерий $Cprox\left(S\left(q\right),\ S\left(t_2\right)\right)=\dfrac{1}{7}=0,143.$

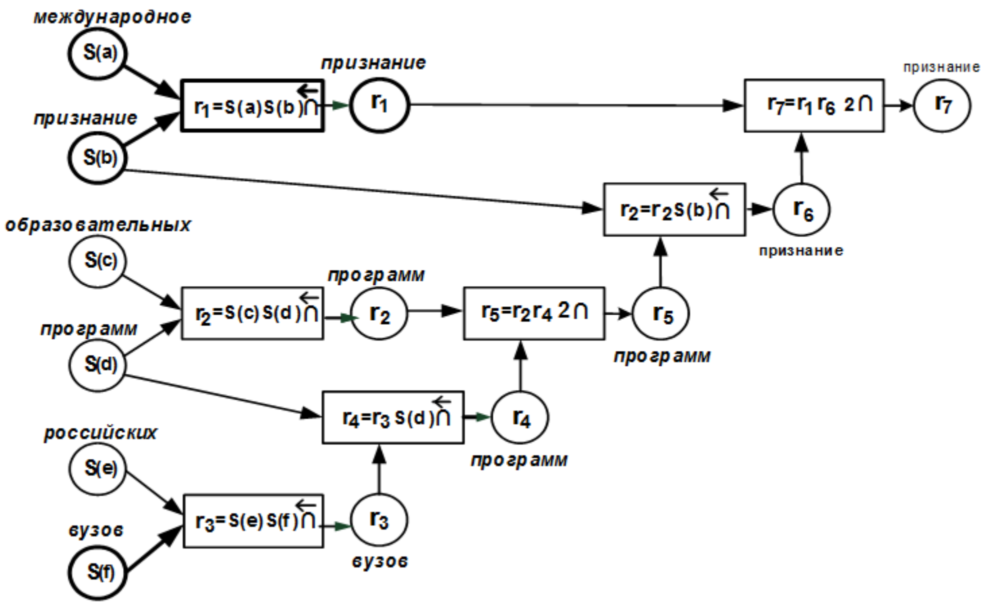



*Рис. 4. Результат сравнения на семантическую близость лингвистической характеристики $q$ с цепочкой $t_4$*

5. Сравнение на семантическую близость цепочки $q$ с цепочкой $t_5$.

***Международные программы*** *академических обменов и участие в них* <u>*российских*</u> *ученых способствуют улучшению образовательного процесса вузов России.*

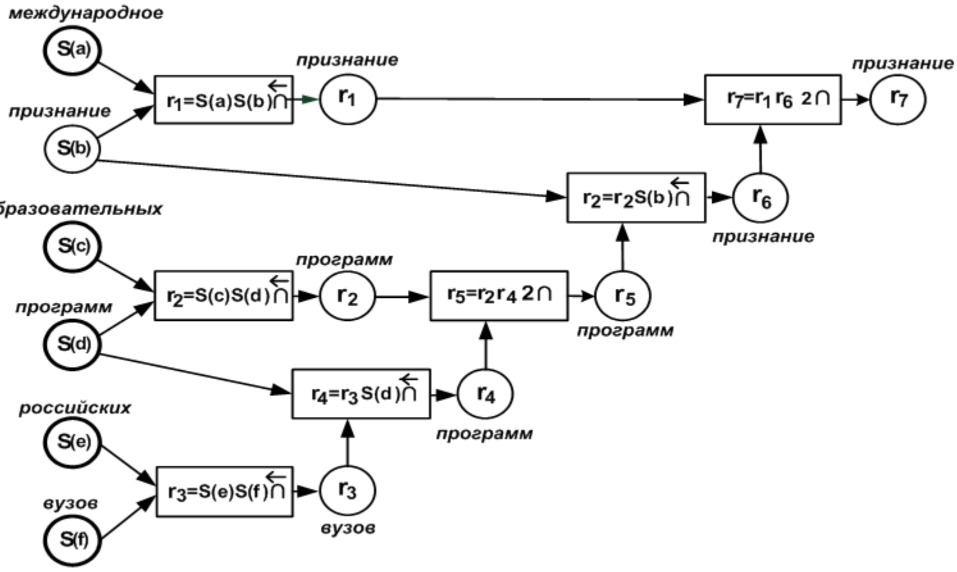



*Рис 5. Результат сравнения на семантическую близость лингвистической характеристики $q$ с цепочкой $t_5$*

Семантические схемы $q$ и $t_5$ не имеет совпадающих элементов, поэтому $Cprox\left(S\left(q\right),\ S\left(t_2\right)\right)=\dfrac{0}{7}=0.$

И так, при анализе текстового потока по отношению к лингвистической характеристике $q$ выделены четыре текстовых фрагмента $t_1, t_2, t_3, t_4$ с ненулевой семантической близостью 1; 0,71; 0,43; 0,14 соответственно.

Теперь построим след семантического объекта в виде множества $\{(w_i, q_i),\ i=1\ldots n\}$. Для этого необходимо сформировать меры присутствия $w_i$ для каждой из лингвистических характеристик по результатам анализа текстового потока на семантическую близость лингвистических характеристик его фрагментам.

Пусть при анализе текстового потока для лингвистической характеристики $q_i$ построено множество ее ненулевых семантических близостей

$$\left\{Cprox\left(S\left(q_i\right),\ S\left(t_k\right)\right),\ k=l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_{1r}\right\}. \tag{22}$$

Тогда можно за степень присутствия $w_i$ можно выбрать максимальное значение критерия близости данной характеристики

$$w_i = MAX\left(\left\{Cprox\left(S\left(q_i\right),\ S\left(t_k\right)\right),\ k=l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_{1r}\right\}\right), \tag{23}$$

или среднее значение критерия близости

$$w_i = \overline{\left\{Cprox\left(S\left(q_i\right),\ S\left(t_k\right)\right),\ k=l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_{1r}\right\}}, \tag{24}$$

или выбрать его из каких-либо иных соображений. Далее формирование функция распознавание осуществляется на основе (2).

Для рассматриваемого выше семантического объекта мера присутствия w принимает значение 1 в случае ее определения по (23) как максимального значения, $w=0{,}57$ — в случае среднего значения по (24). Функция распознавания будет соответственно принимать значения 1 или 0,57 соответственно. В любом случае можно сделать заключение о присутствии семантического объекта в текстовом потоке.

Таким образом, в работе сформулирован формализованный подход к идентификации семантических объектов в текстовых потоках. Подход использует в своей основе положения вычислительной теории семантической интерпретации в части представления семантики и сравнения текстовых фрагментов на семантическую близость. Предложенные решения позволяют выявить семантические следы объектов и по ним идентифицировать их в текстовых потоках, что позволяет построить на этой основе эффективные семантические распознаватели. Характерная особенность предложенного подхода состоит в использовании для идентификации семантики, отображенной в грамматические структуры текстов, что присуще человекоподобному пониманию речи.

**Литература**

1. Прикладной анализ текстовых данных на Python. Машинное обучение и создание приложений обработки естественного языка / Бенгфорт Бенджамин, Билбро Ребекка, Охеда Тони. – СПб. : Питер, 2019. – 368 с.

2. Прикладная и компьютерная лингвистика / Под ред. И. С. Николаева, О. В. Митрениной, Т. М. Ландо. – Изд. 2-е – М. : ЛЕНАРД, 2017. – 320 с.

3. *Вишняков Ю. М.* Вычислительная семантическая интерпретация текстов научно-технического стиля / Ю. М. Вишняков, Р. Ю. Вишняков // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – № 12-2. – С. 53–30.

4. *Vishnyakov Yury M.* The Linguistic Proximity in Information Retrieval and Document Classification / Yury M. Vishnyakov, Renat Yu. Vishnyakov // 14th IEEE International Symposium on Computational Intelligence and Informatics to be held on November 19–21, 2013 in Budapest, Hungary. P. 131–134.

5. *Vishnyakov Yury.* Representation of semantically cohesive sentence fragments in scientific and technical texts / Yury Vishnyakov, Renat Vishnyakov // 2014 IEEE 12th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics. – P. 295–298, DOI: 10.1109/SAMI. 2014. 6822425.

УДК 51-7

# ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ВОЗМОЖНОЙ НЕУДАЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ ОДНОГО ПАКЕТА С ЗАДЕРЖКОЙ

**В. Е. Глушаков**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Данная статья посвящена построению математической модели для сети Wi-Fi, которая позволяет оценивать время доставки одного фрагмента в случае возможной одной неудачной попытки отправки информации с задержкой и исследовать время доставки в зависимости от времени задержки $t_{задержки}$, чтобы использовать полученные результаты для создания более эффективных алгоритмов работы сети. Для нахождения предельных вероятностей состояний системы и закона распределения времени передачи информации строится система уравнений Колмогорова и соответствующий ей граф.
**Ключевые слова:** моделирование передачи данных, Wi-Fi, время доставки информации.

В условиях передачи всё более возрастающего объема информации важное место занимают беспроводные сетевые технологии, включая Wi-Fi. Однако их использование ограничено как из-за помех, так и из-за временных задержек в сети.

Наиболее распространенные причины помех – различные устройства и бытовая техника, работающие в зоне покрытия Wi-Fi устройства или в том же частотном диапазоне, большие расстояния между Wi-Fi устройствами, различные препятствия на пути радиоволн, атмосферные помехи (вне помещений) [1].

Вторая причина – временные задержки в сети. Они могут быть вызваны достаточно большим количеством причин – это и расстояния, и специфика оборудования инфраструктуры интернета, и способы создания web-страниц, и нагрузка канала, и работа других устройств [2].

Устранить полностью ни помехи, ни задержки нельзя, именно поэтому разработка математических моделей, учитывающих и оценивающих их влияние на процесс передачи данных, приобретает большое значение.

В данной статье предлагается другая, отличная от [3], модель возможной неудачной передачи информации с первой попытки, учитывающая еще и временные задержки.

При передаче данных в беспроводных сетях Wi-Fi применяется распределенная координационная функция DSF – фундаментальный протокол канального уровня семейства стандартов IEEE 802.11, использующий метод множественного доступа с контролем несущей и предотвращением коллизий (CSMA/CA) вместе с алгоритмом двоичной экспоненциальной отсрочки. Этот метод используется для организации равноправного доступа к среде передачи данных в стандартах IEEE 802.11 и позволяет предусмотреть возможность возникновения ошибок при передаче данных.

Передающая сторона не получает кадр ACK об успешном приеме, если передача была неуспешной (из-за коллизий станций или помех), и тогда размер конкурентного окна для передающего узла после каждой неудачной попытки увеличивается почти вдвое [4] по формуле $2^n - 1$, где $n = 5,\ldots,10$ (для 802.11a). Максимальный размер окна – 1023 $(2^{10} - 1)$ слота. Таким образом, размер окна для первой передачи равен 31 слоту, для второй попытки передачи – 63, для третьей – 127 и т. д.

Следовательно, по мере роста числа коллизий увеличение размера окна происходит динамически, что позволяет снизить вероятность возникновения коллизий и уменьшить временные задержки.

В данной статье разработана модель передачи информации одной станцией с задержкой, учитывающая возможность появления ошибки в процессе передачи фрагмента с первой попытки.

Последовательность обмена информацией в случае удачной передачи (для стандарта 802.11a) представлена на рис. 1 [5] .

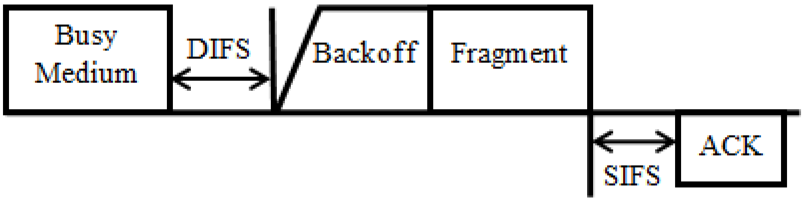



*Рис. 1. Удачная передача одного фрагмента с первой попытки*

Последовательность обмена информацией в случае неудачной передачи информации с первой попытки, но удачной со второй, описана в [5] и представлена на рис. 2.

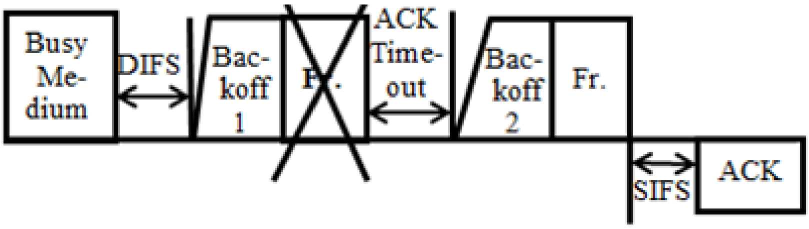



*Рис. 2. Неудачная передача одного фрагмента с первой попытки*

Из представленных на рис. 1, 2 схемах видно, что задержка может быть только во время передачи фрагмента и кадра ACK.

Предположим, что возможна неудачная передача информации с первой попытки, но гарантированно удачная со второй, причем при передаче информации происходит задержка. В этом случае граф состояний будет иметь вид, представленный на рис. 3.

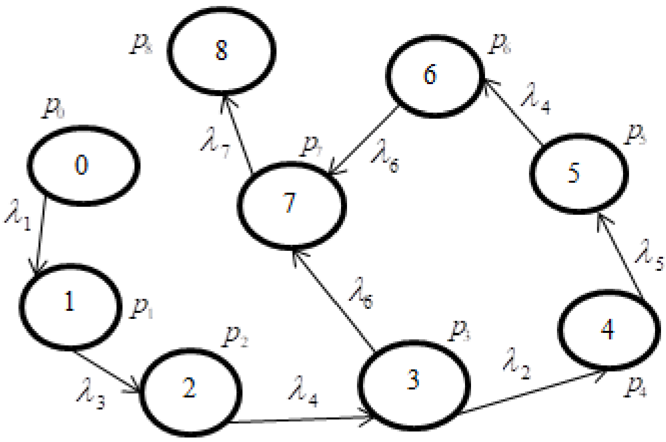



*Рис. 3. Граф состояний для возможной неудачной передачи одного фрагмента одной станцией с задержкой*

Здесь

- 0 – начальное состояние (нет пакетов для отправки),
- 1 – генерация пакетов передающей станцией,
- 2 – пауза 1 (передающая станция ждет время *DIFS + Backoff Time_1*),
- 3 – отправка пакета с задержкой $t_{задержки}$,
- 4 – неудачная передача части пакетов с первого раза,
- 5 – пауза 2 (передающая станция ждет время *ACK_Timeout+Backoff Time_2*),

• 6 – успешная передача «неудачных» пакетов с задержкой,

• 7 – передающая станция ждет время SIFS,

• 8 – принимающая станция передает пакет подтверждения АСК с задержкой $t_{задержки}$;

• $\lambda_1$ пакетов/с – интенсивность передачи информации одной станцией,

• $\lambda_2 = k \cdot \lambda_1$, где $k$ – коэффициент неудачной отправки (часть от отправленных пакетов),

• $\lambda_i$ – интенсивность передачи информации, $\lambda_i = 1/t_i$ $(i = 3,\ldots,8)$,

• $t_3 = t_{DIFS} + t_{BACKOFF\_1}$, $t_4 = t_{FRAGMENT} + t_{задержки}$, $t_5 = t_{ACK\_Timeout} + t_{BACKOFF\_2}$, $t_6 = t_{SIFS}$, $t_7 = t_{ACK} + t_{задержки}$.

Время задержки $t_{задержки}$ принимает значения $t_{задержки} = 50, 75, 100, 125$ *мкс*.

Опишем представленные на рис. 3 состояния:

- $p_0$ – начальное состояние (пакетов для отправки нет);
- $p_1$ – генерация пакетов передающей станцией;
- $p_2$ – пауза 1 (станция ждёт время DIFS+ Backoff Time_1);
- $p_3$ – станция осуществляет отправку пакета с задержкой;
- $p_4$ – станция осуществляет неудачную передачу части пакетов с первого раза;
- $p_5$ – пауза 2 (станция ждет время ACK_Timeout и Backoff Time_2);
- $p_6$ – успешная передача «неудачных» пакетов,
- $p_7$ – передающая станция ждет время SIFS;
- $p_8$ – принимающая станция передает пакет подтверждения АСК с задержкой.

Для нахождения предельных вероятностей состояний системы и закона распределения времени передачи информации построим систему уравнений Колмогорова [6], соответствующую этому графу:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = -\lambda_1 p_0, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda_1 p_0 - \lambda_3 p_1, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_3 p_1 - \lambda_4 p_2, \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_4 p_2 - \lambda_2 p_3 - \lambda_6 p_3, \\ \dfrac{dp_4}{dt} = \lambda_2 p_3 - \lambda_5 p_4, \\ \dfrac{dp_5}{dt} = \lambda_5 p_4 - \lambda_4 p_5, \\ \dfrac{dp_6}{dt} = \lambda_4 p_5 - \lambda_6 p_6, \\ \dfrac{dp_7}{dt} = \lambda_6 p_3 + \lambda_6 p_6 - \lambda_7 p_7, \\ \dfrac{dp_8}{dt} = \lambda_7 p_7 \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} p_0(0) = 1, \\ p_i(0) = 0 \quad (i = 1,\ldots,8). \end{cases} \tag{2}$$

Для численного решения этой системы использовались значения параметров из стандарта IEEE 802.11a [5]: $t_{SLOT\_TIMER} = 9$ *мкс*, $t_{SIFS} = 16$ *мкс*, $t_{DIFS} = t_{SIFS} + 2t_{SLOT\_TIMER} = 34$ *мкс*,

$t_{BACKOFF\_i} = d_i \cdot t_{SLOT\_TIMER}$ ($d_i$ – случайная величина таймера отката *Backoff Time*, в данном случае $d_1 = 31$, $d_2 = 63$), размер фрейма $ACK$ – 14 байт, размер передаваемого пакета (фрейма) $FRAGMENT$ – 798 байта (770 байт плюс 28 байт служебной информации). Возьмем $t_{ACK\_Timeout} = 100$ *мкс*, скорость передачи данных $K$ – 100 Мбит/с. Решение системы находилось численно на отрезке [0;0.04] с числом отрезков разбиения $N = 2000$.

Для рассматриваемого случая плотность распределения вероятностей времени доставки пакетов одной станцией будет определяться формулой [6]:

$$F(t) = p_7(t)\lambda_7.$$

Для численного решения был использован программный математический пакет Maple. Построенная математическая модель позволяет рассчитывать закон распределения времени доставки, определять его параметры. Для коэффициента неудачной отправки $k = 0{,}1\,\%$ оценивалось влияние различных значений времени задержки $t_{задержки}$ ($t_{задержки} = 50,\ 75,\ 100,\ 125$ *мкс*) на время доставки информации для разных значений интенсивности отправки пакетов $\lambda_1$ ($\lambda_1$ меняется от 200 до 10000 пакетов/с).

В данной статье представлены и проанализированы результаты численного эксперимента для разных значений $t_{задержки}$ и $\lambda_1$.

На рис. 4 изображены графики изменения времени доставки для разных значений $\lambda_1$ при меняющихся значениях $t_{задержки}$. Характер кривых близок к линейному, причем они параллельны друг другу. С увеличением интенсивности время доставки уменьшается, причем, чем выше интенсивность, тем ближе графики друг к другу.

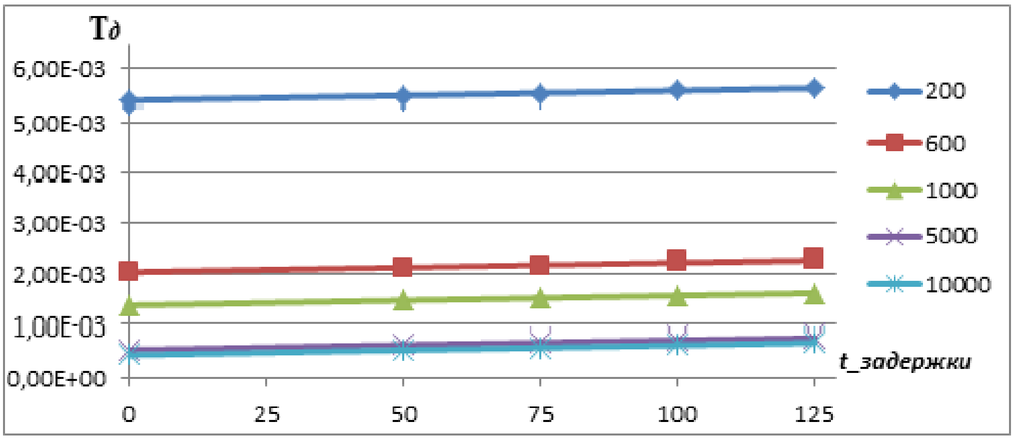



*Рис. 4. Изменение времени доставки для разных значений $\lambda_1$ при меняющихся значениях $t_{задержки}$*

Обозначим через ***t_задержки–0*** разность между $t_{задержки} = 50,\ 75,\ 100,\ 125$ *мкс* и $t_{задержки} = 0$.

На рис. 5 представлены графики изменения разностей времени доставки для разных значений $\lambda_1$ при меняющихся разностях значений $t_{задержки} = 50,\ 75,\ 100,\ 125$ *мкс* и $t_{задержки} = 0$. Кривые практически сливаются друг с другом, причем с увеличением разностей ***t_задержки–0*** разность времен доставки линейно увеличивается.

На рис. 6 изображены графики изменения времени доставки при фиксированном значении $t_{задержки}$ для меняющихся значений $\lambda_1$, на которых показано экспоненциальное уменьшение времени доставки при увеличении интенсивности отправки пакетов, причем при малых значениях $\lambda_1$ временные значения очень близки, а при больших незначительно отличаются, увеличиваясь с ростом $t_{задержки}$.

На рис. 7 изображены графики изменения разностей времен доставки при фиксированных значениях разностей $t_{задержки} = 50,\ 75,\ 100,\ 125$ *мкс* и $t_{задержки} = 0$ для меняющихся значений $\lambda_1$. Характер кривых – практически константы. С увеличением значений разностей t_задержки–0 разность времен доставки увеличивается.

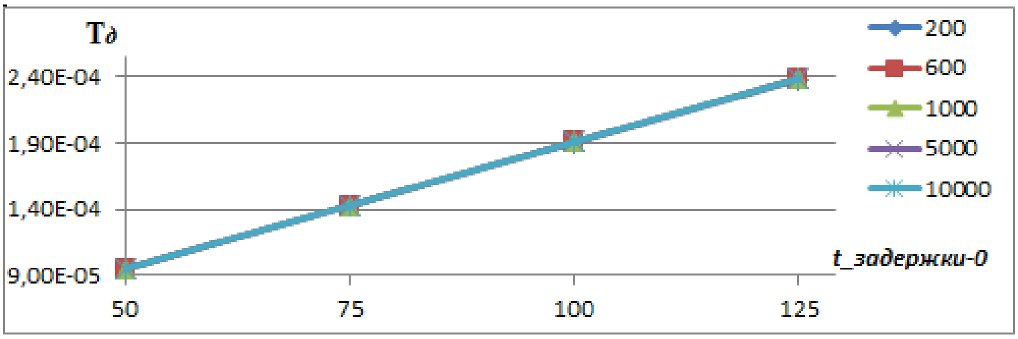



*Рис. 5. Изменение разностей времени доставки для разных значений $\lambda_1$ при меняющихся разностях значений t_задержки–0*

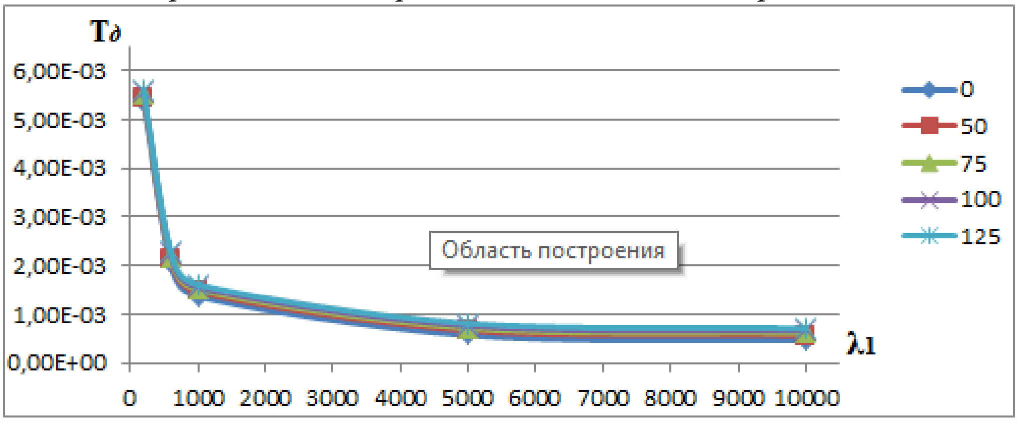



*Рис. 6. Изменение времени доставки при фиксированном значении $t_{задержки}$ для меняющихся значений $\lambda_1$*

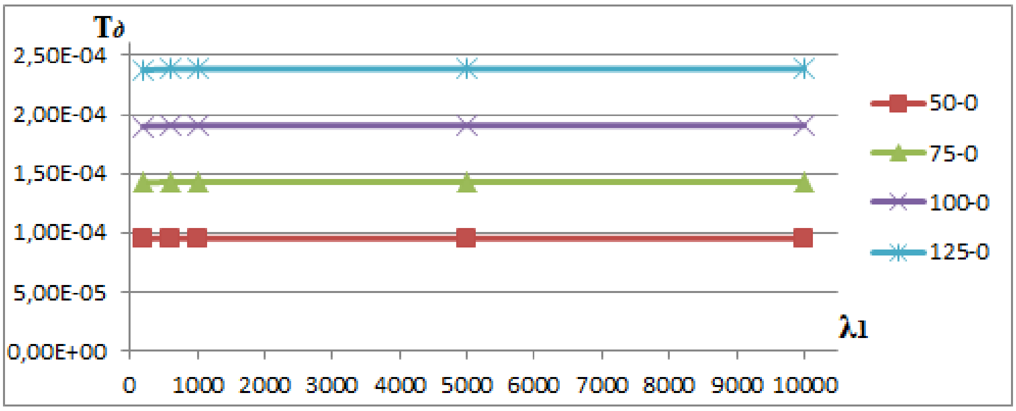



*Рис. 7. Изменение разностей времени доставки при фиксированных значениях разностей t_задержки–0 для меняющихся значений $\lambda_1$*

Таким образом, построенная математическая модель позволяет оценивать время доставки одного фрагмента в случае возможной одной неудачной попытки отправки информации с задержкой и исследовать его в зависимости от времени задержки $t_{задержки}$, чтобы использовать полученные результаты для создания более эффективных алгоритмов работы сети.

## Литература


1. Что влияет на работу беспроводных сетей Wi-Fi? Что может являться источником помех и каковы их возможные причины? – URL: https://help.keenetic.com/hc/ru/articles/213968709-Что-влияет-на-работу-беспроводных-сетей-Wi-Fi-Что-может-являться-источником-помех-и-каковы-их-возможные-причины (дата обращения: 27.07.2020). – Заглавие с экрана.

2. Что такое задержка сети и как ее исправить?– URL: https://bezopasnik.info/что-такое-задержка-сети-и-как-ее -исправ/ (дата обращения: 27.07.2020). – Заглавие с экрана.

3. *Глушаков В. Е.* Исследование модели неудачной передачи информации / В. Е. Глушаков // Современная наука: проблемы, идеи, тенденции [Электронный ресурс]: материалы Международной научно-практической конференции 23 июня 2020 года (г. Нефтекамск, Башкортостан). – Нефтекамск : Научно-издательский центр «Мир науки», 2020. – С. 46–53.

4. Пахомов С. Протоколы беспроводных сетей семейства 802.11. – URL: https://compress.ru/article.aspx?id=10805 (дата обращения 03.03.18г.). – Заглавие с экрана.

5. Раздел 7. Локальные беспроводные сети WiFi. Лекции по стандартам. – URL: http://docplayer.ru/33818454-Razdel-7-lokalnye-besprovodnye-seti-wifi-lekcii-po-standartam.html (дата обращения 03.03.18г.). – Заглавие с экрана.

6. *Вентцель Е. С.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высшая школа, 2000. – 383 с.

УДК 004

# ЗАЩИТА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ОБОРУДОВАНИЕМ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЖИВУЧЕСТИ СУПЕРСИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ КРИТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИРОДНОГО, ТЕХНОГЕННОГО И СПЕЦИАЛЬНОГО ХАРАКТЕРА

**Е. П. Грабчак[1], Е. Л. Логинов[2]**

*[1]Минэнерго России*
*[2]Ситуационно-аналитический центр Минэнерго России*

**Аннотация.** Рассматриваются проблемы защиты систем управления энергетическим оборудованием для повышения живучести энергетической суперсистемы в условиях критических воздействий природного, техногенного и специального характера. Обоснована необходимость использования и описаны основные характеристики Модели угроз системам управления энергетическим оборудованием на объектах электроэнергетики как удобного инструмента для выработки мер защиты путем определения состояния стабильности информационной и телекоммуникационной инфраструктуры сегмента энергетической суперсистемы и прогноза динамики работы составляющих подсистем для быстрого замещения или восстановления работы выведенного из строя (в т.ч. уничтоженного) оборудования.
**Ключевые слова:** электроэнергетика, информационная безопасность, угрозы, атаки, информационная система, система управления, оборудование, модель угроз.

## Введение

Расширение спектра угроз системам управления энергетическим оборудованием на объектах электроэнергетики при обработке информации (данных) в корпоративных информационных системах, системах автоматизированного и автоматического управления, системах поддержки деятельности федеральных органов исполнительной власти (далее – КИС/АСУ/САУ) требует комплексного подхода для их защиты в условиях критических воздействий природного, техногенного и специального характера [1].

## Модель угроз системам управления объектов электроэнергетики

Удобным инструментом для выработки мер защиты систем управления энергетическим оборудованием для повышения живучести энергетической суперсистемы в условиях критических воздействий является Модель угроз.

Модель угроз предназначена для решения задач по анализу защищенности КИС/АСУ/САУ от угроз безопасности информации в ходе организации и выполнения работ по обеспечению безопасности защищаемой информации и обеспечению устойчивости и надежности систем, процессов и процедур управления энергетическим оборудованием, а также разработки системы защиты информации и защиты систем управления энергетическим оборудованием, обеспечивающей нейтрализацию предполагаемых угроз с использованием методов и способов защиты информации и систем управления.

Под управлением энергетическим оборудованием понимается организации оперативно-диспетчерского управления и диспетчерско-технологического управления процессами эксплуатации оборудования при генерации электроэнергии (ГРЭС, ГЭС, ТЭЦ, АЭС, СЭС, ГТУ, ПГУ), передаче электроэнергии (подстанции (ПС) и прилегающие электрические сети (ПС 220–750 кВ магистральных сетей; ПС 35–110 кВ распределительных сетей; ПС 35–220 кВ)) в рамках энергетической суперсистемы.

Модель угроз должна содержать перечень угроз безопасности информации, обрабатываемой в КИС/АСУ/САУ, а также предположения о возможностях, которые могут использоваться при создании способов, подготовке и проведении атак на элементы КИС/АСУ/САУ и энергетическое оборудование, интегрированное с КИС/АСУ/САУ с учетом технического функционала информационного оборота в рамках сегмента энергетической суперсистемы. Эти угрозы (атаки) обусловлены преднамеренными или непреднамеренными действиями лиц, создающими условия (предпосылки) для нарушения безопасности защищаемой информации и устойчивости и надежности систем, процессов и процедур управления энергетическим оборудованием, которые ведут к ущербу интересам федеральных органов исполнительной власти и субъектов электроэнергетики.

На рис. 1 приведен технический функционал информационного оборота в рамках сегмента энергетической суперсистемы.

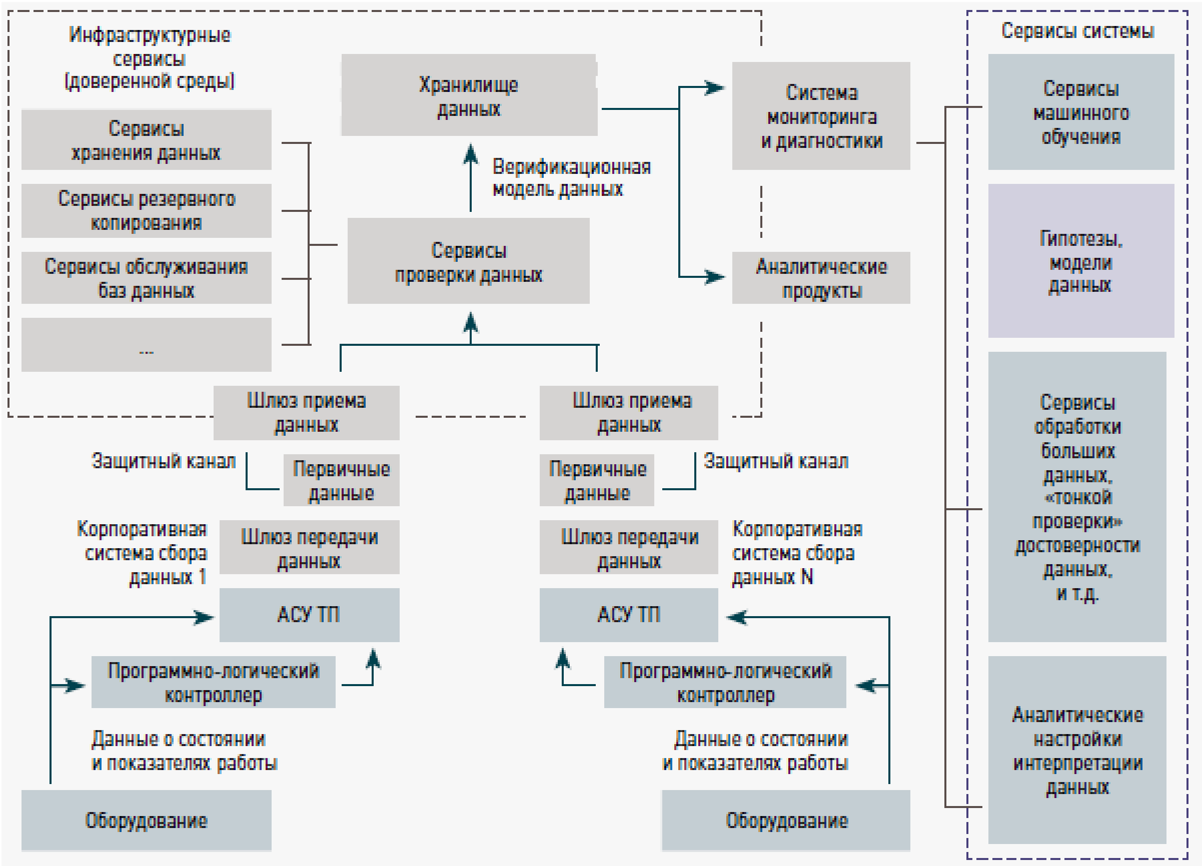



*Рис.1. Технический функционал информационного оборота в рамках сегмента энергетической суперсистемы [2]*

Модель угроз предназначена для лиц, ответственных за обеспечение безопасности защищаемой информации и устойчивости и надежности систем, процессов и процедур управления энергетическим оборудованием, обрабатываемой в КИС/АСУ/САУ, разработчиков КИС/АСУ/САУ и их подсистем.

В Модели угроз должно быть дано обобщенное описание КИС/АСУ/САУ, в т.ч. интегрированных с энергетическим оборудованием как объекта защиты, возможных источников угроз безопасности информации, возможных видов неправомерных действий и деструктивных воздействий на защищаемую информацию и системы управления энергетическим оборудованием, основных способов их реализации, возможностей, которые могут использоваться при создании способов, подготовке и проведении атак с учетом технического функционала информационного оборота в рамках сегмента энергетической суперсистемы.

Предположения о возможностях, которые могут использоваться при создании способов, подготовке и проведении атак, а также актуальные угрозы, содержащиеся в Модели угроз, должны уточняться и дополняться с периодичностью в соответствии с локальными актами операторов сегментов КИС/АСУ/САУ и энергетического оборудования, а также по мере выявления новых источников угроз, развития способов и средств реализации угроз безопасности информации в информационных системах и угроз устойчивости и надежности систем, процессов и процедур управления энергетическим оборудованием.

## Определение состояния стабильности информационной и телекоммуникационной инфраструктуры энергетической суперсистемы России

Мониторинг и анализ последовательной цепочки из формируемых блоков электронных транзакций обеспечивает получение информации о процессах, происходящих в энергосистемах, предполагает анализ взаимодействия различных подсистем и их ансамблей в информационной и телекоммуникационной инфраструктуре в рамках сегмента энергетической суперсистемы.

Вероятны десинхронизация управляющих команд, определяемые сочетанием отдельных прерываний цепочек цифровых подписей (подтверждений идентичности), масштабируемости сети и динамики прохождения транзакций в условиях критических воздействий природного, техногенного и специального характера.

Оптимизация взаимосвязей метастабильных состояний сегментов информационной и телекоммуникационной инфраструктуры энергетической суперсистемы и процессов передачи и обработки больших массивов данных, которые детерминированы значительными нарушениями достижения консенсуса между узлами вследствие сочетания отдельных прерываний цепочек цифровых подписей (подтверждений идентичности) в энергосетях и других сегментах информационной и телекоммуникационной инфраструктуры, может быть выявлена в корреляции с процессами импортозамещения программных и аппаратных элементов систем управления.

Опыт эксплуатации энергообъектов в Крыму и в Калининграде (в условиях санкций) показал острую необходимость замещения ключевых узлов систем автоматического и автоматизированного управления на оборудование отечественного производства.

## Заключение

На основе Модели угроз создается возможность определения состояния стабильности информационной и телекоммуникационной инфраструктуры сегмента энергетической суперсистемы и прогноза динамики работы составляющих подсистем для быстрого замещения или восстановления работы выведенного из строя (в т.ч. уничтоженного) оборудования, в т.ч. путем подключения по временной схеме дублирующего дата-центра соседнего региона в условиях критических воздействий природного, техногенного и специального характера.

## Литература

1. *Грабчак Е. П., Логинов Е. Л.* Определение возможности энергетического объекта выполнять требуемые функции в заданных режимах в условиях нелинейности и дискретности потоков поступаемых технологических данных / Е. П. Грабчак, Е. Л. Логинов // Интеллектуальные информационные системы: Теория и практика: Сборник научных трудов I Всероссийской научно-технической конференции «Интеллектуальные информационные системы: теория и практика». Часть 1. – Курск : Курский государственный университет, 2020. – С. 23–26.

2. *Грабчак Е. П.* Цифровая трансформация электроэнергетики / Е. П. Грабчак. – М. : Кнорус, 2018. – 340 с.

УДК 004.92

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРТАТИВНОГО СТАНКА COMPACTWORKSHOP

**Р. С. Гришин**

*Самарский государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе описывается проектирование объемной модели портативного верстака CompactWorkshop при помощи графической системы КОМПАС-3D, а также создание фотореалистичных изображений с помощью инструмента Artisan Rendering и анимированных действий разложения и обратного сложения в стандартных операциях редактора.

**Ключевые слова:** компьютерное моделирование, трехмерная графика, верстак CompactWorkshop, сборка, подсборка, устройство, детали, фотореалистика.

## Введение

Наш быстро прогрессирующий информационный век не может обойтись без инноваций, которые делают жизнь людей проще. Облегчение разных сфер в жизни приходится не только на простых людей в быту, но и на инженеров, и рабочих в их сфере. Одним из таких новшеств является компьютерное моделирование. Множество приборов, изделий, станков и отдельных деталей создаются сейчас в основном в компьютерных 3D-редакторах. В них можно создать не только чертежи объектов, но и так же объемную модель. Это упрощает производство различных устройств, а также значительно помогает изучить все изделие или каждую деталь и каждую часть изделия, не собирая его в реальности.

В 3D-редакторах возможно создание трехмерных моделей. Что же это такое? Объемное трехмерное моделирование представляет собой многовекторный чертеж, имеющий не только номинальную высоту, длину и ширину, но и визуальное воплощение. Оно широко применяется в таких отраслях деятельности человека, как индустрия развлечения, медицина, а также промышленность.

Целью работы является: изучение возможностей трехмерного компьютерного редактора Компас-3D, предназначенного для создания чертежей и объемных деталей. И как итог проверка возможностей данного программного обеспечения для упрощения восприятия и создания какого-либо объекта своими руками по модели созданной при помощи стандартных операций данной программы. Проделанный труд и анализ продемонстрирован на устройстве «Мультифункциональный портативный верстак CompactWorkshop».

## 1. Основная часть

### *1.1. Создание трехмерной модели устройства*

Сам из себя верстак представляет удобное, многофункциональное рабочее место, которое может быть у каждого, даже в небольшой мастерской или с малым местом в гараже. Данное изделие способно проводить ряд действий, таких как выпиливание лобзиком, сверление дрелью, а также осуществлять равномерное разделение досок, деревянных плит или материалов из пластика (трубок, досок, реек) на равные части при помощи циркулярной пилы.

Полная работа при создании портативного верстака CompactWorkshop осуществлялась в редакторе Kompas v18.1. В данной программе создавались все детали отдельно и далее собирались в подсборки, которые в свою очередь уже собирались в более крупные и общие сборки.

Всего в данной работе было создано 493 детали, из них 120 оригинальные детали, 373 стандартные детали. Общая сборка верстака включает в себя 25 более мелких подсборок (20 крупные подсборки, включающие в себя основные элементы верстака и 5 маленьких подсборок, типо «система передвижения» или «подсборка болта с шайбами»).

Во время конструирования CompactWorkshop использовались классические инструменты КОМПАСа, например такие как: кинематическая операция, вырезание вращением, выдавливание, вращение, резьбовые отверстия и многие другие. Те детали, которым были необходимы стандартные конструктивные элементы, создавались с помощью прикладной библиотеки редактора, в основном в работе были использованы «Резьбовые отверстия». В сборке так же присутствуют крепежные детали (болты, винты, шпильки, гайки и пр.) которые взяты из Библиотек стандартных изделий крепежных деталей КОМПАСа.

На рис. 1 можно видеть объемный верстак CompactWorkshop собранный из отдельных подсборок и деталей, с учетом всех размеров и расположений отверстий и соединений.

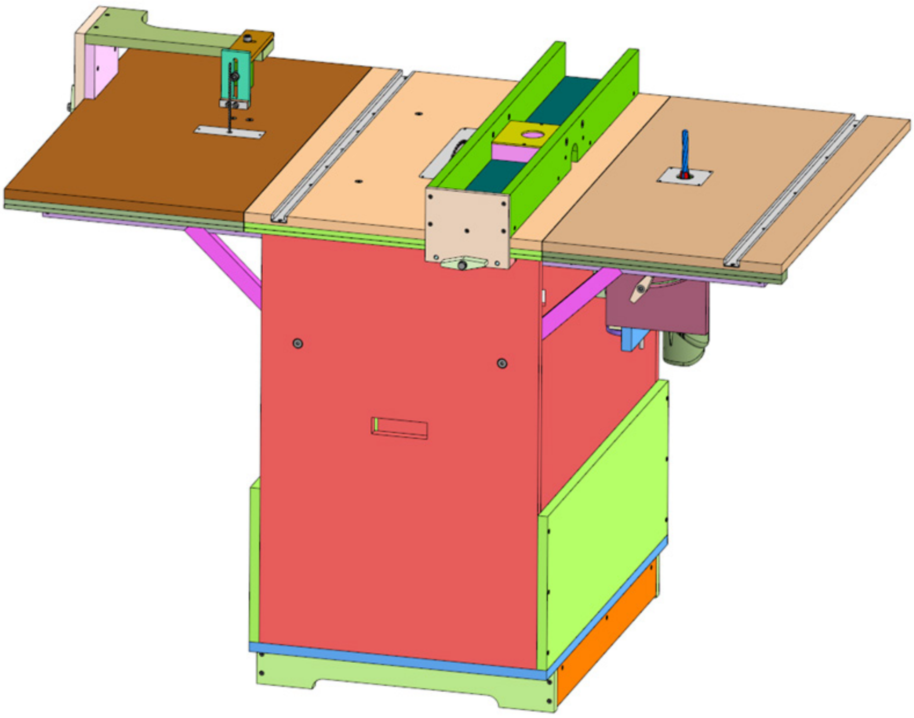


*Рис. 1. Трехмерная модель мультифункционального портативного верстака CompactWorkshop*

### *1.2. Создание фотореалистичных изображений в Artisan Rendering*

При помощи инструмента высококачественных трехмерных моделей Artisan Rendering создавался фотореалистичный рисунок мультифункционального верстака CompactWorkshop (рис. 2). Artisan Rendering – это инструмент создания фотореалистичных картинок из САПР трехмерного моделирования быстро и просто. Он спроектирован во многие трёхмерные редакторы, в том числе и в программное обеспечение КОМПАС-3D. Приложение Artisan Rendering нацелено на создание процесса, позволяющего пользователям комбинировать материалы и освещение, до перемещения в конечную галерею качественных изображений. Так же с помощью данного программного обеспечения можно комбинировать фон и сцену, и буквально в несколько кликов пройти путь от трехмерной модели до высококачественного изображения. Простота и скорость установки полной сцены (Снэпшота) – это основа приложения Artisan Rendering, позволяющего нескольким снэпшотам быть просмотренными и сгенерированны-

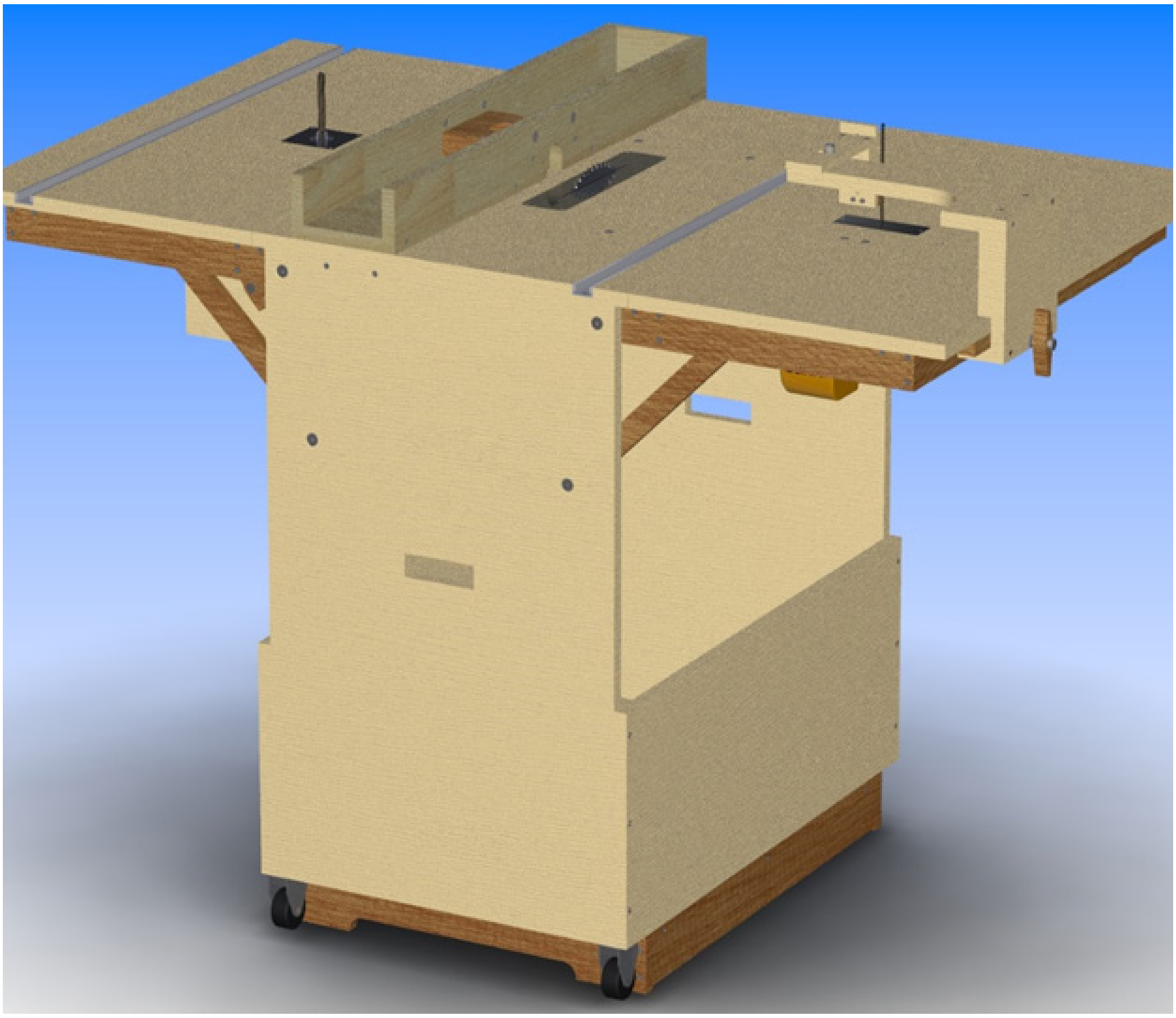


*Рис. 2. Фотореалистичное изображение мультифункционального верстака CompactWorkshop*

ми, готовыми для программного рендеринга [1]. Фото-визуализация помогает пользователю, инженеру, не видевшему никогда в жизни данное устройство перед собой, увидеть его полный размер, точный цвет и материал. А также по виду узнать примерный материал и прикинуть, подходит ли он для данного изделия.

### *1.3. Создание анимации сборки и разборки портативного верстака*

После создания полной сборки изделия, соединения всех конструктивных, стандартных и оригинальных деталей в подсборки и в конечного итоге полную сборку, была сделана минимальная, но информативная анимация сборки в рабочее состояние и разборки для компактного и легкого перемещения (транспортирования) верстака CompactWorkshop. Так как общая сборка содержит 493 детали и 25 подсборок, то анимация такого количества элементов требует огромных затрат времени, она находится в стадии выполнения и вам представлена часть того, что сейчас делается.

Данная анимация (видео анимации) было сделано при помощи стандартной библиотеки КОМПАСа «Анимация». Для её создания было применено множественное количество шагов и сцен (а конкретнее, было сделано 4 основных шага, в которых было 1–4 сцен). В видео наблюдается сначала полное сложение устройства из рабочего состояния, убираются опоры рабочих зон и происходит закрытие внутренней части, а далее полный разбор-раскладывание, разложение до рабочего состояния. Данная анимация помогает понять из чего состоит верстак, где находится какая подсборка и деталь, а также что как крутится и как сворачивается. Как легче и быстрее собрать изделие в рабочее состояние, не допустив пропуск вставки какой-либо детали или же поломки изделия из-за неверной установки крепежных изделий устройства.

## Заключение

В результате выполненной работы были смоделированы 3D-модели деталей и объемная сборка мультифункционального верстака CompactWorkship, которые полностью соответствует всем геометрическим и технологическим требованиям.

Видео-анимация устройства демонстрирует раскладывание и складывание данного верстака, его принцип открытия и закрытия. Визуализированные изображения позволяют увидеть спроектированную модель в необходимой обстановке, в различных сочетаниях фонов, текстур изделия, изменения падения света и прочих параметров современного рендеринга, а сама трехмерная модель помогает обучающимся в учебном процессе наглядно увидеть составляющие детали данного устройства, а так же все выполненные операции и вставленные конструктивные элементы библиотеки имеющиеся в трехмерном редакторе.

## Литература

1. Artisan Rendering. Система фотореалистичного рендеринга для КОМПАС-3D. // Руководство пользователя. – Москва, Россия. 31 с.

2. Аскон. КОМПАС-3D V17 // Руководство пользователя. – Москва, Россия : Аскон, 2017. – 2920 с.

3. Аскон. Азбука КОМПАС 3D V17. Москва, Россия : Аскон, 2018. – 478 с.

4. *Большаков В., Бочков А., Лячек Ю.* Твердотельное моделирование деталей в CAD-системах. AutoCAD, КОМПАС-3D, SolidWorks, Inventor, Creo., 2015. Вып. Питер. – 480 с.

5. *Ефремов Г. В., Нюкалова С. И.* Инженерная и компьютерная графика на базе графических систем // учебное пособие (гриф УМО). – Москва, Россия, 2014. – 256 с.

УДК 004.855.5

# ПОДХОД К ПОИСКУ ГРАНИЦ ДИАПАЗОНОВ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ АЛГОРИТМА СЛУЧАЙНОГО ЛЕСА

**Л. А. Демидова[1], М. С. Ивкина[2]**

*[1]МИРЭА – Российский технологический университет*
*[2]Областное государственное автономное учреждение дополнительного образования «Центр цифрового образования»*

**Аннотация.** Рассматривается задача определения диапазонов поиска оптимальных значений для основных параметров в алгоритме случайного леса (Random Forest, RF) с целью снижения временных затрат на разработку RF-классификатора. Целью работы является получение формул по определению диапазона поиска значений параметров RF-классификатора. Получение формул осуществляется на основе результатов экспериментальных исследований по разработке RF-классификаторов с применением различных наборов из репозиториев данных машинного обучения. Приведены результаты экспериментальных исследований по разработке RF-классификаторов с использованием обучающей и тестовой выборок, сформированных на основе анализируемых наборов данных. Получены в общем виде формулы для графических зависимостей по оценке качества классификации на тестовой выборке и времени разработки.
**Ключевые слова:** классификация, решающее дерево, случайный лес, оптимальное значение параметра, диапазон поиска, число деревьев, число признаков при разделении узла, глубина дерева.

## Введение

В настоящее время известно большое число алгоритмов машинного обучения, успешно применяемых для решения различных задач классификации данных. Однако они требуют «тонкой» настройки значений своих параметров для обеспечения высокого качества классификационных решений.

Очевидно, что перебор значений параметров алгоритма классификации по сетке или их поиск с применением современных эволюционных алгоритмов оптимизации может сопровождаться существенными временными затратами, а использование значений параметров алгоритмов «по умолчанию» не гарантирует, что полученный при этом классификатор будет характеризоваться высокими значениями показателей качества классификации [1]. Следовательно, потребуется использовать алгоритмы нахождения оптимальных значений параметров классификатора, при этом целесообразно задать диапазон поиска для каждого параметра. Очевидна необходимость выработки формул по определению диапазонов поиска значений параметров алгоритма классификации, поскольку это позволит минимизировать временные затраты на разработку искомого классификатора. Для определения границ диапазона поиска было решено выполнить эксперимент, в ходе которого исследовать зависимости качества классификатора и время построения случайного леса от числа деревьев на 40 наборах данных (в статье приведены сведения по 4 из них).

## 1. Теоретическая часть

### *1.1. Дерево решений*

Решающее дерево (decision tree) основано на логических схемах, позволяющих получить решение о классификации объекта с помощью ответов на иерархически организованную систему вопросов. Дерево состоит из «листьев» и «веток». На ребрах («ветках») дерева решения записаны атрибуты, от которых зависит целевая функция, в «листьях» записаны значения целевой метки, а в остальных узлах — вопросы, задаваемые на текущем иерархическом уровне и зависящие от ответов, полученных на предыдущих узлах [1, 5].

Прежде чем начать классификацию данных, необходимо обучить классификатор. Обучение производится на обучающей выборке, случайным образом извлекаемой из анализируемого набора данных, и включает в себя поиск оптимальных пороговых значений параметров или бинарных разбиений для признаков, исходя, например, из требования максимизации энтропийного индекса неоднородности в подвыборках.

Построение дерева начинается с корня, в котором, учитывая значения индекса неоднородности для каждого признака объектов, находится оптимальный признак, с помощью которого происходит разделение выборки на подвыборки. В дальнейшем, каждая из подвыборок разделяется на другие подвыборки на основе своего оптимального признака. Разделение продолжается до тех пор, пока текущая подвыборка не будет удовлетворять критерию остановки и не будет объявлена листом с меткой класса. В качестве критерия остановки может быть использован критерий достижения полной однородности по одному из классов. Дерево может быть построено всегда, если обучающая выборка не содержит объектов с одним и тем же значением каждого из признаков, принадлежащих разным классам.

В качестве критерия расщепления вершины дерева при решении задачи классификации может быть использован:

– энтропийный индекс неоднородности: $\gamma_e = -\sum_{l=1}^{L} P_l \cdot \ln(P_l)$,

– индекс Джини: $\gamma_g = 1 - \sum_{l=1}^{L} P_l^2$,

где $P_l$ — доля объектов $l$-го класса (то есть доля объектов с меткой $\eta_l$) в подвыборке, связанной с вершиной дерева; $l = \overline{1, L}$; $P_l = N_l / N$; $N_l$ — число объектов $l$-го класса в подвыборке; $N$ — число объектов в подвыборке.

При этом энтропийный индекс неоднородности должен быть максимизирован, а индекс Джини – минимизирован.

### *1.2. Случайный лес*

Случайный лес – алгоритм на основе ансамбля решающих деревьев, предложенный Лео Брейманом и Адель Катлер. Этот алгоритм является одним из самых популярных и эффективных алгоритмов для решения задач классификации и регрессии. Случайный лес основан на бэггинг, реализующем такой способ построения композиций классификаторов, при котором классификаторы обучаются независимо друг от друга [3, 5].

Каждое дерево строится по подвыборке, получаемой из исходной обучающей выборки с помощью бутстрепа (выборки с возвращением). При построении каждого дерева на стадиях ветвления вершин используется только фиксированное число случайно отбираемых признаков обучающей выборки и строится полное дерево, то есть каждый лист дерева содержит наблюдения только одного класса.

В задачах классификации на основе случайного леса решение принимается голосованием по большинству.

Алгоритм случайного леса может быть представлен следующей последовательностью шагов.

1. Формирование бутстреп-подвыборки по исходной обучающей выборке для каждого дерева.

2. Построение по полученной подвыборке неусеченного дерева решений с минимальным числом наблюдений в вершинах с использованием следующего подалгоритма:

– из исходного набора признаков случайно выбрать некоторое число признаков, при этом рекомендуется брать корень от общего числа признаков;

– из выбранного числа признаков выбрать признак, который обеспечивает наилучшее расщепление;

– разделить выборку, соответствующую обрабатываемой вершине, на две подвыборки.

3. Формирование ансамбля деревьев решений.

4. Классификация тестовых данных голосованием: классов некоторого объекта является тот класс, который выбрало большее число деревьев.

Основными параметрами RF-классификатора являются [2, 4]:

– число деревьев $r$;

– число признаков *Features*, по которым реализуется расщепление в узле дерева;

– максимальная глубина деревьев.

## 2. Описание экспериментов

Для того чтобы определить, насколько сильно значения параметров RF-классификатора влияют на качество классификации, необходимо обучить множество классификаторов с различными значениями параметров на различных наборах данных.

В ходе экспериментов было рассмотрено 40 разнотипных наборов из репозиториев данных для машинного обучения. При этом каждый набор данных разбивался случайным образом на обучающую и тестовую выборки в соотношении 80:20.

В табл. 1 приведены характеристики 4 наборов данных [7–10], использованных в экспериментах.

Таблица 1

*Характеристика выборок*

| | Adult [7] | Bank-additional [8] | Connect [9] | Crowdsourced Mapping [10] |
|---|---|---|---|---|
| Краткое описание | Определить, превысит ли доход $ 50K / год на основе данных переписи | Определить, будет ли клиент подписывать срочный депозит | Определить, выиграет ли первый игрок в следующем ходе | Классификация спутниковых изображений по различным классам земного покрова |
| Число классов | 2 | 2 | 3 | 6 |
| Число признаков | 14 | 20 | 42 | 28 |
| Число объектов в обучающей выборке | 32561 | 32 951 | 48 945 | 10545 |
| Число объектов в тестовой выборке | 13512 | 8237 | 12 163 | 346 |

Так как оценка качества разработанных классификаторов проводилась не только по показателю *Accuracy*, позволяющему оценить долю объектов, по которым классификатор принял правильное решение, но и по времени разработки, было принято решение о целесообразности разработки RF-классификаторов на разных вычислительных машинах. В ходе экспериментов были использованы вычислительные машины со следующими характеристиками.

1. PC 1:

– процессор: Intel(R) Core(TM) i3-2100 CPU 3.10GHz 3.10GHz, 2 ядра;

– ОЗУ: 8 ГБ;
– 64-разрядная операционная система.
2. PC 2:
– процессор: Intel(R) Core(TM) i5-3337U CPU 1.80GHz 1.80GHz, 2 ядра;
– ОЗУ: 6 ГБ;
– 64-разрядная операционная система.
3. PC 3:
– процессор: Intel(R) Core(TM) i5-3330 CPU 3.00GHz 3.20GHz, 2 ядра;
– ОЗУ: 4 ГБ;
– 64-разрядная операционная система.

Обучение RF-классификаторов производилось на языке Python 3, в котором имеется реализация алгоритма классификации на основе леса случайных деревьев, позволяющая настраивать указанные выше параметры RF-классификатора[1–4].

Для значений параметров RF-классификатора были определены следующие диапазоны:
– для числа деревьев $r$: $10 \le r \le 200$;
– для числа признаков $Features$: $1 \le Features$, где $maxFeatures$ – общее число признаков;
– для максимальной глубины $depthTree$ дерева: $1 \le depthTree \le maxFeatures$ .

### 3. Результаты экспериментов

В результате проведенных экспериментов были получены графики зависимостей качества и времени разработки классификатора от различных параметров RF-классификатора. На рис. 1, 2, 3, приведены графики, полученные во время использования набора данных Bank-additional.

#### *3.1. Число признаков при разделении узла*

Как видно из рис. 1 зависимость качества классификатора от количества признаков при разделении узла имеет форму параболы. Зависимость времени построения классификатора имеет линейную. Следовательно, опираться на время построения модели при выявлении формул поиска границ диапазона поиска не следует.

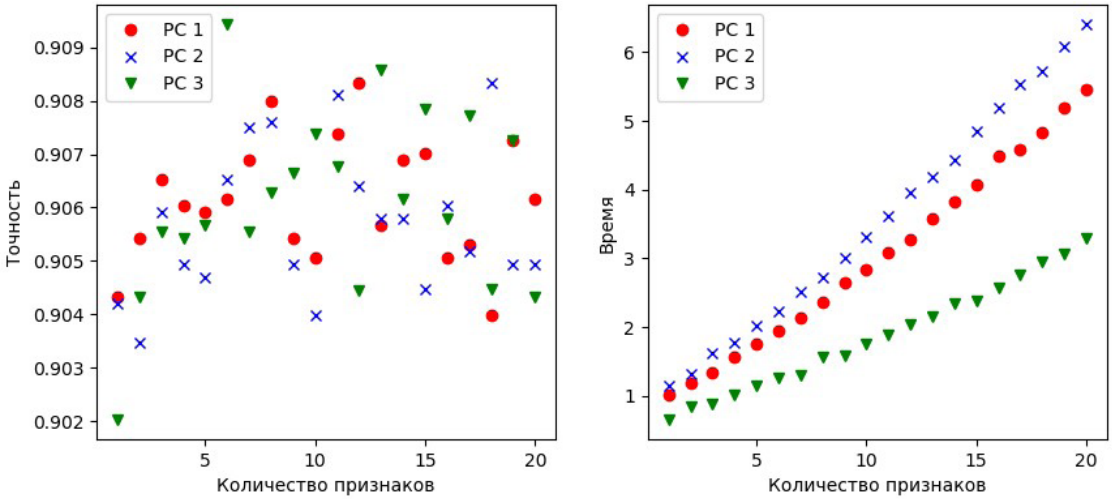



*Рис. 1. Зависимости качества классификации и времени разработки от числа признаков*

Для вывода формул вычисления была использована вероятность выбора лучшего разделяющего признака в узле (табл. 2).

Исходя из данных в табл. 2 можно сказать, что формула расчета верхней и нижней границы:

$$maxFeature*P(m),$$

где $P(m)$ – вероятность появления лучшего признака равна 0,8 для верхней границы или 0,3 для нижней границы.

### *3.2. Глубина деревьев*

Как видно из рис. 2 зависимость качества классификатора от глубины дерева имеют логарифмическую форму.

Для получения формулы для верхней границы используем график зависимости качества от глубины деревьев. В общем случае значение качества становится близко к максимальному в таком значении глубины дерева, при котором выборка наиболее быстро разделяется по классам.

Таблица 2

Вероятность выбора лучшего разделяющего признака в узлах

| уз \ пр | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,100 | 0,200 | 0,300 | 0,400 | 0,500 | 0,600 | 0,700 | 0,800 | 0,900 | 1 |
| 2 | 0,010 | 0,040 | 0,090 | 0,160 | 0,250 | 0,360 | 0,490 | 0,640 | 0,810 | 1 |
| 3 | 0,001 | 0,008 | 0,027 | 0,064 | 0,125 | 0,216 | 0,343 | 0,512 | 0,729 | 1 |
| 4 | 0 | 0,002 | 0,008 | 0,026 | 0,063 | 0,130 | 0,240 | 0,410 | 0,656 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0,002 | 0,010 | 0,031 | 0,078 | 0,168 | 0,328 | 0,590 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0,001 | 0,004 | 0,016 | 0,047 | 0,118 | 0,262 | 0,531 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0,002 | 0,008 | 0,028 | 0,082 | 0,210 | 0,478 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0,001 | 0,004 | 0,017 | 0,058 | 0,168 | 0,430 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,002 | 0,010 | 0,040 | 0,134 | 0,387 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,001 | 0,006 | 0,028 | 0,107 | 0,349 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,004 | 0,020 | 0,086 | 0,314 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,002 | 0,014 | 0,069 | 0,282 | 1 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,001 | 0,010 | 0,055 | 0,254 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,001 | 0,007 | 0,044 | 0,229 | 1 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,005 | 0,035 | 0,206 | 1 |

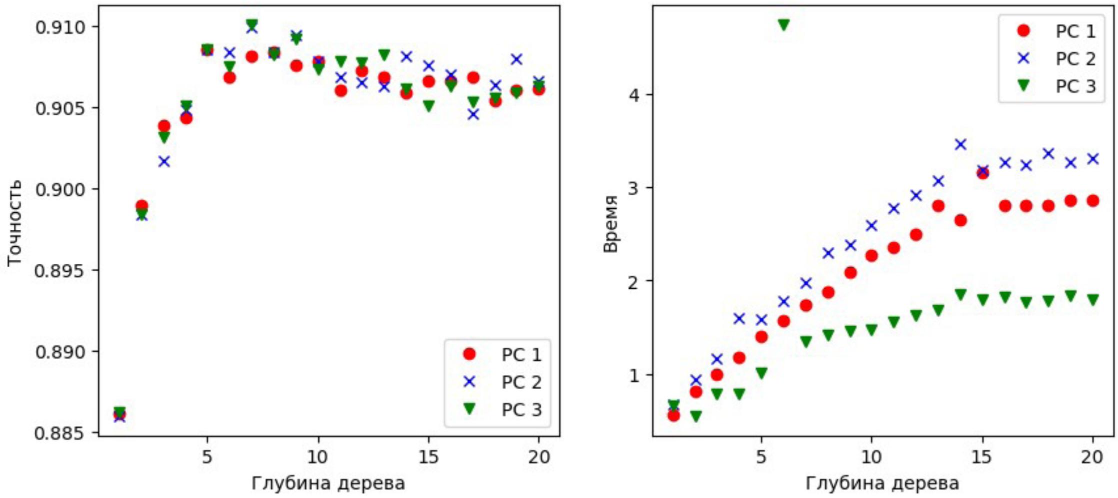



*Рис. 2. Зависимости качества классификации и времени разработки от глубины дерева*

Для получения формулы для нижней границы используем график зависимости времени построения от глубины деревьев. Из рис. 2 видно, что наступает момент, когда время построения классификатора не увеличивается. Это значит, что ветвление дерева остановилось, так как было достигнуто условие минимального числа объектов, то есть в каждом листе находится по одному объекту, и разработка модели с большей глубиной деревьев не имеем смысла.

Таким образом, формула расчета верхней границы:

$$\log_2(countClass),$$

где $countClass$ – количество классов в выборке,
а формула расчета верхней границы:

$$\frac{maxFeatures}{2},$$

где $maxFeatures$ – количество признаков в выборке.

### *3.3. Число деревьев в лесу*

Как видно из рис. 3 зависимость качества классификатора от числа деревьев имеет логарифмический вид, а зависимость времени построения классификатора – линейный. Следовательно, опираться на время построения модели при выявлении формул поиска границ диапазона поиска не следует.

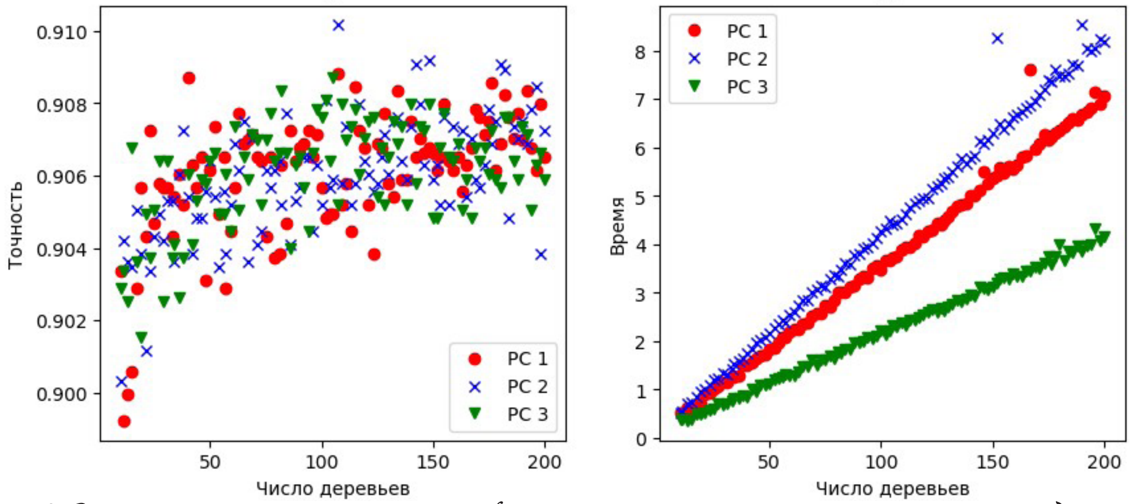



*Рис. 3. Зависимости качества классификации и времени построения от числа деревьев*

Для определения формул было предположено, что границы диапазона зависят от числа объектов в наборе данных [8], то есть чем больше набор данных, тем больше значения нижней и верхней границ диапазона. Чтобы подтвердить это предположение, для каждого набора данных субъективно были определены значения для нижней и верхней границ.

Нижней границей будем считать значение числа деревьев, при котором значение показателя качества классификации *Accuracy* перестает резко увеличиваться. Верхней границей будем считать значение числа деревьев, при котором значение показателя качества классификации *Accuracy* перестает изменяться и колеблется около своего текущего максимального значения. Полученные значения нижней и верхней границ для числа деревьев отобразим на графике (рис. 4), предварительно отсортировав выборки по увеличению количества объектов в них.

Для вывода формул были построены нижняя огибающая для нижней границы и верхняя огибающая для верхней границы (рис. 4). В результате удалось определить графики аппроксимации границ так, чтобы все выявленные ранее значения границ диапазонов находились между ними (рис. 5).

Для построения линий аппроксимации был использован метод наименьших квадратов. Это позволило не только определить наиболее точную зависимость для значений границ диа-

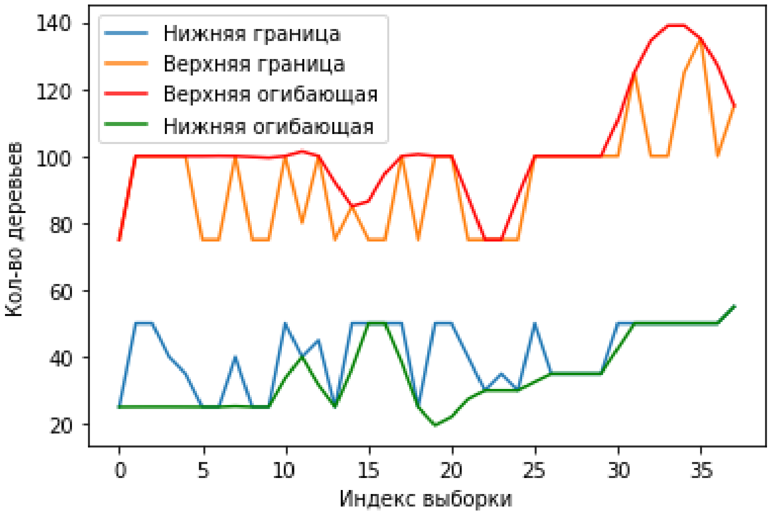


*Рис. 4. Границы диапазонов и их огибающие*

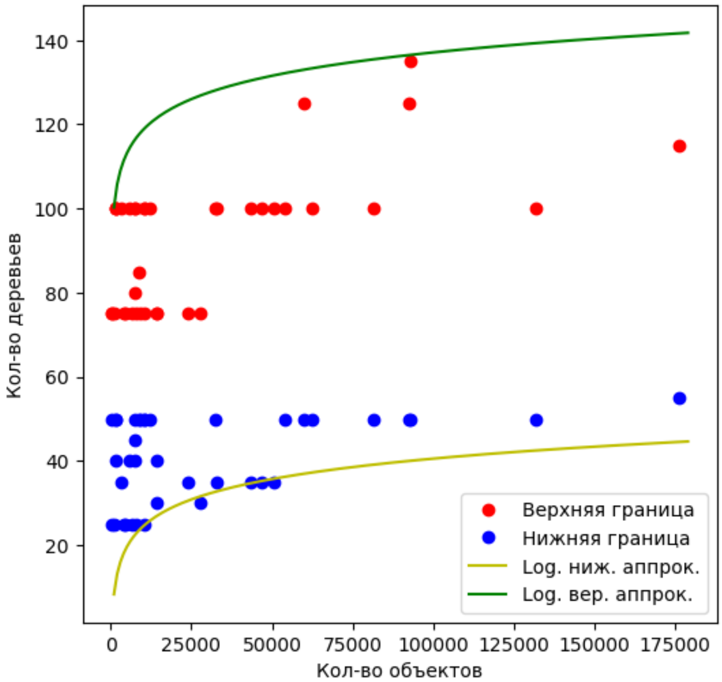


*Рис. 5. Вычисленные и определенные границы диапазонов поиска*

пазонов поиска от числа объектов в выборке, но и построить функции полученных графиков. Для более полного охвата значений границ диапазона было принято решение увеличить область между кривыми аппроксимации. В результате были получены следующие формулы для вычисления границ.

Для вычисления значения числа деревьев по нижней границе предлагается использовать формулу:

$$7*\ln(n_{obj})-40,$$

где $n_{obj}$ – число объектов в выборке.

Для вычисления значения числа деревьев по верхней границе предлагается использовать формулу:

$$8*\ln(n_{obj})+45.$$

## Заключение

Предлагаемое исследование было выполнено с целью обеспечения минимизации временных затрат при разработке RF-классификатора на подбор оптимального значения такого таких параметров, как число деревьев, число признаков при разделении узла, глубина дерева.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности использования предлагаемого подхода к определению диапазонов поиска оптимального значений параметров RF-классификатора с целью сокращения временных затрат на его разработку.

Целью дальнейших исследований является выработка аналогичного подхода поиску границ диапазонов поиска оптимальных значений параметров для алгоритма изолированного леса (Isolation Forest) [6], применяемого, в частности, для разработки классификаторов на основе несбалансированных наборов данных и выявления выбросов в наборах данных.

## Литература


1. *Демидова Л. А., Ивкина М. С.* Подход к определению диапазонов поиска оптимальных значений параметров классификатора на основе леса решающих деревьев // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2019. – № 69. –С. 123–134.

2. *Ивкина М. С.* Определение границ диапазона поиска оптимального значения числа признаков для леса решающий деревьев // Интеллектуальные и информационные системы: труды всероссийской научно-технической конференции. – Тула 2019 – С. 343–348.

3. *Demidova L. A., Ivkina M. S.* Defining the Ranges Boundaries of the Optimal Parameters Values for the Random Forest Classifier // 2019 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). 2019. – P. 518 – 522.

4. *Demidova, L., Ivkina, M.* Approach to Determining the Boundaries of the Search Range for the Number of Trees in the Random Forest Algorithm // 2020 9th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2020, 2020.

5. *Lior Rokach*, Data Mining with Decision Trees: Theory and Ap-plications // World Scientific, 2008.

6. Liu F. T., Ting K. M. and Zhou Z. Isolation Forest // 2008 Eighth IEEE International Conference on Data Mining, Pisa. – 2008. – P. 413–422. – doi: 10.1109/ICDM.2008.17.

7. Machine Learning Repository, выборка данных adult. – URL: http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Adult.

8. Machine Learning Repository, выборка данных bank-additional. – URL: http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Bank+Marketing.

9. Machine Learning Repository, выборка данных connect. – URL: http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/connect-4.

10. Machine Learning Repository, выборка данных Crowdsourced Mapping. – URL: http://archive.ics.uci.edu/ml/da-tasets/Crowdsourced+Mapping.

УДК 004.855.5

# ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕЧНЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В ЗАДАЧЕ РАЗРАБОТКИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ТРЕНАЖЕРОВ УКЛАДКИ И МОНТАЖА-ШВАРТОВКИ СРЕДСТВ ДЕСАНТИРОВАНИЯ

**Л. А. Демидова[1], Б. Ю. Мордакин[2]**

*[1]МИРЭА – Российский технологический университет*
*[2]Рязанское гвардейское высшее воздушно-десантное командное училище имени генерала армии В. Ф. Маргелова*

## Введение

Технологический процесс укладки и монтажа-швартовки средств десантирования представляет собой множество отдельных операций таких как: проверка, дефектовка, отсоединение, присоединение, развязка, завязка, крепление, установка, натяжка и т. д. Технологические операции различаются функциональным наполнением, сложностью выполнения, количеством повторений, технологической оснасткой, используемой при их реализации, временем выполнения и др. В дополнение к стандартным инструментам (молоток, отвёртка, плоскогубцы) используются специализированные инструменты, такие как: затяжка, трамбовка, проволочная петля, стяжка.

Очевидно, что для приобретения практических знаний по укладке и монтажу-швартовке средств десантирования целесообразно решение задачи разработки соответствующих функциональных тренажеров, охватывающих работу с теми или иными типовыми технологическими операциями, близкими по своему назначению (исполнению).

Вопросы разработки тренажеров различного функционального назначения рассматриваются в работах многих исследователей. Так, в [1–4] обсуждаются подходы к определению характеристик (признаков) тех или иных операций, необходимых для переноса на тренажеры, и критериев оценки эффективности обучения на тренажерах.

## 1. Аспекты формирования перечня технологических операций и определения значений их признаков

В результате анализа особенностей технологического процесса укладки и монтажа-швартовки было выявлено 215 отдельных технологических операций (сопоставленных элементарным действиям специалиста). Знание и владение ими гарантирует успешность завершения всего технологического процесса подготовки техники и грузов к десантированию парашютным способом. Очевидно, что для овладения этими технологическими операциями, целесообразно разработать некоторое количество функциональных тренажеров (от 4 до 8). Подобные тренажёры способствуют универсальной подготовке специалистов. Таким образом, необходимо в определенном порядке сгруппировать технологические операции с учётом сходства их признаков (характеристик), обоснованно выбранных экспертами-специалистами по подготовке техники и грузов к десантированию парашютным способом.

Для глубокого изучения технологического процесса укладки и монтажа-швартовки средств десантирования необходимо развернуть априорный словарь признаков операций. Создать полный массив признаков, отражающих персональные особенности каждой технологической операции. Данные действия позволят в последующем группировать эти операции в классы, обладающие определенной индивидуальностью и, в этом смысле, отличающиеся друг от друга.

Процедура формирования пространства признаков является трудно формализуемой и, как правило, выполняется эвристически. Состав набора признаков может корректироваться на основании результатов выполненной классификации, т.е. процесс формирования состава набора признаков может быть итерационным.

Анализ перечня из 215 технологических операций (элементарных действий специалиста) позволил выявить пять следующих признаков, характеризующих особенности операции.

1. Признак, определяющий тип операции: осмотр, дефектация, сборочная, укладка, контроль, регулировочная, разборочная, демонтажная.

2. Признак, определяющий сложность технологической оснастки (инструмента) при выполнении операции.

3. Признак, определяющий время выполнения операции и характеризующий её трудоёмкость.

4. Признак, определяющий число повторений операции в технологическом процессе.

5. Признак, определяющий требуемый уровень квалификации исполнителя, выполняющего операцию.

В итоге каждая $i$-я технологическая операция может быть описана вектором $X_i = \left(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}\right)$, каждый $j$-й элемент которого соответствует перечисленным выше пяти признакам ($i = \overline{1, 215}$; $j = \overline{1, 5}$). Таким образом, $x_{ij}$ — количественная оценка $j$-го признака для $i$-й операции, вектор $X_i \in R^5$ отражает индивидуальные особенности $i$-й операции, а совокупность векторов $X_i$ $(i = \overline{1, 215})$ в пространстве $R^5$ описывает весь технологический процесс укладки и монтажа-швартовки.

С каждым из признаков можно связать определенный количественный показатель.

Для третьего и четвёртого признаков такой показатель является естественным и определяет соответственно время выполнения операции и число повторений в технологическом процессе. Для определения значений остальных признаков (первого, второго и четвертого) в соответствии с теми или иными экспертными заключениями предлагается использовать те шкалы оценок.

При определения количественного показателя для первого признака (признака характера операции) в терминах девятибалльной шкалы оценок поставим операциям осмотра 1 балл, операциям дефектации — 2 балла; сборочным операциям — 3 балла; операциям по подготовке инструментов и принадлежностей — 4 балла; операциям по укладке систем (узлов) — 5 баллов; операциям по предварительной проверке правильности расположения — 6 баллов; операциям по креплению, фиксации, контровке, завязке — 7 баллов; регулировочным операциям — 8 баллов, операциям по размещению монтажу, швартовке — 9 баллов. В итоге, количественный код операций равномерно распределится в целочисленном диапазоне от 1 до 9.

При определения количественного показателя для второго признака [признака сложности технологической оснастки (инструмента) при выполнении операции] поставим: 2 балла, если использован один единичных инструмент (например, линейка укладочная, крючок укладочный, приспособление для затяжки ремней, кольцо шнуровое, нож, вороток, ключ, отвёртка, молоток и т. п.); 4 балла, если использовано одновременно 2–4 единичных инструмента; 6 баллов, если использована сложная оснастка (струбцина, приспособление для затяжки ремней, щуп и т. п.).

При определения количественного показателя для пятого признака (признака уровня квалификации исполнителя) поставим 2 балла, если требуется исполнитель с низкой квалификацией; 5 баллов, если требуется исполнитель со средней квалификацией; 8 баллов, если требуется исполнитель с высокой квалификацией.

В итоге можно будет составить таблицу числовых значений признаков для каждой технологической операции (табл. 1) и сформировать на её основе набор данных, который в дальнейшем может быть использован для разбиения на поднаборы, на основе которых и будут создаваться тренажеры, охватывающие работу с теми или иными типовыми технологическими операциями, близкими по своему назначению (исполнению).

Таблица 1

*Таблица значений признаков технологических операций укладки и монтажа-швартовки*

| № п/п | Операция | Признаки | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1. | Уложить правую половину купола | $x_{1,1}$ | $x_{1,2}$ | $x_{1,3}$ | $x_{1,4}$ | $x_{1,5}$ |
| 2. | Уложить левую половину купол | $x_{2,1}$ | $x_{2,2}$ | $x_{2,3}$ | $x_{2,4}$ | $x_{2,5}$ |
| | …………………. | ………. | ………. | ………. | ………. | ………. |
| 215. | Проверить правильность установки отцепки | $x_{215,1}$ | $x_{215,2}$ | $x_{215,3}$ | $x_{215,4}$ | $x_{215,5}$ |

Для разбиения набора данных, описывающего технологические операции, целесообразно применить какой-либо алгоритм кластеризации [5–10], при этом могут возникнуть определенные трудности с выбором из широкого перечня алгоритмов кластеризации такого алгоритма, который бы наилучшим образом в смысле некоторого критерия разбил анализируемый набор данных на искомые поднаборы. Адекватное решение задачи выбора алгоритма кластеризации было бы возможно в случае качественной визуализации набора данных, однако это невозможно сделать ввиду работы с данными высокой размерности. Тем не менее, проблема визуализации может быть решена с применением так называемых алгоритмов нелинейного снижения размерности, которые реализуют вложение пространства высокой размерности в пространство низкой размерности (например, в двухмерное пространство).

## 2. Подход к визуализации набора данных, описывающего технологические операции

### *2.1. Нелинейное снижение размерности данных на основе t-SNE-алгоритма*

В настоящее время для решения задачи снижения размерности данных активно используются различные алгоритмы нелинейного снижения размерности, позволяющие представить многомерные данные в 2-х или в 3-мерном метрическом пространстве с сохранением пропорциональности расстояний между объектами и структуры кластеров [11–18]. При этом можно варьировать значения параметров таких алгоритмов, обеспечивая при отображении данных учёт их локальных или глобальных свойств. Программные реализации многих из этих алгоритмов есть в языке Python. В качестве таких алгоритмов целесообразно назвать, в частности, t-SNE- [17] и UMAP-алгоритмы [18], пользующиеся большой популярностью в последние годы.

В предлагаемом исследовании в ходе экспериментов был использован t-SNE-алгоритм (t-distributed Stochastic Neighbor Embedding, стохастическое вложение соседей с t-распределением) [17], являющийся алгоритмом машинного обучения, который реализует нелинейное снижение размерности и предназначен для визуализации данных высокой размерности посредством вложения их в метрическое пространство низкой размерности. t-SNE-алгоритм позволяет представить объект высокой размерности двух- или трёхмерным точкой таким образом, что похожие объекты представляются близко расположенными точками, а непохожие объекты представляются точками с большой вероятностью далеко расположенными друг от друга. t-SNE-алгоритм базируется на SNE-алгоритме [13].

### *2.2. Применение t-SNE-алгоритма для визуализации набора данных, описывающего технологические операции*

t-SNE-алгоритм был использован для визуализации набора данных, содержащего информацию о признаках технологических операций укладки и монтажа-швартовки средств десантирования. При этом предварительно была выполнена стандартизация значений признаков.

Стандартизация набора данных предполагает, что каждый признак соответствует гауссовскому распределению. При выполнении стандартизации набора данных осуществляется изменение масштаба распределения значений признаков так, чтобы среднее значение $m_j$ для всех $i$-х $(i=\overline{1,215})$ значений $j$-го признака $(j=\overline{1,5})$ было равно 0, а стандартное отклонение $\sigma_j$ для значений каждого признака было равно 1. В итоге выполняется центрирование и шкалирование значений по каждому $j$-му признаку:

$$y_{ij}=\frac{(x_{ij}-m_j)}{\sigma_j},$$

где $m_j=\frac{\sum_{i=1}^{215}x_{ij}}{215}$; $\sigma_j=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{215}(x_{ij}-m_j)^2}}{215}$.

Анализ результатов визуализации исходного набора данных при различных значениях параметров t-SNE алгоритма показал целесообразность использование DBSCAN-алгоритма (Density-based spatial clustering of applications with noise) [10] для решения задачи кластеризации технологических операций на некоторое оптимальное (заранее не определенное) число кластеров. Особенностью DBSCAN-алгоритма является то, что он не предполагает определение координат центров кластеров. При этом форма кластеров может быть любой.

## 3. Кластерный анализ набора данных, описывающего технологические операции

### *3.1. Кластеризация на основе DBSCAN-алгоритма*

DBSCAN-алгоритм решает задачу кластеризации с учётом плотности расположения объектов в метрическом пространстве с выделением так называемых шумовых объектов [10]. DBSCAN-алгоритм группирует вместе объекты, которые близко (плотно) расположены (то есть объекты со многими близкими соседями), помечая как выбросы объекты, которые находятся одиноко в областях с малой плотностью (ближайшие соседи которых лежат далеко).

При реализации DBSCAN-алгоритма объекты, подлежащие кластеризации, делятся на основные объекты, достижимые по плотности объекты и шумовые объекты (выбросы).

Объект $p$ является основным, если хотя бы $min\_sample$ объектов находятся на расстоянии, не превосходящем число $eps$, которое является максимальным радиусом соседства от объекта $p$ до него (включая сам объект $p$). Такие объекты достижимы прямо из объекта $p$.

Объект $q$ прямо достижим из объекта $p$, если объект $q$ находится на расстоянии, не превосходящим $eps$ от объекта $p$, а объект $p$ является основным.

Объект $A$ $q$-достижим из $p$, если имеется путь $p_1,\ldots,p_n$ с $p_1=p$ и $p_n=q$, где каждый объект $p_{i+1}$ достижим прямо из $p_i$ (все объекты на пути должны быть основными, за исключением объекта $q$).

Все объекты, не достижимые из основных объектов, считаются выбросами.

Если объект $p$ является основным, то он формирует кластер вместе со всеми объектами (основными или неосновными), достижимыми из него. Каждый кластер содержит хотя бы один основной объект. Неосновные объекты могут быть частью кластера, но они формируют его «край», т. к. не могут быть использованы для достижения других объектов.

Достижимость не является симметричным отношением, т. к. независимо от расстояния никакой объект не может быть достигнут из неосновного объекта.

Два объекта $p$ и $q$ связаны по плотности, если имеется объект $r$, такой что и $p$, и $q$ достижимы из $r$. Связность по плотности является симметричной.

При этом все объекты в кластере попарно связны по плотности. Если объект достижим по плотности из какого-либо объекта кластера, он также принадлежит кластеру.

Основными параметрами DBSCAN-алгоритма являются число $eps$, определяющее максимальное расстояние между двумя объектами, при котором один объект считается соседом другого, и число $min\_sample$, определяющее число объектов в окрестности некоторого объекта, включая и этот объект, при котором он будет считаться основным (такие объекты образуют плотную область).

DBSCAN-алгоритм выбирает произвольный объект, для которого анализируется $eps$-окрестность. Если $eps$-окрестность содержит число объектов не меньше, чем $min\_sample$, то из них создается кластер, в противном случае объект помечается как выброс (шумовой объект). Если позднее этот шумовой объект попадет в $eps$-окрестность другого объекта, то будет включен в соответствующий кластер (при выполнении требования на число объектов, попавших в $eps$-окрестность).

Если некоторый объект признан основным объектом кластера, то его $eps$-окрестность, с входящими в нее объектами также будет включена в этот кластер.

Процесс формирования кластера продолжается до тех пор, пока не будет найден связный по плотности кластер. После этого выбирается новый не посещенный ранее объект и выполняется попытка формирования в его окрестности кластера или отнесения его к шумовым объектам.

При реализации DBSCAN-алгоритма может использоваться любая метрика расстояния, хотя чаще всего работают с евклидовой метрикой.

Качество кластеризации на некоторое число кластеров на основе DBSCAN-алгоритма может быть оценено с применением индекса кластерного силуэта, который должен быть максимизирован [20]. Оптимальное число кластеров определяется экспериментально и определяется по результатам варьирования значениями параметров DBSCAN-алгоритма.

### *3.2. Применение DBSCAN-алгоритма для кластеризации набора данных, описывающего технологические операции*

При решении задачи кластеризации набора данных, описывающего технологические операции, с целью максимизации значения индекса кластерного силуэта было решено допустить вариацию значений признаков, оцениваемых экспертами с учётом собственных знаний и опыта. Такими признаками являются первый, второй, пятый признаки.

Однако первый признак определяет тип операции, варьировать который не имеет смысла (тип операции определен однозначно и не может изменяться).

Для второго признака, определяющего сложность технологической оснастки (инструмента) при выполнении операции, можно допустить варьирование значения, установленного равным числу 4, если использовано одновременно 2–4 единичных инструмента; равным числу 6 баллов, если использована сложная оснастка (струбцина, приспособление для затяжки ремней, щуп и т.п.). В случае, если использовано одновременно 2–4 единичных инструмента, значение признака технологической операции будем варьировать в целочисленном диапазоне [3, 5]; в случае, если использована сложная оснастка, значение признака будем варьировать в целочисленном диапазоне [5, 7].

Для пятого признака, определяющего требуемый уровень квалификации исполнителя, выполняющего операцию, можно допустить варьирование всех значений. В случае, если требуется исполнитель с низкой квалификацией, значение признака технологической операции будем варьировать в целочисленном диапазоне [1, 3]; если требуется исполнитель со средней квалификацией, значение признака технологической операции будем варьировать в целочисленном диапазоне [4, 6]; если требуется исполнитель с высокой квалификацией, значение признака технологической операции будем варьировать в целочисленном диапазоне [7, 9].

В результате такого варьирования значениями параметров можно обеспечить получение большего значения индекса кластерного силуэта.

### 4. Экспериментальная часть

В процессе апробации предлагаемого подхода к определению числа функциональных тренажёров по определению числа функциональных тренажёров, а также их состава многократно были выполнены варьирование значений второго и пятого признаков случайным образом в пределах заданных для них диапазонов и стандартизация измененного таким образом набора данных, содержащего информацию о значениях пяти признаков технологических операций. Для каждого исследуемого набора данных была реализована кластеризация с применением DBSCAN-алгоритма при разных значениях его параметров. В ходе экспериментов была использована программная версия DBSCAN-алгоритма, выполненная на языке Python (https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.DBSCAN.html). При этом был реализован поиск по сетке для таких значений параметров DBSCAN-алгоритма, как $eps$ и $min\_sample$ в границах диапазонов [0.15, 0.5] (с шагом 0.05) и [3, 20] (с шагом 1) соответственно. При этом оптимальные значения параметров, найденные перебором по сетке равны: $eps = 0.45$, $min\_sample = 3$.

В качестве лучшего варианта разбиения был выбран вариант, максимизировавший значение индекса кластерного силуэта, которое оказалось равным 0.7. В этом случае число кластеров (число функциональных тренажеров) оказалось равным 6, что вполне удовлетворило экспертов, которые предполагали, что возможное оптимальное число тренажеров может находиться в диапазоне от 5 до 8.

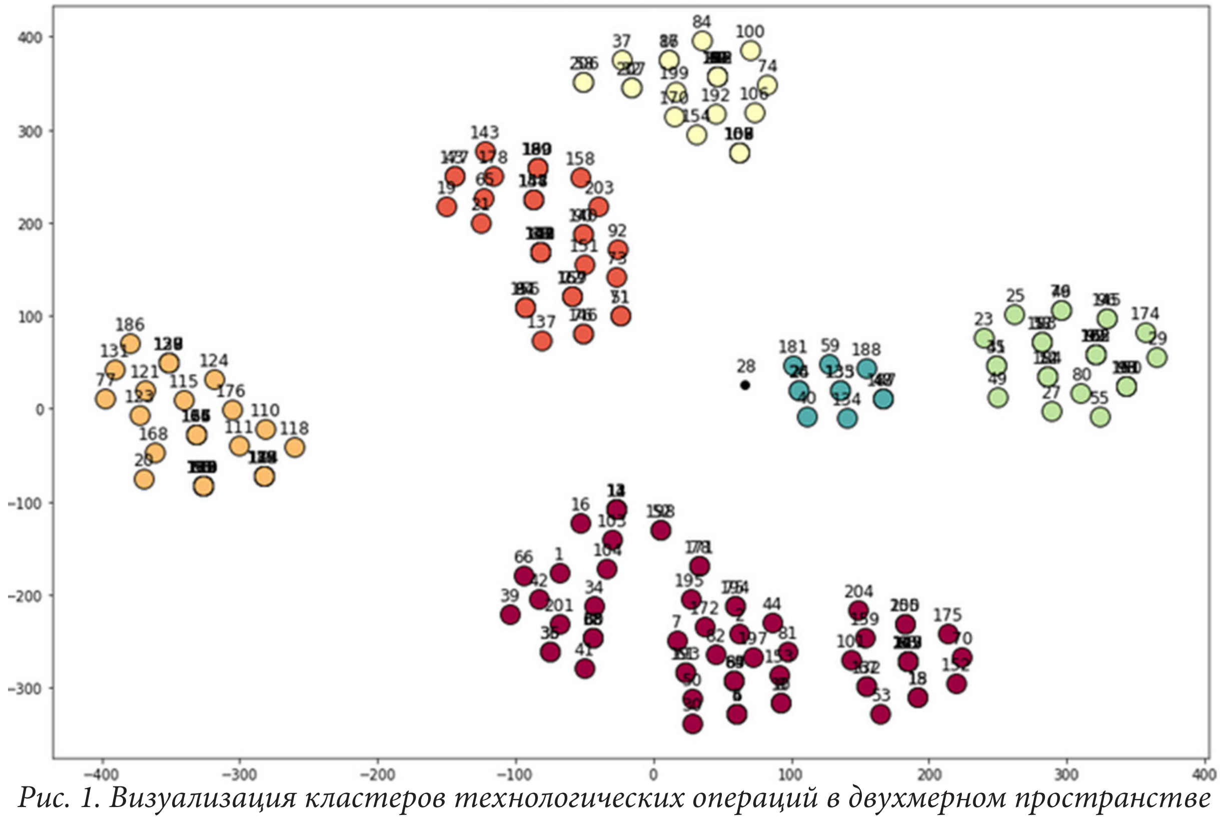



*Рис. 1. Визуализация кластеров технологических операций в двухмерном пространстве*

На рис. 1 приведены результаты визуализации набора данных в двухмерном пространстве с применением программной версии t-SNE-алгоритма, выполненной на языке Python (https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.manifold.TSNE.html). Все точки пронумерованы номерами соответствующих технологических операций. Разными цветами выделены точки, относящиеся к разным кластерам, найденным с применением DBSCAN-алгоритма. При этом только одна операция, которой соответствует одна точка на рис. 1, была признана шумом, что довольно нетипично для DBSCAN-алгоритма. Этот факт говорит о высоком качестве представления данных в наборе, а также — о хорошей отделимости кластеров друг от друга, их компактности и примерно одинаковой плотности операций внутри кластеров. Следует отметить, что кластеризация данных (т. е. технологических операций) выполнялась в пространстве высокой размерности, а визуализация соответствующих технологическим операциям точек была выполнена в двухмерном пространстве.

## Заключение

Рассматриваемый в статье подход к решению задачи по определению числа функциональных тренажёров, а также их состава является авторским и основан на t-SNE- и DBSCAN-алгоритмов, которые ранее в таком контексте не применялись.

Результаты разбиения технологических операций на кластеры (группы) являются интуитивно-понятными для большинства операций и, кроме того, позволяют определить кластерную принадлежность, а, следовательно, и их принадлежность тем или иным функциональным тренажёрам. При этом удалось получить такое оптимальное число тренажеров, равное 6, которое попадает в целочисленный диапазон [5, 8], предложенный экспертами.

## Литература

1. *Sait N.* Yurt, brahim Ozkol, Metin O. Kaya, Chingiz Haciyev. Optimization of the pd coefficient in a flight simulator control via genetic algorithms // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. – 2002. – V. 74, No. 2. – P. 147–153.

2. *George G. Kapadoukas, Andrew Self.* A taxonomy of aircraft ground handling modes //Aircraft Engineering and Aerospace Technology. – 2000. – V. 72, No. 4. – P. 328–333.

3. *Brown D. A.* Military use seen for visual simulators // Aviation Week and Space Technology. – 1977. – V. 107, No. 23. –P. 60–63.

4. *Brown D. A.* Simulator aids aircraft // Aviation Week and Space technology. – 1972. – V. 96, No. 6. – P. 38–41.

5. *Milligan G. W., Cooper M. C.* An Examination of Procedures for Determining the Number of Clusters in a Data Set // Psychometrika. – 1985. – V. 50. – P. 159–179.

6. *Jain A. K., Dubes R. C.* Algorithms for Clustering Data. Prentice Hall. – 1988. – 334 p.

7. *Peter H. A., Sneath R. S.* Numerical Taxonomy. The principles and practice of numerical classification. Francisco: W.H. Freeman and Co. – 1973. – 573 p.

8. *Bezdek J. C., Ehrlich R., Full W.* FCM: The fuzzy c-means clustering algorithm // Computers & Geosciences. – 1984. – V. 10 (2-3). – P. 191–203.

9. *Demidova L., Nikulchev E., Sokolova Yu.* Use of Fuzzy Clustering Algorithms' Ensemble for SVM classifier Development // International Review on Modelling and Simulations (IREMOS). – 2015. – V. 8, No. 4. – P. 446–457. – http://dx.doi.org/10.15866/iremos.v8i4.6825.

10. *Ester M., Kriegel H.-P., Sander J., Xu X.* A density-based algorithm for discovering clusters a density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise // KDD'96: Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. – 1996. – P. 226–231.

11. *Tenenbaum J. B., de Silva V., Langford J. C.* A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction // Science. – 2000. – V. 290 (5500). – P. 2319–2323.
12. *Roweis S. T., Saul L. K.* Nonlinear dimensionality reduction by Locally Linear Embedding // Science. – 2000. – V. 290 (5500). – P. 2323–2326.
13. *Hinton G. E., Roweis S. T.* Stochastic Neighbor Embedding // Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge, MA, USA. The MIT Press. – 2002. – V. 15. – P. 833–840.
14. *Belkin M., Niyogi P.* Laplacian Eigenmaps and spectral techniques for embedding and clustering // Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge, MA, USA. The MIT Press. – 2002. – V. 14. – P. 585–591.
15. *Weinberger K. Q., Sha F., Saul L. K.* Learning a kernel matrix for nonlinear dimensionality reduction // Proceedings of the 21st International Confernence on Machine Learning, 2004.
16. *Lee J. A., Verleysen M.* Nonlinear dimensionality reduction. Springer, New York, NY, USA. – 2007.
17. *van der Maaten L.J.P, Hinton G. E.* Visualizing Data Using t-SNE // Journal of Machine Learning Research. – 2008. – V. 9. – P. 2579–2605.
18. *McInnes L. Healy J.* UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction // ArXiv e-prints 1802.03426, 2018.
19. *Rousseeuw P.* Silhouettes: a graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis, Journal of Computational and Applied Mathematics. 1987. – V. 20(1). – P. 53–65.

УДК 004.932.4

# ГЕТЕРОАССОЦИАТИВНЫЕ СЖИМАЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ИХ ИНТЕРПОЛИРУЮЩИЕ И МАСКИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА

**М. А. Дрюченко, А. А. Сирота**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматриваются гетероассоциативные преобразования изображений, реализующие взаимное отображение двух соседних или вложенных областей изображения, имеющих произвольную форму в рамках фрагментов или блоков прямоугольной формы, покрывающих это изображение. В рамках данного класса преобразований отдельно рассматриваются гетероассоциативные сжимающие преобразования. Приводятся теоретические обоснования возможностей построения гетероассоциативных преобразований различными способами, основанными на использовании как нейросетевых обучаемых преобразователей, так и численных методов. Рассматриваются интерполирующие и маскирующие свойства преобразований, проявляющиеся при обработке изображений, основанные на возможности их представления как суммы оценочной составляющей выходной части, являющейся линейной или нелинейной функцией входной части, и аддитивной стохастической составляющей, отвечающей за ошибку прогноза выходной части. Исследуются переборные, генетические и эвристические алгоритмы оптимизации формы входной и выходной частей в рамках фрагментов, покрывающих изображение, обеспечивающие максимизацию (минимизацию) уровня оценочной и стохастической составляющих и, тем самым, управление интерполирующими и маскирующими свойствами гетероассоциативных преобразований.

**Ключевые слова:** обработка изображений, гетероассоциативные преобразования, сжимающие преобразования, нейронные сети, генетические алгоритмы, интерполирующие свойства, маскирующие свойства.

## Введение и постановка задачи

В качестве исходной модели обрабатываемого многомерного сигнала или изображения будем рассматривать его представление как реализациию случайного поля, заданного на дискретной сетке: $w(x,y)$, $(x,y)\in\Psi=\{x=\overline{1,n},\ y=\overline{1,m}\}$. В общем случае $w(x,y)\in\mathbf{R}^h$, где $h\geq 1$ — определяет размер вектора данных, связанных с каждой точкой $(x,y)$. В частности, если $h=1$, то $w(x,y)$ можно интерпретировать как монохромное изображение, а если $h=3$ — как цветное изображение. Пусть $z\in\mathbf{R}^N$ — случайный вектор, представляющий некоторую подобласть (фрагмент) $\Omega\subset\Psi$ и полученный путем развертки значений $w(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$ в заданном порядке $z=S_{\tilde{n}}(w)$, где $S_c(...)$ — функция, определяющая порядок развертки. Например, если $\Omega$ подобласть прямоугольной формы размера $n_w\times m_w$, то $N=n_w\times m_w\times h$.

Для определенности далее будем считать, что математическое ожидание и матрица ковариаций вектора $z$ удовлетворяют условиям: $M[z]=0$, $M[zz^T]=R_z$. Вектор $z$ всегда может быть представлен как составной $z=(z_1^T,z_2^T)^T$, где $z_1\in\mathbf{R}^{N_1}$ представляет некоторую подобласть $\Omega_I\subset\Omega$ фрагмента $\Omega\subset\Psi$, называемую входной частью, а $z_2\in\mathbf{R}^{N_2}$ — подобласть фрагмента $\Omega_O\subset\Omega$, называемую выходной частью. При этом пусть $\Omega_I\cup\Omega_O=\Omega$, $\Omega_I\bigcap\Omega_O=\varnothing$. Требуется построить гетероассоциативные отображения общего вида

$$F: Z_1\to Z_{2/1},\quad z_{2/1}=F(z_1),\ z_1\in Z_1,\ z_{2/1}\in Z_{2/1},$$

т. е. преобразования выполняющее отображение данных входной части в данные выходной. Очевидно, что $z_{2/1}$ всегда имеет определенную погрешность представления

$$z_2 = F(z_1) + V = z_{2/1} + V, \tag{1}$$

где $V$ — стохастическая составляющая (случайный вектор), определяющая погрешность детерминированного представления.

Указанные преобразования могут осуществляться как в полном объеме (1), т. е. с предоставлением всей в рамках принятой модели информации о $z_2$ при известном $z_1$, так и с определенным сжатием этой информации. Будем называть такие преобразования гетероассоциативными преобразованиями (ГП), а в случае выполнения преобразования со сжатием — гетероассоциативными сжимающими преобразованиями (ГСП). Последние будем представлять обозначать как

$$\tilde{F} : Z_1 \to Z'_{2/1}, \quad z'_{2/1} = \tilde{F}(z_1), \quad z_1 \in Z_1, \quad z'_{2/1} \in Z'_{2/1}, \tag{2}$$

где $z'_{2/1} = \tilde{F}(z_1)$ — определяет уже приближенное представление $z_{2/1} = F(z_1)$ в (1) при выполнении сжатия, которое, естественно, вносит свою дополнительную погрешность.

Если $z_1 = z_2 = z$ и области $\Omega_I = \Omega$, $\Omega_O = \Omega$ совпадают, то такое преобразование называется автоассоциативным. Данное преобразование является частным случаем предыдущего. Очевидно, также, что в этом случае можно рассматривать только преобразование со сжатием, т. е. автоассоциативное сжимающее преобразование (АСП) вида

$$\bar{F} : Z \to \bar{Z} \subseteq Z, \quad \bar{z} = \bar{F}(z), \quad z \in Z, \quad \bar{z} \in \bar{Z}. \tag{3}$$

В общем случае при выполнении ГСП сжатию подвергается именно оценка $\tilde{z}_{2/1}$; при этом говорить о сжатии вектора $z_2^{(p)}$ не приходится. Реальное сжатие фрагментов происходит только в случае выполнения АСП.

Пусть некоторое количество сходных по топологии непересекающихся областей $\Omega$ полностью покрывает $\Psi$, так что

$$\bigcup_{p=1}^{P} \Omega^{(p)} = \Psi, \quad \bigcap_{p=1}^{P} \Omega^{(p)} = \varnothing.$$

Соответственно, каждой области $\Omega^{(p)}$ соответствует реализация вектора $z$: $z^{(p)}$. В итоге на всем изображении может быть получена совокупность реализаций $\{z_1^{(p)}, z_2^{(p)}, \ p = \overline{1,P}\}$ для входных и выходных частей $\Omega_I^{(p)} \cup \Omega_O^{(p)} = \Omega^{(p)}$ совокупности фрагментов $\Omega^{(p)}$, $p = \overline{1,P}$, которая будет далее использована в качестве обучающей выборки для построения сжимающего преобразования.

При выполнении ГП общего вида области $\Omega_I$, $\Omega_O$ могут быть произвольной конфигурации: прямоугольной формы, решетки случайной конфигурации внутри области прямоугольной формы и т. п. также важно отметить, что для описания ГП и ГСП случайных векторов $z_1$, $z_2$ могут использоваться как линейные, так и нелинейные модели преобразований.

Ранее в работах авторов [1–3] проведены теоретические обоснования, которые позволяют детально рассмотреть вопрос о свойствах ГП и ГСП и наличии потенциальных преимуществ при их применении в интересах решения различных задач обработки изображений. Указанные свойства, как показывает анализ, можно условно разделить на три группы:

– интерполирующие и маскирующие свойства, проявляющиеся при выполнении ГП и ГСП изображений и основанные на возможности представления любого фрагмента случайной функции нескольких аргументов как суммы оценочной составляющей выходной части, являющейся линейной или нелинейной функцией входной части, и аддитивной стохастической составляющей, отвечающей за ошибку прогноза выходной части;

– реконструирующие свойства ГП, определяющие потенциальные возможности скрытия и последующего восстановления сигналов или изображений в целом с уменьшением объема хранимой или предаваемой информации без искажений (сжатие без потерь);

– собственно сжимающие свойства ГП и ГСП, отражающие потенциальные возможности модификации сигналов и изображений с исключением спектральных составляющих при использовании различных алгоритмов и технологий с учетом специфики их построения (сжатие с потерями).

Использовать эти свойства можно различным образом. Так, при выполнении ГП и ГСП на основе представленных в [1–3] соотношений и алгоритмов появляется возможность внесения определенных искажений (модификаций) как в оценочную, так и в стохастическую составляющую. Такие модификации в оценочной составляющей, в частности, используются в задачах стеганографии и сжатия данных [2, 3]. При этом стохастическая составляющая выступает в роли маскирующей, шумовой, наложение которой позволяют скрыть внесенные искажений, а модифицированная детерминированная составляющая или ее часть играет роль «полезного сигнала». Из сказанного следует, что для анализа потенциальных интерполирующих и маскирующих свойств при выполнении ГСП важным является соотношение «энергетических» характеристик оценочной (интерполирующей) составляющей и стохастической составляющей, формируемых при выполнении ГП без сжатия.

Поэтому целью данной работы является решение задачи «управления» соотношением «энергетических» характеристик оценочной и стохастической составляющих на основе нахождения конфигураций входной и выходной частей, максимизирующих (минимизирующих) уровень стохастической составляющей и, одновременно, пропорционально минимизирующих (максимизирующих) уровень оценочной (интерполирующей) составляющей.

## 1. Теоретические обоснования возможностей построения гетероассоциативных сжимающих преобразований

В [1, 3] показано, что в качестве универсальных преобразователей, которые могут быть использованы для выполнения ГП и ГСП на основе как линейной, так и нелинейной модели могут, применяться нейронные сети (НС) прямого распространения, весовые коэффициенты, которых могут настраиваться путем непосредственных вычислений или на основе итеративного обучения по методу обратного распространения ошибки. Типовая архитектура сети для выполнения ГП представлена на рис. 1,а. Архитектура сети для выполнения ГСП обычно имеет вид гетероассоциативного энкодера с сокращенным числом нейронов $M \le \min\{N_1, N_2\}$ в скрытом слое (рис. 1,б). Здесь в зависимости используемой модели активационные функции могут быть нелинейными и линейными (как показано на рисунках) или всюду только линейными.

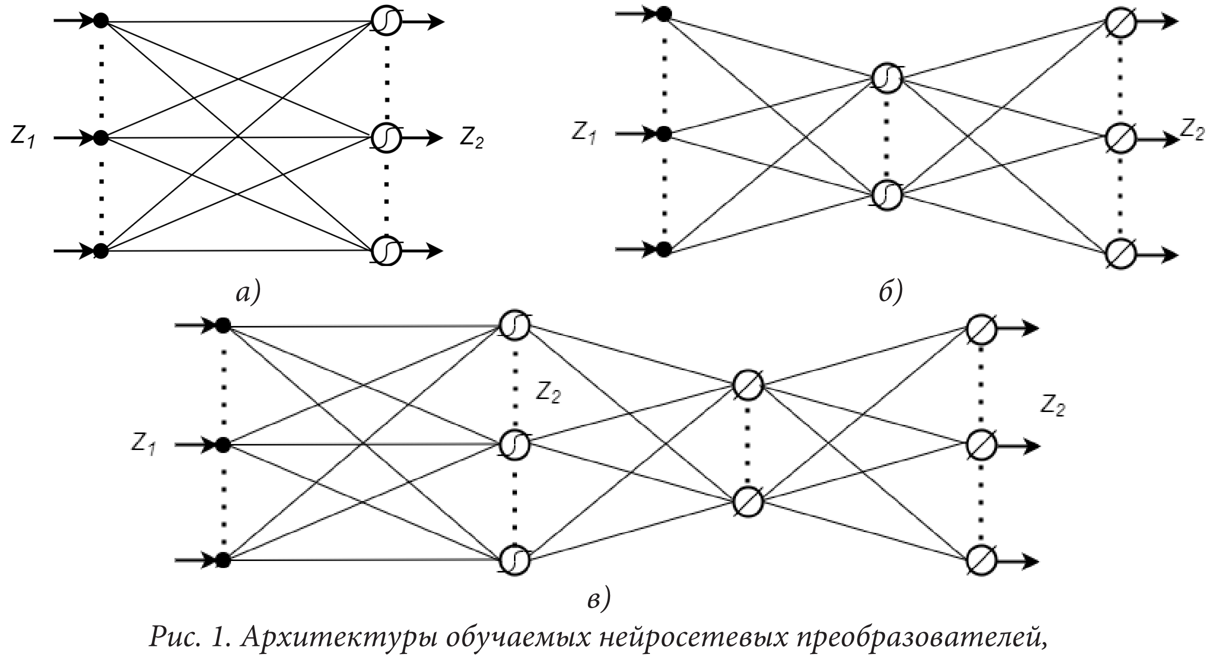



*Рис. 1. Архитектуры обучаемых нейросетевых преобразователей, используемых для выполнения гетероассоциативных преобразований*

В [1, 3] для обучаемых гетероассоциативных преобразователей при использовании линейной модели получены необходимые условия минимума целевой функции — средней квадратичной ошибки в виде матричных линейных уравнений для весовых коэффициентов двуслойных нейронных сетей. Исследованы свойства оценок параметров сжимающих преобразователей и доказаны две теоремы об эквивалентности ГСП, получаемого на основе обучения нейросетевых преобразователей.

Первая теорема утверждает, что применение ГСП (рис. 1,б) с минимальной среднеквадратичной ошибкой на выходе по отношению к вектору, описывающему входную часть фрагмента случайного поля, эквивалентно разложению по собственным векторам матрицы, являющейся произведением обращенной выборочной матрицы ковариаций входной части фрагмента, матрицы взаимной ковариаций входной и выходной матрицы и ее транспонированной матрицы. При этом столбцы матрицы весовых коэффициентов первого слоя являются линейной комбинацией $M$ собственных векторов указанной матрицы, соответствующих максимальным собственным значениям, а столбцы матрицы коэффициентов второго слоя, являются линейной комбинацией $M$ собственных векторов выборочной матрицы ковариаций оптимальной линейной оценки выходной части.

Вторая теорема, в развитие первой, утверждает (рис. 1,в), что выполнение ГСП с минимальной среднеквадратичной ошибкой на выходе по отношению к вектору, описывающему входную часть фрагмента случайного поля эквивалентно, в смысле достигаемого уровня остаточной ошибки, автоассоциативному сжимающему преобразованию, выполняемому по отношению к оценке выходной части, получаемой относительно входной части.

Полученные обоснования определяют возможность построения и применения универсальных линейных сжимающих отображений с минимальным уровнем дисперсии вносимых искажений при решении различных задачи обработки случайных полей и реальных изображений. При этом они позволяют получить один важный в практическом отношении результат. Он состоит в том, что задача построения гетероассоциативных сжимающих преобразований может быть решена двумя способами.

Первый способ состоит в выполнении сжатия в исходном представлении (в прямой форме) с использованием архитектуры преобразователя, представленную на рис. 1,б. Он может выполняться в двух вариантах: путем непосредственного обучения нейронных сетей, имеющих представленную на рис. 1,б архитектуру или путем расчета соответствующих весовых коэффициентов на основе решения обобщенной задачи на собственные числа и собственные векторы.

Второй способ состоит в выполнении сжатия в представлении оценки (в косвенной форме) с использованием архитектуры преобразователя, представленную на рис. 1,в, на основе линейного автоассоциативного сжимающего преобразования вектора реакций, получаемого на выходе НС, представленной на рис. 1,а. Здесь также возможно два варианта реализации: путем обучения нейронных сетей в два этапа или путем непосредственного расчета весовых коэффициентов автоассоциативного преобразователя линейной оценки или на основе решения задачи на собственные числа и собственные векторы матрицы ковариаций оценки выходной части.

Для нелинейных моделей преобразований получены необходимые условия минимума целевой функции относительно матриц весовых коэффициентов для преобразователей с сигмоидальными функциями активации. Они имеют вид нелинейных уравнений в матричной форме. Первые приближения решений этих уравнений для преобразователей рис. 1, дают линейные матричные уравнения, схожие по виду с соотношениями, полученными для линейных преобразователей. Более точное численное решение указанных нелинейных уравнений фактически реализуется в ходе обучения нейронных сетей с использованием одного из известных вариантов реализации метода обратного распространения ошибки.

### *1.1. Интегральные формы гетероассоциативных преобразований*

Если применить рассмотренные выше преобразования ГП или ГСП к реализации случайной функции (изображения) в целом, то можно выделить ее полную оценочную составляющую $E(x,y)=\tilde{w}(x,y)$ на всей области определения, которую следует рассматривать как интерполированную функцию, полученную на основе известных входных частей всех фрагментов (блоков), покрывающих область определения $\Psi$. Такая интерполяция является индивидуальной для каждого изображения, так как все преобразования (1) формируются на основе обучающих данных. Точно также можно выделить полную стохастическую составляющую $V(x,y)=w(x,y)-\tilde{w}(x,y)$, т. е. разложить изображение на две независимые части. Общей идей такого разделения на две составляющих, очевидно различающихся по своим корреляционным и частотным свойствам, по фрагментам, покрывающим все изображение, является использование прямого и обратного интегрального гетероассоциативного преобразования (ИГП). Под прямым понимается преобразование входной части в выходную, под обратным — преобразование выходной части во входную. Для обеспечения статистической однородности оценочной и стохастической маскирующей составляющих желательно использовать входную и выходную части одинакового размера и конфигурации. С учетом возможности использования прямого и обратного преобразований переобозначим ранее введенное отображение входной части в выходную $F: Z_1 \to Z_{2/1}$, $z_{2/1}=F(z_1)$, как $F_{io}: Z_1 \to Z_{2/1}$, $z_{2/1}=F_{io}(z_1)$. Аналогично можно ввести обратное отображение $F_{oi}: Z_2 \to Z_{1/2}$, $z_{1/2}=F_{oi}(z_2)$.

Тогда прямым ИГП будем называть отображение

$$G_{io}: W_1 \to W_{2/1},\ w_{2/1}=G_{io}(w_1),\ w_1 \in W_1,\ w_{2/1} \in W_{2/1},$$

где $w_1(x,y)$, $(x,y)\in\Psi_1=\bigcup_{p=1}^{P}\Omega_1^{(p)}$ — случайное поле, заданное на объединенной области всех входных частей и, если $(x,y)\in\Omega_2^{(p)}$, то $w_1^{(p)}(x,y)=S_c^{-1}(z_1^{(p)})$ формируется путем обратной развертки из вектора $w_{2/1}(x,y)w_{2/1}(x,y)$, $(x,y)\in\Psi_2=\bigcup_{p=1}^{P}\Omega_2^{(p)}$ — случайное поле, заданное на объединенной области всех выходных частей и, если $(x,y)\in\Omega_2^{(p)}$, то $w_{2/1}^{(p)}(x,y)=S_c^{-1}(z_{2/1}^{(p)})$ формируется путем обратной развертки вектора $z_{2/1}^{(p)}=F_{io}(z_1^{(p)})$.

Обратным ИГП будем называть отображение

$$G_{oi}: W_2 \to W_{1/2},\ w_{1/2}=G_{oi}(w_2),\ w_{1/2} \in W_{1/2},\ w_2 \in W_2,$$

где $w_{1/2}(x,y)$, $(x,y)\in\Psi_1=\bigcup_{p=1}^{P}\Omega_1^{(p)}$ — случайное поле, заданное на объединенной области всех входных частей и, если $(x,y)\in\Omega_2^{(p)}$, то $w_{1/2}^{(p)}(x,y)=S_c^{-1}(z_{1/2}^{(p)})$ формируется путем обратной развертки из вектора $z_{1/2}^{(p)}=F_{oi}(z_2^{(p)})$; $w_2(x,y)$, $(x,y)\in\Psi_2=\bigcup_{p=1}^{P}\Omega_2^{(p)}$ — случайное поле, заданное на объединенной области всех выходных частей и, если $(x,y)\in\Omega_2^{(p)}$, то $w_2^{(p)}(x,y)=S_c^{-1}(z_2^{(p)})$ формируется путем обратной развертки из вектора $z_2^{(p)}$.

Соответственно, для заданных $w_2 \in W_2$, $w_{2/1}\in W_{2/1}$, можно получить случайное поле стохастической составляющей как

$$v_2=w_2-G_{io}(w_1)=w_2-w_{2/1},\ v_2\in V_2,$$

где $v_2(x,y)$, $(x,y)\in\Psi_2$ — случайное поле, заданное на объединенной области выходных частей, причем, если $(x,y)\in\Omega_2^{(p)}$, то $v_2(x,y)=S_c^{-1}(v_2^{(p)})$ формируется путем обратной развертки из вектора $v_2^{(p)}=z_2^{(p)}-z_{2/1}^{(p)}=z_2^{(p)}-F_{io}(z_1^{(p)})$.

Аналогично, для заданных $w_1\in W_1$, $w_{1/2}\in W_{1/2}$, можно получить случайное поле стохастической составляющей как

$$v_1 = w_1 - G_{oi}(w_2) = w_1 - w_{1/2}, \quad v_1 \in V_1$$

где $v_1(x, y)$, $(x, y) \in \Psi_1$ — случайное поле, заданное на объединенной области всех выходных частей, причем, если $(x, y) \in \Omega_1^{(p)}$, то $v(x, y) = S_c^{-1}(v_1^{(p)})$ формируется путем обратной развертки из вектора $v_1^{(p)} = z_1^{(p)} - z_{1/2}^{(p)} = z_1^{(p)} - F_{oi}(z_2^{(p)})$.

В итоге можно получить общее интегральное отображение для формирования оценочное и стохастической составляющих в виде

$$G_e : W \to \tilde{W}, \quad \tilde{w} = G_e(w), \quad w = \{w_1, w_2\} \in W = \{W_1, W_2\}, \tag{4}$$

$$\tilde{w} = \{w_{1/2}, w_{2/1}\} \in \tilde{W} = \{W_{1/2}, W_{2/1}\}, \quad G_m : W \to V, \, v = G_m(w), \quad v = \{v_1, v_2\} \in V = \{V_1, V_2\}.$$

Общая схема выполнения подобных интегральных преобразований представлена на рис. 2. В ней для управления уровнями оценочной и стохастической составляющих можно использовать не только изменение конфигураций входной и выходной частей фрагмента, но и задание остаточной ошибки обучения нейросетевых преобразователей.


*Рис. 2. Общая схема выполнения ИГП с выделения оценочной и стохастической составляющих*

### *1.2. Постановки и алгоритмы решения оптимизационных задач*

Как следует из результатов, представленных в [1, 2], для оценки интерполирующих и маскирующих свойств ГП можно использовать соотношения для выборочных матриц ковариаций оценочной и стохастической составляющей:

$$C_E = \tilde{R}_{z21}\tilde{R}_{z11}^{-1}\tilde{R}_{z21}^{T}, , \; C_V = \tilde{R}_{z22} - \tilde{R}_{z21}\tilde{R}_{z11}^{-1}\tilde{R}_{z12}, \; \tilde{R}_{z22} = C_E + C_V, \tag{5}$$

$$\tilde{R}_{z21} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} z_2^{(p)} z_1^{(p)}, \; \tilde{R}_{z11} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} z_1^{(p)} z_1^{(p)}, \; \tilde{R}_{z22} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} z_2^{(p)} z_2^{(p)}.$$

Исходя из (5) можно сделать ряд выводов. Первый из них состоит в том, что для матриц ковариаций $\tilde{R}_{z22}$, $C_E$, $C_V$ выполняется $\mathrm{tr}\tilde{R}_{z22} = \mathrm{tr}C_E + \mathrm{tr}C_V$. Тогда для оценки соотношения между оценочной и стохастической составляющей можно использовать отношение $\rho_{VE} = \mathrm{tr}C_V / \mathrm{tr}C_E$. Инвариантом относительно разбиения фрагмента на входную и выходную части является след выборочной матрицы ковариации:

$$\tilde{R}_z = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} z^{(p)} z^{(p),T} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{z11} & \tilde{R}_{z12} \\ \tilde{R}_{z21} & \tilde{R}_{z22} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{tr}\tilde{R}_z = \mathrm{tr}\tilde{R}_{z11} + \mathrm{tr}\tilde{R}_{z22}. \tag{6}$$

При этом наполнение матриц $\tilde{R}_{z11}$, $\tilde{R}_{z22}$, $\tilde{R}_{z12}$ существенно зависит от топологии разбиения фрагмента на входную и выходную части.

Задача управления соотношением «энергетических» характеристик оценочной и стохастической составляющих сводится к нахождению конфигурации входной и выходной частей, максимизирующей (минимизирующей) след матрицы $C_V$, т. е. уровень стохастической составляющей и, одновременно, пропорционально минимизирующей (максимизирующей) след матрицы $C_E$, т. е. уровень оценочной составляющей.

Рассмотрим решение этой задачи при фиксированных размерах блоков и значений $N_1$, $N_2$, $N_1 + N_2 = N$. Введем бинарный вектор $x_o = (x_{o1}, ..., x_{oN})^T$, $x_{os} \in \{0;1\}$, $s = \overline{1, N}$, единичные значения которого будут соответствовать локализации элементов (пикселей) выходной части. Соответственно вектор $x_i = (x_{i1},...,x_{iN})^T$, $x_{is} \in \{0;1\}$, $x_{is} = \overline{x}_{os}$, $s = \overline{1,N}$, значения которого будут инвертированы относительно соответствующих значений $x_o$, определяет размещение элементов входной части. В дополнение введем также векторы

$$c_o = (c_{o1},...,c_{oN_2})^T,\ c_{os} \in \{1,2,...,N\},\ s = \overline{1,N_2},\ c_i = (c_{i1},...,c_{oN_1})^T,\ c_{is} \in \{1,2,...,N\},\ s = \overline{1,N_1},$$

компоненты которых определяют индексы элементов выходной и входной части. Оба введенных описания эквиваленты, поэтому можно обозначить $c_o = c_o(x)$, $c_i = c_i(x)$, где $x$ — любой из бинарных векторов $x_o$, $x_i$, используемый далее как решение. В дальнейшем без потери общности решений зафиксируем в качестве $x$ вектор $x_o$ и определим обратное преобразование

$$x = f(c_o),\ \ x = (x_{i1},...,x_{iN})^T, x_{is} \in \{0;1\},\ x_{is} = x_{os},\quad s = \overline{1,N}.$$

Пусть $R$ произвольная квадратная симметричная матрица заданного размера $N_x$, $N_x \geq N_1$, $N_x \geq N_2$. Тогда обозначения $R(c_i(x),c_i(x))$, $R(c_o(x),c_o(x))$, определяют квадратные матрицы размера $N_1 \times N_1$, $N_2 \times N_2$, являющиеся подматрицами $R$ и содержащими строки и столбцы $R$ с номерами $c_i = c_i(x)$ или $c_o = c_o(x)$. Соответственно, обозначения $R(c_i(x), c_o(x))$, $R(c_i(x), c_o(x))$ будет определять прямоугольные матрицы размера $N_1 \times N_2$, $N_2 \times N_1$ содержащими строки и столбцы $R$ с номерами $c_i = c_i(x)$ и $c_o = c_o(x)$. С использованием введенных обозначений представим матрицы ковариаций в виде

$$\tilde{R}_{z11}(x) = \tilde{R}_z(c_i(x),c_i(x)),\ \tilde{R}_{z22}(x) = \tilde{R}_z(c_o(x),c_o(x)),\ \tilde{R}_{z21}(x) = \tilde{R}_z(c_o(x),c_i(x)). \tag{7}$$

С учетом этого для управления соотношением оценочной и составляющей может быть сформулирована следующая задача оптимизации — нахождения решениям $x$ (для определенности пусть $x = x_o$), максимизирующего (минимизирующего) след матрицы $C_V$, т. е. уровень стохастической составляющей и, одновременно, минимизирующего (максимизирующего) след матрицы $C_E$, т. е. уровень оценочной составляющей и задающего оптимальную в том или ином смысле конфигурацию входной и выходной частей.

$$\tilde{x}^{(1)} = \arg\max_x(\min)\left\{\mathrm{tr}\left[\tilde{R}_{z22}(x) - \tilde{R}_{z21}(x)\tilde{R}_{z11}^{-1}(x)\tilde{R}_{z12}(x)\right]\right\},\ \sum_{s=1}^{N} x_s = N_2,\ x_s \in \{0;1\}. \tag{8}$$

Оптимизационные задачи типа (8) являются задачами нелинейного целочисленного математического программирования, решение которых может осуществляться различными методами. Задачи решаются при фиксированных значениях $N$, $N_1$, $N_2$. Если потребуется провести оптимизацию при различных значениях этих переменных, то задачи решаются путем перебора оптимальных решений, полученных для каждого из этих значений. Ниже приводятся альтернативные варианты предлагаемых методов и реализующих их алгоритмов нахождения оптимального решения.

***Переборный алгоритм (ОА).*** Простейшим является метод полного перебора вариантов по каждому используемому показателю. Этот способ не позволяет проводить анализ при достаточно больших размерах фрагмента, поскольку количество перебираемых комбинаций для фиксированных $N$, $N_1$, $N_2$ составляет $N_B = C_N^{N_1} = C_N^{N_2} = N!/(N_1!N_2!)$.

Основная сложность при реализации такого алгоритма состоит в необходимости последовательного формирования перебираемых комбинаций и улучшения получаемого решения, поскольку сформировать все множество комбинаций сразу не представляется возможным. Уже для размера фрагмента более $6 \times 6$ число комбинаций имеет порядок $10^{10}$. Вторая сложность связана с тем, что время вычислений растет по экспоненциальному закону с увеличением размеров фрагмента. Тем не менее, данный подход далее будет использован для небольших размеров фрагментов с целью сопоставления с другими алгоритмами и выявления общих тенденций. Предложенная реализация алгоритма выглядит следующим образом.

1. $l \leftarrow N_2$.

2. Задать начальную комбинацию, описывающую конфигурацию входной и выходной части в виде массива по схеме $c_o = (1,2,...,N_2)^T$, $x = f(c_o)$, $c_i = c_i(x)$, определить матрицы $\tilde{R}_{z11} = \tilde{R}_z(c_i, c_i)$, $\tilde{R}_{z22} = \tilde{R}_z(c_o, c_o)$, $\tilde{R}_{z21} = \tilde{R}_z(c_o, c_i)$, рассчитать значение используемого показателя $K(x) = \mathrm{tr}C_V$ и установить начальные значения максимума (минимума) $m_a$ $(m_i)$ используемой целевой функция $K(x)$.

3. Проверить, если $c_o(N_2) = N$, то $l \leftarrow l - 1$, иначе $l \leftarrow N_2$.

4. Если $l \geq 1$, задать новую комбинацию по схеме $c'_o(i) \leftarrow c_o(l) + i - l + 1$, $i = N_2 : -1 : l$, $x' = f(c'_o)$, $m'_i < m_i$ $c'_i = c'_i(x')$.

5. Определить матрицы $\tilde{R}'_{z11} = \tilde{R}_z(c'_i, c'_i)$, $\tilde{R}'_{z22} = \tilde{R}_z(c'_o, c'_o)$, $\tilde{R}'_{z21} = \tilde{R}_z(c'_o, c'_i)$ и рассчитать значение используемого показателя $m'_a = K(x')$ $(m'_i = K(x'))$.

6. Если $m'_a > m_a$ $(m'_i < m_i)$, то зафиксировать $c_i \leftarrow c'_i$ и $c_o \leftarrow c'_o$, $m_a \leftarrow m'_a$ $(m_i \leftarrow m'_i)$, иначе игнорировать изменения.

7. Повторять п.п. 3–6 до тех пор, пока $l \geq 1$.

8. Зафиксировать значения $c_i$ и $c_o$, $m_a$ $(m_i)$ и присвоить $\tilde{x}_* \leftarrow f(c_o)$. Зафиксировать искомые значения $\max K(\tilde{x}_*)$ $(\min K(\tilde{x}_*))$.

Представленный алгоритм реализует последовательное формирование комбинаций с уточнением экстремума. Однако и он не позволяет решать задачу при больших размерах фрагмента из-за ограничений временного характера. Для решения оптимизационных задач при произвольном размере фрагмента изображения предлагается использовать еще два подхода, основанных на использовании генетического алгоритма и эвристического алгоритма последовательного направленного перемещения элементов фрагмента между его входной и выходной частями.

***Генетический алгоритм (GA).*** Первый подход основан на применении генетических алгоритмов оптимизации. Соответственно, в данном случае при решении конкретной задач используется стандартная схема применении генетического алгоритма, для которого должны быть определены следующие данные и гиперпараметры [4, 5]:

1. Целочисленный вектор $x = (x_1, ..., x_n)^T$, определяющий решение. В нашем случае это вектор, описывающий индексацию выходной части фрагмента $x = x_o$.

2. Используемая целевая функция $K(x)$ (функция приспособленности), которую следует минимизировать. В нашем случае для каждой из рассмотренных постановок задач выбирается своя функция $K(x) = \pm\mathrm{tr}C_V(x)$, знак которой выбирается исходя из типа решаемой исходной задачи (на минимум или на максимум).

3. Границы области поиска возможных решений, которые в данном случае устанавливаются в виде неравенств $L_b \leq x \leq U_b$, где $L_b = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{N})$, $U_b = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{N})$.

4. Ограничения равенства и неравенства в форме матричных уравнений вида $Ax \leq b$, где для рассматриваемой задачи $A = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{N})$, $b = N_2$.

5. Размер используемой популяции $P_{size}$ и максимальное количество итераций $N_{gen}$, выполняемых до момента останова.

6. Набор гиперпараметров, описывающих другие стандартные опции алгоритма [5] (тип алгоритма мутации и кроссинговера, параметр точности для определения условий останова при малых изменениях функции приспособленности на соседних итерациях и др.).

***Эвристический алгоритм последовательного перемещения элементов (SA).*** Предложенный алгоритм реализует стратегию направленного поиска решения на основе последовательного перемещения элементов между входной и выходной частями. Алгоритм изначально ориентирован на сокращение времени поиска решения по сравнению с переборным и генетическим алгоритмом и обеспечения возможности плавного изменения оптимизируемого параметра, т. е. управления уровнем стохастической составляющей. Основным гиперпараметром алгоритма является предельное число выполняемых итераций $N_{sub}$. Общая схема алгоритма определяется следующим образом.

1. $l \leftarrow 0$.

2. Сгенерировать начальную случайную конфигурацию входной и выходной части в виде решения $x = (x_1, ..., x_n)^T, c_i = c_i(x)$ и $c_o = c_o(x)$, определить матрицы $\tilde{R}_{z11} = \tilde{R}_z(c_i, c_i), \tilde{R}_{z22} = \tilde{R}_z(c_o, c_o)$, $\tilde{R}_{z21} = \tilde{R}_z(c_o, c_i)$, рассчитать матрицу $C_V(x) = \tilde{R}_{z22}(x) - \tilde{R}_{z21}(x)\tilde{R}_{z11}^{-1}(x)\tilde{R}_{z12}(x)$. Установить начальные значения максимума (минимума) $m_a = \mathrm{tr}(C_V(x)$ $(m_i = \mathrm{tr}(C_V(x))$.

3. $l \leftarrow l+1$. Установить массив индексов случайных обращений для элементов входной части $ind = (\underbrace{1,1,...,1}_{N_1})$.

4. Выбрать случайным образом элемент из числа элементов входной части, у которых $ind(j) = 1$, (ранее не выбранных элементов), запомнить его номер $j_x$.

5. Выбрать элемент из числа элементов выходной части, который потенциально может дать наименьший (наибольший) вклад в след матрицы $C_V(x)$: $i_x = \arg\min\left[diag(C_V)\right]$ $(i_x = \arg\max\left[diag(C_V)\right])$, $diag(C_V) = (c_{v11}, c_{v22}, ..., c_{vN_2N_2})$ и запомнить его номер.

6. Выполнить предварительное перемещение элементов с номерами $j_x$, $i_x$ между входной и выходной частями путем изменения соответствующих компонентов массивов, обозначаемых как $c_i'$ и $c_o'$. Определить матрицы $\tilde{R}_{z11}' = \tilde{R}_z(c_i', c_i')$, $\tilde{R}_{z22}' = \tilde{R}_z(c_o', c_o')$, $\tilde{R}_{z21}' = \tilde{R}_z(c_o', c_i')$, рассчитать матрицу $C_V' = \tilde{R}_{z22}' - \tilde{R}_{z21}'\tilde{R}_{z11}'^{-1}\tilde{R}_{z12}'$ и $m_a' = \mathrm{tr}C_V'$ $(m_i' = \mathrm{tr}C_V')$.

7. Если $m_a' > m_a$ $(m_i' < m_i)$, то зафиксировать $c_i \leftarrow c_i'$ и $c_o \leftarrow c_o'$, $m_a \leftarrow m_a'$ $(m_i \leftarrow m_i')$ и установить $ind(j_x) = 0$, иначе, игнорировать изменения и вернуться к прежней индексации.

8. Повторять п.п. 4–7 $N_1$ раз (до тех пор, пока не будут использованы все возможные перемещения элементов входной части).

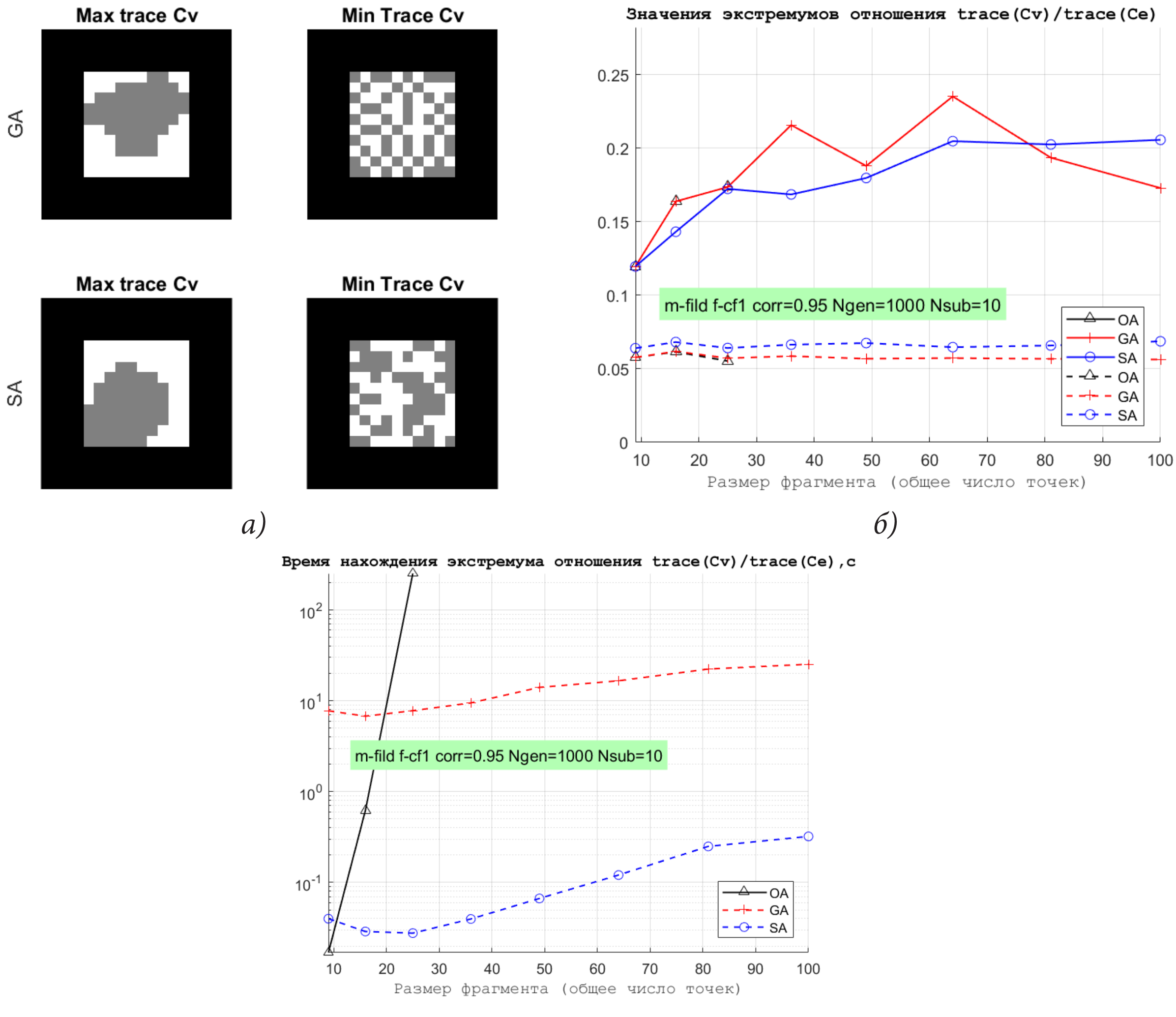
9. Повторять п. 3–8 до тех пор, пока не будет зафиксирована итерация, в которой не выполнено ни одного перемещения элементов входной и выходной частей, или пока не будет выполнено предельное число $N_{sub}$ итераций.

10.Зафиксировать значения $c_i$ и $c_o$, $m_a$ $(m_i)$ и присвоить $\tilde{x}_{1(2)} \leftarrow f(c_o)$. Зафиксировать искомые значения $\max K(\tilde{x}_{1(2)})$ $(\min K(\tilde{x}_{1(2)}))$.

В процессе работы предложенного алгоритма наблюдается практически монотонное изменение оптимизируемого показателя, что обеспечивает возможность плавного регулирования уровнем маскирующей составляющей. Для уменьшения вероятности попадания в неглубокий локальный экстремум и возникновения зацикливания в эвристическом алгоритме также рекомендуется проводить его запуск несколько раз при различных случайных начальных конфигурациях. При этом можно ожидать, что его быстродействие будет существенно больше, чем у переборного и генетического алгоритмов.

## 2. Результаты и их обсуждение

В качестве объектов исследования были выбраны следующие варианты: монохромные изображения, генерируемые как реализации гауссовских случайных полей с различными функциями пространственной корреляции; реальные монохромные изображения и реальные цветные изображения. На рис. 3,а представлены типичные конфигурации входной и выходной части, полученные для алгоритмов GA и SA при $n_w \times m_w = 10 \times 10$ (переборный алгоритм в этом случае реализовать невозможно. В ходе исследований также строились зависимости для максимальных и минимальных значений отношений $\rho_{VE}$, характеризующих соотношение оценочной (интерполирующей) составляющей от размера фрагмента квадратной формы (рис. 3,б), полученные с использованием различных алгоритмов (переборный алгоритм использовался только при малых размерах фрагмента), а также для времени проведения вычислений (рис. 3,в), позволяющие сравнить быстродействие различных алгоритмов. Эти зависимости получены для монохромного изображения, формируемого как реализация случайного поля. Для других типов изображений данные зависимости имеют схожий вид. При получении зависимостей размеры выходной и входной части задавались относительно общего числа точек как $N_2 = \mathrm{floor}(N/2)$, $N_1 = N - N_2$.




*а)* *б)*

*в)*

*Рис. 3. Типичные конфигурации входной и выходной частей фрагмента и зависимости для оптимизируемых значений отношения $\rho_{VE}$ и времени решения оптимизационных задач*

В ходе исследований как искусственно синтезированных, так и реальных изображений установлена возможность существенного изменения соотношения уровней оценочной и стохастической составляющей за счет изменения конфигурации входной и выходной частей фрагментов (до 10 раз). Также, можно увидеть, что в целом предложенный эвристический алгоритм показывает результаты, близкие к переборному и генетическому алгоритмам. При этом наблюдается незначительное завышение минимального значения показателя, не превышающее 10 %. Как положительное качество предложенного алгоритма следует отметить время его работы — существенно меньшее, чем для генетического алгоритма при оптимизации по следу матриц, и сопоставимое с последним для больших фрагментов при оптимизации по определителю.

## Заключение

В данной работе рассмотрены и исследованы гетероассоциативные преобразования, реализующие взаимное отображение двух соседних или вложенных локальных областей изображения. Предложена интегральная форма представления таких преобразований, обеспечивающая разделение всего изображения на две независимых составляющих — оценочную и стохастическую составляющие, отвечающие, соответственно, за интерполирующие и маскирующие свойства, которые могут быть использованы при решении различных задач обработки изображений. Приведенные постановки и решения оптимизционных задач, обладают новизной и обеспечивают «управление» соотношением оценочной и стохастической составляющих в зависимости от конфигурации входной и выходной частей выполняемых преобразований.

## Литература

1. *Сирота, А. А.* Обобщенные алгоритмы сжатия изображений на фрагментах произвольной формы и их реализация с использованием искусственных нейронных сетей / А. А. Сирота, М. А. Дрюченко // Компьютерная оптика. – 2015. – № 5. – С. 751–761.

2. *Сирота, А. А.* Нейросетевые функциональные модели и алгоритмы преобразования информации для создания цифровых водяных знаков / А. А. Сирота, М. А. Дрюченко, Е. Ю. Митрофанова // Известия вузов – Радиоэлектроника. – 2015. – № 1. – С. 3–16.

3. *Сирота, А. А.* Метод создания цифровых водяных знаков на основе гетероассоциативных сжимающих преобразований изображений и его реализация с использованием искусственных нейронных сетей / А. А. Сирота, М. А. Дрюченко, Е. Ю. Митрофанова // Компьютерная оптика. – 2018. – № 3. – С. 483–494.

4. *Емельянов, В. В.* Теория и практика эволюционного моделирования / В. В. Емельянов, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. – М. : Физматлит, 2003. – 432 с.

5. Документация пакета Matlab, Global Optimization Toolbox. – URL: https://ww2.mathworks.cn/en/products/global-optimization.html (дата обращения 20.09.2020).

УДК 004.94

# СИСИТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ ТОНКОЙ ШПУНТОВОЙ СТЕНКИ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

**Д. В. Дьяченко**

*Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова, Санкт-Петербург*

**Аннотация.** Для безопасности судоходства необходимо проводить мониторинг состояния гидротехнических сооружений. Рассматривается проблема автоматизации измерения изгиба тонкой шпунтовой стенки. Проводится анализ существующих средств и предлагается оригинальный подход к измерению деформаций причальной стенки.
**Ключевые слова:** автоматизация, измерение деформаций, планы сооружений.

## Введение

Для обеспечения безопасности судоходства необходимо постоянно проводить мониторинг состояния гидротехнических сооружений, в том числе причальных стенок. В настоящее время это весьма трудоёмкий процесс, проводящийся зачастую с участием водолазов. Для обеспечения безопасного функционирования сооружений было бы хорошим решением увеличить частоту обследований причальных стенок, что является сложным из-за трудоёмкости процесса обследований. Таким образом необходимо спроектировать систему, способную автоматизировать мониторинг состояния причальной стенки.

В данной работе рассматривается построение системы автоматизации измерения уклонов тонкой шпунтовой стенки, разработка прибора, способного ускорить ход измерительных работ и удешевить их, а так же создание программы для обработки полученных данных.

## 1. Постановка задачи исследования

### *1.1. Описание больверков*

Рассмотрим конструкцию типа «больверк».

Согласно определению, данному понятию «больверк» в ГОСТ 54523-2011, больверк — это стенка из погруженных сплошным рядом в грунт основания вертикальных свайных элементов, воспринимающая давление грунта засыпки.

Сооружения в виде деревянных, железобетонных или металлических свай, погружённых в грунт вплотную одна к другой, составляют группу тонких стенок или больверков, иногда называемых ещё шпунтовыми стенками.

Больверк — самая распространённая конструкция в мировом портостроении. Сооружения этого типа составляют более 50 % от числа возводимых причалов.

Согласно ГОСТ 54523-2011 необходимо проводить работы по измерению наклона относительно проектного положения шпунтовой стенки.

### *1.2. Актуальная методика оценки технического состояния больверков*

Пункт 1.4 приложения 1 ГОСТ 54523-2011 регламентирует процедуру проведения измерений: «1.4 Наклон и изгиб стенки по высоте определяют с помощью уклономера или отвеса. Кривые изгиба необходимо получить в нескольких сечениях по длине сооружения. При этом с верхнего строения в заранее намеченных местах опускают отвес, линь которого разбит на равные отрезки. Линейкой замеряют расстояние от стенки до линя в намеченных точках. По полученным данным строят кривую изгиба, а также определяют наклон стенки в целом».

Для построения совмещенных профилей (планов) сооружения используют результаты измерений планово-высотного положения надстройки и наклонов лицевой стенки сооружения (поперечные разрезы) с установленным интервалом (например, по пикетам — через 10 м и по горизонтам — через 2 м). (рис. 1).

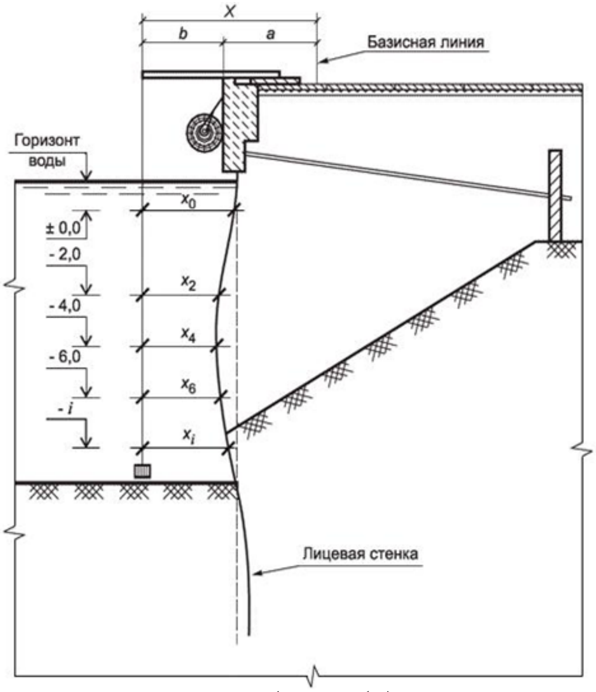



*Рис. 1. Схема измерений наклона (прогиба) лицевой стенки сооружения*

### *1.3. Предлагаемый способ автоматизации измерений*

Так как методика, описанная в ГОСТ предписывает измерять расстояние, то можно воспользоваться для этих целей дальномером и создать систему, способную упростить и ускорить измерительные работы. Для создания прибора мною была выбрана аппаратная платформа Arduino и среда Arduino IDE для написания программы управления прибором. Для написания программы обработки статистических данных и построения эпюр был выбран фреймворк Qt с компилятором MinGW.

Данная система предлагает пользователю возможность обойтись без использования программ для построения чертежей (таких как, например, AutoCAD). Пользователь вводит в программу для построения эпюр заранее известные данные об объекте, на котором будут производится измерения, и загружает файлы данных, полученные от прибора. Файлы с результатами измерений переносятся с прибора на компьютер пользователя с помощью SD-карты.

## 2. Описание приборной части проекта

Рассмотрим состав приборной части разработанной системы. Она состоит из платы Arduino Nano с микроконтроллером ATmega328, питаемой от бокса с двумя аккумуляторами типа 18650, модуля SD-карты с SD-картой, ультразвукового дальномера и двух кнопок: кнопки для создания нового файла и кнопки для совершения измерения и записи результата в файл (рис. 2).

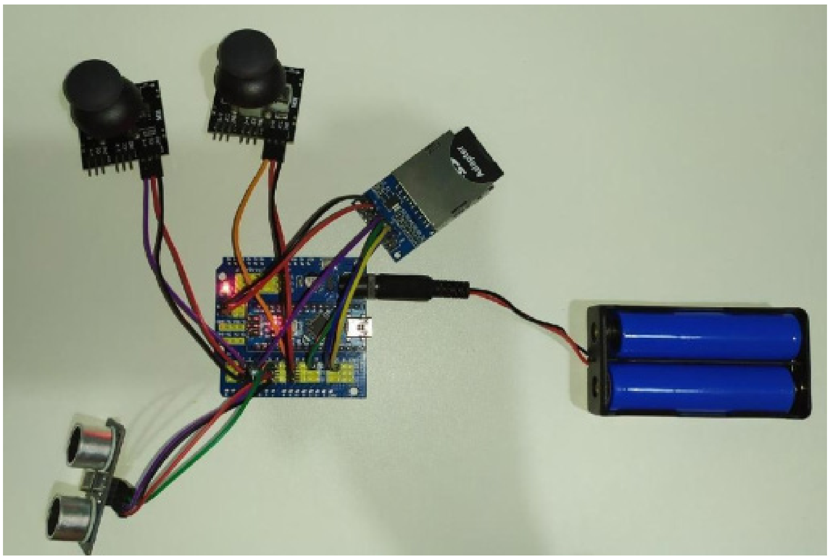


*Рис. 2. Общий вид прибора с элементом питания*

### 3. Описание работы программной части пректа

После подключения SD-карты к компьютеру пользователя работа ведётся в программной части системы. В качестве входных данных программе необходимо иметь данные о сооружении, характеризующие исследуемый объект, и результаты измерений, полученные в ходе исследования.

Такие данные, как общая высота сооружения (м.), высота верхней конструкции/оголовка (м.), вынос верхней конструкции/оголовка (м.), вынос отвеса (м.) являются обязательными для заполнения. Данные о глубине воды (м.), отметке дна (м.), наличии и расположении анкерной тяги (м.) не являются обязательными для работы программы и заполняются на усмотрение пользователя (рис. 3).

После заполнения четырёх обязательных полей можно перейти во вкладку «Результаты измерений» и нажать кнопку «ГОСТ Р 54523-2011». (рис. 4) Программа рассчитает высоты на которых должны быть произведены измерения в соответствии с методикой, описанной в ГОСТ.

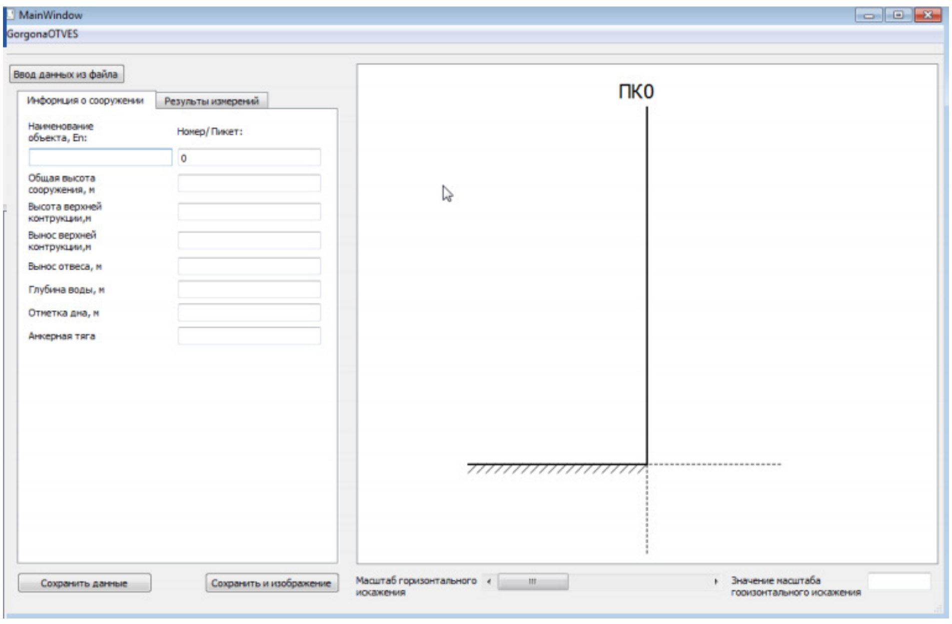



*Рис. 3. Интерфейс программы. Форма заполнения общих данных об объекте*

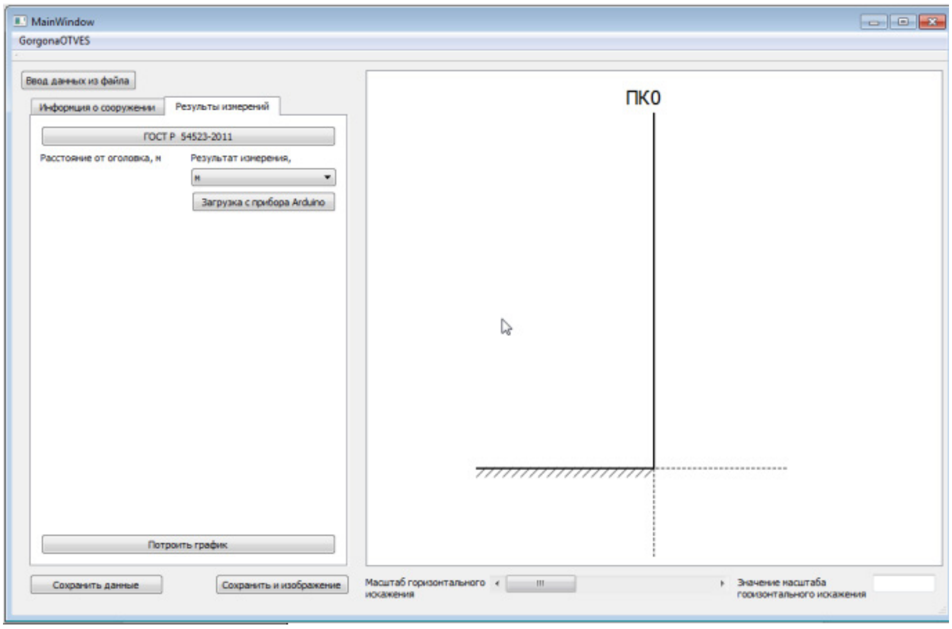



*Рис. 4. Интерфейс программы. Форма заполнения результатов измерения*

Так же необходимо поменять в combo-Box «Единицы измерения» метры на сантиметры, так как в «ручном режиме» пользователи зачастую работают с метрами, а прибор измеряет всё в сантиметрах и нажать кнопку «Загрузка и прибора Arduino» после чего выбрать файл необходимого пикета.

На этом этапе работы программы входными данными будут являться расстояние от оголовка (м.) и результат измерения (м.). Иными словами: высота, на которой производилось измерение (сверху-вниз от оголовка), и результат измерения в данной точке.

В качестве выходных данных программа может представлять искомую эпюру двумя способами: графический в формате .jpg, сохраняя изображение в выбранную пользователем директорию, и в виде файла данных в формате .txt в случаях, когда работа с данной эпюрой ещё не закончена и надо сохранить промежуточные результаты.

Конечным результатом работы программы и системы в целом являются изображения эпюр (рис. 5). Их можно будет сохранить в формате .jpg.

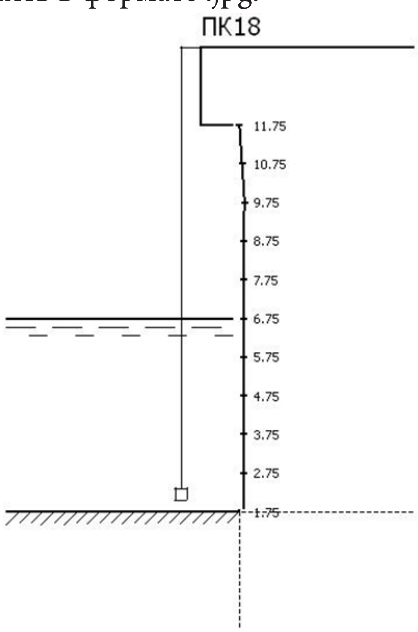



*Рис. 5. Результат работы системы в формате .jpg*

## Заключение

В данной работе описана система, спроектированная для ускорения работ по обследованию тонкой шпунтовой стенки. Цель данной работы была достигнута. Поставленные задачи: создание измерительного прибора и написание программы для обработки его показаний — выполнены. На данный момент требуется оформить патент для закрепления авторского права.

## Литература


1. *Блум Джереми.* Изучаем Arduino: инструменты и методы технического волшебства: Пер. с англ. – СПб.: БХВ-Петербург,  2015, – 336 с.

2. ГОСТ Р 54523-2011. Портовые гидротехнические сооружения. Правил обследования и мониторига технического состояния : введ. впервые : дата введения 2012-03-01. – Москва : Стандартинформ, 2012.

3. *Петин, В. А.* Проекты с использованием контроллера Arduino. – СПб. : БХВ-Петербург, 2014. – 400 с.

4. Портовые гидротехнические сооружения [Текст] : [Учебник для вузов водного транспорта] / проф. В. Е. Ляхницкий, доц. Н. А. Смородинский, доц. В. К. Штенцель и др. ; Под общ. ред. [и с предисл.] д-ра техн. наук проф. В. Е. Ляхницкого. – Ленинград ; Москва : Водтрансиздат, 1953. – 1 т.

5. *Стюарт Ярнольд.* Arduino для начинающих. Самый простой пошаговый самоучитель: [пер. с англ. М. Райтман]. – Москва :Эксмо, 2017. – 256 с.

6. Эксплуатация и долговечность портовых гидротехнических сооружений. Будин А. Я. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : «Транспорт», 1977. – 320 с.

7. *Яковлев П. И., Тюрин А. П., Фортученко Ю. А.* Портовые гидротехнические сооружения: учебн. для сред. спец. учебн. завед. – М. : Транспорт, 1989. – 320 с.

УДК 004 50

# ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ, НАБЛЮДАЕМЫХ ЧЕЛОВЕКОМ-ОПЕРАТОРОМ НА ЭКРАНЕ ДИСПЛЕЯ

**Д. И. Елфимов, Н. М. Новикова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Оператор является неотъемлемой частью системы «человек-машина» и от качества его зависит эффективность работы всей системы в целом. Причем надежность и своевременность одни из важнейших показателей качества работы человека-оператора. Для исследования этих показателей была разработана программа Tester.exe. С помощью программы был проведен эксперимент с группой операторов. Все данные хранились в специальной базе данных, с которой взаимодействовала программа. На основе полученных данных были вычислены необходимые показатели качества работы оператора, а также показатели, тесно связанные с ними. Их анализ показал, что человек остается эффективным средством распознавания визуальной информации. Полученные результаты могут использоваться при проектировании различных СЧМ, а также быть основанием для подбора операторов и оценки их профессиональной подготовленности и тренированности.

**Ключевые слова:** статистические, вычислительный эксперимент, человек-оператор, система «человек-машина», надежность, своевременность, вероятность.

## Введение

В современных радиолокационных комплексах различного назначения нашли широкое применение суперкомпьютеры, позволяющие решать самые сложные задачи цифровой обработки сигналов с высокой точностью в реальном масштабе времени. Однако в тех случаях, когда сигнал принимается на фоне достаточно сильных шумов или в приемном тракте радиолокационной станции одновременно присутствуют отклики от нескольких целей достоверность обнаружения, распознавания, сопровождения, разрешения и измерения параметров выбранной цели недопустимо снижается. Поэтому возникает возможность использовать человека — оператора распознающего цели по их радиолокационным изображениям.

За последние два десятилетия произошло существенное изменение взглядов на способы и приёмы ведения боевых действий во всех сферах в воздухе, на земле и в космосе, обусловленное принятием стратегии бесконтактных сетецентрических войн и появлением новых видов вооружений. В соответствии с этой стратегией, боевые действия ведутся не вблизи линии боевого соприкосновения, а на любом участке территории противника, путём нанесения ударов большими группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов (ЛА). При этом возможность нанесения ударов по любым участкам территории противника потребовало соответствующего информационного обеспечения в виде глобальной сетецентрической информационно-управляющей системы (ИУС) [1].

В такой автоматизированной системе управления потоками информации человек-оператор является основным звеном при взаимодействии со средствами отображения информации. Для исследования таких систем необходимо знать характеристики работы человека-оператора при обнаружении и распознавании радиолокационных объектов, предъявляемых на экране дисплея.

Известны работы, в которых рассматриваются различные характеристики.

В статье [2] рассматриваются психофизиологические характеристики работы человека-оператора в системе управления. В качестве оценки психофизиологического состояния человека-оператора используется  время запаздывания при принятии решения. Это время, которое называется длительностью латентного периода складывается из следующих составляющих. Временного интервала воспроизведения зрительным анализатором изменения визуальной информации, временного интервала формирования зрительного информационного образа и передачи этого образа в соответствующие отделы головного мозга. Эти характеристики не получены в экспериментах с человеком-оператором, поэтому не могут быть использованы для оценки надежности системы «человек-дисплей».

В [3] исследованы такие характеристики человека оператора как зрительное утомление, внимание, различные виды памяти.

Важной характеристикой системы «человек-дисплей» является надежность работы системы. Данная характеристика не была исследована, поэтому получение и исследование характеристики обнаружения радиолокационных объектов человеком-оператором является актуальной задачей.

Целью статьи является получение и исследование надежности работы человека-оператора задаче обнаружения радиолокационных объектов, предъявляемых на экране дисплея.

## 1. Показатели качества человеческого звена СЧМ

Существует множество показателей качества как СЧМ, так и отдельных ее звеньев. Одним из важнейших показателей качества работы звена СЧМ, а, в частности, человека-оператора является надежность. Надежность характеризует правильность решения задач, стоящих перед системой или человеком. Данный показатель оценивается вероятностью безошибочного решения задачи, исходя из статистических данных:

$$P_{пр} = 1 - \frac{n_{ош}}{N},$$

где $n_{ош}$ — число задач, решенных с ошибкой; $N$ — общее число решенных задач.

Также существует ряд показателей, которые рассчитываются при помощи надежности. Например, вероятность правильного своевременного решения.

Такой показатель, как своевременность решения задачи, поставленной перед оператором, оценивается вероятностью решения задачи за время, не превышающее допустимого:

$$P_{св} = P\{T \le T_{доп}\} = \int_0^{T_{доп}} \varphi(T)dT,$$

где $\varphi(x)$ — функция плотности распределения времени решения задачи человеком-оператором; $T_{доп}$ — допустимое время выполнения задачи. Если отталкиваться от статистических данных эта же вероятность оценивается следующим образом:

$$P_{св} = 1 - \frac{n_{нс}}{N},$$

где $n_{нс}$ — число несвоевременно решенных задач.

Для вычисления своевременности полученного решения экспериментальным путем или на основании статистических данных возникает необходимость фиксировать время прохождения информации через звено системы. В случае с оператором это время с момента отображения информации на экране дисплея и до считывания информации о принятом оператором решении органами управления. Назовем это временем задержки оператора, которое состоит из следующих этапов:

1. Восприятие изменения визуальной информации на экране;
2. Осознания и осмысления этой информации;
3. Принятие решения;
4. Поступление сигналов к органам опорно-двигательной системы человека для воздействия на органы управления;

5. Изменение состояния органов управления системы, достаточное для считывания его системой.

При этом время затрачиваемое на каждый из этапов индивидуально у каждого оператора и зависит от его психофизиологических показателей, натренированности, навыков, степени усталости и т. д. К тому же ошибка работы оператора хотя бы на одном из этапов приводит к неправильному выполнению задачи, а значит вероятность правильного ее выполнения можно представить следующим образом:

$$P_{пр} = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5,$$

где $P_i$ — вероятность корректной работы оператора на $i$-м этапе.

При нахождении вероятностей $P_{пр}$ и $P_{св}$, включая определение $n_{ош}$ и $n_{нс}$, не имеет значения, по какой причине (ошибке или задержке в работе человека-оператора) ошибочно или не во время решена задача. Так как многие операторы СЧМ заключены в строгие временные рамки выполнения задачи, имеет смысл введения такого показателя, как вероятность правильного своевременного решения:

$$P_{СЧМ} = P_{пр} P_{св}.$$

Данный показатель необходим при использовании обобщенного структурного метода оценки надежности системы «человек-машина».

## 2. Методика эксперимента

Всем участникам эксперимента на экране дисплея предоставлялось изображение объекта радиолокации, которое им было необходимо идентифицировать. Объекты могли принадлежать к двум классам: самолет или вертолет. Каждому оператору было необходимо произвести ряд выборов с постоянно изменяющимися изображениями. Для полноты выборки и лучшего приближения расчетных показателей к реальности каждый участник решал 100 подобных задач. Данный объем тестирования позволял опустить влияние фактора усталости оператора. В процессе тестирования фиксировалась правильность решений операторов и время задержки оператора. Выходными характеристиками являлись: вероятность принятия оператором верного решения и вероятность того, что оператор принял решение своевременно независимо от его правильности, а также вероятность одновременно верного и своевременного решения. Всего в эксперименте приняло участие 50 человек, каждый из которых прошел испытание из 100 заданий. Таким образом, была собрана статистика по прохождению 5000 заданий.

## 3. Описание программы для тестирования

Для исследования характеристик обнаружения объектов человеком-оператором на экране дисплея была создана программа **Tester.exe**, работающая в операционной системе Windows 10 и взаимодействующая с базой данных **ResearchDB**, разработанной с помощью SQL Server 2019 и Microsoft SQL Server Management Studio. Сама программа написана на языке C# в среде разработки Microsoft Visual Studio 2019, используя .NET Framework.

Вышеописанная программа имеет следующий ряд возможностей:

1. Возможность тестирования человека на предмет распознавания им определенного графического образа на экране дисплея.

2. Возможность хранить данные о прохождении тестов.

3. Возможность вычислять необходимые характеристики по результатам проведенных тестирований.

Во время тестирования испытуемый проходит все четыре этапа операторской деятельности:

1. Прием информации. Человеку предоставляется изображение, которое ему необходимо распознать.

2. Оценка и переработка информации. Этап, на котором человеку необходимо понять, что изображено на экране.

3. Принятие решения. Человек окончательно решает для себя, что он видит на экране.

4. Реализация принятого решения. Тестируемый реализует свое решение с помощью органов управления, то есть осуществляет выбор, по его мнению, правильного варианта ответа посредствам компьютерной мыши или сенсорной панели ноутбука.

Полученные в результате тестирования данные обрабатывались программой. Для этого они хранятся в специально разработанной базе данных, которая не только позволяет обратиться к результатам тестирования, спустя некоторое время, но и организует удобный доступ к данным. А также упрощает поиск и сортировку интересующей нас информации.

Другой задачей работы программы является анализ собранных данных. Если рассматривать тестирование, как отдельное звено некоторой системы «человек-машина», можно выделить несколько интересующих нас показателей:

1. Время обработки информации в звене.
2. Надежность звена.
3. Своевременность решения задачи, поставленной перед звеном.
4. Вероятность правильного и своевременного решения.

Таким образом, данная программа позволяет вычислить характеристики обнаружения объектов, наблюдаемых человеком-оператором на экране дисплея и сделать соответствующие выводы.

## 4. Результаты эксперимента

В результате тестирования операторов были программно рассчитаны описанные выше показатели качества работы человека-оператора.

Рассмотрим надежность человек-оператора, задачей которого является обнаружение объектов на экране дисплея, исходя из полученных в результате эксперимента данных:

$$P_{пр} = 1 - \frac{n_{ош}}{N};$$

$$N = 5000;$$

$$n_{ош} = 54;$$

$$P_{пр} = 0.9892.$$

Заметим, что с таким показателем надежности человек-оператор ошибается в среднем один раз за тестирование, то есть один раз в сто заданий.

Найдем вероятность ошибки оператора:

$$P_{ош} = 1 - P_{пр};$$

$$P_{ош} = 0.0108.$$

Шанс ошибки довольно высокий, однако существуют способы повышения надежности звена в системе «человек-машина». Так, рассмотрим двух операторов с приведенным выше показателем надежности. Пусть они работают параллельно независимо друг от друга. Тогда будем считать задание выполненным, когда решения обоих операторов совпадают, иначе предоставляем им это задание для повторного решения. Вероятность ошибки такого звена, состоящего из двух операторов, будет рассчитываться следующим образом:

$$P_{оз} = P_{ош1} P_{ош2},$$

где $P_{ош1}$ — вероятность ошибки первого оператора; $P_{ош2}$ — вероятность ошибки второго оператора; $P_{оз}$ — вероятность ошибки звена.

Таким образом, вероятность ошибки звена в моем случае будет равна:

$$P_{ош1} = 0.0108;$$

$$P_{ош2} = 0.0108;$$

$$P_{оз} = 0.00011664.$$

Таким методом можно объединить и большее количество операторов, повысив надежность еще больше. Однако не стоит забывать, что у этого метода есть и минусы. Например, с ростом количества операторов растет количество операций(заданий), выполнение которых повторяется несколько раз. А также следует отметить, что каждый дополнительный оператор в звене влечет за собой дополнительные экономические расходы. Стоит заметить, что это далеко не единственный способ повысить эффективность работы человеческого звена и СЧМ в целом.

Другим важным показателем эффективности является время задержки оператора. В нашем случае это время представляет собой случайную величину. Рассмотрим ее характеристики в табл. 1.

Таблица 1

*Значения характеристик времени выполнения задания*

| **Характеристика** | **Значение (мс)** |
|---|---|
| Минимум | 131 |
| Максимум | 7764 |
| Выборочное среднее | 966 |
| Выборочная дисперсия | 237 |
| Среднеквадратическое отклонение | 486 |
| Нижний квантиль | 720 |
| Медиана | 829 |
| Верхний квантиль | 1016 |

Временные характеристики работы оператора очень важны для проектирования системы «человек-машина». Как правило, система состоит из большого количества звеньев соединенных последовательно и параллельно, а также включает в себя циклы. Значит, чтобы добиться оптимального времени прохождения всего цикла регулирования, необходимо учитывать время прохождения информации через отдельные звенья. Без этого оптимальной работы системы не добиться.

Следующим показателем эффективности звена, рассмотренной в данной статье, является своевременность выполнения задания оператором. Своевременность определяется вероятностью того, что задание будет выполнено за допустимое время. Значения своевременности выполнения задач в зависимости от допустимого времени приведены в табл. 2.

Таблица 2

*Своевременность выполнения задания в зависимости от допустимого времени*

| $T_{доп}$ (мс) | <131 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 | 1200 | 1400 | 1600 | 1800 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_{св}$ | 0 | 0.009 | 0.06 | 0.209 | 0.43 | 0.62 | 0.738 | 0.84 | 0.896 | 0.926 | 0.946 |

| $T_{доп}$ (мс) | 2000 | 2500 | 3000 | 3500 | 4000 | 5000 | 7764 | >7764 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_{св}$ | 0.961 | 0.981 | 0.988 | 0.993 | 0.996 | 0.999 | 1 | 1 |

Своевременность позволяет нам рассчитать следующий показатель качества — вероятность правильного и своевременного решения. Этот показатель необходим для обобщенной структурной оценки звена и системы в целом. Значения данного показателя можно увидеть в табл. 3.

Таблица 3

*Вероятность правильного и своевременного решения*

| $T_{доп}$ (мс) | <131 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 | 1200 | 1400 | 1600 | 1800 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_з$ | 0 | 0.0089 | 0.059 | 0.207 | 0.425 | 0.622 | 0.73 | 0.83 | 0.887 | 0.916 | 0.95 |

| $T_{доп}$ (мс) | 2000 | 2500 | 3000 | 3500 | 4000 | 5000 | 7764 | >7764 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_з$ | 0.935 | 0.9708 | 0.9781 | 0.9822 | 0.986 | 0.988 | 0.9892 | 0.9892 |

Исходя из этих данных мы видим, как результаты работы оператора зависят от временных рамок, в которые этот оператор поставлен. К тому же легко заметить, что при достаточно больших значениях ограничения, оно перестает влиять на вероятность корректного выполнения работы оператором. Таким образом, данную таблицу можно использовать для нахождения оптимального времени для выполнения задания оператором, при котором он будет успешно выполнять максимальное количество задач за определенное время.

## Заключение

Из полученных данных можно сделать вывод, что человек обладает внушительными возможностями в обнаружении объектов на экране дисплея, однако далеко не идеальными. К тому же, если поставить оператора в рамки временных ограничений, то его эффективность будет тем ниже, чем строже эти рамки. Также ограничение по времени на выполнение того или иного задания оказывает дополнительное психологическое воздействие на оператора, негативно влияющее на результат его работы. Приведенные выше результаты эксперимента не только помогают лучше понять специфику операторской деятельности, но и могут использоваться при проектировании различных СЧМ, а также быть основанием для подбора операторов и оценки их профессиональной подготовленности и тренированности.

## Литература

1. *Верба Н. С.* Анализ состояния и тенденция развития бортовых РЛС авиационных комплексов радиолокационных станций дозора и наведения / Н. С. Верба // Журнал радиоэлектроники – 2012. – № 12. – С. 1–15.

2. *Пупков К. А.* Экспериментальное оценивание интегральных показателей психофизиологического состояния операторов человеко-машинных систем управления // Вестник РУДН серия Инженерные исследования. – 2015. – № 4. – С. 7–16.

3. *Novikova N. M.* Characteristics of the psychophysiological state of a human operator in the information system «human–display» // J. Phys.: Conf. Ser.1203. 012047. – 2019. – URL: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1201/1/012047

УДК 004.89

# МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЧЕРКОВЫХ ПРИЗНАКОВ

**М. А. Дрюченко, А. А. Сирота**

*С. В. Зиновьев, И. Е. Воронина*

**Аннотация.** Актуальность исследований обусловлена отсутствием вспомогательных инструментов для экспертов в области криминалистики и почерковедения, позволяющих объективизировать результаты экспертизы и анализа. Задача разработки такого инструментария является достаточно нетривиальной.

Целью работы является формализация процесса выделения почерковых признаков для определения авторства рукописного русскоязычного текста. Представлен анализ существующих подходов и математическая модель выделения почерковых признаков из рукописных документов, а также выбор подхода к ее реализации. Разработан программный инструментарий, позволяющий применять модель на практике.
**Ключевые слова:** выделение признаков, почерковый анализ, генеративно-состязательные сети, двунаправленные GAN.

## 1. Введение

Задача компьютерного анализа почерка продолжает оставаться актуальной, вызывая интерес у психологов, криминалистов, медиков, судебных экспертов.

В психологии анализ почерка используется в персональных и профессиональных консультациях, при приёме на работу и при аттестации кадров. Полученные таким образом результаты позволяют оценить личностные характеристики человека, его пригодность к определённым видам работ, сильные и слабые стороны.

В криминалистике анализ почерковых объектов широко используется для борьбы с правонарушениями. В связи с развитием технических средств, позволяющих изменять или подделывать рукописные документы, криминалистическая экспертиза весьма востребована.

Кроме того, анализ почерка позволяет проводить исследования характеристик конкретных людей, живших в прошлом.

При всём этом существует проблема отсутствия вспомогательных инструментов для экспертов в области криминалистики и почерковедения, позволяющих объективизировать результаты их экспертизы и анализа, а, значит, существует и проблема субъективизации полученных результатов.

В судебной практике нередко встречаются случаи, когда на различных стадиях судопроизводства и этапах расследования возникает потребность в привлечении стороннего независимого эксперта, в частности, в криминалистической почерковедческой экспертизе. Эксперт, имеющий богатый опыт и соответствующую квалификацию, опирается на существующие нормативные акты и другие юридически значимые инструменты, позволяющие ему принять какое-либо решение и ответить на поставленные перед ним вопросы. Однако часто одна из сторон сомневается в объективности и качестве результатов экспертизы, и тогда назначается дополнительная экспертиза у другого эксперта. Учитывая тот факт, что, как показало исследование, почерковеды опираются на субъективные признаки, которые они самостоятельно выявляют и оценивают, возникают сложности в объективной оценке качества экспертизы, а, главное, выбора наиболее доверяемого результата экспертизы. Перед судьёй ставится задача выбрать из нескольких проведённых независимых экспертиз ту, которая ляжет в основу его дальнейшего постановления и даже, возможно, приговора. При всём этом судья не обязан иметь квалификацию в области, назначенной на экспертизу, поэтому назначает независимого эксперта, отвечающего перед законом за объективность проведённой экспертизы в рамках Уголовного Кодекса Российской Федерации. Дальнейшего трудного выбора можно было бы избежать при наличии максимально объективных данных, оценить которые могла бы любая заинтересованная сторона.

Криминалистическая экспертиза документов, как один из видов судебной экспертизы, является эффективным средством борьбы с преступностью [2], и является наиболее распространенным видом экспертизы в практике криминалистических учреждений, на долю которого приходится примерно половина всех проводимых криминалистических исследований. Большое значение она имеет при расследовании особо опасных преступлений, дел о хищении государственного и общественного имущества, по делам, связанным с подделкой документов, и т. д. В сферу экспертного исследования попадают самые разнообразные документы.

Под документом в широком смысле слова в криминалистике понимается письменный акт, служащий доказательством или свидетельством чего-либо. В связи с этим криминалистическая экспертиза документов как неотъемлемая составная часть одного из разделов науки криминалистики — криминалистической техники — также имеет дело с документами-доказательствами.

Компьютеры и компьютерная периферия широко применяются для подделки традиционных, бумажных документов наряду с более традиционными способами подделки. При раскрытии и расследовании преступлений роль специалистов и экспертов является ключевой, однако экспертно-криминалистические подразделения правоохранительных органов нечасто имеет специалистов в области форензики в своём штате.

Ещё в 2007 году Н. Федотов обратил внимание на тот факт, что значимые источники по компьютерной криминалистике издавались в основном в США, в то время как на русском языке к тому моменту вышло малое количество мелких работ, не обладающих должным уровнем юридической или технической части. Также он отмечает серийный выпуск программного обеспечения, специально предназначенного для сбора доказательств и других криминалистических задач, как один из показателей развития форензики, наряду с наличием общественных или межведомственных объединений компьютерных криминалистов или судебных экспертов. К сожалению, исходя из его исследований, на тот момент в Российской Федерации подобное программное обеспечение или техника не закупались и не производились, а общественные организации не существовали даже в режиме филиалов зарубежных, что свидетельствовало о малом количестве соответствующих специалистов [5].

Таким образом, криминалистическая экспертиза документов сводится к ручным методам. До сих пор письмо является одним из главных средств общения, и немалое количество письменных документов содержат в себе рукописные знаки, будь это рукописный текст или же подпись, подтверждающая аутентичность документа. В результате криминалистам в процессе экспертизы бывает важно установить, настоящим ли является документ и не был ли он каким-либо образом подделан. Одним из критериев оценки аутентичности является соответствие почерка его автору.

Научным сообществом проведено достаточно много исследований, связанных с изучением почерка [3]. Например, в [6] проводится анализ почерка с точки зрения движения руки, а не движения пишущего предмета. Это позволяет различать написанный левой рукой текст от написанного правой с помощью направленности горизонтальных штрихов и наклонов. Ю. Г. Чернов [5, 6] рассматривает проблемы психологического анализа почерка с акцентом на область управления кадрами. При этом он также обращает внимание на возможность применения подобного анализа в других областях: в медицине для выявления болезней или изменений физического состояния, влияющих на почерк; в криминалистике с целью предотвращения и борьбы с противоправными действиями. В [4] приводятся результаты исследований в области имитации рукописных реквизитов, построенных с помощью компьютера и графопострoителя, в который была вмонтирована шариковая ручка. В [15] рассматриваются компьютерные средства, помогающие графологам проводить анализ почерка. Эти средства включают в себя сканирование рукописного образца, предобработку полученного изображения, выделение признаков почерка и их дальнейший анализ. Работы [7, 14] посвящены тому, как отличить оригинал почерка и подписи от их имитации.

Предлагаемая работа представляет собой часть исследований, проводимых в области почерковедческой экспертизы, направленных на разработку математической модели извлечения почерковых признаков из рукописных русскоязычных источников.

## 2. Материалы и методы

### *2.1. Цель исследования*

Целью исследования является формализация процесса выделения почерковых признаков для определения авторства рукописного русскоязычного текста.

Для достижения указанной цели в исследовании решались следующие основные задачи:

– проведение всестороннего исследования существующих подходов и их всесторонний анализ;

– разработка математической модели процесса выделения почерковых признаков из рукописных документов;

– выбор подхода к реализации разработанной математической модели;

– разработка программного инструментария, позволяющего применять разработанную математическую модель на практике и выделять почерковые признаки из рукописных текстовых образцов;

– исследование области практического применения разработанного программного решения в сфере криминалистики и почерковедения.

Так как на данный момент отсутствуют какие-либо средства автоматизации, математические модели, то целью исследования является разработка подобного автоматизированного инструментария. В рамках поставленной задачи возникает сразу несколько подзадач:

1. Преобразовать рукописный текст в компьютерное представление, математическую модель или цифровой объект.

2. Выделить признаки, позволяющие классифицировать и дифференцировать преобразованные объекты.

3. Провести серию экспериментов, направленных на уточнение разработанной модели.

Для решения первой поставленной задачи стоит учитывать такие важные для криминалистики признаки, как характер нарисованных линий, степень нажатия на пишущую поверхность, угол наклона линий. При этом сами эти признаки могут варьировать степень выраженности даже для одного человека в зависимости от условий, в которых был получен рукописный образец, морального и физического состояния человека.

При практическом применении эти признаки выделяются субъективно и не выражены алгоритмически или математически.

### *2.2. Математические методы и алгоритмы*

В результате обзора и анализа существующих исследований была выдвинута идея компьютерного анализа, которая заключается в поиске метрик, позволяющих автоматизировать методы идентификационных, классификационных задач, а также задач диагностического характера, применяемых к рукописному русскоязычному тексту. Для этого необходимо выделить наиболее важные общие и частные почерковедческие признаки и построить статистическую модель, основывающуюся на этих признаках.

Прежде чем предпринимать попытку создания формальной модели русскоязычного почерка, нужно провести серию экспериментов. В случае получения положительных результатов исследования можно попытаться провести анализ почерка автоматизированным способом, а полученные метрики можно будет использовать для более сложных задач, таких как выделение личностных характеристик на основе рукописного русскоязычного текста, идентификация исполнителя подписи или её воспроизведения и множества других.

На первых порах было принято решение использовать двухмерное представление рукописного источника ввиду следующих аспектов:

– двухмерное отображение позволяет использовать источники уже после того, как они были созданы, и не накладывает дополнительных ограничений на устройство ввода;

– в случае необходимости и недостаточности данных, предоставленных двухмерной моделью, она может быть расширена до третьего измерения, позволяя добавить анализ источника на такие признаки, как степень и характер нажатия пишущим инструментом.

Проблема выделения почерковых признаков осложняется тем, что признаки, присущие одному почерку и важные для идентификации его автора, могут быть совершенно несущественными для другого почерка. При этом чётко выделенного набора признаков нет, они могут перетекать друг в друга или вовсе быть неидентифицируемыми в зависимости от психофизиологического состояния одного человека, не говоря уже о рассмотрении подмножества доступных для идентификации личностей и образцов рукописных документов.

Исходя из вышеизложенных соображений для решения задачи выделения признаков и классификации было решено обратиться к генеративно-состязательным сетям (GAN).

Генеративно-состязательные сети, также именуемые порождающими состязательными сетями, — это нейронные сети, в базовом варианте состоящие из двух искусственных нейронных сетей, соперничающих друг с другом. Одна из этих сетей именуется генератором, порождающим объекты в пространстве данных, в то время как другая называется дискриминатором, обучающимся отличать порождённые генератором объекты от реальных примеров из обучающей выборки. Генератор и дискриминатор имеют строго противоположные цели и тем самым по мере обучения повышают качество генерируемых объектов.

Общая схема работы таких сетей в области создания изображений представлена на рис. 1.

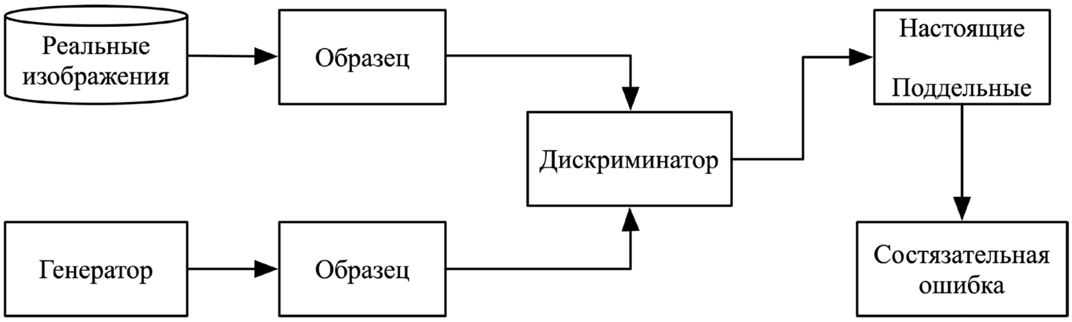



*Рис. 1. Общая схема работы GAN*

Дискриминатор представляет бинарный классификатор, выдающий одно из двух значений (1 для настоящих изображений, 0 для поддельных). Модель обучается сквозным (end-to-end) методом обратного распространения ошибки (backpropagation).

Архитектуру состязательного моделирования проще всего применять в случае, когда обе модели представляют собой многослойные перцептроны. Для получения распределения генератора $p_g$ по данным изображения $x$ вводится априорное распределение входного шума $p_z(z)$, который отображается в пространство данных изображений $G(z;\theta_g)$, где $G$ — дифференцируемая функция, представленная многослойным перцептроном с параметрами $\theta_g$. Таким образом изображения генерируются из шума, форму которого можно настраивать. В результате генератор стремится к максимизации величины, представленной в формуле (1).

$$\mathbb{E}_{x\sim p_{data}(x)}\left[\log D(x)\right]+\mathbb{E}_{x\sim p_g(x)}\left[\log\left(1-D(x)\right)\right]. \tag{1}$$

Также вводится второй многослойный перцептрон $D(x;\theta_d)$, подающий на выход единый скаляр. $D(x)$ обозначает вероятность того, что $x$ был получен из входных данных, а не из $p_g$. В результате происходит обучение дискриминатора для максимизации вероятности назначения правильной метки как экземплярам образцов, так и генерируемым генератором экземплярам. При этом в тоже время происходит обучение генератора для минимизации величины $\log(1-D(G(z)))$.

В основе работы генеративно-состязательных сетей лежит принцип максимума правдоподобия, заключающийся в поиске таких параметров модели, которые максимизируют правдоподобие набора данных, состоящего из $m$ образцов, отобранных независимо и равномерно распределённо из общей популяции. В общем виде правдоподобие можно записать в виде формулы (2).

$$\prod\nolimits_{i=1}^{m} p_{model}(x_i,\theta). \tag{2}$$

Изображения из базы данных реальных изображений $p_{data}$ семплируются, то есть к $p_{data}$ применяются методы управления начальной выборкой при известной цели моделирования, позволяющие независимо отобрать такие данные, которые позволяют выполнить структурно-параметрическую идентификацию наилучшей статистической модели случайного процесса. При этом в случае генеративно-состязательных сетей семплирование производится в один шаг, а не цепью, как при использовании альтернативных подходов, позволяя не прибегать к помощи марковских цепей. Изображениям из базы данных реальных изображений $p_{data}$ приписывается метка 1 как истинным, после чего они прогоняются через дискриминатор. В результате получается вероятность принадлежности к классу реальных изображений.

Обычно для простоты вычислений максимизируется логарифм правдоподобия, что представлено в формуле (3).

$$\theta^* = \arg\max_\theta \log\prod\nolimits_{i=1}^{m} p_{model}(x_i,\theta) = \arg\max_\theta \sum\nolimits_{i=1}^{m}\log p_{model}(x_i,\theta). \tag{3}$$

Отдельно стоит отметить, что максимизация правдоподобия эквивалентна минимизации расхождения Кульбака — Лейблера [1] между настоящим распределением данных и модельным, что проиллюстрировано в формуле (4).

$$\theta^* = \arg\min_\theta D_{KL}(p_{data}(x)p_{model}(x,\theta)). \tag{4}$$

Максимизация логарифма правдоподобия дискриминатора производится на выборке из реальных и сгенерированных изображений, в результате чего происходит сдвиг плотности в сторону реальных изображений, представленное в выражении формулы (5).

$$\max\nolimits_D \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log D(x)\right]+\mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\left(1-D(x)\right)\right], \tag{5}$$

где $D(x,\theta_d)\in\left[0,1\right]$ — нейросеть-дискриминатор, а $\theta_d$ — её параметры.

Далее минимизируется функционал $\min\limits_G \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}\left[1-D\left(G(z)\right)\right]$, чтобы дискриминатор как можно хуже отличал поддельные изображения от реальных. Можно обновить веса генератора градиентным спуском, т. к. $D\circ G$ является дифференцируемой функцией. При объединении всего вышесказанного в одну оптимизационную задачу получается минимаксная игра для двух игроков, представленная в равенстве формулы (6).

$$\min_G\max_D V(D,G) = \mathbb{E}_{x\sim p_{data}(x)}\left[\log D(x)\right]+\mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}\left[\log\left(1-D\left(G(z)\right)\right)\right]. \tag{6}$$

Каналом передачи информации от генератора дискриминатору является прямой проход по сети, а обратный проход представляет собой способ передачи информации от дискриминатора к генератору. Однако, несмотря на схожесть с начальными условиями обучения с подкреплением, обучение всей модели посредством инвертирования градиентов, идущих от дискриминатора, не подходит для генеративно-состязательных сетей. На первых итерациях обучения дискриминатору будет очень легко отличить поддельные данные от аутентичных, что приводит к тому, что $D(G(z)) \approx 0$, а, в свою очередь, это будет означать, что и $\log\left(1-D(G(z))\right) \approx 0$. В результате произойдёт затухание градиентов, что означает, что до генератора не будет доходить никакой новой информации от дискриминатора, и генератор проиграет. В случае предположения, что дискриминатор будет всегда оперировать около оптимума, замена $\min\limits_G \log\left(1-D(G(z))\right)$ на $\max\limits_G \log D(G(z))$ позволит решить проблему затухания, но одновременно с этим приведёт к тому, что решение минимаксной игры и новой максмаксной будет одним и тем же.

Чтобы гарантировать, что дискриминатор всегда будет около оптимума, авторы статьи [10] предлагают следующий подход. На каждой итерации обучения сначала несколько шагов обучается дискриминатор на порциях образцов из реальных и поддельных изображений при фиксированном генераторе; затем делается один шаг обучения генератора на батче из поддельных изображений при фиксированном дискриминаторе. Это позволит держать дискриминатор всегда около оптимума и медленно менять генератор. В итоге получается игра в перетягивание каната, что выливается в нестабильное обучение.

При этом отмечается, что уравнение минимаксной игры из формулы (6) может не предоставить подходящий градиент для генератора, обучающий на достаточном уровне. На ранних стадиях обучения, когда генератор ещё недостаточно натренирован, дискриминатор может отбраковывать образцы с высокой уверенностью в силу того, что они явно отличаются от тренировочных данных. В таком случае насыщается $\log\left(1-D(G(x))\right)$. Вместо того, чтобы обучать генератор на минимизацию показателя $\log\left(1-D(G(x))\right)$, можно поставить генератору цель максимизировать $\log D(G(z))$. Подобная целевая функция возвращает ту же фиксированную точку динамики генератора и дискриминатора, однако при этом предоставляет гораздо более сильный градиент на ранних этапах обучения.

В той же статье приводится доказательство, что для любого фиксированного генератора оптимальный дискриминатор имеет вид уравнения, представленного формулой (7).

$$D_G^*(x) = \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_g(x)}. \tag{7}$$

Это уравнение позволяет переформулировать уравнение минимаксной игры в виде выражения, представленного в формуле (8).

$$\begin{aligned} C(G) &= \max_D V(G,D) = \min_G \max_D V(D,G) = \\ &= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log D_G^*(x)\right] + \mathbb{E}_{z\sim p_z}\left[\log\left(1-D_G^*(G(z))\right)\right] = \\ &= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log D_G^*(x)\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\left(1-D_G^*(x)\right)\right] = \\ &= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log\frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\frac{p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Также уравнение из формулы (7) позволяет выявить существование глобального минимума функционала $C(G)$ исключительно в точке $p_g = p_{data}$, причём его значение будет равно $-\log 4$. Действительно, при $p_g = p_{data}$ $D_G^*(x) = 1/2$, поэтому $C(G) = \log 1/2 + \log 1/2 = -\log 4$. Чтобы убедиться, что это наилучшее возможное значение $C(G)$, достигаемое только при $p_g = p_{data}$, можно пронаблюдать равенство, отображённое в формуле (9).

$$\mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[-\log 2\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[-\log 2\right] = -\log 4. \tag{9}$$

При вычитании выражения 9 из $C(G) = V\left(D_G^*, G\right)$ получается уравнение, указанное в формуле (10).

$$C(G) = -\log 4 + KL\left(p_{data} \frac{p_{data}+p_g}{2}\right) + KL\left(p_g \frac{p_{data}+p_g}{2}\right), \quad (10)$$

где $KL$ — дивергенция Кульбака — Лейблера.

Топология общего вида генеративно-состязательных сетей представлена на рис. 2.

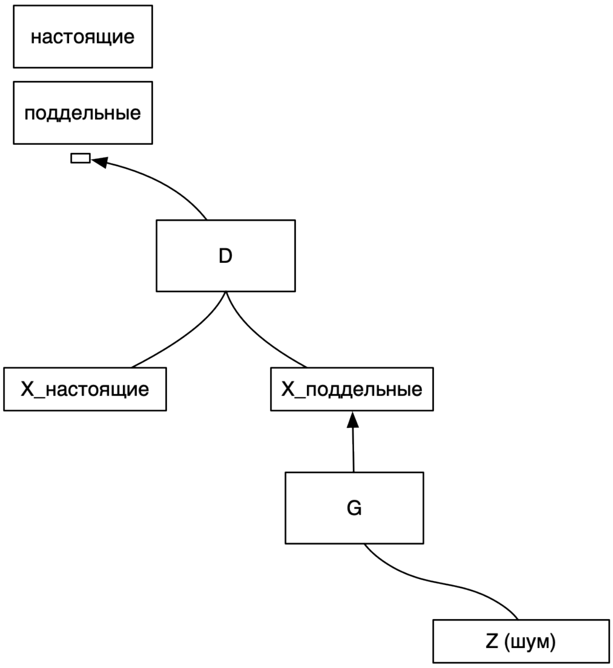



*Рис 2. Графическое представление топологии GAN*

Также авторы статьи доказывают, что процесс последовательного обучения генератора и дискриминатора сходится, однако это верно только в том случае, когда в качестве кандидатов для генератора и дискриминатора рассматриваются все возможные функции, в то время как в реальной жизни задача оптимизации не может быть решена в пространстве всех возможных функций, а приходится ставить её в рамках семейства нейронных сетей, то есть параметрически заданных функций. Поэтому при оптимизации функционала $C(G)$ в пространстве нейронных сетей (то есть в пространстве действительных чисел высокой размерности) не удаётся найти тот самый глобальный оптимум.

На рис. 3 представлена идеализированная визуализация процесса сходимости и его результата.

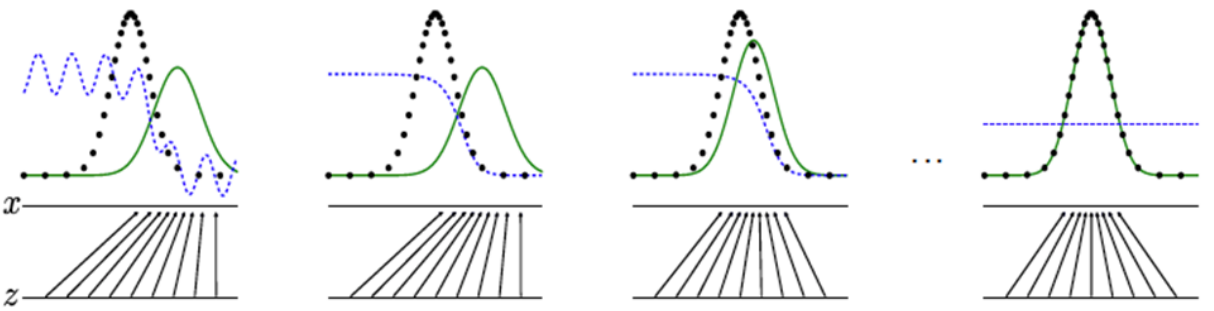



*Рис 3. Идеализированная виртуализация процесса сходимости и его результата в классических GAN*

Линия из чёрных точек представляет распределение данных $p_{data}$; зелёная линия показывает распределение генератора $p_g$, которое в процессе обучения приближается к распределению данных при последовательном обучении; синяя линия — разделяющая поверхность дискриминатора, который в конце обучения не может отличить подделки, созданные генератором, от реальных данных. Стрелками на иллюстрации показано отображение $x = G(z)$, которое ставит в соответствие каждому значению из распределения данных точку из априорного распределения.

В результате, из отличительных особенностей генеративно-состязательных сетей в общем виде можно выделить следующие:

– генеративно-состязательные сети не требуют явно выраженной плотности; тем не менее, есть возможность организовать обучение, целью которого будет являться определённая форма распределения, что в свою очередь в каком-то роде связывает генеративно-состязательные сети и вариационные методы;

– генеративно-состязательные сети не требуют вывода нижней оценки логарифма правдоподобия;

– семплирование в генеративно-состязательных сетях осуществляется в один шаг, а не последовательной цепочкой применения методов и преобразований, как, например, в марковских цепях Монте-Карло (MCMC), занимающих много времени; при этом обучение всё равно происходит на протяжении длительного времени с нестабильным характером при отсутствии каких-либо гарантий в пространстве параметрических функций, в отличие от тех же асимптотически сходящихся марковских цепей Монте-Карло;

– генератор учится создавать близкие к настоящим изображения, ни разу не увидев ни одного реального изображения, а только получая от дискриминатора закодированный в градиентах сигнал о том, почему был обнаружен поддельный элемент;

– модель совсем не применима для извлечения признаков из изображения, что является конечной целью исследования.

В силу последнего пункта было решено обратиться к модифицированному варианту GAN, который позволил бы решить исходную задачу. За основу была выбрана разновидность двунаправленных GAN. Главное отличие обычных генеративно-состязательных сетей от двунаправленных (Bidirectional GAN, или BiGAN) состоит в том, что в BiGAN модель дискриминатора обучается распознавать смежную вероятность $P(x,z) = real$, где $x$ — образец, а $z$ — генерируемое распределение. В свою очередь это означает, что модель генератора обучается кодированию настоящего образца в его генерирующее распределение. Когда двунаправленные генеративно-состязательные сети заканчивают цикл обучения, для представления данных могут использоваться и кодировщик настоящего изображения в генерирующее распределение, и активации первого слоя свёртки [9].

Общая схема BiGAN представлена на рис. 4.

В дополнение к генератору $G$ из стандартных генеративно-состязательных сетей BiGAN

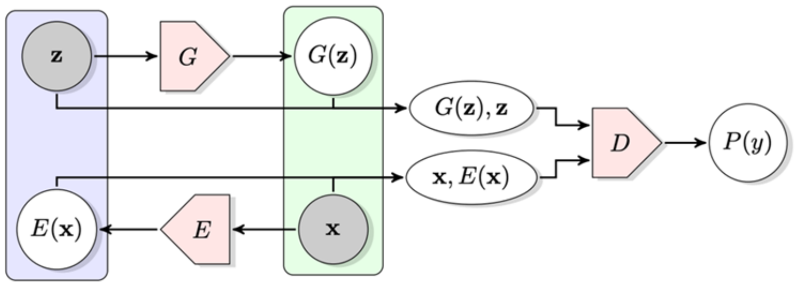



*Рис 4. Общая схема топологии BiGAN*

включает в свою структуру кодировщик $E$, который размечает данные $\mathbf{x}$ на скрытые представления $\mathbf{z}$. Дискриминатор $D$, в свою очередь, отбрасывает не только данные из пространства данных ( $\mathbf{x}$ против $G(\mathbf{z})$), но и смежные данные в пространстве данных и скрытых параметров (наборы $(\mathbf{x}, E(\mathbf{x}))$ против $(G(\mathbf{z}), \mathbf{z})$), где скрытый компонент является либо выходом из кодировщика $E(\mathbf{x})$, либо входом генератора $\mathbf{z}$.

Из описания может быть неочевидно, что кодировщик $E$ BiGAN должен научиться инвертировать генератор $G$. Два модуля не могут напрямую взаимодействовать друг с другом, так как кодировщик никогда не получает вывод генератора ($E(G(\mathbf{z}))$ не высчитывается), и наоборот. При этом в дальнейшем авторы подхода указывают, что кодировщик и генератор должны обучаться инвертировать друг друга с целью обмануть дискриминатор BiGAN.

В силу того, что кодировщик BiGAN учится предсказывать признаки $\mathbf{z}$ полученных данных $\mathbf{x}$, а прочие работы по генеративно-состязательным сетям показали, что эти признаки захватывают семантические атрибуты данных, было высказано предположение, что обученный кодировщик BiGAN может служить полезным отображением соответствующих семантических задач в той же мере, как и визуальные модели, полностью обученные с учителем для предсказывания семантики, помечающие (навешивающие метки) на предоставленные изображения. Такой подход может быть использован для других схожих визуальных задач. В данном контексте скрытое представление $\mathbf{z}$ можно представить в виде метки для данных $\mathbf{x}$, но полученное без необходимости обучения с учителем.

Альтернативным подходом к обучению инвертированному соответствию от данных к скрытому представлению будет прямое моделирование $p(\mathbf{z}|G(\mathbf{z}))$, предсказывающий вход генератора $\mathbf{z}$ при указанных данных генератора $G(\mathbf{z})$. Данную альтернативу назвали скрытым регрессором (latent regressor), впоследствии утверждая, что кодировщик BiGAN может быть предпочтителен в контексте обучения признакам.

При всём этом BiGAN является очень обобщённым и солидным подходом для обучения без учителя, теоретически не высказывая предположения о структуре или типе данных, к которому он будет применяться.

С математической точки зрения двунаправленные генеративно-состязательные сети обучают не только генератор, но и кодировщик $E\colon \Omega_{\mathbf{X}} \to \Omega_{\mathbf{Z}}$. Кодировщик порождает распределение $p_E(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{z} - E(\mathbf{x}))$, выставляющее в соответствие точек данных $\mathbf{x}$ в скрытом пространстве признаков генерирующей модели. Дискриминатор также модифицируется для того, чтобы принимать на вход данные из скрытого пространства, прогнозируя $p_D(Y|\mathbf{x},\mathbf{z})$, где $Y=1$, если $\mathbf{x}$ является настоящим (то есть взят из реального распределения данных $p_{\mathbf{x}}$), и $Y=0$ в случае, если $\mathbf{x}$ был сгенерирован (получен из генератора $G(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \sim p_{\mathbf{z}}$).

Целевая функция BiGAN определяется как минимаксная цель, представленная в формуле (11).

$$\min_{G,E}\max_{D} V\left(D,E,G\right), \tag{11}$$

где

$$V\left(D,E,G\right) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim p_{\mathbf{x}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim p_{\mathbb{E}}(\cdot|\mathbf{x})}\left[\log D(\mathbf{x},\mathbf{z})\right]\right] + \mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim p_{\mathbf{z}}}\left[\mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim p_G(\cdot|\mathbf{z})}\left[\log\left(1-D(\mathbf{x},\mathbf{z})\right)\right]\right] =$$
$$= \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim p_{\mathbf{x}}}\left[\log D\left(\mathbf{x},E(\mathbf{x})\right)\right] + \mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim p_{\mathbf{z}}}\left[\log\left(1-D\left(G(\mathbf{z}),\mathbf{z}\right)\right)\right].$$

Данная функция оптимизируется с использованием таких же оптимизаций, основанных на переменном градиенте, как и в обычных GAN.

BiGAN имеют многие теоретические свойства, присущие обычным генеративно-состязательным сетям, в то время как дополнительно гарантируют, что в точке глобального оптимума, генератор $G$ и кодировщик $E$ являются взаимно обратными. BiGAN также имеют близкое родство с автокодировщиками с функцией потери $\ell_0$.

### *2.3. Практическая реализация подхода к алгоритмизации выделения почерковых признаков*

В результате анализа возможных способов реализации подхода к алгоритмической выработке почерковых признаков было принято решение обратиться к одной из разновидностей генеративно-состязательных сетей. В силу поставленной задачи наиболее подходящей для исследований архитектурой были выбраны модифицированные BiGAN как позволяющие наблюдать не только результат соревновательной работы генератора и дискриминатора, но и вычленять признаки данных. Суть их работы заключаюается в том, что вместо обучения кодировке настоящего образца в его генерирующее распределение модель обучается кодировке признаков, полученных в результате обучения дискриминативной модели (активации из последнего слоя свёртки) в генерирующее распределение [13]. Конкатенация активации из последнего слоя свёртки и его кодирования в генерирующее распределение может быть использована в качестве нового представления данных. При добавлении L2 регуляризации к потерям модели и использовании ADAM оптимизатора (метода адаптивной оценки моментов) [12] подобная архитектура показала лучшие результаты на тренировочном датасете по сравнению с обычными BiGAN. Пересчёт параметра алгоритмом ADAM задаётся формулами (12)–(15) и (16).

$$m_w^{(t+1)} \leftarrow \beta_1 m_w^{(t)} + (1-\beta_1)\nabla_w L^{(t)} \tag{12}$$

$$v_w^{(t+1)} \leftarrow \beta_2 v_w^{(t)} + (1-\beta_2)\left(\nabla_w L^{(t)}\right)^2 \tag{13}$$

$$\hat{m}_w = \frac{m_w^{(t+1)}}{1-\beta_1^{t+1}} \tag{14}$$

$$\hat{v}_w = \frac{v_w^{(t+1)}}{1-\beta_2^{t+1}} \tag{15}$$

$$w^{(t+1)} \leftarrow w^{(t)} - \eta \frac{\hat{m}_w}{\left(\hat{v}_w\right)^{1/2} + \varepsilon}, \tag{16}$$

где $w^{(t)}$ — данный параметр, $L^{(t)}$ — функция потерь, $t$ — индекс текущей итерации, $\varepsilon$ — малая добавка, используемая для предотвращения деления на 0, а $\beta_1$ и $\beta_2$ — коэффициенты забывания для градиентов и вторых моментов градиентов соответственно.

## 3. Результаты и их обсуждение

Для построения модели модифицированных BiGAN был выбран язык программирования Python 2.7. В качестве библиотеки инструментов машинного обучения был выбран TensorFlow.

В первую очередь был задан класс, реализующий поддержку архитектуры BiGAN; его структура приведена в табл. 1.

Таблица 1

*Класс BiGAN*

| Имя метода | Передаваемые параметры | Описание |
|---|---|---|
| __init__ | Количество признаков<br>Количество исторических дней<br>Размер входных данных генератора | Метод, инициализирующий экземпляр класса BiGAN на основе входных данных и поднимающий необходимую топологию |
| discriminator_conv | Полученные данные $\mathbf{x}$ | Метод, реализующий свёртку дискриминатора |
| discriminator | Полученные данные $\mathbf{x}$<br>Сгенерированные признаки $\mathbf{z}$ | Метод, реализующий структуру дискриминатора на основе свёртки дискриминатора |

Для метода тренировки модели с использованием Tensorflow был реализован отдельный класс. В качестве начальной выборки был выбран упомянутый в предыдущих исследованиях датасет MNIST, состоящий из рукописных цифр.

Входные данные были представлены изображениями цифр размером $28 \times 28$ пикселей, которые должны использоваться в виде 784-D вектора (то есть неструктурированного вектора, признаки которого оцениваются интенсивностью оттенков градации серого цвета). В данном случае это условие было выполнено тем, что каждый модуль был построен в виде многоуровневого перцептрона, который не имеет информации о структуре нижележащего пространства (например, в отличие от convnet [14]). Скрытое распределение было выбрано как $p_z = \left[\mathrm{U}(-1,1)\right]^{50}$ — непрерывное равномерное распределение. Количество эпох было выставлено в 200, количество итераций для выполнения шагов деплоя было выставлено в 1000, максимальное количество образцов для отображения равнялось 400, а подсчёт и отображение результатов теста производились каждые 25 эпох. В качестве оптимизатора был выбран метод адаптивной оценки моментов, реализованный встроеннными средствами выбранного программного обеспечения.

Целевая функция BiGAN была задана следующей строкой параметров:

```
OBJECTIVE=»--encode_gen_weight 1 --encode_weight 0 --discrim_weight 0
--joint_discrim_weight 1»
```

В результате запущенных тестов на классификацию ближайшего соседа для не зависящего от перестановок датасета MNIST точность составила 97.39 %, что сопоставимо с другими архитектурами на генеративно-состязательных сетях. В целом это ожидаемый результат, так как изначальный датасет является достаточно простым, а выборка MNIST — узкой. Качественные результаты, представлены на рис. 5, 6 и 7.

*Рис. 5. Качественные результаты тестов на 1NN для не зависящего от перестановок датасета MNIST, включающая генератор образцов* $G(\mathbf{z})$

*Рис. 6. Качественные результаты тестов на 1NN для не зависящего от перестановок датасета MNIST, включающая настоящие данные* $\mathbf{x}$

*Рис. 7. Качественные результаты тестов на 1NN для не зависящего от перестановок датасета MNIST, включающая соответствующие реконструкции* $G(E(\mathbf{x}))$

Полученные результаты позволяют продолжить исследования на более сложных наборах данных с расширенными задачами. Отдельной задачей, предшествующей следующим испытаниям, является сбор достаточно качественного набора данных в силу следующих факторов:

– готового подобного набора данных с образцами рукописных символов, используемых в письменной русской речи, доступного для теста широкой публике, на данный момент не существует;

– сбор подобных данных влечёт за собой юридические тонкости, которые необходимо соблюдать в рамках законодательства Российской Федерации, в частности, о сборе и использовании персональных данных, указанных в федеральном законе «О персональных данных» от 27.06.2006 № 152-ФЗ;

– в случае недостаточности данных двумерных изображений будет необходимо использовать специализированные программные и аппаратные средства для получения образцов данных в трёхмерном представлении, что может существенно усложнить этап подготовки к тестированию;

– полученные сырые данные необходимо обработать соответствующим образом для преобразования во входные данные генеративно-состязательных сетей, позволяющим получить наилучшие результаты при обучении искусственных нейронных сетей. В рамках проведённого исследования использовался простой метод, который теоретически может дать не самые хорошие результаты с учётом поставленной в исследовании задачи.

В дальнейшем при проведении испытаний очень важно получать не только обратную связь в виде результатов вычислений искусственных нейронных сетей, но и предоставлять полученные результаты на анализ экспертам-криминалистам, специалистам в области почерковедения, с целью идентификации проблемных мест и адаптации выборки данных или конфигурации программного обеспечения в целях улучшения производимых результатов. В идеальном варианте разработанная система должна быть обучена до той степени, чтобы эксперт-почерковед не смог однозначно ответить на вопрос об авторстве имеющегося перед ним образца письменного рукописного документа, и только в этом случае может быть принято решение об успешности применения выбранного подхода к решению задачи.

## 4. Заключение

Разработанный прототип системы позволяет показать жизнеспособность выбранной математической модели в целях разработки алгоритмического инструментария почерковых признаков для определения авторства рукописного текста. Намечен план дальнейших работ по разработке прозрачного комплекса, призванного стать вспомогательным инструментом в почерковедческой экспертизе и судопроизводстве.

## Литература

1. *Бенджио, И.* Глубокое обучение / И. Бенджио, А. Курвилль, Я. Гудфеллоу, в пер. А. А. Слинкина. – М. : ДМК Пресс, 2018. – 652 с.

2. *Винберг, Л. А.* Почерковедческая экспертиза : учебник для вузов МВД СССР / Л. А. Винберг, М. В. Шванкова, под ред. Р. С. Белкина. – Волгоград : Высшая следственная школа МВД СССР, 1977. – 174 с.

3. *Зиновьев, С. В.* Задача компьютерного анализа почерка / С. В. Зиновьев, И. Е. Воронина, В. А. Мещеряков // Материалы XVIII Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии» (Воронеж, 8–9 февраля 2018 г.). – Воронеж, 2018. – Т. 1. – С. 45–49.

4. *Панова, Т. О.* Комплексное исследование имитации рукописных реквизитов (случай из экспертной практики) / Т. О. Панова, О. Ю. Миловидова, Е. С. Карпухина // Теория и практика судебной экспертизы. – 2008. – № 3 (11). – С. 118–121.

5. *Федотов, Н. Н.* Форензика – компьютерная криминалистика / Н. Н. Федотов. – М. : Юридический Мир, 2007. – 432 с.

6. *Чернов, Ю. Г.* Анализ почерка в работе с кадрами / Ю. Г. Чернов. – СПб: БХВ-Петербург, 2012. – 288 с.

7. *Чернов, Ю. Г.* Психологический анализ почерка: системный подход и компьютерная реализация в психологии, криминологии и судебной экспертизе. / Ю. Г. Чернов. – М. : Генезис, 2011. – 464 с.

8. *Brugnatelli, F.* The Variability Measurement of Shape Independent Features to Establish a New Method to Differentiate Genuine Signatures from Simulated Ones. / F. Brugnatelli // J Forensic Res. – 2013. – № 4. – P. 206–219.

9. *Donahue, J.* Adversarial Feature Learning / J. Donahue, T. Darrell, P. Krähenbühl // arXiv. – 2017. – Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1605.09782

10. *Goodfellow, I. J.* Generative Adversarial Nets / I. J. Goodfellow, J. Pouget-Abadie, M. Mirza et al. // arXiv. – 2014. – Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1406.2661.

11. *Karpathy, A.* What I Learned from Competing Against a ConvNet on ImageNet [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://karpathy.github.io/2014/09/02/what-i-learned-from-competing-against-a-convnet-on-imagenet/

12. *Kingma, D.* Adam: A Method for Stochastic Optimization / D. Kingma, J. Ba // arXiv. – 2014. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1412.6980.

13. *Lederman, R.* Unsupervised Feature Extraction with a custom Bidirectional GAN [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://raphaellederman.github.io/articles/stockadversarialfeatures

14. *Mann, M.* A Study to Ascertain and Differentiate between Genuine and Transplanted Documents/Signatures / M. Mann, SK. Shukla, S. Gupta // J Forensic Res. – 2015. – № 6. – P. 293–298.

15. *Sheikhoaslami, G.* Progress in Handwriting Recognition / G. Sheikhoaslami, S. N. Srihari, V. Govindaraju // World Scientific Publishers. – 1997. – P. 503–509.

УДК 004.94

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ СЕТЕВЫХ АТАК С ПОМОЩЬЮ УЯЗВИМОСТИ ПРОТОКОЛА SMB В ОС СЕМЕЙСТВА MS WINDOWS

**М. Ф. Никульченко, А. С. Исмагилова**

*Башкирский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе исследуется возможность обнаружения сетевых атак с помощью эксплуатации известных уязвимостей в протоколе SMB v.1. С помощью анализаторов сетевого трафика на уровнях L2-L7 исследуется поведение сетевой атаки и высказываются предположения как наиболее точно можно составить сигнатуру для обнаружения такой атаки. Также затрагивается тема того, как атакующие могут модифицировать атаку, усложнить ее, тем самым затруднив её обнаружение. Высказываются предположения о перспективах развития средств обнаружения или предотвращения вторжения, как на границе сети так и внутри неё.

**Ключевые слова:** сетевые атаки, уязвимость, блок сообщений сервера, система обнаружения вторжений, система предотвращения вторжений пейлоад, cve-2017-0144.

Как известно, информационная безопасность в прикладном смысле возникла как предмет из-за недочетов при создании каких-то базовых систем, структур и протоколов. Например, такие протоколы как TCP, UDP, DNS, и рассматриваемый в данной статье SMB возникли в то время когда безопасность не ставилась во главу угла, а ставилась сама задача установления связи в коммутируемых сетях. Это заложило причину многих современных проблем компьютерной безопасности, таких как массовые атаки на корпоративные инфраструктуры, на промышленные сети, которые так или иначе, но все построены на основе базовых сетевых протоколов. Поэтому несложно понять что вектор развития информационной безопасности лежит в двух направлениях:

1) создание принципиально новых систем и протоколов, но уже с учётом наличия принципов безопасной разработки, тестированием на проникновения на всех этапах разработки;

2) накладывание защитных мер «поверх» старых протоколов. Типичный пример — использование шифрования на сеансовом уровне модели OSI, как это делает протокол SSL(TLS) защищая соединение по протоколу HTTP, или использование того же шифрования на сеансовом уровне для защиты прикладного протокола DNS(DNS over TLS, DNS over HTTPS).

Приближаясь к теме данной статьи, поднимается вопрос эксплуатации уязвимости в протоколе SMB с помощью отправки специально сформированного пакета на атакуемую систему.

Данная проблема рассматривалась в работах таких специалистов по кибербезопасности, как Sean Dillon, Dylon Davis, Ph.D Torsten George [5]. Их общая работа под названием «Eternal Blue. Exploit Analysis and port to Microsoft Windows 10» рассматривает принципы реализации уязвимости CVE-2017-0144. Многие положения о защите сетевой инфраструктуры описаны в книгах Naddean Tanner, Don Murdoch [1]. Методы обнаружения зловредных соединений заимствованы, в частности, из учебного пособия Operator HandBook NetMux, Joshua Picolet [2].

Основная цель настоящей работы заключается в показательной демонстрации данной уязвимости на испытательном стенде и разработке практических рекомендаций, которые позволят решить проблему конкретно данной уязвимости а также поднять уровень кибербезопасности в корпоративной инфраструктуре.

Испытательный стенд представляет собой операционные системы MS Windows 7 Build 7601 x64, а также ОС на базе Debian Kali Linux в качестве атакующей машины.

Ожидаемые результаты от атаки:

1) удаленное выполнение кода и последующее получение шелла с помощью уязвимости CVE-2017-0144;

2) с помощью прочего ПО получение аутентификационных данных удаленно — паролей, идентификаторов и т. д.

Для описания действий при реальной атаке злоумышленниками, используются описательные модели компьютерных атак. Часто они взяты по образу и подобию моделей из военной теории. Например, одна из таких моделей от компании лидера в отрасли ВПК Lockheed Martin Cyber Kill Chain.

Cyber Kill Chain способна указать общую, идеалистическую модель поведения злоумышленника, исходя из опыта того, как были проведены сотни и тысячи компьютерных атак. Во многом эта модель взяла основы от военной модели F5, которая буквально и называлась «цепочка убийств». Вообще можно заметить, что часто ориентированные изобретения и идеи, подходы для военно-промышленного комплекса находят своё применение и в гражданской сфере.

Для проведения разведки внутри сети используется утилита nbtscan из состава Kali Linux. С помощью него мы получаем информацию о хостах внутри локальной сети, как на рис. 1.

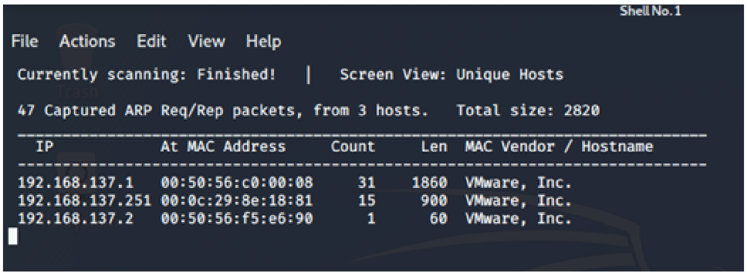



*Рис. 1. Разведка внутри сети*

Чаще всего данные утилиты работают по принципу рассылки ICMP сообщений и таким образом узнают существует ли хост в сети или нет. Также можно использовать для этого ARP-таблицу, когда, к примеру ответ на ICMP сообщение приходит как «filtered».

Чтобы понять что хост уязвим перед исследуемой уязвимостью, нужно воспользоваться одним из наиболее известных бесплатных сканеров сети и портов — NMAP , хотя также можно использовать и распространяемые на коммерческой основе сканеры вроде Tenable Nessus, X-Spider.

NMAP позволяет при применении нужных ключей (настроек) сканировать хост на наличие открытого порта и того, какая служба на ней запущена, таким образом более детально проводя разведку. В реальной ситуации злоумышленники используют скрипты автоматизации, которые позволяют найти автоматически уязвимый хост, однако дальше только ручная работа. Итак, просканировав три IP-адреса, мы нашли, вероятно, уязвимый хост с IP-адресом и работающей службе на порту 445 (рис. 2).

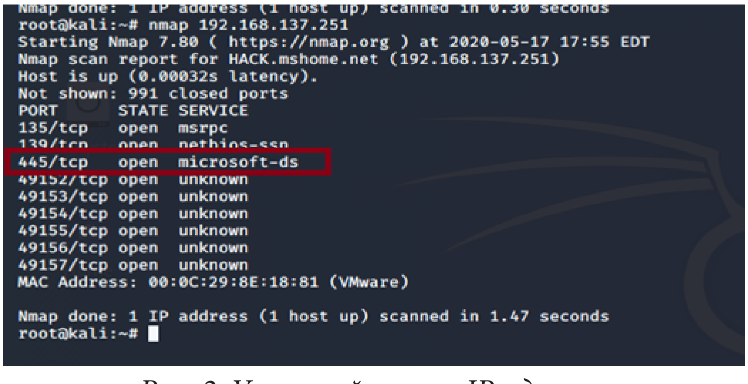



*Рис. 2. Уязвимый хост с IP-адресом*

После того как нами был обнаружен уязвимый хост, нужно подобрать под него возможную атаку, т. е. способ как проникнуть в защищаемую систему. Наиболее распространенным инструментом для этого служит Metasploit Framework, он доступен как в бесплатной, так и в платной версии. Путем поиска среди доступных вариантов зловредного кода находим нужный (рис. 3).

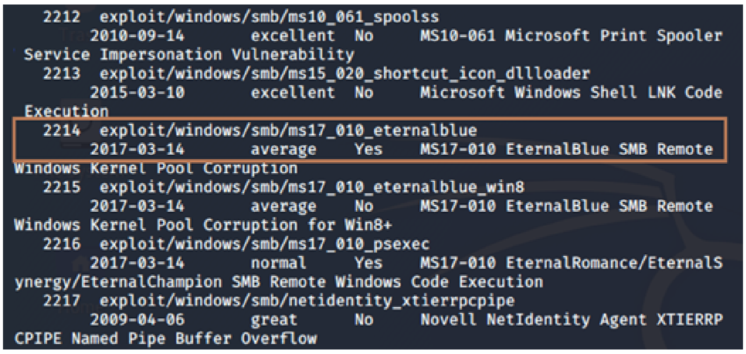



*Рис. 3. Определение зловредного кода под уязвимость*

На рис. 4 демонстрация корректировки параметров зловредного кода под конкретную уязвимую систему(в данной работе — OS MS Windows 7).

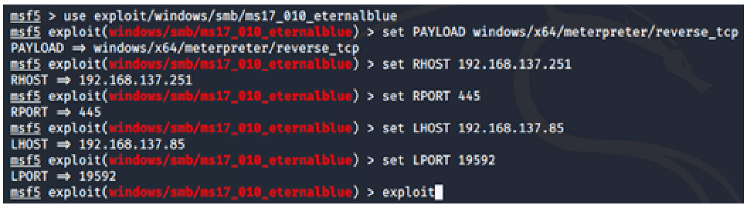



*Рис. 4. Подготовка эксплоита*

В результате зловредного кода была получена удаленная сессия и доступ к командной оболочке, что иллюстрирует рис. 5.

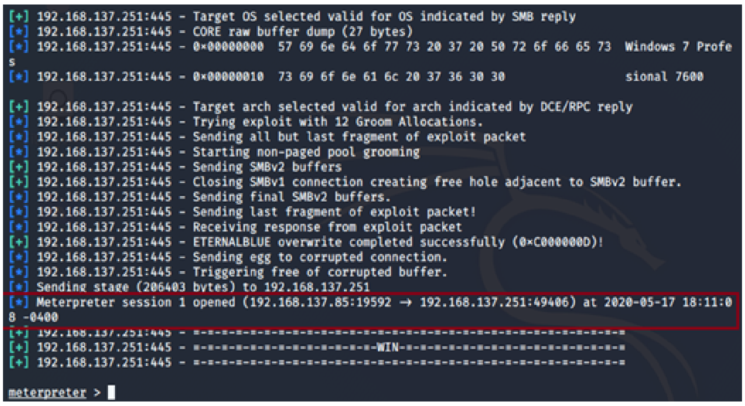
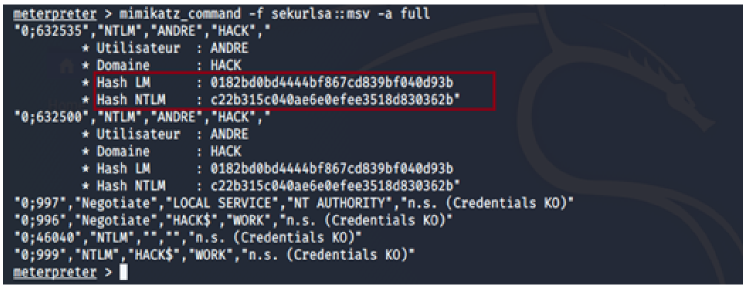



*Рис. 5. Открытие сессии meterpreter*

Следуя последовательности обозначенной в модели Cyber Kill Chain, далее необходимо каким-то образом продвигаться внутри сети от одной рабочей станции к другой собирая данные или уничтожая их (здесь цели злоумышленников могут быть близки к террористическим, в настоящее время даже актуален термин «кибертерроризм»). Для продвижения внутри сети необходимо получить аутентификационные и идентификационные данные такие как логины, пароли, хеш-суммы паролей для атаки типа pass-the-hash, о которой чуть подробнее будет рассказано далее.

Следовательно, для успешного получения учетных данных требуется административный доступ к системе, или, как минимум, административные привилегии для доступа к процессу LSASS.exe, который и отвечает за процесс аутентификации в системе. Административный доступ к системе в данном случае уже есть, однако в реальной ситуации злоумышленники используют различные тактики повышение привилегий в системе и уязвимости класса LPE (Local Privilege Escalation). На рис. 6 представлен результат работы Mimikatz на испытательном стенде. Стоит обратить внимание, что утилита используется удаленно с компьютера атакующего, а не локально. Это вносит коррективы во вводимые команды.



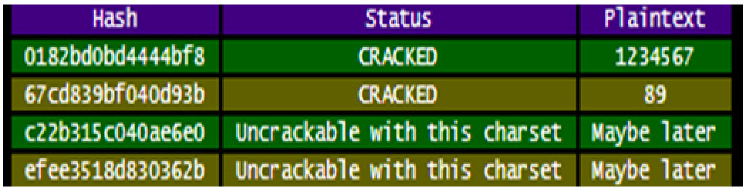
```
meterpreter > mimikatz_command -f sekurlsa::msv -a full
"0;632535","NTLM","ANDRE","HACK","
        * Utilisateur  : ANDRE
        * Domaine      : HACK
        * Hash LM      : 0182bd0bd4444bf867cd839bf040d93b
        * Hash NTLM    : c22b315c040ae6e0efee3518d830362b"
"0;632500","NTLM","ANDRE","HACK","
        * Utilisateur  : ANDRE
        * Domaine      : HACK
        * Hash LM      : 0182bd0bd4444bf867cd839bf040d93b
        * Hash NTLM    : c22b315c040ae6e0efee3518d830362b"
"0;997","Negotiate","LOCAL SERVICE","NT AUTHORITY","n.s. (Credentials KO)"
"0;996","Negotiate","HACK$","WORK","n.s. (Credentials KO)"
"0;46040","NTLM","","","n.s. (Credentials KO)"
"0;999","NTLM","HACK$","WORK","n.s. (Credentials KO)"
meterpreter >
```

*Рис. 6. Получение credetials с помощью mimikatz*

Тем самым получены данные хешей LM и NTLM. В данной ситуации существует три варианта развития событий.

Провести атаку pass-the-hash, используя полученный хеш для авторизации на требуемой рабочей станции. Для этого можно использовать такие утилиты как Impacket, CrackMapExec (CME).

Попыться расшифровать хеш, например, с помощью радужных таблиц. Если пароль простой, то и хеш его будет известен с большей долей вероятности. Для этого можно обратиться на специализированные интернет-ресурсы, например [4], на рис. 7 пример расшифрованного хеша всемирно известного пароля.



| Hash | Status | Plaintext |
|---|---|---|
| 0182bd0bd4444bf8 | CRACKED | 1234567 |
| 67cd839bf040d93b | CRACKED | 89 |
| c22b315c040ae6e0 | Uncrackable with this charset | Maybe later |
| efee3518d830362b | Uncrackable with this charset | Maybe later |

*Рис. 7. Расшифрованный хеш*

LM-хеш был подобран (пароль — 123456789), однако NTLM-хеш конкретно данным ресурсом подобран не был. С простыми алгоритмами выработки хеш-сумм такое может сработать и с простыми комбинациями паролей, однако в сложных вариантах и с использованием NTLM v.2 перебор усложняется многократно.

Третий вариант относится к рабочим станциям в домене и предполагает атаку на доменную службу аутентификации — Kerberos. С помощью хеша и утилиты Mimikatz создается билет Kerberos который позволяет авторизоваться на любой рабочей станции в домене (в случае если это Gold Tickets). Такая атака носит название pass-the-ticket, или, в ее новой вариации — overpass-the-ticket.

Таким образом, показано как можно получить удаленный доступ к системе с помощью эксплуатации уязвимости CVE-2017-0144, а также как с помощью удаленного доступа получить учетные данные пользователей в домене или не в домене, т.е. развить атаку внутри сети.

Разработаны следующие рекомендации, чтобы избежать риски возникновения вышеприведенных несанкционированных действий.

Прежде всего, необходимо ввести политику обновления рабочих станций. Даже сегодня уязвимости начала 2000-х годов могут быть в действии. Типичная картина — где-то в сети предприятия стоит один единственный необновленный сервер на базе Windows Server 2003, для которого актуальны ряд критических уязвимостей. Само собой, что именно он станет точкой, через которую злоумышленники войдут в сеть и продолжат дальнейшее продвижение. Политика может подразумевать собой, например, либо ручную проверку всех систем, что часто затруднительно, либо ввод таких систем как SCCM (System Center Configuration Manager) и WSUS, которые в автоматизированном режиме сообщат о наличии обновлений, в том числе критически важных обновлений безопасности.

Используя редактор групповых политик, или локальных политик, если рабочая станция не в домене, произвести ряд базовых настроек, о которых часто забывается. Например, по умолчанию в системах Windows администраторам разрешена отладка программ (debug-режим). Отладка предоставляет полный доступ к системе и ядру Windows, ко всем его командам, такой уровень доступа не нужен администратору, он нужен только разработчикам. Данная настройка по умолчанию является неправильной с точки зрения безопасности. Чтобы ее исправить, нужно запустить редактор локальных или групповых политик gpedit.msc перейти в настройки безопасности и найти «Отладка программ». Почти наверняка функция отладки для группы «Администраторы» включена. Следует удалить ее и, либо внести туда осознанно необходимого пользователя в соответствии с политикой обработки рисков информационной безопасности, либо удалить всех (так надежнее), опять же, если политика на месте не принимает такого рода риски.

Теперь Mimikatz не сможет получить низкоуровневый доступ, а значит и не сможет получить доступ к процессу LSASS.exe. Эффект от команды privilege::debug окажется отрицательным.

Также необходимо внести поправки в ряд параметров реестра. Остановимся подробнее на некоторых из них.

Протокол WDigest появился в Windows XP и использовался для выполнения HTTP аутентификации (HTTP Digest Authentication), особенностью которой являлось использование пароля пользователя в открытом виде. В Windows 8.1 and Server 2012 R2 добавилась возможность полного запрета хранения паролей в открытом виде в LSASS. Для запрета хранения WDigest в памяти, в этих ОС в ветке реестра HKEY_LOCAL_MACHINE\System\CurrentControlSet\Control\SecurityProviders\WDigest уже имеется DWORD32 параметр с именем UseLogonCredential и значением 0. Если же нужно полностью отключить метод аутентификации WDigest, в этой же ветке (HKEY_LOCAL_MACHINE\System\CurrentControlSet\Control\SecurityProviders\WDigest) устанавливается значение ключа реестра Negotiate в 0.

В Windows 8.1 и Windows Server 2012 R2 появилась возможность включения защиты LSA, обеспечивающей защиту памяти LSA и предотвращаю возможность подключения к ней из незащищённых процессов. Для включения этой защиты, необходимо в ветке реестра HKEY_LOCAL_MACHINE\SYSTEM\CurrentControlSet\Control\LSA создать параметр RunAsPPL со значением ключа 1. После применения этого параметра атакующий не сможет получить доступ к памяти LSA, а mimikatz на команду securlsa::logonpassword выдаст ошибку.

Устаревший протокол LM аутентификации и, соответственно, хранение LM хэшей нужно обязательно отключить с помощью групповой политики Network Security: Do Not Store LAN Manager Hash Value On Next Password Change (на уровне Default Domain Policy в gpedit.msc).

Далее нужно отказаться от использования как минимум протокола NTLMv1 (политика в разделе Computer Configuration –> Policies –> Windows Settings –> Security Settings –> Local Policies –> Security Options — Network Security: Restrict NTLM: NTLM authentication in this domain), а как максимум и NTLMv2, хотя как упоминалось выше он достаточно устойчив для атак типа «подбора хеш-суммы». Помимо этого, отказ от NTLMv1 как правило проходит безболезненно, однако при отказе от NTLMv2 возможны затруднения. В больших инфраструктурах, как правило, приходят к сценарию максимального ограничения использования NTLMv2. То есть везде, где возможно должна использоваться Kerberos аутентификация (как правило придется уделить дополнительное время настройке Kerberos аутентификации на IIS и SQL), а на оставшихся системах — NTLMv2.

Следует явно запретить хранить пароли пользователей в AD в текстовом виде. Для этого следует включить доменную политику Store password using reversible encryption for all users in the domain (обратимое шифрование) в разделе Computer Configuration –> Windows Settings –> Security Settings –> Account Policies –> Password Policy, выставив ее значение на Disabled.

При использовании функционального уровня домена Windows Server 2012 R2, для защиты привилегированных пользователей возможно использовать специальную защищенную группу Protected Users. В частности, защита этих учеток от компрометации выполняется за счет того, что члены этой группы могут авторизоваться только через протокол аутентификации Kerberos. Желательно добавить в эту группу учетные записи администраторов домена, серверов и пр. Этот функционал работает на  Windows Server 2012 R2 (для Windows Server 2008 R2 нужно ставить упомянутое выше дополнительное обновление KB2871997)

Одной из возможностей mimikatz — получения хэша паролей пользователей из ветки реестра HKEY_LOCAL_MACHINE\SECURITY\Cach, в которую сохраняются хэши паролей последних 10 доменных пользователей, вошедших в систему. Эти хэши в обычном случае могут использоваться для авторизации пользователей в системе при недоступности контроллера домена.

Желательно запретить использование сохранения кэшированных данных с помощью включения политики Interactive Logon: Number of previous logons to cache (in case domain controller is not available) в разделе Computer Configuration –> Windows Settings –> Local Policy –> Security Options, изменив значение ее параметра на 0. Кроме того, чтобы ускорить очистку памяти процесса lsass от учётных записей пользователей, завершивших сеанс, нужно и в ветке HKEY_LOCAL_MACHINE\SYSTEM\CurrentControlSet\Control\Lsa нужно создать ключ типа DWORD с именем TokenLeakDetectDelaySecs и значением 30. Т.е. память будет очищаться через 30 секунд после завершения сеанса пользователя. В Windows 7, 8/ Server 2008R2, 2012 чтобы этот ключ заработал, нужно установить уже упоминавшееся ранее обновление KB2871997.

В Windows 10 Enterprise, Windows Server 2016 появился новый компонент Credential Guard, позволяющий изолировать и защитить системный процесс LSASS от несанкционированного доступа. Однако, как упоминалось выше, в инструменте mimikatz есть bypass метод при использовании Credential Guard.

Приведенные выше параметры и примеры их настройки позволят до минимума снизить вероятность развития атаки в том случае, если злоумышленники уже получили доступ внутрь сети, так как для развития атаки и перехода на другие рабочие станции внутри домена им в любом случае нужны будут учетные данные пользователей в домене. Также можно просто перестать использовать в сети ОС Windows до 8.1 в которых пароли хранятся в открытом виде и перейти к использованию Windows 10 1903, в котором реализовано credentials guard (пароли не хранятся в открытом виде). Однако на данный момент mimikatz позволяет с помощью модуля memssp инжектировать модуль в процесс и извлечь хеши.

Что касается уязвимости CVE-2017-0144, то существует несколько общих рекомендаций помимо тех, что были даны выше, которые необходимы для исполнения в любой организации, которая хочет быть в среднем более защищенной от угроз сетевых атак чем большинство.

Во-первых, это разумное разделение сети с использованием VLAN. Это сэкономит трафик, не позволит злоумышленнику, попавшему в сеть, увидеть все доступные хосты, а значит получить к ним доступ.

Во-вторых, следует поделить сеть на наибольшее количество сегментов, выделяя в отдельные сегменты наиболее критичные рабочие станции. Например, «Технолог производства», «Главный бухгалтер», «Начальник службы безопасности» и т.п.

В-третьих, отключить протокол SMB v.1 через реестр, либо через компоненты Windows. Отключать следует серверную и клиентскую части. Стоит заметить, что отключение не всегда возможно, т.к. существуют программы и устройства, которые не поддерживают более современные и защищенные версии этого протокола, такие как SMB v.2 и 3.

Существует огромное многообразие средств которые позволяют обнаруживать сетевые вторжения на периметре, однако можно применить и свободно распространяемые решения, такие как Snort. Для правильной работы и детектирования достаточно прописать правила. К примеру, для того, чтобы Snort обнаруживал поведение Metasploit, нужно внести следующее правило [5]:

Alert tcp any any –> any 445 (msg:"Eternal Blue Check request")

Content: |ff|SMB|25|";offset:4;content:"|23 00 00 00|";distance:56;

Sid:1000002; rev:1;)

Это правило позволит выводить сообщение в случае обнаружения попытки запроса с целью проверить уязвим ли хост или нет со стороны атакующего. Во второй строчке отмечено непосредственно тело правила, которое и позволяет обнаруживать факт вторжения, т. е. содержимое передаваемого пакета в сети.

Исследования авторов показывают эффективность данной уязвимости. Однако сам по себе удаленный доступ не несет угрозы. Угрозу для активов несут последующие действия атакующих, которые могут быть как сокрушительными, так и постепенными. В любом случае для любой организации важно создать такую систему информационной безопасности, которая позволит, с одной стороны, обеспечить удобство работы для пользователей, с другой — максимально уменьшить риск дальнейшего продвижения по сети атакующих. Этого можно достичь, в частности, снижая до минимума доступные привилегии пользователю, используя концепцию «нулевого доверия», граммотно распределяя рабочие станции пользователей внутри сегментов VLAN.

**Литература**


1. Blue team handbook: incident response edition: a condensed field guide for the cyber security incident responder // Электрон. многопредм. науч. журн. – 2019. – С. 165–173. – URL: https://ebookpdf.com/blue-team-handbook-incident-response-edition (дата обращения: 01.09.2020).

2. Operator handbook // Электрон. многопредм. науч. журн. – 2019. – С. 90–93. – URL: https://ebookpdf.com/blue-team-handbook-incident-response-edition (дата обращения: 02.09.2020).

3. Lockheed Martin™ cyber kill chain [Электронный ресурс] // Поэтапная модель действий злоумышленника при компьютерной атаке. – 2019. – URL: https://www.lockheedmartin.com/en us/capabilities/cyber/cyber-kill-chain.html (дата обращения: 30.06.2020).

4. Радужные таблицы [Электронный ресурс]. – 2019. – URL: www.http://rainbowtables.it64.com/ (дата обращения: 30.09.2020).

5. White paper EternalBlue [Электронный ресурс] // Бинарный анализ эксплоита EternalBlue. – 2019. – URL: https://risksense.com/wpcontent/uploads/2018/05/White-Paper_Eternal-Blue.pdf (дата обращения: 25.06.2020).

УДК 621.396

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОДНОГО ФАЗОВРАЩАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ ОПТО-УПРАВЛЯЕМОГО МЕТАМАТЕРИАЛА

**Е. А. Ищенко[1], Ю. Г. Пастернак[1], В.А. Пендюрин[2], Е.А. Рогозин[1], С. М. Федоров[1]**

*[1]Воронежский государственный технический университет*
*[2]АО НПП «Автоматизированные системы связи»*

**Аннотация.** В статье рассматривается опто-управляемый метаматериал, интегрированный в конструкцию волновода для управления фазой протекающей электромагнитной волны. Изменение характеристик метаматериала происходит при коммутации узлов системы, состоящей из тонких металлических проводников. В процессе исследования производилось компьютерное моделирование электродинамической системы, которая состоит из волновода с размерами 26,4x10,62x200 мм и интегрированного в конструкцию метаматериала, в результате этого были получены картины протекающей электромагнитной волны, графиков фаз $S_{21}$ параметров волновода.
**Ключевые слова:** управляемый метаматериал, электромагнитная волна, волновод, матрица рассеяния.

## Введение

В существующих исследованиях фазовращатели представляют собой механическую структуру, которая изменяет или геометрические характеристики структуры, где протекает электромагнитная волна, или, если управление происходит в оптическом диапазоне, проницаемость среды. В известных исследованиях [1–7] происходит исследование фазовращателей для различных задач, которые решаются в электродинамике. В работах [1, 3] исследуется волновод с изменяемой геометрией, что приводит к смещению фазы проходящей электромагнитной волны; в работе [4] рассматривается фазовращатель терагерцового диапазона; в работах [2,5–7] рассматриваются планарные структуры, которые выполняют функцию фазовращателя.

В работе [1] предлагается модель управления сдвигом фазы волны в волноводе путем внедрения анизотропного материала в волновод, чем изменяется его степень перекрытия, а следовательно, изменяется картина проходящего электромагнитного поля. Предложенная концепция основана на уравнениях Максвелла и проверена путем моделирования методом конечных элементов.

В работе [2] авторы предлагают конструкцию интегрированного на диэлектрическую подложку волноводного фазовращателя, работающего в диапазоне частот от 27,4 до 28,6 ГГц, при этом при изменении физического положения структуры в волноводе происходит смещение фазы электромагнитной волны.

В работе [3] представлен механический фазовращатель, который изменяет перекрытие волноводного канала, при этом происходит изменение картины протекания электромагнитной волны, а следовательно, и смещение фаз выходной волны.

В работе [4] представлен фазовращатель для терагерцовых антенн, так, задержка фазы происходит путем подключения различных участков цепи, которые имеют разную длину, что приводит к задержкам волны при прохождении через весь участок.

Авторы при выполнении исследования, рассмотренного в [5] разработали фазовращатель для волновода, интегрированного в диэлектрическую подложку для работы в диапазонах частот, которые относятся к 5G. применение предложенной конструкции позволяет изменять направление главного лепестка диаграммы направленности.

В работе [6] авторы производят исследование сканирующей антенной решетки, построенной по планарной технологии, в которой управление производится путем изменения фазы волны в волноводе, который интегрирован в диэлектрической подложке.

Авторы [7] производят исследование фазовращателя, который сформирован на диэлектрической подложке в диапазоне частот от 1,9 до 2,1 ГГц, при этом благодаря предложенной конструкции удается добиться изменения фазы электромагнитной волны в широких пределах.

Однако во всех предложенных работах для изменения фазы требуется или механическое изменение канала протекания волны или заранее сформированной линии задержки волны, что приводит к усложнению конструкции. В данной статье рассматривается система, которая основана на активном метаматериале, коммутация узлов в котором выполняется с использованием pin-диодов, при этом не требуется изменения геометрических параметров структуры.

### 1. Основные характеристики рассматриваемого метаматериала и волновода

В качестве активной системы выступает метаматериал, который представляет собой систему, состоящую из тонких цилиндрических медных проводников длиной 4,5 мм и радиусом 0,05 мм из которых была сформирована многослойная структура, которая приведена на рис. 1.

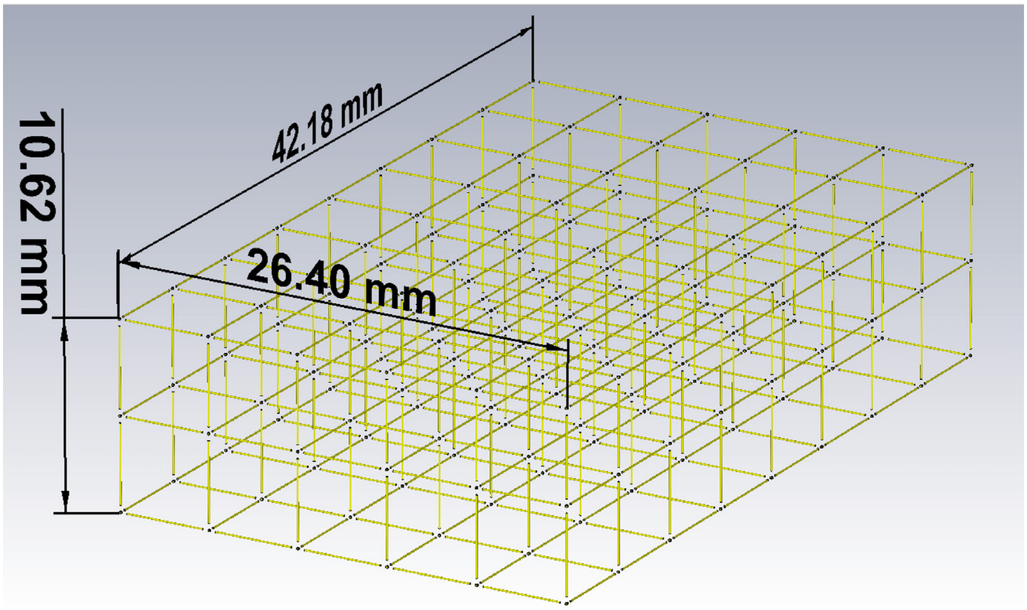



*Рис. 1. 3D модель метаматериала*

Метаматериал устанавливается в прямоугольный волновод с размерами стенок 26,4 на 10,62 мм и длиной 200 мм, что позволяет полностью разместить внутри активную систему, в которой будут производиться коммутации pin-диодами (в процессе моделирования применялись spice модели pin-диода BAR65-02L). На рис. 2 приведен волновод в разрезе, таким образом, можно увидеть установленный внутри метаматериал.

### 2. Исследование влияния коммутаций линий метаматериала на смещение фазы в волноводе

При выполнении коммутаций в узлах метаматериала происходит изменение сопротивления участка волновода, таким образом, что проходящая электромагнитная волна его огибает. При этом происходит изменение характеристик волноводной линии, а именно изменение характеристик матрицы рассеяния (S-параметров). Предложенная конструкция метаматериала предполагает возможность замыкания четырех линий, так как при выполнении коммутаций

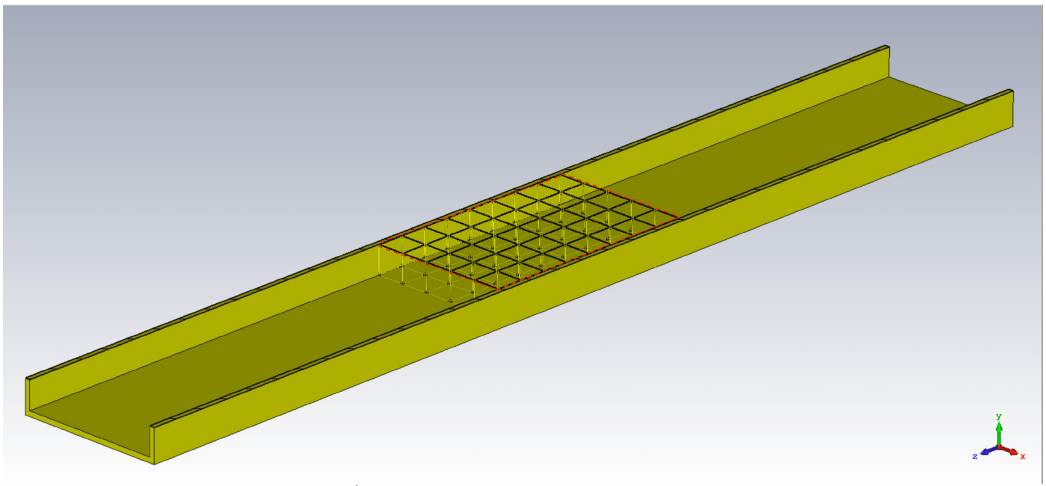


*Рис. 2. Волновод с интегрированным метаматериалом*

большего числа линий происходит сужение, которое не позволяет проникнуть электромагнитной волны на более низких частотах. В соответствии с выбранными размерами волновода, при отсутствии коммутаций в метаматериале частота среза линии $f_c$ = 5,68 ГГц, а рабочий диапазон частот: 7,09–10,73 ГГц. На рис. 3 приводится график $S_{21}$ параметров волновода при всех исследуемых случаях.

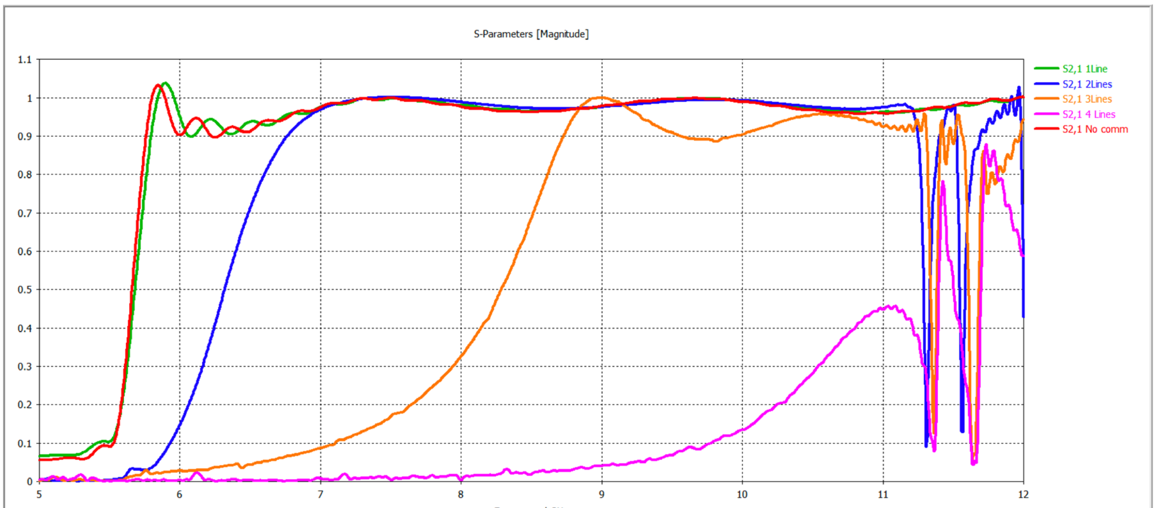



*Рис. 3. $S_{21}$ параметры волновода при выполнении коммутаций различных слоев метаматериала*

Как видно по полученным графикам при увеличении числа активных слоев в метаматериале происходит сужение диапазона частот, на которых волна может проникнуть через структуру. При этом форма коммутации, которая обеспечивает наиболее плавное прохождение электромагнитной волны приведена на рис. 4.

При протекании волны через предложенные слои помимо изменения рабочего диапазона частот волновода, возникает смещение фазы $S_{21}$ параметров. На рис. 5 приводятся фазы $S_{21}$ параметров при выполнении коммутаций различных слоев метаматериала.

Как видно из полученных графиков при выполнении коммутаций слоев происходит смещение фазы электромагнитной волны, на основе полученных данных была сформирована табл. 2, в которой приводятся максимальные значения фаз $S_{21}$ параметров, а также частота на которых они возникают, при этом рассматривается интервал частот от 8,45 до 9,6 ГГц, так как при более низких частотах при коммутации четырех линий электромагнитная волна не проникает на выход волновода.

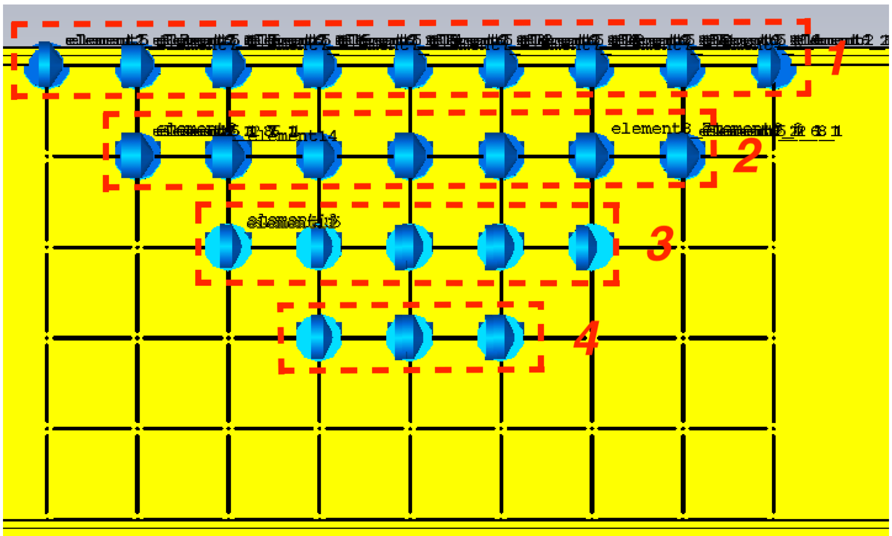



*Рис. 4. Вид коммутируемых линий метаматериала*

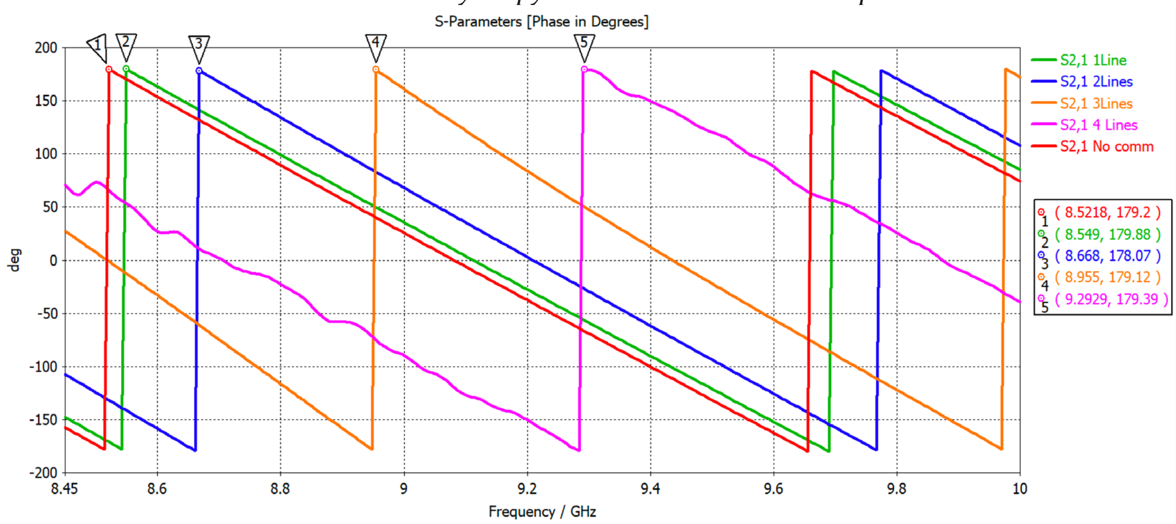



*Рис. 5. Фазы $S_{21}$ параметров волновода при различных видах коммутаций метаматериала*

Таблица 1

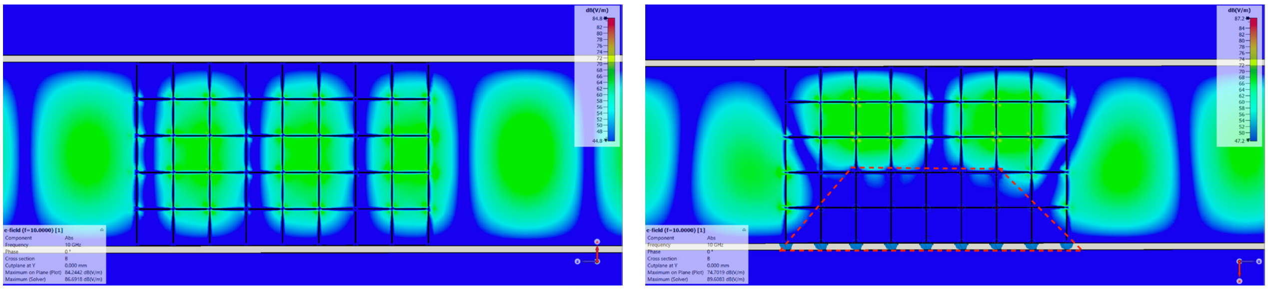
*Максимумы фаз $S_{21}$-параметров волновода с указанием частот их наблюдения*

| Число выполненных коммутаций метаматериала | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Максимальное значение фазы, ° | 179,2 | 179,88 | 178,07 | 179,12 | 179,39 |
| Частота наблюдения максимума, ГГц | 8,52 | 8,55 | 8,67 | 8,96 | 9,29 |

Как видно по полученным результатам происходит смещение фазы электромагнитной волны, при этом при коммутации первой линии происходит смещение фазы на 9,5° относительно ситуации без выполненных коммутаций; при выполнении коммутации второй линии смещение фазы составляет 46,07°; при выполнении коммутации третьей линии смещение фазы составляет 138,27°; при коммутации четвертой линии сдвиг фазы составил 243°.

Для наибольшей наглядности принципа работы предложенной конструкции на рис. 6 приведены картины протекающей электромагнитной волны для случая, когда коммутации отсутствовал, когда была выполнена коммутация трех линий метаматериала.

Как видно по картине, протекающей электромагнитной волны, при коммутации линий метаматериала волна огибает активированную зону, за счет чего проходит больший путь, а следовательно, происходит смещение фазы волны на выходе.



*а)* *б)*

*Рис. 6. Картина протекающей электромагнитной волны в волноводе: а) при отсутствии коммутаций линий метаматериала; б) выполнена коммутация трех линий*

## Заключение

В статье был рассмотрен активный метаматериал, который выполняет функцию волноводного фазовращателя, при этом не требуется изменять геометрические размеры канала волновода, а лишь выполнять коммутации различных линий активной структуры. Предложенная конструкция встраивается непосредственно в волновод и представляет собой тонкие проводники. Для выполнения управления характеристиками метаматериала используются pin-диоды.

Таким образом, метаматериал является более перспективным способом управления характеристиками электромагнитной волны, так как не требуется изменять геометрические характеристики самой структуры.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-57.2020.9

## Литература

1. Ozgun O., Kuzuoglu M. Utilization of anisotropic metamaterial layers in waveguide miniaturization and transitions / O. Ozgun, M. Kuzuoglu // IEEE Microwave and wireless components letters. – 2007. – V. 17, No. 11. – P. 754–756.

2. Sellal K., Talbi L., Denidni T., Lebel J. A New substrate integrated waveguide phase shifter / K. Sellal, L. Talbi, T. Denidni, J. Lebel // Proceedings of the 36th European Microwave Conference. – 2006. – P. 72–75.

3. Zhang Q., Yuan C., Liu L. Studies on mechanical tunable waveguide phase shifters for phased-array antenna applications / Q. Zhang, Yuan C., L. Liu // 2016 IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology. – 2016. – P. 1–3.

4. Chen P., Argyropoulos C., Alù A. Terahertz antenna phase shifters using integrally-gated graphene transmission-lines / P. Chen, C. Argyropoulos, L. Liu // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2013. – V. 61, No. 4. – P. 1528–1537.

5. Yang Q., Ban Y., Kang K., Sim C., Wu G. SIW Multibeam array for 5G mobile devices / Q. Yang, Y. Ban, K. Kang, C. Sim, G. Wu // IEEE Access. – 2016. – V. 4. – P. 2788–2796.

6. Guntupalli A. B., Djerafi T., Wu K. Two-Dimensional scanning antenna array driven by integrated waveguide phase shifter / A. B. Guntupalli, T. Djerafi, K. Wu // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 2014. – V. 62, No. 3. – P. 1117–1124.

7. Lin C., Chang S., Chang C., Shu Y. Design of a reflection-type phase shifter with wide relative phase shift and constant insertion loss / C. Lin, S. Chang, C. Chang, Y. Shu // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 2007. – V. 55, No 9. – P. 1862–1868.

УДК 621.396

# ИССЛЕДОВАНИЕ РУПОРНОЙ АНТЕННЫ С ИНТЕГРИРОВАННЫМ МЕТАМАТЕРИАЛОМ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДИАГРАММОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

**Е. А. Ищенко[1], Ю. Г. Пастернак[1], В.А. Пендюрин[2], Е.А. Рогозин[1], С. М. Федоров[1]**

*[1]Воронежский государственный технический университет*
*[2]АО НПП «Автоматизированные системы связи»*

**Аннотация.** В статье рассматривается пирамидальная рупорная антенна с интегрированным в ее раскрыв активным метаматериалом, который позволяет осуществить управление направлением излучения антенны в частотном диапазоне от 10,5 до 11 ГГц при сохранении высокого уровня КПД и КНД антенны. Для коммутации узлов применяются pin-диоды.
**Ключевые слова:** управляемый метаматериал, пирамидальная рупорная антенна, диаграмма направленности, электромагнитное поле.

## Введение

Применение антенн с интегрированными в их конструкцию структурами из метаматериала является привлекательным решением, так как для управления характеристиками не требуется изменять физические характеристики самой антенны, нужно лишь коммутировать линии метаматериальной структуры или же использовать различные комбинации таких структур. Применение метаматериалов для рупорных антенн исследуется в работах [1–4, 6], для печатных антенн [5, 7, 8, 10]. При этом современные метаматериальные структуры позволяют добиться улучшения характеристик в MIMO-антеннах [7, 8, 10].

В работе [1] авторы исследуют рупорную антенну круглого сечения, предназначенную для работы с круговой поляризацией. При этом в конструкцию был интегрирован метаматериал, выполняющий функцию линзы и предназначенный для улучшения осевого соотношения, качества диаграммы направленности и для выпрямления фронта проходящей через него волны.

В работе [2] авторы рассматривают возможность управления диаграммой направленности рупорной антенны путем интеграции в конструкцию метаматериальной структуры. Так, путем использования различных видов метаматериалов удалось добиться сужения главного лепестка диаграммы направленности или же его раздвоения, при использовании кросс-поляризации.

В работе [3] авторы рассматривают пирамидальную рупорную антенну с интегрированным в рупор ячейки метаматериалом разомкнутых кольцевых резонаторов (SRR). Это позволило повысить КНД антенны, а также сформировать более четко выделенный главный лепесток антенны.

В работе [4] авторы рассматривают антенную решетку, которая построена на основе четырех пирамидальных рупорных антенн с интегрированным в них метаматериалом. При применении предложенной конструкции удалось добиться улучшения КНД антенны, а также эффективности апертуры рупорной антенны, при этом произошло серьезное сужение диапазона рабочих частот.

В работе [5] рассматривается метаматериал, который интегрирован в систему «пирамидальный рупор — линза Люнеберга». Предложенное решение позволило добиться улучшения характеристик диаграммы направленности – увеличение КНД антенны и сужение главного лепестка.

Во всех рассмотренных работах применяются пассивные метаматериалы, управление которыми возможно лишь путем изменения их геометрических характеристик. В данной статье рассматривается активный метаматериал, которым можно управлять путем коммутации элементов структуры метаматериала.

## 1. Основные характеристики рассматриваемой пирамидальной рупорной антенны

В качестве исследуемой структуры была выбрана пирамидальная рупорная антенна в апертуру которой интегрирован двухслойный метаматериал (рис. 1).

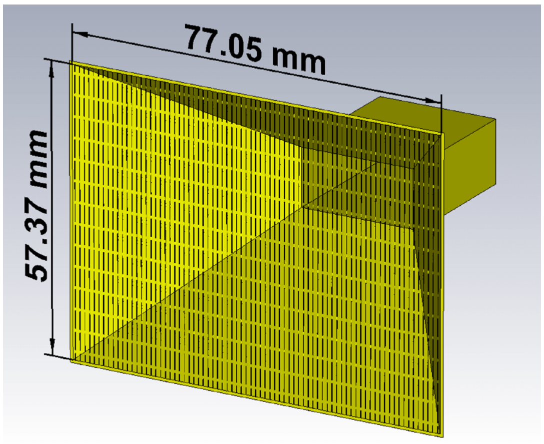


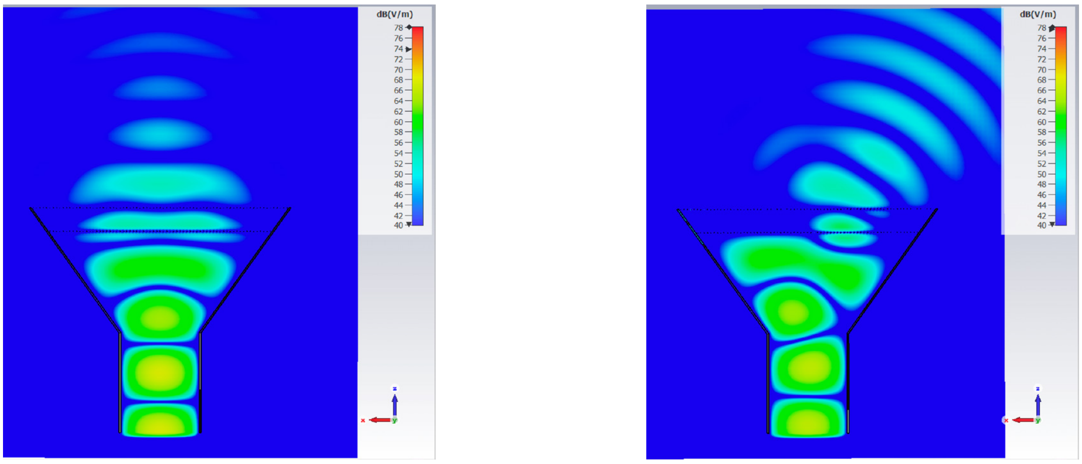

*Рис. 1. 3D модель исследуемой пирамидальной рупорной антенны*

Метаматериал представляет собой структуру из двух слоев тонких металлических проводников, размещенных в раскрыве антенны. Первый слой содержит 77 линий метаматериала (длина каждого металлического проводника 3,5 мм, расстояние между проводниками в слое 0,65 мм, что соответствует длине корпуса коммутирующих pin-диодов, расстояние между линиями 1 мм) на расстоянии в 7 мм в глубь апертуры помещен второй слой метаматериала, состоящий из 67 линий, имеющих аналогичные геометрические параметры. Применение второго слоя обусловлено необходимостью обеспечения более качественного ослабления поля в коммутируемой зоне. Внедрение дополнительных слоев метаматериала приводит к серьезному падению уровня КПД антенны, а также к существенным искажениям поля, вызванным постепенным уменьшением раскрыва рупора. Исследуемая конструкция является полностью симметричной в Н-плоскости рупора. Коммутация узлов выполнялась с использованием SPICE модели pin-диода BAR65-02L.

В процессе исследования было обнаружено, что управление диаграммой направленности возможно осуществлять на частотах 10,5–11 ГГц, при этом охватывается широкий диапазон изменения угла направления при сохранении уровня КПД выше 60 %. Характеристики диаграмм направленности для всех рассмотренных случаев приводятся в табл. 1.

## 2. Исследование влияния коммутаций линий метаматериала на картину диаграмм направленности

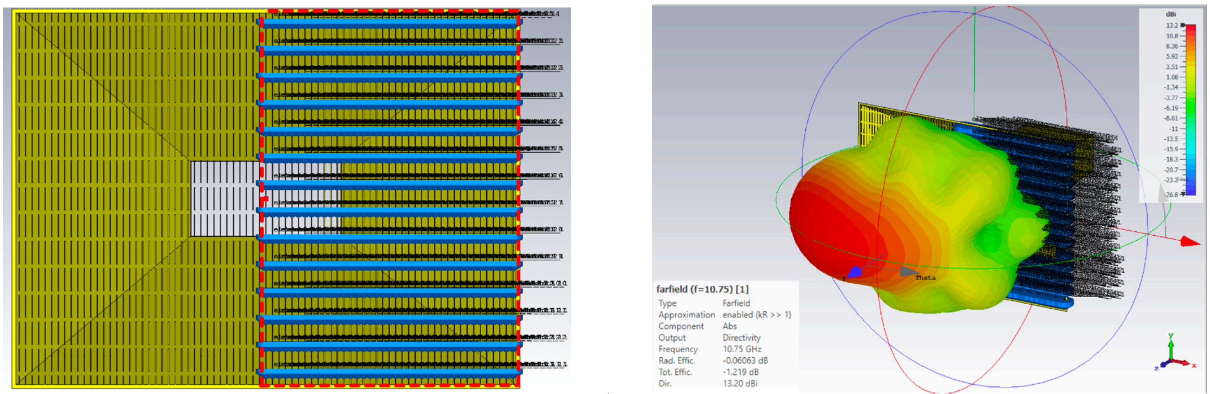
При выполнении коммутаций в линиях метаматериала происходит блокировка электромагнитного поля, при этом участки рупорной антенны, где коммутация отсутствует, свободно пропускают электромагнитную волну. Таким образом, это позволяет осуществить управление диаграммой направленности антенны путем коммутаций. На рис. 2 приведены картины Е-поля в главной плоскости рупорной антенны для случая, когда отсутствуют коммутации в метаматериале, и когда выполнена коммутация половины линий метаматериала.




*а)* *б)*

*Рис. 2. Картины E-поля (f = 10,75 ГГц), проходящего через рупорную антенну: а) при отсутствии коммутаций метаматериала; б) коммутация выполнена в половине слоев метаматериала*

Управление излучением возможно осуществлять в диапазоне частот от 10,5 ГГц до 11 ГГц, при этом необходимо производить коммутацию двух слоев метаматериала синхронно, так как это обеспечит блокировку электромагнитного поля в достаточной интенсивности, необходимой, чтобы избежать побочного излучения. Простейшим видом коммутации является включение половины метаматериала, при этом поворот диаграммы направленности происходит в H-плоскости рупорной антенны — рис. 3.

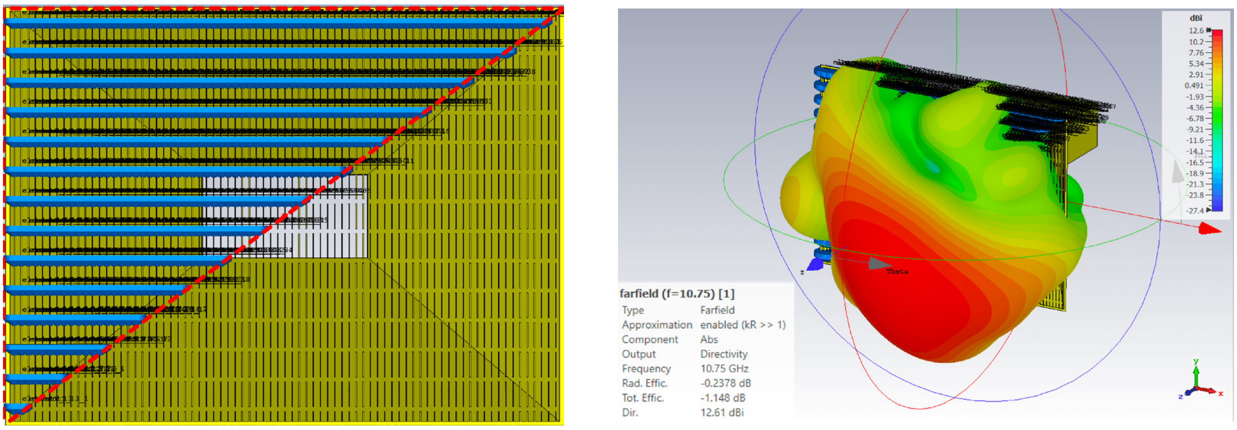



*а)* *б)*

*Рис. 3. Вид диаграммы направленности при выполнении коммутаций половины линий метаматериала: а) вид линий, в которых выполнена коммутация; б) 3D диаграмма направленности на частоте 10,75 ГГц*

По полученным диаграммам направленности можно заметить, что при коммутации слоев метаматериала в конфигурации, которая приведена на рис. 3-а происходит отклонение главного лепестка диаграммы направленности только в H-плоскости. Для поворота диаграммы направленности в противоположную сторону необходимо выполнить коммутацию другой стороны метаматериала, при этом, ввиду симметричности рассматриваемой конструкции, полученные значения будут аналогичны.

При выполнении коммутации линий по диагонали — рис. 4а, наблюдается сужение главного лепестка антенны, причем в данном случае коммутация верхней и нижней диагонали с одной стороны приводит к полному совпадению диаграмм направленности в обоих плоскостях, а в противоположной стороне приведет лишь к изменению направления излучения на противоположное.




*а) б)*

*Рис. 4. Вид диаграммы направленности при выполнении коммутации диагонали рупорной антенны: а) вид линий, в которых выполнена коммутация; б) 3D диаграмма направленности на частоте 10,75 ГГц*

По полученным результатам видно, что отклонение главного лепестка на частотах 10,75 ГГц и 11 ГГц происходит в обеих плоскостях рупорной антенны, при этом, в отличие от коммутации половины метаматериала (рис. 3а), ширина главного лепестка в Н-плоскости составляет менее 36°. Отличительной особенностью такого типа коммутации линий является повышение КПД антенны с повышением частоты, в отличие от ситуации с коммутацией половины линий в антенне.

Таблица 1

*Характеристики диаграмм направленности в зависимости от коммутируемой части метаматериала*

| Характеристика | Нет коммутаций (рис. 1) | Коммутация половины линий (рис. 3) | Коммутация диагонали (рис. 4) |
|---|---|---|---|
| КНД ($f$ = 10,5 ГГц, Н-плоскость), дБи | 13,3 | 12,7 | 11,3 |
| Направление излучения ($f$ = 10,5 ГГц, Н-плоскость), ° | 0 | 32 | 8 |
| Ширина главного лепестка ($f$ = 10,5 ГГц, Н-плоскость), ° | 33,8 | 57 | 35,5 |
| Направление излучения ($f$ = 10,5 ГГц, Е-плоскость), ° | 0 | 0 | 0 |
| КПД антенны ($f$ = 10,5 ГГц), % | 86 | 77 | 66 |
| КНД ($f$ = 10,75 ГГц, Н-плоскость), дБи | 12,8 | 13,2 | 11,9 |
| Направление излучения ($f$ = 10,75 ГГц, Н-плоскость), ° | 0 | 28 | 8 |
| Ширина главного лепестка ($f$ = 10,75 ГГц, Н-плоскость) | 37 | 52,1 | 30,4 |
| Направление излучения ($f$ = 10,75 ГГц, Е-плоскость), ° | 0 | 0 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| КПД антенны ($f$ = 10,75 ГГц), % | 86 | 76 | 77 |
| КНД ($f$ = 11 ГГц, Н-плоскость), дБи | 12,4 | 13,5 | 11 |
| Направление излучения ($f$ = 11 ГГц, Н-плоскость), ° | 0 | 25 | 10 |
| Ширина главного лепестка ($f$ = 11 ГГц, Н-плоскость), ° | 44,7 | 46,5 | 33,5 |
| Направление излучения ($f$ = 11 ГГц, Е-плоскость), ° | 0 | 0 | 7 |
| КПД антенны ($f$ = 11 ГГц), % | 84 | 72 | 82 |

## Заключение

В статье был рассмотрен активный метаматериал, который интегрирован в пирамидальную рупорную антенну. Коммутации в узлах метаматериала позволяют, с сохранением высокого уровня КПД, управлять диаграммой направленности, причем возможно производить управление в достаточно широких пределах. Так, применение предложенной конструкции двухслойного метаматериала позволяет добиться изменения картины электромагнитного поля, проходящего в волноводе. Обнаружено, что увеличение числа слоев метаматериала приводит к дополнительным потерям на отражение, значительному искажению поля, так как ввиду особенности конструкции пирамидального рупора происходит сужение апертуры антенны.

Таким образом, метаматериал позволяет достичь управления диаграммой направленности путем коммутаций линий, не прибегая к изменению геометрических характеристик антенны, что является главным преимуществом в применении метаматериалов в антеннах.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-57.2020.9

## Литература

1. *Barbuto M., Ramaccia D., Trotta F., Toscano A., Bilotti F.* Conical horn antennas with enhanced functionalities through the use of metamaterial concepts / M. Barbuto, D. Ramaccia, F. Trotta, A. Toscano, F. Bilotti // The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014). – 2014. – P. 36–40.

2. *Tan C. Y., Selvan K. T.* A Performance Comparison of a Ku-Band Conical Horn with an Inserted Cone-Sphere with Horns with an Integrated Dielectric Lens and Metamaterial Loading [Antenna Designer's Notebook] / C. Y. Tan, K. T. Selvan // in IEEE Antennas and Propagation Magazine. – 2011. – V. 53, no. 5 – P. 115–122.

3. *Patel C. A., Patel S. K.* Pyramidal horn antenna design loaded by metamaterial for performance enhancement / C. A. Patel, S. K. Patel // 2015 IEEE MTT-S International Conference on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization (NEMO). – 2015. – P. 1–4.

4. *Jiang T., Ning H., Zhou H., Hao W.* Zero Index Metamaterial for High Gain Array / T. Jiang, H. Ning, H. Zhou, W. Hao // 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – 2020 – P. 1–4.

5. *Hu B., Wu T., Cai Y., Zhang W., Zhang B.* A Novel Metamaterial-Based Planar Integrated Luneburg Lens Antenna With Wide Bandwidth and High Gain / B. Hu, T. Wu, Y. Cai, W. Zhang, B. Zhang // IEEE Access. – 2020. – V. 8 – P. 4708–4713.

6. *Wongsan R., Khamsalee P.* Hybrid Metamaterial Structure for Asymmetric Horn of Secondary Radar System / R. Wongsan, P. Khamsalee // 2019 7th International Electrical Engineering Congress (iEECON). – 2019. – P. 1–4.

7. *Luo S., Li Y., Jiang T., Li B.* FSS and Meta-material Based Low Mutual Coupling MIMO Antenna Array / S. Luo, Y. Li, T. Jiang, B. Li // 2019 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting. – 2019. – P. 725–726.

8. *Sabban A.* Small New Wearable Metamaterials Antennas for IOT, Medical and 5G Applications / A. Sabban // 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – 2020. – P. 1–5.

9. *Kanjanasit K., Sanesaowarod S., Homsup N.* EIT-Like Effect in Metamaterials based on Two-Layer Arrays for High-Gain Antennas / K. Kanjanasit, S. Sanesaowarod, N. Homsup // 2020 17th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON). – 2020. – P. 304–307.

10. *Supreeyatitikul N., Teerasuttakorn N.* Improved Isolation of a Dual-Band MIMO Antenna Using Modified S-SRRs for Millimeter-Wave Applications / N. Supreeyatitikul, N. Teerasuttakorn // 2020 17th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON). – 2020. – P. 388–391.

УДК 621.396

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗМЫКАЮЩИХ КОНДЕНСАТОРОВ НА РАБОЧИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТО-УПРАВЛЯЕМОГО МЕТАМАТЕРИАЛА

**Е. А. Ищенко, Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, Е. А. Рогозин, С. М. Федоров**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается метаматериал, который помещается в прямоугольный волновод с размерами 36x18,1 мм, выполняющий операцию изменения фазы проходящей волны путем коммутации pin-диодов. Чтобы разделить постоянную составляющую коммутирующего напряжения от переменной, так как pin-диоды коммутируются путем подачи на них постоянного напряжения, и, соответственно, обеспечить коммутацию только в требуемых узлах, в структуру метаматериала внедрялись конденсаторы емкостью 35 нФ. Для определения характеристик исследуемой конструкции применялся метод Вейланда. Полученные в ходе моделирования результаты содержат S-параметры системы, доказывающие возможность применения предложенного метаматериала в качестве волноводного фазовращателя.

**Ключевые слова:** управляемый метаматериал, фазовращатель, волновод, S-параметры, электромагнитное поле, метод Вейланда, фазы S-параметров.

## Введение

Метаматериалы получили широкое распространение в современных электродинамических структурах, так, на их основе строятся антенные системы с управляемыми характеристиками, волноводы с изменяемыми характеристиками проходящей электромагнитной волны. Примеры таких конструкций исследуются в научных работах [1–10], причем в [1–6] рассматриваются управляемые коммутацией метаматериалов антенные системы, а в [7–10] волноводы с различными типами интегрированных в конструкцию метаматериалов.

В работе [1] авторы рассматривают возможность управления орбитальным угловым моментом антенны путем выполнения коммутации pin-диодов. Результат исследования показал, что, выполняя коммутации, удается достичь изменения типа круговой поляризации антенны с правой на левую. Предложенная конструкция позволила добиться улучшения шумовых характеристик канала связи. Применяемые в конструкции pin-диоды имели эквивалентную конструкцию, которая представляет собой последовательное соединение сопротивления 2,1 Ом и индуктивности 0,6 нГн.

В работе [2] авторы рассматривают применение различных конструкций метаматериалов для беспроводных систем передачи информации, которые позволяют повысить безопасность применяемых в бытовых условиях устройств, так, внедрение метаматериала позволило достичь уменьшения излучения от антенных систем, а, соответственно, понизить показатель удельного коэффициента поглощения электромагнитной энергии (SAR), так как значительно уменьшились утечки магнитной и электрической энергии в процессе передачи электромагнитных волн.

В работе [3] рассматриваются поглотители электромагнитных волн, которые построены на основе ячеек, которые представляют собой метаматериал, поглощающий волны. Предложенная конструкция может быть применена для медицинских и военных целей. По полученным результатам моделирования и исследования реальной модели предложенной конструкции получено, что на целевых частотах возможно добиться высокого уровня поглощения электромагнитных волн, а также доказано, что достигается высокая корреляция результатов, полученных путем моделирования методом Вейланда и измерениями реальной конструкции.

В работе [4] предложена конструкция антенной системы с интегрированным в ее конструкцию метаматериалом, который позволяет выполнять управление характеристиками антенного элемента, не усложняя значительно конструкцию антенного элемента. При этом происходит улучшение характеристик скрытности антенной системы, так как метаматериал выступает в роли поглотителя электромагнитной энергии.

В работе [5] авторы рассматривают прямоугольную патч-антенну, в конструкцию которой интегрирован метаматериал, позволяющий добиться улучшения характеристик излучения, а, соответственно, и параметров антенной системы. При этом результаты моделирования показали высокую корреляцию с измерением реальной антенны. Также особенностью предложенной конструкции является то, что она изготовлена из полностью биоразлагаемых материалов.

В работе [6] авторы предлагают широкополосную антенну для мм-диапазона сетей пятого поколения. Для улучшения характеристик антенной системы в конструкцию был интегрирован резонансный метаматериал, который позволяет достичь уменьшения потерь при передаче волны, а также расширить рабочий диапазон частот.

В работе [7] рассматриваются различные виды конструкции волноводных фазовращателей, которые позволяют добиться изменения фазы протекающей волны в широких пределах. Различные конструкции структур, которые вносятся в волновод, при этом позволяют обеспечить различные уровни смещения фаз. Для исследования выполнялось моделирование с использованием метода Вейланда.

В работе [8] рассматривается сложная конструкция материала фазовращателя, которая используется в волноводе, при этом предложенная конструкция способна обеспечить работу конструкции при первых трех модах волны, протекающей по волноводу. Такая конструкция также позволяет выполнять функцию полосового фильтра.

В работе [9] рассматривается волновод с интегрированным в его конструкцию метаматериалом, коммутация в котором происходит за счет МЭМС структур. При моделировании были построены фазы S-параметров волновода, на которых отчетливо заметно, как происходит смещение фазы волны, проходящей по волноводу. Результаты моделирования показали, что предложенная конструкция фазовращателя с МЭМС структурами позволяет добиться требуемых целей.

В работе [10] рассматривается многослойный метаматериал, который благодаря изменению сопротивления позволяет наблюдать различные характеристики протекающей по нему волны, так как происходит фактическое сужение волновода вплоть до полной блокировки протекающих волн.

## 1. Исследование характеристик метаматериала в качестве волноводного фазовращателя

Для исследования был выбран метаматериал, который представляет собой решетку из проводящих ячеек в центр которых помещен конденсатор емкостью 35 нФ, что обеспечивает минимальное сопротивление на частотах работы. Исследуемая конструкция метаматериала приведена на рис. 1; в конструкцию интегрированы сосредоточенные элементы, которые заменяют собой конденсаторы емкостью 35 нФ.

При коммутации происходило замыкание центральных узлов в кристалле, причем замыкающие элементы представляли собой эквивалентные схемы pin-диодов, состоящие из последовательного соединения резистора сопротивлением 2,1 Ом и индуктивности 0,6 Гн, как в [1]. Коммутируемые узлы выделены на рис. 2.

В соответствии с размерами волновода была определена частота среза, которая составила 4,16 ГГц. Для исследования возможности использования предложенной конструкции в качестве волноводного фазовращателя рассмотрим протекание E-поля через структуру, а также построим графики фаз S-параметров волновода, причем данные параметры будут построены для случая, когда волна подается только в один порт питания — $S_{11}$ и $S_{21}$, при этом данными па-

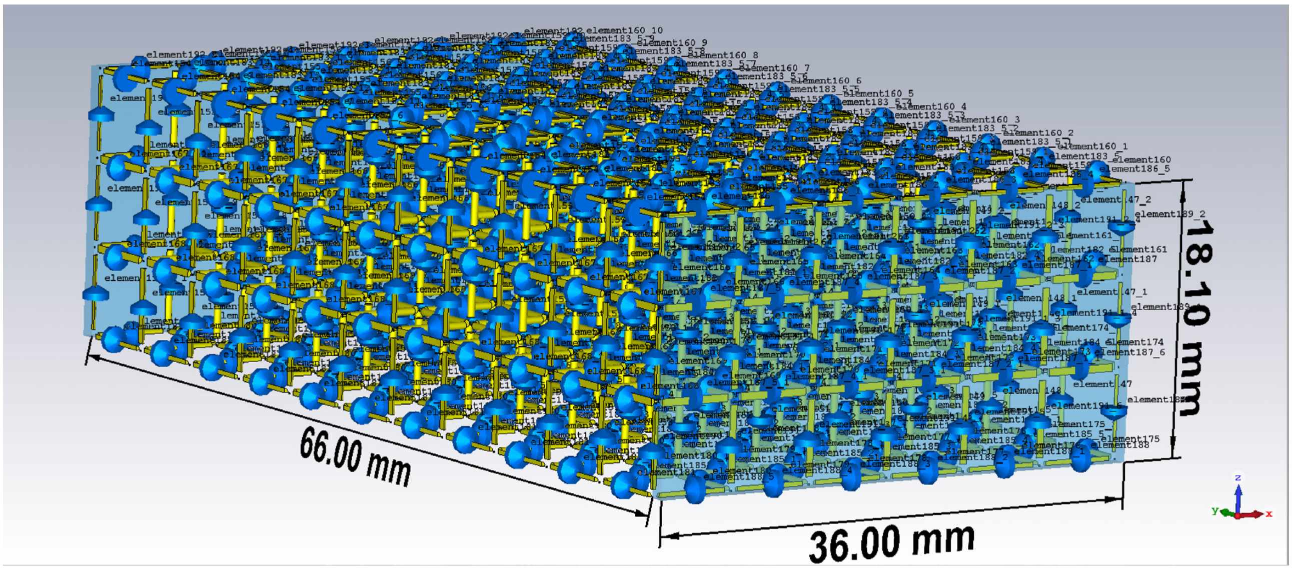



*Рис. 1. Исследуемая конструкция метаматериала*

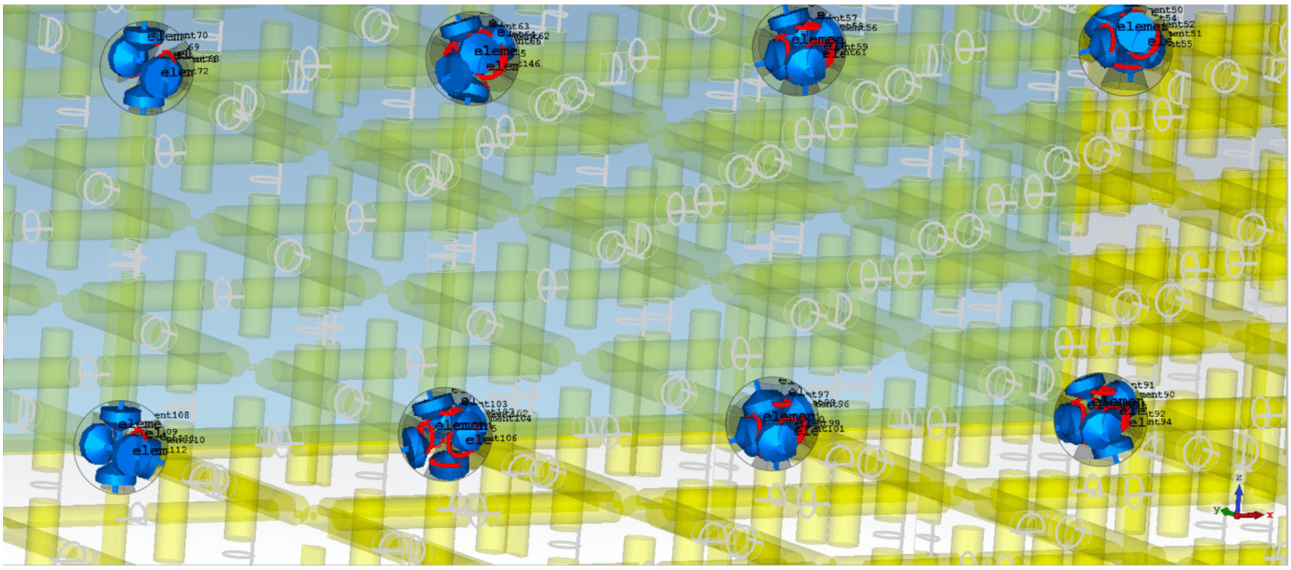


*Рис. 2. Коммутируемые узлы кристалла метаматериала*

раметрами можно будет воспользоваться для ситуации протекания энергии с выхода на вход (в обратном направлении), при этом все полученные результаты требуется отзеркалить, так как отсчет коммутируемых линий идет относительно входа.

Картины протекающего Е-поля через метаматериал приведены на рис. 3 — при отсутствии коммутаций, рис. 4 — коммутация третьей линии, рис. 5 — коммутация седьмой линии, рис. 6 — коммутация девятой линии.

Для расчета S-параметров волновода применялся метод Вейланда, причем особый интерес для волноводных фазовращетелей представляют именно фазы данных параметров, как в [9]. Фазы $S_{11}$ приведены на рис. 7, а для удобства их анализа была сформирована таблица 1. На графике приведены фазы для всех параметров при поочередной коммутации узлов, причем узлу с выполненной коммутацией соответствует индекс графика, так S1,1_1 — первая линия; S1,1_2 — вторая и т. д.

При этом видно, что коммутация линий метаматериала вызывает изменение фаз S-параметров в широком диапазоне, что показывает эффективность применения предложенной конструкции в качестве волноводного фазовращателя, что можно определить не только по графикам, но и по картинам электрического поля в волноводе.

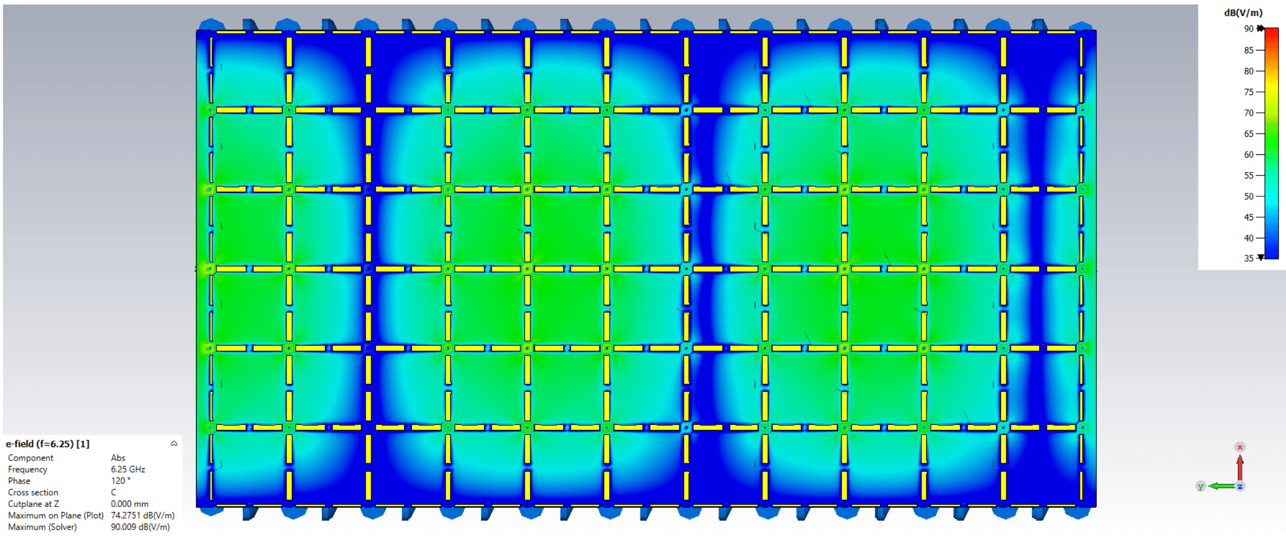



*Рис. 3. Картина E-поля при отсутствии коммутаций в метаматериале*

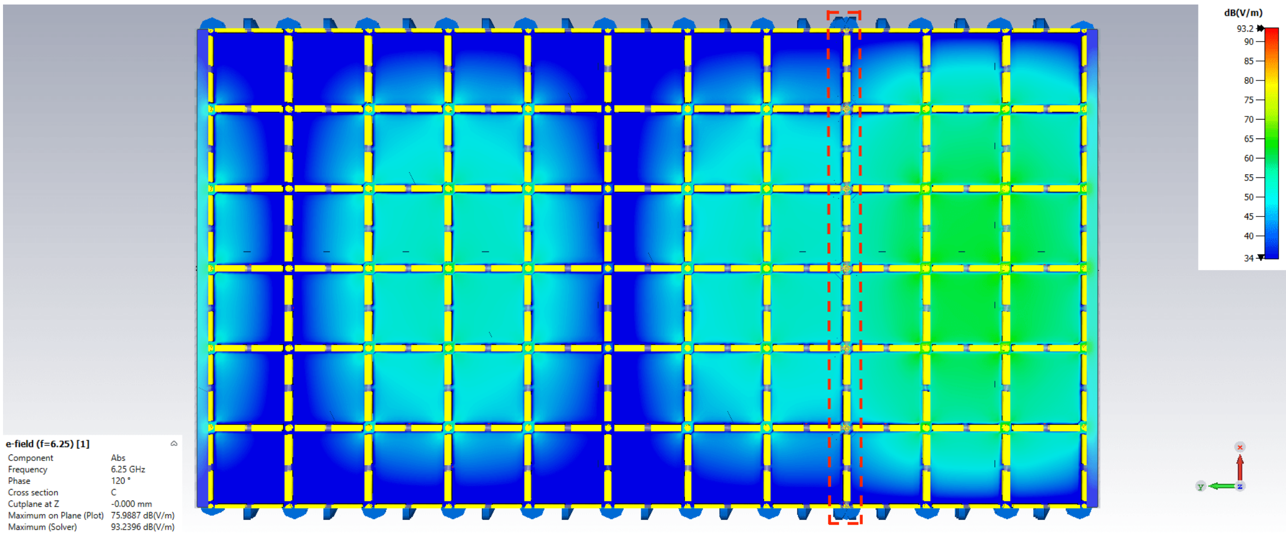



*Рис. 4. Картина E-поля при выполненной коммутации третьей линии*

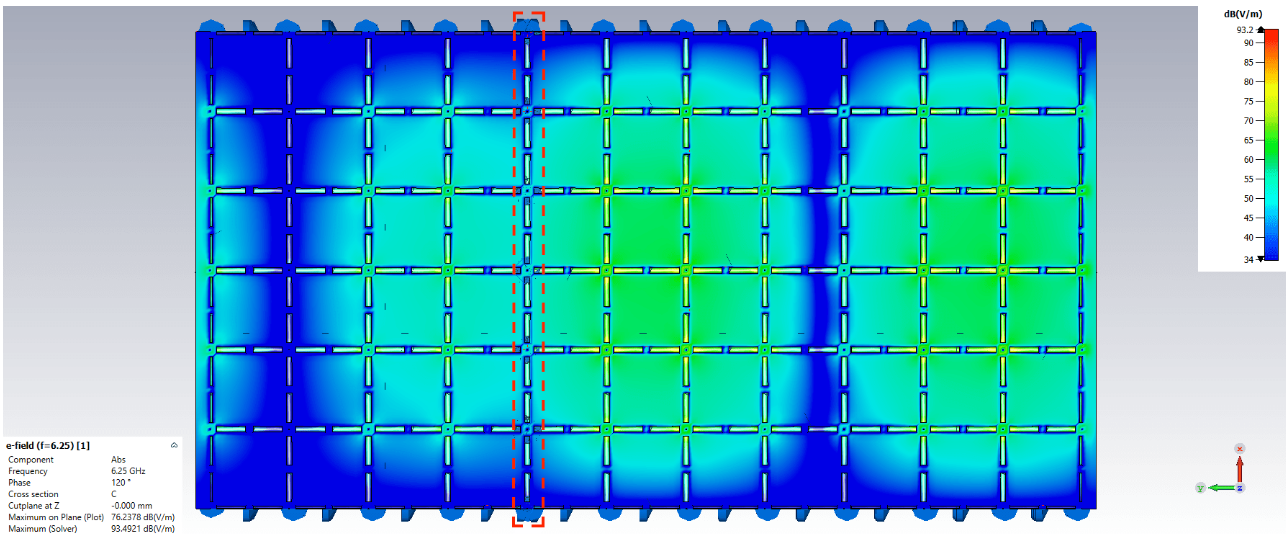



*Рис. 5. Картина E-поля при выполненной коммутации седьмой линии*

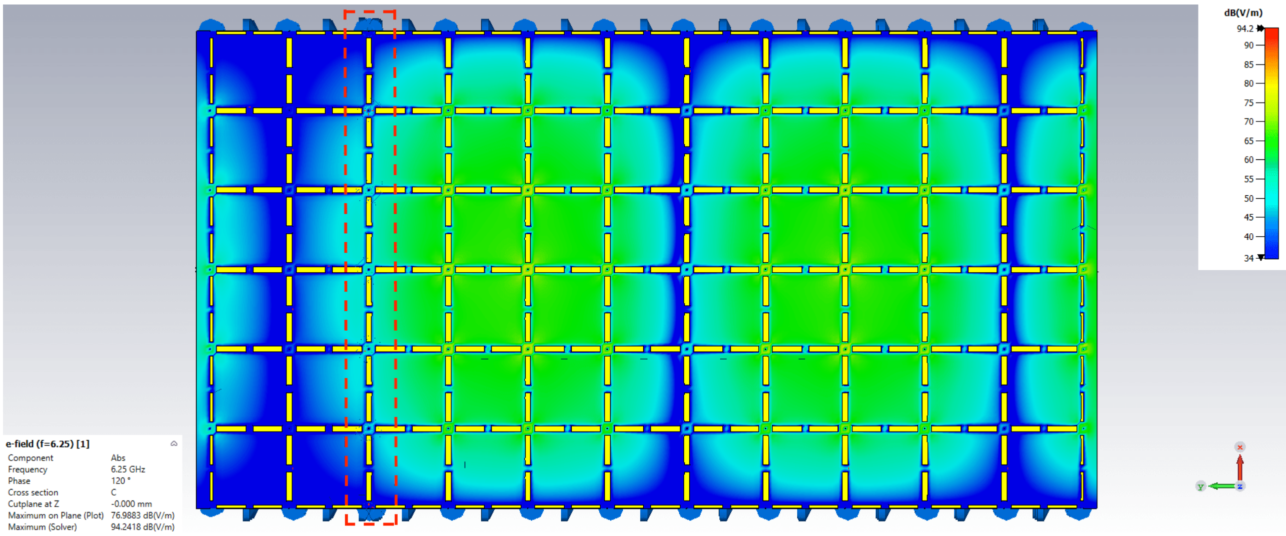



*Рис. 6. Картина E-поля при выполненной коммутации девятой линии*

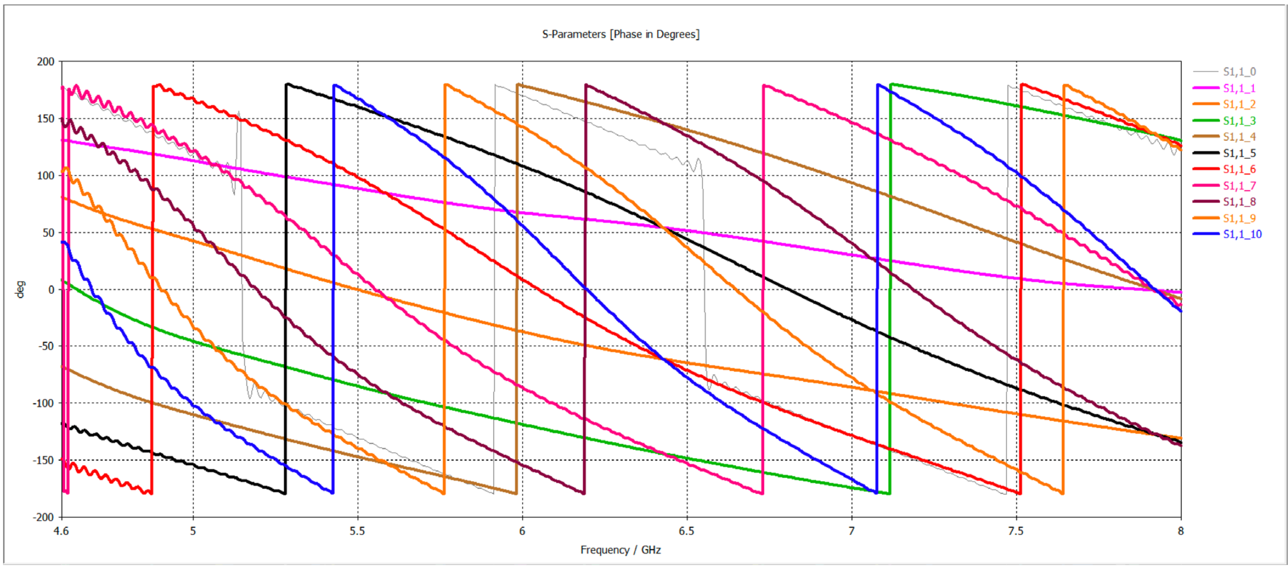



*Рис. 7. Фазы $S_{11}$ параметров исследуемого метаматериала*

Таблица 1

*Максимумы фаз $S_{11}$-параметров волновода с указанием частот их наблюдения*

| Замкнутые линии | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Пик фазы, град | 179.8<br>179.6<br>179.3 | 179.7 | 179.6 | 179.9 | 179.9 | 179.9 | 179.4<br>179.9 | 178.9<br>179.4 | 179.8<br>179.6<br>178.4 | 178.6<br>179.8<br>179.3 | 177.9<br>179.5<br>179.9 |
| Частота пика, ГГц | 4.58<br>5.92<br>7.47 | 4.07 | 4.54 | 7.12 | 5.98 | 5.28 | 4.89<br>7.51 | 4.64<br>6.73 | 4.43<br>6.19<br>8.33 | 4.32<br>5.76<br>7.65 | 4.24<br>5.43<br>7.08 |

Параметр $S_{21}$ связывает между собой вход и выход конструкции и позволяет определить параметры волны, при ее прохождении со входа на выход. Полученные графики приведены на рис. 8, а общие данные сведены в таблицу 2. Причем на рисунке отображены результаты сразу для всех случаев поочередной коммутации узлов в метаматериале, например, для первой линии — S2,1_1; второй — S2,1_2 и т. д.

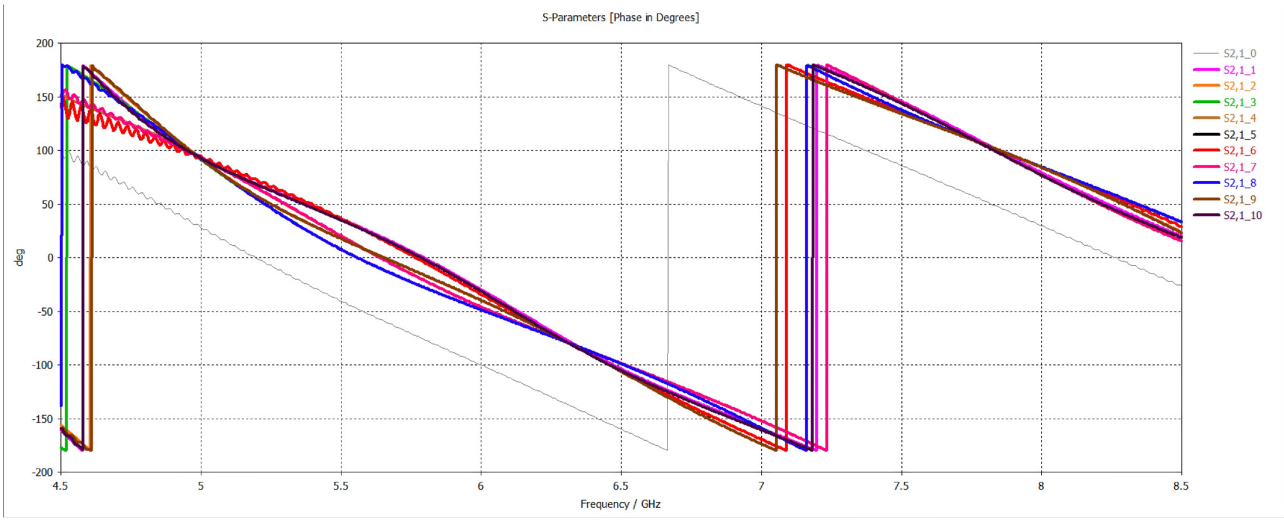



*Рис. 8. Фазы $S_{21}$ параметров исследуемого метаматериала*

Таблица 2

*Максимумы фаз $S_{21}$-параметров волновода с указанием частот их наблюдения*

| Замкнутые линии | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Пик фазы, град | 179.7 | 179.2<br>179.7 | 179.5<br>179.9 | 179.4<br>179.7 | 179.7 | 179.8 | 179.9 | 179.7 | 179.9<br>179.5 | 179.00<br>179.86 | 178.9<br>179.8 |
| Частота пика, ГГц | 6.67 | 4.58<br>7.19 | 4.61<br>7.06 | 4.52<br>7.16 | 7.24 | 7.09 | 7.09 | 7.24 | 4.50<br>7.20 | 4.61<br>7.06 | 4.58<br>7.20 |

Таким образом по полученным данным видно, что предложенная конструкция позволяет обеспечить изменение фазы проходящей через нее электромагнитной волны, причем управление фазой возможно осуществить коммутацией разных линий, которые входят в состав структуры метаматериала.

**Заключение**

По результатам исследования видно, что предложенную конструкцию метаматериала можно использовать в качестве волноводного фазовращателя. Управлять фазой волны необходимо коммутацией линий в метаматериале, а коммутация осуществляется путем замыкания pin-диодами узлов в решетках, для управления которыми требуется подавать постоянное напряжение. Для удобства реализации данной операции в конструкцию внедрялись конденсаторы, которые не позволяли совершить коммутацию в узлах, где это не требуется.

Таким образом, применение метаматериала позволяет осуществлять управление характеристиками электромагнитной волны без механических воздействий на структуру, а использование pin-диодов позволяет осуществлять быстрое изменение характеристик метаматериала, для достижения целевых значений.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-57.2020.9

**Литература**

1. *Baiyang L., Guoying L., Yuehui C., RongLin L.* An Orbital Angular Momentum (OAM) Mode Reconfigurable Antenna for Channel Capacity Improvement and Digital Data Encoding / L. Baiyang, L. Guoying, C. Yuehui, L. RongLin // Scientific Reports. – 2017. – no. 7.

2. *Lu C., Huang X., Rong C., Tao X., Zeng Y., Liu M.* A Dual-Band Negative Permeability and Near-Zero Permeability Metamaterials for Wireless Power Transfer System / C. Lu, X. Huang, C. Rong, X. Tao, Y. Zeng, M. Liu // in IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2020.

3. *Edries M., Mohamed H. A., Hekal S. S., El-Morsy M. A., Mansour H. A.* A New Compact Quad-Band Metamaterial Absorber Using Interlaced I/Square Resonators: Design, Fabrication, and Characterization / M. Edries, H. A. Mohamed, S. S. Hekal, M. A. El-Morsy, H. A. Mansour // IEEE Access. – 2020. – V. 8. – P. 143723–143733.

4. *Zhang Z., Yang S., Ma Y., Chen Y., Qu S.* Scattering Control of Wideband Phased Arrays Using Metamaterial Absorbers / Z. Zhang, S. Yang, Y. Ma, Y. Chen, S. Qu // 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – 2020. – P. 1–3.

5. *Serres G. K. F. et al.* Eco-Friendly Metamaterial Antenna for 2.4GHz WLAN Applications / G. K. F. Serres et al // 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – 2020. – P. 1–5.

6. *Feng B., He X., Cheng J., Sim C.* Dual-Wideband Dual-Polarized Metasurface Antenna Array for the 5G Millimeter Wave Communications Based on Characteristic Mode Theory / B. Feng, X. He, J. Cheng, C. Sim // in IEEE Access. – 2020. – V. 8. – P. 21589–21601.

7. *Palomares-Caballero Á., Alex-Amor A., Valenzuela-Valdés J., Padilla P.* Holey and pinned structures comparison for waveguide phase shifters / Á. Palomares-Caballero, A. Alex-Amor, J. Valenzuela-Valdés, P. Padilla // 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – 2020. – P. 1–5.

8. *Moghaddam M. K. and Fleury R.* A Subwavelength Microwave Bandpass Filter Based on a Chiral Waveguide, 2020 14th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), Copenhagen, Denmark. – 2020. – P. 1–5.

9. *Wu Z., Liu J.* A new design of MEMS coplanar waveguide phase shifter / Z. Wu, J. Liu // 2018 International Applied Computational Electromagnetics Society Symposium. – 2018. – P. 1–2.

10. *Ozgun O., Kuzuoglu M.* Utilization of Anisotropic Metamaterial Layers in Waveguide Miniaturization and Transitions / O. Ozgun, M. Kuzuoglu // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. – 2007. – V. 17, no. 11. – P. 754–756.

УДК 004.94

# НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ ГЕНЕРАЦИИ И ПЕРЕНОСА ГОРЯЩИХ И ТЛЕЮЩИХ ЧАСТИЦ ПРИРОДНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ И МЕТОДОВ ИХ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

**Д. П. Касымов[1,2], К. Е. Орлов[1], М. В. Агафонцев[1,2], П. С. Мартынов[1,2]**

*[1]Томский государственный университет*
*[2]Институт оптики атмосферы им. академика В. Е. Зуева СО РАН, г. Томск*

**Аннотация.** Горящие и тлеющие частицы природного происхождения являются одной из главных причин распространения пожаров во всем мире. В данной работе будут рассмотрены методы и подходы изучения генерации и переноса, горящих и тлеющих частиц природного происхождения. Данные методы уже были использованы в ряде полевых и лабораторных экспериментов, в основу которых ложится применение различного высококачественного оборудования, как например скоростная ИК-камера. Данные результаты экспериментов будут использованы для построения базы данных характеристик горящих частиц для пожаров различной интенсивности, с целью их оперативного предотвращения.
**Ключевые слова:** горящие и тлеющие частицы, ифракрасная термография, эксперимент, программный комплекс, трекер, детектор.

## Введение

В настоящее время существует множество математических моделей лесных пожаров, но только небольшая их часть учитывает вклад горящих и тлеющих частиц в распространение пожара. При этом расчеты основываются на приблизительных характеристиках, так как точных данных до сих пор не существует. Горящие и тлеющие частицы природного происхождения в подобных пожарах служат катализатором при распространении очага пожара, захватывая все большие территории. Именно поэтому необходимо иметь спектр различных моделей или подходов, с целью прогнозирования возможных очагов пожара и для дальнейшего предотвращения катастрофы. В данной работе будут рассмотрены следующие методы: подъем и подветренный перенос модельных частиц [1], система «Emberometer» для количественной оценки угрозы воздействия горящих и тлеющих частиц природного происхождения строительные и конструкционные материалы [2] и экспериментальный программный комплекс детектирования и последующего аннотирования частиц по тепловому видео [3].

## 1. Подходы экспериментального изучения генерации и переноса частиц

### *1.1. Лофтинг и подветренный перенос [1]*

Испытания проводились в испытательном центре Университета Клемсона на аэродинамической трубе, которая классифицируется как низкоскоростная аэродинамическая труба граничного слоя, так как максимальная достижимая скорость составляет менее 100 м/с [4]. Следовательно, эффекты сжимаемости потока в экспериментах ничтожны или очень малы. Испытательный участок состоит из открытого граничного слоя шириной 3,05 м и высотой 2,03 м с отбором 20 м. Ветровой поток генерируется двумя вентиляторами диаметром 1,8 м, которые управляются регулируемыми преобразователями частоты. Поток пропускается через сотовую решетку, набор экранов и сужение для получения равномерного воздушного притока с низкой интенсивностью турбулентности. Для того чтобы граничный слой был турбулентным, использовалась комбинация шпилечной доски и элементов с шероховатой поверхностью (рис. 1).

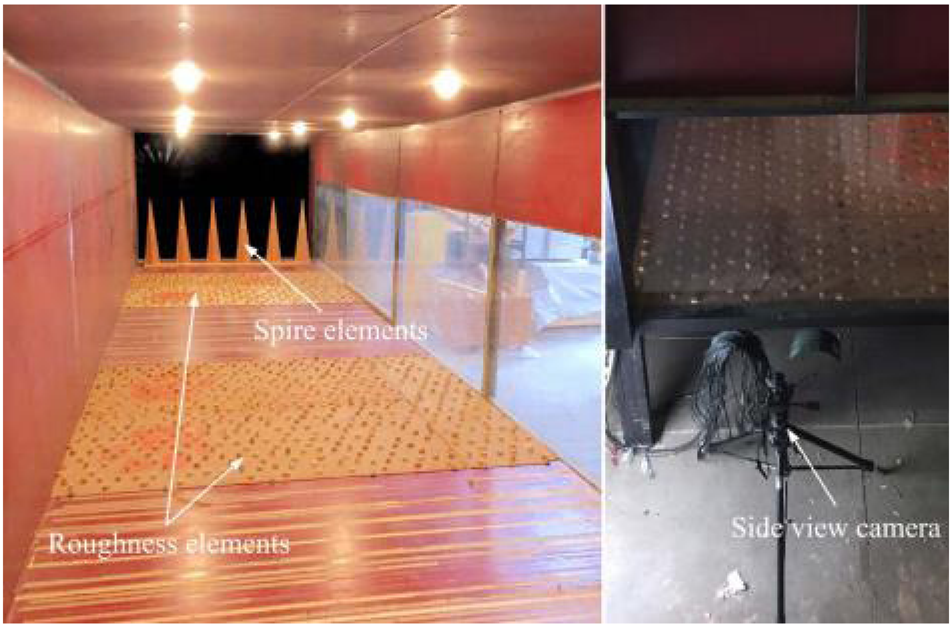



*Рис. 1. Установка: (Слева) внутри камеры аэродинамической трубы, где установлены элементы шероховатой поверхности и элементы шпиля; (справа) положение камеры на вид сбоку показывает точку выпуска (расположение струи) [1]*

Авторы [1] провели эксперименты по сочетанию трех опорных скоростей пограничного слоя и трех осевых скоростей струи с целью моделирования поля скоростей, вызванного взаимодействием огненного шлейфа и пограничного слоя. Генерируемые поля скоростей измеряются с помощью сверхпрочного термоанемометра Extech — 407112 с горячей проволокой, который имеет разрешение ± 0,1 м/с в диапазоне 0,2–20 м/с. Что касается пограничного слоя, то измерения скорости проводятся на осевой линии испытательного участка аэродинамической трубы, на 25 см выше осевой линии струи в момент ее остановки [1]. Аналогичным образом, профили осевой и радиальной скоростей струи были измерены в условиях отсутствия ветра. Скорости поперечного сечения были измерены на расстоянии 0,138 м от выхода реактивного сопла, где поперечное сечение струи находится на одном уровне с полом аэродинамической трубы. Это небольшое пространство используется для выпуска горящих частиц.

Подъем и перенос по ветру модельных частиц был зафиксирован сбоку с помощью камеры, установленной перпендикулярно осевой линии аэродинамической трубы. В среде MATLAB был разработан и реализован алгоритм обработки изображений, позволяющий фиксировать полные траектории движения тлеющих частиц, а также максимальную высоту подъема и расстояние до них с подветренной стороны. После калибровки были записаны видеозаписи того, как модели частиц поднимались и транспортировались. В каждом наборе модели горящих частиц выпускались не менее чем через 10 секунд после включения камеры. Поскольку запись велась с частотой 60 кадров в секунду, это обеспечивало достаточное количество кадров для построения фонового изображения. Затем частицы были выпущены примерно из центра струи с помощью пинцета таким образом, чтобы поле потока струи было нарушено как можно меньше. Для каждой операции высвобождения начальные углы каждой модели частицы изменяются случайным образом. Каждый набор экспериментов занимал от 8 до 11 минут, чтобы зафиксировать подъем и перенос 200 образцов с подветренной стороны [1].

### 1.2. Система «Emberometer» для оценки угрозы воздействия горящих частиц [2]

Схематическое изображение системы представлены на рис. 2.

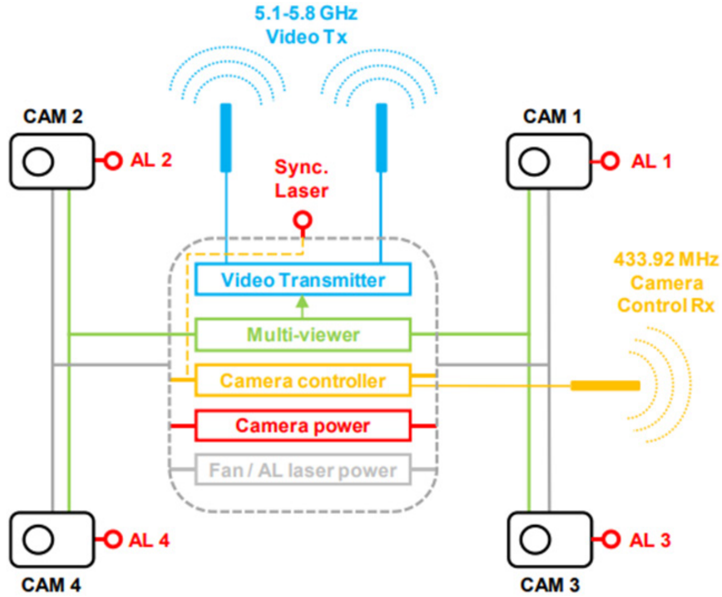


*Рис. 2 Схематическое изображение системы 3D-PTV / PSR (AL.: Лазер Выравнивания) [2]*

Измерительное устройство, известное как «Emberometer», состоит из четырех компактных камер потребительского класса (Sony DS-RX10 M3), направленных в центр контрольного объема (~2 м$^3$), расположенного примерно в 1,2 м от плоскости камеры. Все камеры работают с минимальным фокусным расстоянием (f = 8,8 мм) и наибольшей диафрагмой (f/2,4). Фокусировка выполняется в центре контрольного объема, легко визуализируемого как пересечение четырех коллимированных лазеров (серии CPS, Thorlabs), тщательно выровненных во время калибровки. Камеры одновременно записывают видео высокой четкости (HD) (1080p, 120 Гц) переноса по воздуху горящих частиц, перемещающихся в пределах объема измерения. Запуск камеры осуществляется с помощью специально разработанного центра управления (CAMremote-4CAM, VP-Systems), который может дистанционно управляться пользователями (RF 433.92 МГц, диапазон ~2.4 км) [2]. Центр управления также работает с лазерным модулем, установленным для доставки точки, видимой со всех видов камеры в начале каждой последовательности записи. Исчезновение лазерной точки используется для последующей синхронизации видеопотоков по четырем камерам во времени. Это очень важно, так как каждая камера имеет свое собственное время отклика, даже если начальное событие запуска является общим. Правильность синхронизации видео было проверено путем отображения счетчика миллисекунд и обнаружена в промежутке времени между двумя последовательными кадрами.

3D отслеживание горящих и тлеющих частиц применяется следующий набор операций [2]:

1. *Калибровка системы 3D-PTV*. Относится к пространственной калибровке системы 3D. Создается изображение 3D-объекта, и создаются файлы ориентации камеры. Они содержат важную информацию, относящуюся к внешним параметрам камеры (положения и углы камер относительно выбранной точки отсчета в измерительном объеме) и внутренним параметрам (величины, относящиеся к модели отверстия, используемой для представления камер, и ошибки позиционирования на датчиках камеры, например, из-за оптических искажений, и т. д.).

2. *Обнаружение частиц*. Частицы обнаруживаются с помощью оператора порога интенсивности. Координаты центра частицы (найденные с помощью центроидного оператора, взвешенного по интенсивности пикселей) перечислены для каждого 2D-изображения.

3. *Процедура соответствия*. Установление соответствий частиц между различными видами камер: это делается с использованием метода пересечения эпиполярных линий, более подробную информацию можно найти в [5].

4. *Вычисление 3D координат частиц*.

5. *Отслеживание частиц*. Использование информации, найденной как в пространствах 2D-изображений (2D-изображение с каждой камеры), так и в пространстве 3D-объектов (предварительно вычисленные 3D-координаты частиц).

Шаги с 1 по 5 обеспечивают отображение траекторий частиц в измерительном объеме с временным разрешением. Обратите внимание, что в настоящей работе частицы находятся в состоянии тлеющего горения и поэтому излучают сильное оранжево-желтое свечение. Это уменьшает потребность в освещении, обычно требуемом в обычных экспериментах по отслеживанию частиц для визуализации трассировщиков. Шаг 2 применяется здесь без какой-либо двусмысленности, т. е. частицы хорошо отличается от фоновых элементов.

Реконструкция 3D формы частиц основана на мультипроекционном методе визуализации, часто называемом визуальным методом оболочки [6]. Силуэт частицы, полученный на 2D изображении, проецируется обратно в измерительное пространство с использованием известных параметров ориентации камеры (полученных на этапе калибровки трекинга) и калибровочной информации о размерах. Может быть сформирован сплошной проекционный конус, берущий свое начало от оптического центра камеры и ограниченный контуром частицы обратно проецируемого силуэта. Этот процесс затем повторяется с других точек зрения (т. е., в данном случае, 3 других вида камеры). Пересечение всех твердых конусов, определяет форму 3D-частицы, которая соответствует самой большой объемной области, которая дала бы идентичные силуэты как частица, наблюдаемая из каждого различного 2D-вида, показанного на рис. 3 [2].

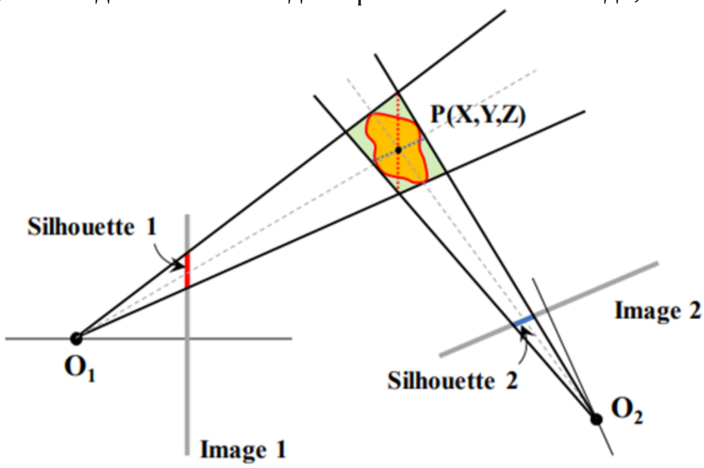



*Рис. 3. Упрощенный 2D-эскиз, иллюстрирующий визуальный метод восстановления формы 3D-частиц (здесь рассматриваются только 2 камеры; Oi: центры перспективы камеры, X, Y и Z: 3D координаты центроида частицы) [2]*

### *1.3 Программный комплекс на основе метода «Blob detection»*

Сотрудники ТГУ проводили серии экспериментов с использованием генератора горящих и тлеющих частиц, который имитирует перенос частиц в зависимости от воздушного потока и характеристик частиц (состав, плотность, масса, количество). Для данных параметров эксперимента зафиксировано постоянное воспламенение оседающими частицами смоделированного участка напочвенного покрова. Такие показатели как температура, скорость, размеры и траектория полета частиц характеризовались при помощи бесконтактной ИК-диагностики с использованием скоростных ИК-камер (JADE J530SB, X6530sc). Предварительные результаты показали, что максимальная температура частиц составила около 600 °С, средняя величина скорости движения частиц составила 4,0 м/с [7]. Такие данные были получены при помощи зарегистрированных последовательностей скоростных термограмм и специального программного обеспечения, которое регистрирует, отслеживает и дает характеристику о горящих частицах, образованных в результате различных пожаров [3].

Для генерации горящих и тлеющих частиц использовалась уникальная установка «Огненный Дракон» [7]. В качестве частиц были использованы частицы природного происхождения (кора и веточки сосны), а также древесные пеллеты (древесные топливные гранулы). Размеры частиц были выбраны в соответствии с данными натурных экспериментов.

Имеющиеся генераторы частиц позволяют генерировать частицы, близкие по характеристикам к реальным пожарам. И данные подходы могут быть использованы для тестирования алгоритмов детектирования и трекинга частиц на тепловизионном видео. Однако следует отметить, что характерным недостатком всех представленных устройств является отсутствие тестирования генерируемых ими частиц и потоков на предмет соответствия той или иной интенсивности пожара. И на данный момент это не представляется возможным, т.к. эта информация отсутствует.

Программное обеспечение, основанное на методе «Blob detection», который заключается в детектировании зон в цифровом ИК-изображении по локальным максимумам в окрестности частиц с заданной температурой или энергетической яркости, которая выделяется на сером фоне термограммы и далее по последовательности. На рис. 4 представлен результат компьютерной обработки термограммы пролетающих частиц.

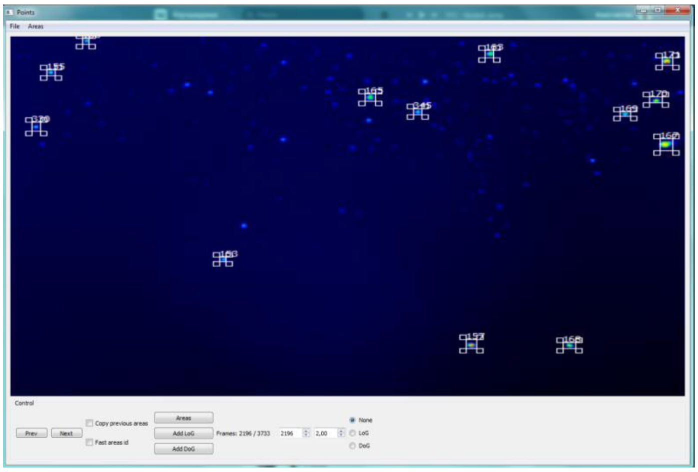



*Рис. 4. Пример работы программного комплекса*

Для обнаружения горящих частиц на термограммах были протестированы различные алгоритмы детекторов. Разработаны и протестированы различные алгоритмы для отслеживания частиц. Также для работы с программным комплексом и создания базы аннотированных видеороликов был разработан графический интерфейс пользователя (GUI). GUI позволяет осуществлять различные манипуляции с кадрами, запускать выбранный детектор и трекер с заданными параметрами, а также генерировать результаты работы трекера в формате видеоролика.

Дальнейшая работа будет направлена на расширение базы аннотированных видеороликов и улучшения точности выбранных алгоритмов детектора и трекера.

## Заключение

Рассмотрев данные методы, можно сделать вывод о том, что все три метода даже на данных стадиях разработки позволяют эффективно изучать горящие и тлеющие частицы природного происхождения. В данных методах везде использовались генераторы горящих и тлеющих частиц. Метод, основанный на подъеме и подветренном переносе частиц, опираясь на свои алгоритмы, дает полноценный видеоряд с зафиксированной траекторией и высотой движения сгенерированных частиц, когда как система «Emberometer» моделирует саму частицу, позволяя изучать её характеристики до и после экспериментов. Программный комплекс, созданный в ТГУ, в свою очередь позволяет отслеживать как процесс генерации частиц, так и траекторию переноса этих частиц.

В дальнейшем для тестирования и верификации разрабатываемого программного комплекса будет использован комплексный теоретико-экспериментальный подход с применением методов теории планирования эксперимента, теории подобия и современных методов математического моделирования. В частности, будет проведено физическое моделирование переноса горящих частиц в лабораторных и полунатурных условиях в широком диапазоне параметров, с целью доработки и модификации создаваемого комплекса.

**Благодарности**

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-10068).

**Литература**

1. *Tohidi, A.* Comprehensive wind tunnel experiments of lofting and downwind transport of non-combusting rod-like model firebrands during firebrand shower scenarios / A. Tohidi, Nigel B. K. // Fire Safety Journal. – 2017. – V. 90. – P. 95–111.
2. *Bouvet, N.* On the use of time-resolved three-dimensional diagnostics to characterize firebrand showers in the WUI / N. Bouvet [et al.] // Advances in Forest Fire Research. – 2018. – P. 826–836.
3. *Filkov, A*. Particle Tracking and Detection Software for Firebrands Characterization in Wildland Fires / A. Filkov, S. Prohanov // Fire Technol. – 2019. – № 55. – P. 817–836.
4. *Tavoularis, S.* Measurement in Fluid Mechanics / Cambridge University Press, England, 2005.
5. *Luhmann, T.* Close Range Photogrammetry and 3D Imaging / S. Robson, S. Kyle, J. Boehm. – 2014.
6. *Laurentini, A*. Visual hull concept for silhouette-based image understanding // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1994. – 16. – P. 150–162.
7. *Касымов, Д. П.* Экспериментальная установка по генерации горящих частиц для исследования распространения природного пожара / Д. П. Касымов, В. В. Перминов, В. В. Рейно, А. И. Фильков, Е. Л. Лобода // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2017. – Т. 60, № 12-2. – С. 107–112.

УДК 004.94

# МОДЕЛЬ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕВЕРСНОГО ПОДХОДА

**И. И. Каширская**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается модель бизнес-процессов получения объекта с заданными характеристиками с использованием реверсного подхода.

**Ключевые слова:** бизнес-процессы, моделирование бизнес-процессов, проектирование бизнес-процессов, процессный подход, реверсный подход, реверсная процедура, построение траекторий обучения.

Процессный подход является наиболее действенным методом организации эффективной работы. Суть процессного подхода – представление деятельности как набора взаимосвязанных бизнес-процессов. Обычно бизнес-процесс определяется как последовательность действий, направленная на получение заданного результата, ценного для организации [1].

Любые процессы могут быть представлены в виде структурной модели: совокупности процессных звеньев и связей между ними. В нашем случае звенья будут представлять собой свойства описываемого объекта, а связи между ними — действия, с помощью которых одно свойство преобразовывается в другое.

В классическом варианте модель деятельности описывается как прямая последовательность переходов от начального состояния системы до целевого состояния системы [2]. Но зачастую прямое проектирование может быть либо слишком сложным, либо неприемлемо затратным, поэтому предлагается обратный (реверсный) процесс, заключающий в проходе от конечной модели объекта до получения начальной модели объекта.

В результате анализа предметной области создается описание множества свойств и множества действий. С помощью экспертных мнений формируется множество переходов одного свойства в другое. Описывается конечная модель объекта, а затем с помощью обратного прохода по цепочкам свойств-действий формируется начальная модель объекта и перечень действий, необходимых для получения из нее конечной модели. Затем возможно оценить целесообразность и затратность совершения деятельности.

Набор всех возможных свойств объекта будет представлен множеством $S = \{S^1, ..., S^N\}$, где $S^i$ — множество свойств $i$-го уровня детализации, а $N$ — количество уровней детализации.

Например, при построении программ обучения уровень детализации может быть определен как набор дисциплин или набор разделов дисциплин или набор тем или набор подтем. А конкретное свойство может быть для разных уровней детализации описано как «умение пользоваться редактором растровой графики» или более детально — «умение создавать векторное выделение объекта в растровом редакторе» или «умение пользоваться быстрой маской».

Определим как множество свойств заданного уровня детализации множество $S^i = \{s_0^i, ..., s_N^i\}$, где элемент $s_j^i$ $(j = 1..N)$ представляет собой $j$-е свойство $i$-го уровня детализации, а $N$ — количество свойств $i$-го уровня. Элемент $s_0^i$ является особым «пустым» свойством — например, «отсутствие требования некоторых начальных навыков».

Для преобразования свойств одного в другое создается множество $D$, описывающее набор действий, переводящих одно свойство в другое (например, реализация какой-либо функции программного обеспечения (ПО) или некоторая дисциплина, мастер-класс, решение конкретного задания или название изучаемой темы).

Множество $D = \{d_o, ..., d_N\}$, где элемент $d_i$ $(i = 1..N)$ представляет собой $i$-е действие, а $N$ — количество таких действий. Элемент $d_0$ является особым «пустым» действием, которое будет использоваться в том случае, если набор необходимых действий не важен при получения результата процесса, а результатом процесса должен быть набор всех полученных свойств объекта в промежуточных состояниях.

Создадим множество векторов $P = \{p_1, ..., p_N\}$, где $p_t = \{s_j^i, d_m, s_r^i\}$ $(t = 1 \dots N)$. Данное множество описывает все преобразования одного свойства в другое с помощью некоторого действия. Заметим, что $d_m$ может быть использовано неограниченное количество раз для разных значений $j$ и $r$, то есть с помощью одинакового действия могут быть преобразованы друг в друга абсолютно разные пары свойств.

При выборе действия $d_m$ из множества $D$, преобразующего свойство $s_j^i$ в свойство $s_r^i$, необходимо учитывать качественные характеристики обоих свойств.

Так, $s_{jk}^i$ — $j$-е свойство $i$-го уровня детализации, где $k$ является его качественной характеристикой и рассчитывается с помощью функции $K(s_j^i)$, определяемой далее. Поэтому $d_m$ преобразует свойство $s_{jk}^i$ в свойство $s_r^i$, где $k$ и $n$ — качественные характеристики свойств $s_j^i$ и $s_r^i$ соответственно.

Предполагается, что если действие $d_m$ преобразовывает свойство $s_{jk}^i$ в свойство $s_r^i$ (при этом $k$ по отношению к $n$ может быть любым), то это же действие может быть использовано и для получения свойства $s_{jp}^i$, где качественные характеристики $p$ принимают значения от 1 до $n-1$.

Таким образом, множество $P$ в окончательном варианте будет представлять собой $P = \{p_1, \dots, p_N\}$, где $p_t = \{s_{jk}^i, d_m, s_{r1}^i\}, ..., \{s_{jk}^i, d_m, s_{rN}^i\}$ $(t = 1 \dots N)$.

Определим оценочную функцию $K(x)$, где $x$ — некоторое свойство конкретного уровня детализации. Функция возвращает качественную характеристику переданного параметра — вариацию или меру свойства (например, степень овладения данным свойством — перечисление «*слабое, удовлетворительное, хорошее, полное*» или процентное значение). В данной работе $K(x) \in [0,1]$. При подсчете характеристики используется метод экспертных оценок [3–5].

Существует некоторое количество экспертов $M$, каждый $i$-й эксперт характеризуется коэффициентом квалификации $q_i$ (его значения от 0 до 1), который либо задается ЛПР (лицом, принимающим решение), либо рассчитывается с помощью экспертных оценок уровня компетентности эксперта.

Для формирования конечного набора $S'$ (набор свойств, описывающих конечное состояние объекта) используется мнение экспертов, выраженное в виде оценки необходимости каждого из свойств в наборе. Под конечным набором будем подразумевать набор $i$-го уровня детализации; таким образом, конечный набор $S' \subset S^i$.

Определим функцию $U(l, s_{jk}^i)$ как численную характеристику уверенности $l$-го эксперта в необходимости свойства $s_{jk}^i$, где $i$ — уровень детализации, $j$ — номер свойства, а $k$ — качественная характеристика свойства. $U(l, s_{jk}^i) \in [0,1]$. Таким образом, свойство $s_j$ попадает в множество $S'$, если выполняется неравенство формулы

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} U\left(l, s_{jk}^i\right)}{N} \geq M,$$

где $M \in [0.5, 1]$ и подбирается эмпирически ЛПР.

Для более точной $M$ (оценки важности свойства $s_{jk}^i$) или в случае несогласованности мнений экспертов можно использовать различные меры разброса [6].

В результате реверсного прохода от элементов множества $S'$ с помощью элементов-векторов множества $P$ будет сформировано возможное решение, представленное множеством $B$ (набор начальных свойств объекта; $B \subset S^i$), множеством $D'$ (набор действий; $D' \subset D^i$) и, в случае необходимости, множеством промежуточных свойств объекта $I$ $(I \subset S^i)$.

Множество $B$ представляет собой вектор $\{b_1, ..., b_N\}$, полученный результирующей выборкой по первому элементу векторов из множества $P$ (также в выборке удаляются дубликаты).

Если $b_x = s^i_{jk}$, $b_y = s^i_{jn}$, $b_z = s^i_{jm}$, и при этом $k < n < m$, то из выборки будет удалены элементы $b_y$ и $b_z$, т. е. в результирующую выборку войдет $s^i_{jh}$, где $h = \min(k, n, m)$. Упорядочивание элементов вектора происходит в обратном (для порядка реверсного прохода) порядке.

Множество $D'$ представляет собой единичный элемент $\{d_0\}$ (если, по решению ЛПР, набор действий не является необходимым, но необходим набор промежуточных состояний $I$) или вектор $\{d_1,...,d_N\}$, полученный результирующей выборкой по $d$ из множества $P$ (также в выборке удаляются дубликаты). Упорядочивание элементов вектора происходит в обратном (для порядка реверсного прохода) порядке.

Множество $I$ представляет собой вектор $\{i_1,...,i_N\}$, полученный результирующей выборкой по первому и третьему элементу векторов из множества $P$ (также в выборке удаляются дубликаты). Если $i_x = s^i_{jk}$, $i_y = s^i_{jn}$, $i_z = s^i_{jm}$, и при этом $k < n < m$, то из выборки будет удалены элементы $i_x$ и $i_y$, т. е. в результирующую выборку войдет $s^i_{jh}$, где $h = \max(k, n, m)$. Упорядочивание элементов вектора происходит в обратном (для порядка реверсного прохода) порядке.

Для формирования набора свойств, набора действий для преобразования свойств и конечного состояния объекта используются экспертные оценки [47].

При реализации реверсного подхода эксперт принимает участие в формировании множества $S$ (набора всех возможных свойств объекта), множества $D$ (набора всех возможных действий по преобразованию одного свойства в другое), множества $P$ (наборы вида Свойство1–Действие–Свойство2) и множества $S'$ (набора свойств объекта в конечном состоянии).

Реверсный подход к моделированию бизнес-процессов был использован при проектировании программ получения профессиональных навыков и компетенций [7–13], индивидуальных траекторий обучения [14, 15], при проектировании программных продуктов [16, 17] и для реинжиниринга существующих веб-приложений и повышения конверсии [18].

**Литература**


1. *Мадера, А. Г.* Бизнес-процессы и процессное управление в условиях неопределенности : Количественное моделирование и оптимизация. / А. Г. Мадера. – Москва : ЛЕНАНД, 2019. – 160 с.

2. *Калянов, Г. Н.* Консалтинг при автоматизации предприятий: Подходы, методы, средства / Г. Н. Калянов. – Москва : СИНТЕГ, 1997. – 316 с.

3. *Евланов, Л. Г.* Экспертные оценки в управлении / В. А. Евланов, В. А. Кутузов. – Москва : Экономика, 2006. – 231 с.

4. *Морозов, В. В.* Экспертные процедуры и методы принятия решений в проектном менеджменте / В. В. Морозов // Управление проектами и развитие производства. – 2000. – № 2. – С. 9–18.

5. *Орлов, А. И.* Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч. – Ч. 2. Экспертные оценки. / А. И. Орлов. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – 486 с.

6. Павлов, А. Н. Методы обработки экспертной информации / А. Н. Павлов, Б. В. Соколов. – Санкт-Петербург : ГУАП, 2005. – 42 с.

7. *Долгополов, М. А.* Реверсивная модель: использование системного подхода к обучению на примере проектирования курса «Интернет-технологии для учителя-предметника» / М. А. Долгополов, И. И. Каширская, С. Е. Ландсберг // Международный конгресс конференций «Информационные технологии в образовании» («ИТО–2003») 16–20 ноября 2003 г., Москва. – URL: http://ito.edu.ru/2003/VII/VII-0-2052.html

8. *Каширская, И. И.* Разработка учебных программ курсов по информационным технологиям в условиях конфликта, порожденного модернизацией образования / И. И. Каширская // Материалы XLIII отчетной научной конференции за 2004 год, Воронеж, Воронежская государственная технологическая академия, 2005.

9. *Каширская, И. И.* Реверсивная модель проектирования программы дополнительного профессионального образования с использованием системного подхода / И. И. Каширская, С. В. Зиновьев // Информатика : проблемы, методология, технологии : материалы XV международной научно-методической конференции, Воронеж, 12–13 февраля 2015 г. – С. 92–95.

10. *Каширская, И. И.* Построение и реализации программы обучения трехмерному моделированию и 3D-печати / И. И. Каширская, Т. Г. Богомолова // Информатика: проблемы, методология, технологии : сборник материалов XVI Международной научно-методической конференции, Воронеж, 11–12 февраля 2016 г. – С. 316–319.

11. *Каширская, И. И.* Проектирование программы начального обучения педагогических работников мультимедийным технологиям с использованием реверсивной модели / И. И. Каширская // Информатика: проблемы, методология, технологии : сборник материалов XVI Международной научно-методической конференции, Воронеж, 11–12 февраля 2016 г. – С. 319–322.

12. *Каширская, И. И.* Реверсный подход к процедуре построения объекта с заданными атрибутами / И. И. Каширская // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. – С. 1572–1575.

13. *Каширская, И. И.* Пример формирования исходной информации для построения модели объекта с использованием реверсного подхода / И. И. Каширская // Информатика: проблемы, методология, технологии : сборник материалов XIX Международной научно-методической конференции, Воронеж, 14–15 февраля 2019 г. – С. 96–100.

14. *Каширская, И. И.* Проектирование образовательных программ непрерывного образования, поддерживающих индивидуальную траекторию обучения / И. И. Каширская, С. Е. Ландсберг // Материалы IV Межрегиональной научно-практической конференции «Информатизация учебного процесса и управления образованием. Сетевые и интернет-технологии», Воронеж, ВОИПКРО, 2005.

15. *Богомолова, Т. Г.* Специфика построения методики обучения людей пожилого возраста навыкам работы на компьютере / Т. Г. Богомолова, И. И. Каширская // Информатика: проблемы, методология, технологии : сборник материалов XVI Международной научно-методической конференции, Воронеж, 11–12 февраля 2016 г. – С. 103–106.

16. *Алехин, Р. Ю.* Социальная сеть для языкового обмена HELLO FROM / Р. Ю. Алехин, И. И. Каширская // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. – С. 53–55.

17. *Верлин, А. А.* Предварительный анализ требований к веб-приложению для сообществ ролевых игр и реконструкции / А. А. Верлин, И. И. Каширская // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж, 2016. – С. 48–50.

18. *Скобанева, А. В.* Комплексная методика реинжиниринга сайта / А. В. Скобанева, И. И. Каширская // Информатика: проблемы, методология, технологии : сборник материалов XVII Международной научно-методической конференции, Воронеж, 9–10 февраля 2017 г. – С. 181–185.

УДК 004.93'12

# ПРОТОТИП МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕЖЕСТИ ПРОДУКТОВ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

**Л. А. Коробова[1], И. А. Матыцина[1], И. С. Толстова[1], М. С. Миронова[2]**

*[1]Воронежский государственный университет инженерных технологий*
*[2]Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)*

**Аннотация.** В статье рассматривается функционирование классификатора изображений. Представлено применение подхода анализа иерархий для вычисления коэффициентов функции обобщенного критерия. Разработан программный продукт, позволяющий без специального обучения, провести автоматизированный расчет параметров эффективности, нормированных значений показателей по каждому критерию оценки и анализ обучающей выборки. На основе анализа результатов обучающей выборки проранжировать исследуемые объекты с целью определения свежести продукта.
**Ключевые слова:** прототип, нейронные сети, классификатор изображений, фреймворк, модель, биоинформатика, распознавание свежести, операция свертки, программирование, мобильный телефон.

## Введение

Биотехнология относится к естественным наукам. Информационные технологии это разновидность технических наук. Развитие современной науки предполагает внедрение в биотехнологию информационных технологий. Одним из направлений использования информационных технологий в биоинформатике это применение искусственных нейронных сетей (ИНС). ИНС — это программное воплощение математической модели, построенной по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей — сетей нервных клеток живого организма.

Свежесть продуктов очень широкое и всеобъемлющее понятие. Это свойство можно рассматривать с нескольких сторон. Прежде всего, если мы говорим о свежем продукте, значит, он приемлем для употребления его в пищу человеком. В интернете делают множество запросов по этому поводу. Среди них: «Как определить свежесть продуктов и их качество…», «Свежесть продуктов питания: основные признаки…», «Основные признаки свежести продуктов…» и др. Признаки свежести у различных продуктов отличаются, но общими являются запах, цвет, внешний вид, а также количество употребляемого продукта. Но все равно, среди возможных вопросов ищут ответы на следующие: «Что можно считать свежим?», «Что можно считать съедобным?». Ответить на оба вопроса можно только условно по причине различий вкусовых предпочтений разных народов и отдельно взятого человека, поскольку для одних данный продукт съедобен, а для других нет. Рассмотрим данный момент подробней. Ответим на вопрос, «Какой сыр можно считать съедобным?». Если брать обычный сыр, например, «Российский», то здесь можно сказать, что сыр съедобен, если на нем отсутствуют признаки плесени (как один из признаков). Но возьмем другой сыр «Рокфор». Данный сыр покрывается белой плесенью, которая пригодна для употребления в пищу, в отличие от «ядовитой» плесени. Не все люди в восторге от подобного лакомства и поэтому не всегда для них считается съедобным. Однако данный вид сыра является съедобным и также его можно считать свежим продуктом. Поэтому ответом на данный вопрос будет сыр, который не вызывает пищевого отравления для человека, употребившего его в пищу.

Возьмем другой пример с мясом. У мусульман в употребление запрещено множество продуктов питания, в том числе свинина, опять же, по религиозным причинам. Значит, для мусульман данный продукт не считается съедобным. Однако цель данного исследования не учитывать религиозные предпочтения, а снизить риск отравления продуктами питания, в данном случае свинины.

Тоже касается на первый взгляд несъедобных продуктов. Человек может употребить в пищу только что живое существо, такое как насекомое, гусеницы, черви и тому подобное. В обычной мирной жизни данные существа считаются отвратительными и непригодными к употреблению. Однако во времена голода и войны люди употребляют их в пищу, и они являются съедобными.

Очень важным вопросом является количество продукта, которое можно считать съедобным. Так, соль более 10 грамм в день вызывает незаметные проблемы в организме. Съев соли больше килограмма человек умрет. Поэтому необходимо наложить ограничение на количество, которое будет указываться индивидуально для каждого продукта.

Ещё одним вопросом является здоровье человека. Какого человека можно считать здоровым? В 1985 году Всемирная организация здравоохранения (ВОЗ) сформулировала определение здоровья: «Здоровье — это состояние полного физического, духовного и социального благополучия, а не только отсутствие болезней и физических дефектов». Данная формулировка исключает людей, у которых есть болезни, вызывающие токсикацию организма. Не будем менять формулировку и примем её для нашей задачи как есть.

Отравление продуктами питания очень частое явление. Причины этому могут быть самыми разными: не посмотрели на дату изготовления, неправильно выбрали продукт на рынке, съели залежавшийся продукт и другие различные причины [1]. С развитием информационных технологий появилось множество средств уменьшения риска отравления продуктами питания. Однако не все из них предназначены для массового использования и не всегда полезны. В данной работе предлагается инструментарий для распознавания свежести продуктов, купленных не в специализированных торговых точках, имея лишь изображение продукта. Особенность инструментария является то, что становится возможным определение свежести продуктов питания «на месте», имея лишь мобильный телефон с камерой. Приложение для мобильного устройства будет определять, какой продукт находится на изображении, передаваемое с камеры мобильного телефона, и свежий ли продукт, затем данная информация будет отображаться на экране пользователя. Помимо распознавания приложение имеет справочную информацию о том, как распознать свежесть продукта другими способами по каждому продукту, например, по запаху.

Самым распространенным объектом для массового внедрения приложения является мобильный телефон. Современное мобильное устройство имеет камеру, поэтому для распознавания была выбрана классификация изображений [2]. Единственным способом создать систему, которая может отделить один класс изображений от других, является нейронная сеть [3]. Что касается изображений для обучения нейронной сети, то здесь следует задать самый главный вопрос «Какие изображения продуктов необходимо собирать?». Из представленного выше объяснения следуют следующие выводы:

– необходимо собирать изображения продуктов без учета религиозных и культурных особенностей людей, а также временных отрезков (военное время или катаклизмы);

– необходимо собирать такие изображения для определения свежести продуктов, на которых изображены продукты, не вызывающие отравление организма здорового человека;

– необходимо собирать изображения любых продуктов, не вызывающих отравление для здорового человека с указанием количества грамм для каждого, они же будут считаться свежими и съедобными.

Представляемая разработка позволяет оказывать помощь в определении свежести продукт. В качестве примера выбраны два продукта: хлеб и мясо говядины. Данная разработка полезна покупателям на рынках, в торговых центрах и различных магазинах самообслуживания.

### 1. Функционирование классификатора изображений

Для построения классификатора изображений используются нейронные сети. Чтобы оптимизировать работу классификатора необходимо создать сверточные нейронные сети. Структура нейронной сети в программировании интерпретирует биологическую. Поэтому работа сети похожа на вычисления, происходящие в мозге животного. Благодаря такой структуре, нейросеть может анализировать, запоминать различную информацию и воспроизводить ее из своей памяти.

Для классификации изображений используется сверточная нейронная сеть. В отличии от обычного персептрона сверточные сети более способны к распознаванию шаблонов на изображениях. В их основу входят фильтры (кернелы), которые распознаванают определенные характеристики изображения, например, прямые линии. Кернел — это числовая матрица, которая «обучается» с целью нахождения на изображениях некоторых характеристик. Фильтр плавает вдоль изображения и говорит, есть ли какая-нибудь характеристика, которую мы ищем, в конкретной его части. Чтобы получить подобный ответ такого используется операция свертки (рис. 1), которая представляет собой сумму произведений элементов фильтра и матрицы входных сигналов [5].

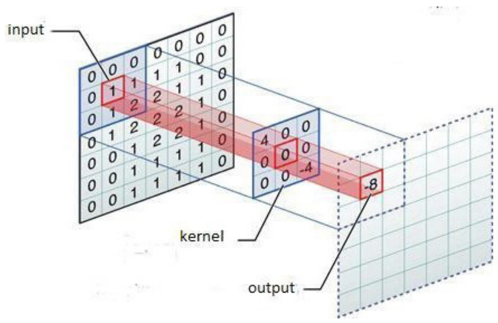
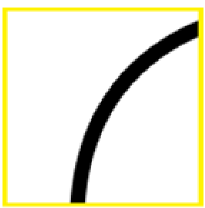



*Рис. 1. Операция свертки*

Если характеристика, которую мы ищем, найдена во фрагменте изображения, операция свертки на выходе будет отдавать относительно большее число. Если же искомой характеристика не находится, то число на выходе будет меньше.

Если говорить проще, то суть свертки заключается в запоминании набора пикселей изображений, который можно назвать «шаблоном». При полном или частичном совпадении данных пикселей шаблона и входного набора пикселей, изображения, происходит «опознавание», что найден схожий набор пикселей. Чем больше схожих шаблонов было найдено, тем более вероятно, что сеть выдаст сигнал близкий к классу шаблона.

На рис. 2 и 3 приведен пример операции свертки. Фильтр, предназначенный для поиска левосторонней кривой, плавает вдоль изображения. Если рассматриваемая часть пикселей изображения идентична кривой, которая содержится в фильтре, то в результате будет большее число (6600 в нашем случае). Если фильтр находится в части изображения, где нет идентичной кривой, то на выходе будет меньшее число (в нашем случае 0).



Visualization of the receptive field

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 50 | 50 | 50 |
| 0 | 0 | 0 | 20 | 50 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 50 | 50 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 50 | 50 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 50 | 50 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 50 | 50 | 0 | 0 |

Pixel representation of the receptive field

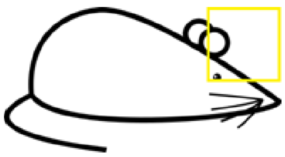
*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Pixel representation of filter

Multiplication and Summation = (50*30)+(50*30)+(50*30)+(20*30)+(50*30) = 6600 (A large number!)

*Рис. 2. Фильтр «ищет» левосторонние кривые. Результат положительный*




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 40 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 40 | 0 | 40 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 40 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 25 | 25 | 0 | 50 | 0 | 0 | 0 |

Pixel representation of receptive field

*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Pixel representation of filter

Multiplication and Summation = 0

*Рис. 3. Фильтр «ищет» левосторонние кривые. Результат отрицательный*

В результате перемещения фильтра вдоль всего изображения будет получена матрица, которая состоит из результатов единичных сверток.

Стоит обратить внимание, что количество каналов фильтра должно быть равно количеству каналов исходной картинки; только в этом случае операция свертки будет выдавать правильное значение. Например, если исходное изображение состоит из 3 каналов (RGB: Red, Green, Blue), фильтр также должен иметь 3 канала.

Фильтр может плавать вдоль матрицы входных сигналов с шагом, не равным 1. Шаг перемещения фильтра называется страйдом (stride). Страйд говорит, на какое количество пикселей необходимо переместить фильтр за один шаг.

Количество выходных значений после операции свертки рассчитывается

$$n_{out} = floor\left(\frac{n_{in} - f}{s}\right) + 1, \qquad (1)$$

где $n_{in}$ — кол-во входных пикселей, $f$ — кол-во пикселей в фильтре, $s$ — страйд.

## 2. Описание работы фреймворка Tensorflow

На сегодняшний день нет необходимости создавать собственную библиотеку, позволяющую строить простые нейросетевые модели. Вместо создания библиотеки с нуля можно воспользоваться фреймворками и библиотеками для построения высокоуровневой нейросети. Одним из таких фреймворков является Tensorflow.

Tensorflow позволяет создавать и обучать модели с помощью высокоуровневого API-интерфейса Keras, что облегчает начало работы с TensorFlow и машинным обучением [3].

Чтобы не строить архитектуру нейронной сети с нуля можно воспользоваться готовой, которая называется MobileNetV2.

### *2.1. Разработка классификаторов*

Для переобучения моделей воспользуемся готовой моделью MobileNetV2 и переобучим её на наших собранных данных.

Необходимо получить от Tensorflow скрипты:

– retrain.py для обучения модели [2];

– установить модуль для python tflite_converter для конвертации в tflite модель, чтобы её можно было использовать в android и ios приложениях;

– tflite_tester.py для тестирования модели на изображениях [3].

Для обучения модели распознавания продуктов необходимо расположить отобранные изображения в каталоге train_images, сгруппировав классы изображений по каталогам. Сами каталоги должны иметь имена классов изображений, которые они содержат в себе. Изображения для тестирования будут находиться в каталоге test_images без группировки. Скрипты retrain.py и tflite_converter.py должны находиться на том же уровне, что и каталоги test_images и train_images.

Структура каталогов для переобучения модели на распознавание продуктов питания содержит в себе каталоги bread, beef, tomato, another. Каталог bread содержит различные изображения хлеба. В каталоге beef содержатся изображения говядины. Каталог tomato содержит изображения томатов. В another необходимо расположить самые различные объекты, которые не содержат продукты питания. Это необходимо сделать для исключения не продуктов питания от остальных объектов. Например, здесь располагаются изображения рук различных людей, чтобы руки не влияли на определение продукта. Структура каталогов и файлов изображена на рис. 4.

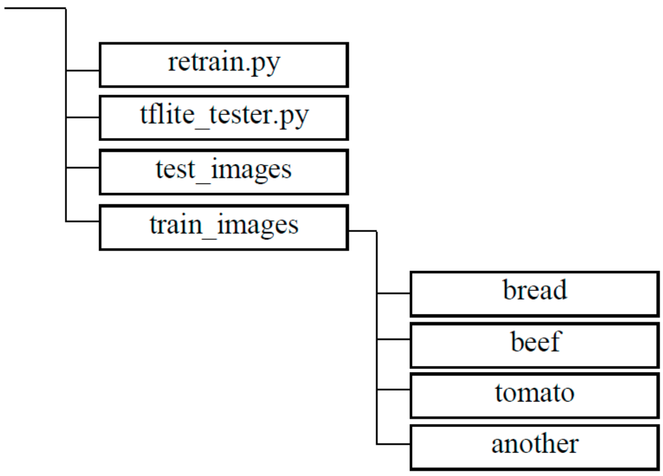



*Рис. 4. Структура файлов для переобучения на распознавание продуктов питания*

Обучить модель распознавать свежесть продуктов можно двумя способами. Первый способ заключается в разделении каждого каталога из модели для обучения распознавания продуктов на 2 подкаталога fresh и spoiled добавляя префикс имени продукта. Например, каталог bread будет разделен на каталог bread_fresh, в котором будут содержаться изображения свежего хлеба, и каталог bread_spoiled, в котором находятся фотографии испорченного хлеба.

Второй способ заключается в объединении всех свежих продуктов питания в каталог fresh, а объединение всех испорченных в каталог spoiled. Для реализации приложения был выбран данный способ, поскольку его можно быстрей реализовать.

Структура каталогов для переобучения модели на распознавание свежести продуктов питания очень похожа на структуру для определения самих продуктов питания. Отличаться будут только каталоги классов и изображения в них. Состоит из каталогов fresh, spoiled и another. В fresh необходимо заносить изображения свежих продуктов питания. В spoiled будут находиться фотографии с испорченными продуктами питания. Каталог another аналогичен каталогу в модели для определения продукта. Иерархия файлов и каталогов изображена на рис. 5.

Процесс получения готовой модели для обоих распознавателей аналогичен [4]. Поэтому далее будет описываться обучение и тестирование только для распознавателя продуктов питания.

Используя консоль (на изображениях консоль git bash) из каталога со скриптами запускаем скрипт retrain.py командой python retrain.py.

В результате выполнения будет получен файл retrained_graph.pb, который является файлом модели. Данный файл можно использовать для получения результата распознавания и можно протестировать на наборе изображений. Однако, работать с данной моделью из android и ios приложения не получится. Чтобы получить модель, которую можно использовать в android и ios необходимо модель конвертировать в tflite с помощью конвертера tflite_convert. Команда для конвертации изображена на рис. 6.

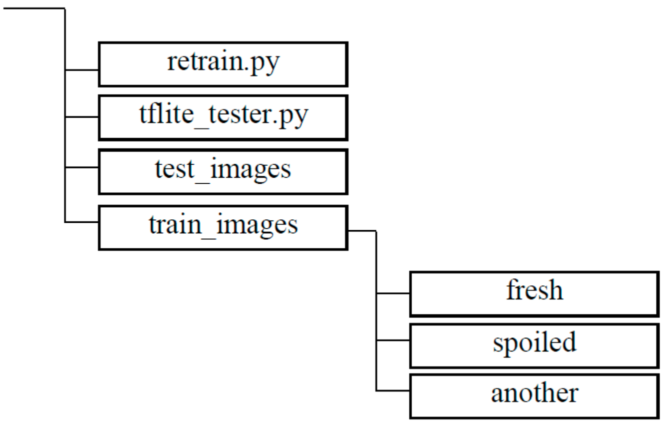



*Рис. 5. Структура файлов для переобучения на распознавание свежести продуктов питания*

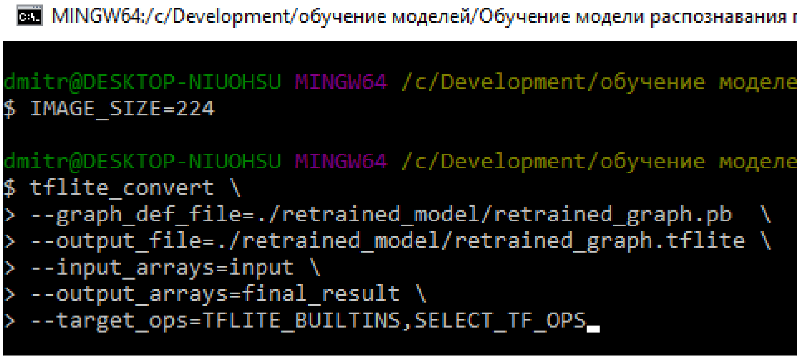



*Рис. 6. Запуск скрипта конвертирования из pb модели в tflite*

После получения tflite модели её можно протестировать на изображениях. Для этого используется скрипт tflite_tester.py, который запускается командой python tflite_tester.py. Пример тестирования изображены на рис. 7 (тестируемое изображение) и рис. 8 (результат решения нейронной сети и метки).

*Рис. 7. Используемое изображение для тестирования модели*

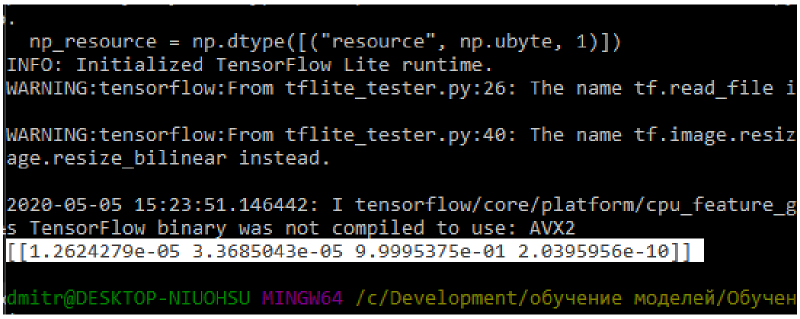



*Рис. 8. Результат решения нейронной сети и метки модели*

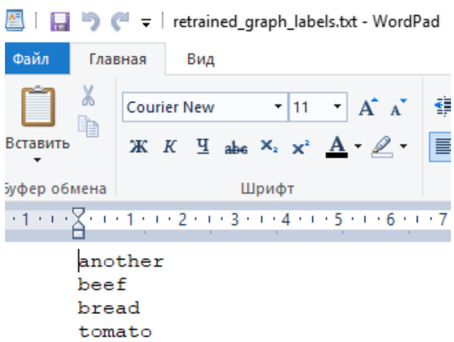



*Рис. 9. Текстовый файл с метками*

Чтобы разобраться, что означают данные из массива, необходимо обратиться к файлу с метками (рис. 9), который сгенерировался при обучении модели.

Определение результата нейронной сети строится следующим образом:

Из полученного массива значений [[1.2624279e-05 3.3685043e-05 9.9995375e-01 2.0395956e-10]] определяем порядковый номер самого большего, которым является 9.9995375e-01 (при округлении до сотых 0.99 или 99 %).

Из текстового файла с метками выбираем метку по порядковому номеру значения, которым является «bread», что означает «хлеб».

Исходя из полученных данных, сеть считает с 99 % вероятностью, что на изображении находится хлеб (bread).

Те же операции необходимо проделать для обучения модели на определение свежести продукта.

В результате переобучения модели на распознавание продуктов питания и распознавание их свежести мы получим:

– 2 файла с переобученными моделями формата tflite;

– 2 файла с метками (перечисление классов) формата txt.

Полученные данные можно использовать для разработки приложения с использованием библиотек Tensorflow. Самой популярной библиотекой для использования нейронной сети в мобильных телефонах является Tensorflow Lite.

## Заключение

В работе рассмотрены способы определения проблем с пищей и исходя из этого разработаны классификаторы для определения типа продукта и вероятности испорченности этого продукта. Суть задачи — построение классификаторов изображений, способных распознать «отраву» в продукте питания. Для её решения используется фреймворк Tensorflow. Он позволяет переобучить готовые модели классификации на верхнем уровне, что способствует более быстрому обучению.

Также для решения собрано большое количество изображений и разделено по классам. Экспериментальным путем выбрано количество и качество изображений, которое нужно было для исследования.

Разработанный прототип позволяет определять свежесть продукта благодаря камере телефона и разработанного приложения. Он поможет людям уменьшить риск возникновения пищевого отравления.

## Литература

1. *Дерканосова, Н. М.* Проектирование и обеспечение качества пищевых продуктов (на примере хлебобулочных изделий) [Текст] / Н. М. Дерканосова, Л. А. Коробова, Е. Ю. Ухина. – Монография. – Воронеж, 2016.

2. Что такое классификация изображений. – http://desktop.arcgis.com/ru/arcmap/10.3/guide-books/extensions/spatial-analyst/image-classification/what-is-image-classification-.htm (дата обращения 07.09.2019).

3. *Коробова, Л. А.* Применение свёрточной нейронной сети для задач распознавания изображения [Электронный ресурс] / Л. А. Коробова, Е. А. Саввина, С. С. Саввин // В сборнике: Моделирование энергоинформационных процессов. VIII Национальная научно-практическая конференция с международным участием. – 2020. – С. 251–255.

4. *Abramov, G.* Development of algorithm for analysis of sound fragments in medical information systems / G Abramov, L. Korobova, I. Matytsina // В сборнике: Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. – 2020. – С. 012095.

5. *Рябчунов, Д. В.* Технология классификации изображений в распознавании свежести продуктов на примере говядины / Д. В. Рябчунов, Л. А. Коробова // В сборнике: Продовольственная безопасность: научное, кадровое и информационное обеспечение. Сборник научных статей и докладов VI Международной научно-практической конференции. Воронежский государственный университет инженерных технологий. 2019. – С. 596–600.

УДК 004 50

# РАСПОЗНАВАНИЕ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

**М. И. Кострюкова, Н. М. Новикова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе исследуется распознавание цветных изображений с помощью искусственных нейронных сетей (соответственно, метод анализа данных — нейросетевой), а именно свёрточных нейронных сетей, а также анализ качества этого распознавания. Обучение осуществляется методом обратного распространения ошибки. В ходе исследований были рассмотрены искусственные нейронные сети для задачи распознавания цветных изображений, спроектирована архитектура сверточной нейронной сети, разработан алгоритм обучения нейронной сети, программно-реализован разработанный алгоритм, проведен вычислительный эксперимент. Итоговый программный продукт успешно решает проблему распознавания изображений с точностью около 82 %.
**Ключевые слова:** нейронные сети, распознавание образов, кибернетика, метод обратного распространения ошибки.

## Введение

Технология искусственных нейронных сетей основана на множестве всевозможных дисциплин, таких как математика, статистика, нейрофизиология, компьютерные науки. Их главной особенностью является способность обучаться на исходных данных, за счет чего искусственные нейронные сети находят свое применение в разнообразных областях. Одним из таких применений искусственных нейронных сетей является распознавание образов, которое на данный момент можно назвать одним из самых интересных и перспективных направлений развития кибернетики [1]. Особое место среди задач распознавания образов занимает распознавание изображений, поскольку в изображениях довольно компактным образом заключен большой объем информации

В настоящее время уделяется много внимания распознаванию изображений с помощью нейронных сетей. Распознавание лиц на основе когнитронов рассматривается в работе [2]. Процесс распознавания занял много времени и оказался сложным и трудоёмким. В [3] описаны основные принципы построения многослойных персептронов на примере распознавания цифр. Проанализированы результаты работы архитектуры в зависимости от числа обучаемых параметров. В работе [4] рассмотрены исследования многослойных нейроподобных структур и алгоритмы их динамического синтеза для задач распознавания образов. Представлены результаты в области обучения и до обучения сверточных нейронных сетей с применением алгоритмов роста их структур. Показано, что такие сети обладают стабильной помехоустойчивостью к распознаванию.

Во всех рассмотренных работах используются черно-белые изображения, которые описываются малым объемом данных. Возникает актуальная задача исследования нейронных сетей для распознавания цветных изображений, отличающихся большим объемом данных.

Цель статьи заключается в исследовании возможности применения сверточных нейронных сетей для распознавания цветных изображений, которые представлены большим объемом данных.

## 1. Материалы и методы

Для исследования были выбраны именно сверточные нейронные сети, потому что они являются одним из самых лучших решений для задач распознавания и классификации изображений, ввиду следующих особенностей: инвариантность относительно переноса изучаемых сверточными нейросетями шаблонов, способствующая сокращению необходимых для обучения образцов, уменьшение количества настраиваемых коэффициентов. Однако, несмотря на все преимущества сверточных нейронных сетей в вопросе распознавания изображений, выбор множества варьируемых параметров сети, таких как количество слоев, размерность ядра свертки и количество ядер для каждого из слоев, передаточная функция нейронов и т. д., является довольно сложным этапом, от которого существенно зависит результат распознавания. Выбор параметров остается за разработчиком и реализуется им эмпирически.

Программный продукт, написанный в ходе исследований, относится к прикладному программному обеспечению. Он написан на языке Python с использованием дистрибутива Anaconda, а именно на ее компоненте под названием — Jupyter Notebook, являющейся мощным инструментом для интерактивной разработки. Алгоритм программы условно можно разделить на следующие этапы:

- загрузка и обработка данных,
- определение архитектуры модели и ее компиляция,
- обучение модели,
- оценка модели.

## 2. Загрузка и обработка данных

Подготовленный для распознавания сравнительно небольшой датасет состоял из 4-х тысяч изображений, по тысяче на каждый класс, скачанных из поисковой сети Google. Первоначально датасет содержал изображения разного разрешения, далее каждое из них было приведено к формату $64 \times 64$ пикселя, поскольку составленная нейросеть принимает на вход данные именно этого формата. Чтобы иметь возможность работать с изображениями, было необходимо преобразовать каждое из них в матрицу пикселей, и, так как цветовая модель — RGB (изображения имеют три канала), то эта матрица является трехмерной, размера $3*m*n$, где $m$ и $n$ — высота и ширина изображений соответственно ($m = n = 64$). Далее каждое значение матрицы пикселей масштабировалось к диапазону [0, 1], а метки, обозначающие, к какому классу принадлежит каждое из изображений, конвертировались в векторы. Вектор [1 0 0 0] означает, что рассматриваемое изображение принадлежит к 1-му классу, [0 1 0 0] — ко 2-му и так далее.

Поскольку обучающих образцов довольно немного, переобучение (большой разрыв между ошибками на тестовой и на обучающей выборке) является проблемой номер один. Для этого использовался метод расширения, или, как еще его называют, аугментации, данных. Он заключается в расширении выборки данных для обучения путем модификации существующих данных — поворот, сдвиг, обрезание и увеличение изображений.

## 3. Определение архитектуры модели и ее компиляция

Для поставленной задачи были выбраны сверточные нейронные сети, так как они являются одними из самых эффективных в области распознавания изображений, за счет того, что изучают локальные признаки, инвариантные относительно переноса. Для сравнения также исследовалась архитектура многослойного персептрона, но его результаты оказались намного слабее, поэтому этот вариант был сразу отметен. На всех слоях, кроме последнего, в качестве функции активации была использована функция $ReLu(x) = \max(x, 0)$, так как она является хорошим аппроксиматором (любая функция может быть аппроксимирована комбинацией ReLu) и менее требовательна к вычислительным ресурсам, по сравнению с другими функциями активации [5].

При прохождении сигнала по нейронной сети, он может сильно исказиться по математическому ожиданию и дисперсии, что приведет за собой значительные несоответствия между градиентами на разных уровнях. Это явление носит названия ковариационного сдвига. Для уменьшения ковариационного сдвига во внутренних слоях нейронной сети, следовательно, ускорения обучения, применялось масштабирование входных данных для передачи их на следующий слой сети, т. е. пакетная нормализация [6]. Пакетная нормализация дает весьма лаконичное решение данной проблемы — нормализовать входные данные так, чтобы функция активации имела нулевое матожидание и единичную дисперсию для каждого пакета данных (батча) на этапе обучения:

$$\mu_B = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i,$$

$$\sigma_B^{\ 2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu_B)^2,$$

$$\hat{x}_i = \frac{x_i - \mu_B}{\sqrt{\sigma_B^2 + \varepsilon}},$$

где $B = (x_1, \ldots, x_m)$ — пакет данных (батч), $m$ — размерность пакета, $\varepsilon > 0$ — параметр, защищающий от деления на ноль, $\hat{x}_i$ — преобразованная функция активации.

Наконец, так как к исходным данным были применены операции масштабирования и сдвига, то позволительны произвольные масштабирование и сдвиг. Таким образом, окончательная функция активации имеет вид:

$$y_i = \gamma \hat{x}_i + \beta,$$

где $\beta$ и $\gamma$ — параметры пакетной нормализации, которые можно оптимизировать методом градиентного спуска.

Экспериментальным путем было установлено, что без пакетной нормализации показатели обучения глубокой нейронной сети нулевые.

Несмотря на то, что в борьбе с переобучением использовался метод аугментации данных, входные данные остались по-прежнему сильно связаны между собой, потому что получены из небольшого количества изображений. Для этого в нейросеть были включены прореживающие слои dropout, чтобы деактивировать случайные нейронные соединения.

Так как рассматриваемая в статье задача относится к многоклассовой однозначной классификации, в качестве функции потери была выбрана categorical_crossentropy — перекрестная энтропия, а функцией активации на последнем решающем слое нейросети стала функция softmax. Функция softmax [7] преобразует вектор $z$ размерности $l = 4$ (количество классов) в вектор $\sigma$ той же размерности. Координаты полученного вектора трактуются же как вероятности того, что объект принадлежит $i$-му классу, и выглядят следующим образом:

$$\sigma_i = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^{l} e^{z_j}}.$$

Категориальная перекрестная энтропия всегда сочетается с softmax и имеет вид:

$$CE = -\sum_{i}^{l} B_i \times \log \sigma_i,$$

где $B$ — целевой вектор. К примеру, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, если объект принадлежит к 1-му классу.

## 4. Результаты и обсуждение

Обучение модели происходило по методу обратного распространения ошибки на 75 % данных, остальные 25 % нужны для оценивания. Первоначально все коэффициенты матрицы весов заполнялись случайными числами. Естественно, эти случайные числа не могли нести какую-то полезную информацию, они лишь являлись отправной точкой. Потом, на основе сигнала обратной связи, веса постепенно корректировались. Цикл обучения нейронной сети можно описать следующими шагами [8]:

Извлекается пакет обучающих экземпляров $X$, в виде массива трехмерных матриц пикселей $A$, и соответствующих целей $Y$, в виде массива целевых векторов $B$.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{111} & x_{211} & x_{311} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{112} & x_{212} & x_{312} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x_{11n} & x_{21n} & x_{31n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{121} & x_{221} & x_{321} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{122} & x_{222} & x_{322} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x_{12n} & x_{22n} & x_{32n} \end{bmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{bmatrix} x_{1m1} & x_{2m1} & x_{3m1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{1m2} & x_{2m2} & x_{3m2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x_{1mn} & x_{2mn} & x_{3mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Пакет $X$ обрабатывается сетью, каждый из слоев которой применяет ко входным данным простые операции, вовлекающие весовые коэффициенты $W$, которые накапливают полученные нейросетью знания, в итоге получая таким образом пакет предсказаний $Y_{pred}$.

Вычисляется функция потери $loss$, являющаяся величиной несоответствия между пакетом предсказаний $Y_{pred}$ и целью $Y$:

$$loss_{value} = loss(Y_{pred}, Y).$$

1. Происходит корректировка весов в попытке уменьшить потери на пакете – минимизация функции потери.

2. Так как все операции в цикле дифференцируемы, уменьшить ошибку можно, опираясь на градиент потери каждого весового коэффициента, сдвигая коэффициенты в противоположную от него сторону. Этот метод обучения именуется стохастическим градиентным спуском.

Существует множество вариантов стохастического градиентного спуска, во многих из которых приращение $W$ определяется не только из текущего значения градиента, но и по значению предыдущего, используя идею импульса (это сделано для того, чтобы не застрять в локальном минимуме). Таким является и метод «Adam» (adaptive moment estimation — адаптивная оценка момента), использованный в работе, потому что он быстро достигает хороших результатов в задачах с шумными и редкими градиентами.

Для оценивания обучения использовалось 25 % данных — т. е. всего 1000 изображений.

Согласно рис. 1, при количестве эпох и размере пакета, равными 100 и 32, соответственно, результаты обучения нейросети следующие:

Оценивание нейросети:

| | precision | recall | f1-score | support |
|---|---|---|---|---|
| cats | 0.77 | 0.74 | 0.76 | 264 |
| dogs | 0.74 | 0.75 | 0.74 | 267 |
| ferrets | 0.84 | 0.89 | 0.86 | 245 |
| panda | 0.95 | 0.92 | 0.93 | 224 |
| accuracy | | | 0.82 | 1000 |
| macro avg | 0.83 | 0.82 | 0.82 | 1000 |
| weighted avg | 0.82 | 0.82 | 0.82 | 1000 |

*Рис. 1. Оценивание нейросети*

Для того чтобы описать значение метрик, рассмотрим табл. 1 [9].

Таблица 1

*Ошибки классификации*

| | $y=1$ | $y=0$ |
|---|---|---|
| $\hat{y}=1$ | Истинно-положительный ($True\,Positive - t_p$) | Ложно-положительный ($False\ Positive - f_p$) Ошибка 1-го рода |
| $\hat{y}=0$ | Ложно-отрицательный ($False\ Negative - f_n$) Ошибка 2-го рода | Истинно-отрицательный ($True\,Negative - t_n$) |

Здесь $y$ — это метка образа, а $\hat{y}$ — предсказание нейросети. Таким образом, ошибки классификации бывают двух видов:

1-го рода — когда классификатор помечает образ как «true», в то время как он не принадлежит классу,

2-го рода — когда классификатор помечает образ как «false», в то время как он принадлежит классу.

Пусть $N_{t_p}, N_{t_n}, N_{f_p}, N_{f_n}$ — количество $t_p, t_n, f_p, f_n$, соответственно. Тогда:

Точность, или precision — это отношение

$$\frac{N_{t_p}}{N_{t_p} + N_{f_p}},$$

описывающее интуитивно понятную способность классификатора не помечать как «положительный» образец, являющийся отрицательным.

Полнота, или recall — это отношение

$$\frac{N_{t_p}}{N_{t_p} + N_{f_n}},$$

описывающее способность классификатора найти все положительные образцы.

F-мера, или f1-score — это отношение:

$$2 \times \frac{precision \times recall}{precision + recall}.$$

Accuracy, или точность — доля правильных результатов алгоритма:

$$\frac{N_{t_p} + N_{t_n}}{N_{t_p} + N_{t_n} + N_{f_p} + N_{f_n}}.$$

Support, или поддержка — количество вхождений каждого класса в массив истинных целевых значений $Y$.

В ходе исследований, был получен рис. 2, где красным отмечена функция ошибки на этапе обучения, а синим — на этапе валидации (оценки), и рис. 3, где красным отмечена доля правильных ответов на этапе обучения, а синим — на этапе валидации.

Глядя на график функции ошибок на рис. 2, можно заметить небольшое переобучение, которое начинается примерно с 60-й эпохи, когда между потерями при обучении и потерями при оценке начинается постоянный разрыв.

Несмотря на то, что значения на графиках постоянно скачут, в целом, оптимизатор Adam показывает неплохие результаты.

Для оценки правильности распознавания образов нейронной сети было предложено по 10 изображений 4-х видов животных, результаты представлены в табл. 2.


*Рис. 2. График функции ошибки*


*Рис. 3. График доли правильных результатов алгоритма (accuracy)*

Таблица 2

*Результаты распознавания*

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cats | + | + | ferrets | + | + | dogs | ferrets | + | + | + |
| dogs | ferrets | + | + | ferrets | + | cats | + | cats | + | + |
| ferrets | + | panda | + | panda | + | + | + | + | + | + |
| panda | + | + | + | ferrets | + | + | + | + | + | + |

На основании табл. 2, составлена табл. 3 с вероятностью ошибки первого и 2-го рода для каждого из классов.

Таблица 3

*Вероятность ошибки 1-го и 2-го рода*

| № ошибки | 1 | 2 |
|---|---|---|
| cats | 0.3 | 0.05 |
| dogs | 0.4 | 0.025 |
| ferrets | 0.2 | 0.125 |
| panda | 0.1 | 0.05 |

Вероятность правильного распознавания — 0.75.

## Заключение

На основание теории распознавания образов и основных принципов работы нейронных сетей представлена компьютерная модель нейросетевого метода распознавания изображений и ее оценка [3, 4]. Итоговый программный продукт успешно решает проблему распознавания изображений с точностью около 82 %.

В ходе исследований было выяснено, что непременным условием успешной работы сверточных нейронных сетей является большой набор входных данных, что приводит к большим вычислительным затратам. Очевидным следствием является значительный расход ресурсов оперативной памяти. Также следует заметить, что обучение представляет собой довольно продолжительный по времени процесс, занявший около 2-х часов времени работы CPU. С учетом того, что параметры сети подбирались эмпирическим методом, процесс подбора наиболее подходящих для поставленной задачи параметров оказался сложным и трудоемким.

## Литература

1. *Новикова, Н. М.* Интеллектуальные интерфейсы: учебник ВГУ / Н. М. Новикова, В. Н. Будко. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 308 с.

2. *Козлов, П. В.* Применение нейронной сети на основе когнитронов  для распознавания образов / П. В Козлов. А. А. Южаков // Нейрокомпьютеры: разработка, применение – 2014. – № 12. – С. 57–61.

3. *Федоренко, Ю. С.* Анализ особенностей глубоких нейронных сетей на примере задачи распознавания цифр / Ю. С. Федоренко, Ю.Е. Гананюк // Нейрокомпьютеры: разработка, применение – 2017. – № 2. – С. 24–30.

4. *Степанян, Н. В.* Растущие сверточные нейроподобные структуры для задач распознавания статических образов / Н. В. Степанян, Н. Н. Знеп // Нейрокомпьютеры: разработка, применение – 2018. – № 5. – С. 4–11.

5. Сверточные нейронные сети для распознавания образов. – URL: https://habr.com/ru/post/456186/  (дата обращения: 19.03.2020).

6. Глубокое обучение для новичков: тонкая настройка нейронной сети. – URL: https://habr.com/ru/company/wunderfund/blog/315476/ (дата обращения: 23.04.2020).

7. Softmax.  – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Softmax (дата обращения: 20.04.2020).

8. *Шолле, Ф.* Глубокое обучение на Python / Ф. Шолле. – Санкт-Петербург :  Питер, 2018. – 400 с.

9. Метрики в задачах машинного обучения. – URL: https://habr.com/ru/company/ods/blog/328372/  (дата обращения: 15.05.2020).

10. *Гонсалес, Р.* Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс;. – Москва: Техносфера, 2005. – 1072 с.

11. *Хайкин, С.* Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

УДК 004.42

# ПРИМЕР ПРОГРАММНОГО РЕШЕНИЯ В ОБЛАСТИ ПЕРСОНАЛИЗИРОВАННОЙ МЕДИЦИНЫ

**О. Ю. Лавлинская, Т. В. Курченкова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассмотрен пример реализации телемедицинской информационной системы — «Медицинская информационная система сопровождения терапии хронических заболеваний». МИС «СТЕРХ» предназначена для осуществления контроля в удаленном режиме за состоянием пациентов, страдающих артериальной гипертонией, на основе постоянного мониторинга артериального давления, частоты сердечных сокращений, а также приёма антигипертензивной терапии, назначенной врачом. Концепция разработки МИС отвечает парадигме современной медицины, поддерживающей концепцию персонификации, предсказательности, профилактики, вовлеченности пациента в процесс лечения на основе позитивного подхода к терапии для пациентов с артериальной гипертонией.
**Ключевые слова:** телемедицина, парадигма «5P медицина», длительный мониторинг, коррекция терапии, web-технологии, мобильное приложение, SMSC-шлюз, SMS-информирование, режим автоматической терапии.

## Введение

Внедрение телемедицины в практику отечественного здравоохранения позволяет в полной мере реализовать концепцию заботы о здоровье граждан — «Citizen Healthcare», согласно которой каждый человек должен получать весь объем медицинской помощи (профилактической, экстренной, плановой и т. д.) посредством систем электронного здравоохранения в том месте, где он находится в данное время [1].

Реализация проектов в области телемедицины стала возможной благодаря современным технологиям хранения, обработки, передачи и представления данных, таким, как облачные технологии, мобильные технологии, беспроводные способы передачи данных с устройства на устройство или при посредничестве медицинской информационной системы, реализованной на основе web-технологий.

Широкое развитие получили системы дистанционной фиксации и трансляции физиологических параметров с помощью различных приборов и устройств, сопряженных с компьютером или цифровым мобильным устройством, гаджетом.

Использование систем дистанционной фиксации и трансляции физиологических параметров, реальновременного наблюдения и контроля, телеконсультирования пациентов позволили перевести амбулаторную медицину на качественно новый уровень, сделав доступными круглосуточные врачебные консультации, пожизненные профилактические мероприятия, длительный мониторинг, контроль и экстренную коррекцию ключевых параметров жизнедеятельности. Высокая эффективность использования телемедицины заключается в снижении количества осложнений и неблагоприятных исходов, социально-экономической выгоде, улучшении качества жизни [2].

## Парадигма современной медицины — 5P

В контексте современных и перспективных технологических возможностей медицина развивается в соответствии с парадигмой проактивной медицины, включающей 5P: персонализированная (personal), предсказательная (predictive), пациентововлеченная (participant), профилактическая (preventive), позитивная (positive) медицины [3].

*Персонализация* — это индивидуальный подход к пациенту, не только с точки зрения его лечения, но и с учетом анамнеза, генетической предрасположенности, индивидуальной психосоматики и других факторов, отличающих конкретного пациента от других, имеющих тот же диагноз, пациентов.

*Предсказательность* медицины — это оценка факторов риска заболеваний, возникающих в результате генетической предрасположенности или приобретенных в процессе профессиональной деятельности, при неблагоприятных жизненных обстоятельствах, наличии вредных привычек. Предсказательная медицина направлена на создание индивидуальной медицинской карты с учетом факторов риска, что позволяет человеку увидеть прогноз состояния здоровья и получить совет, каким образом избежать неблагоприятных ситуаций и уберечь собственное здоровье, прогнозировать изменение терапии с учетом факторов риска.

*Партисипативная* медицина — вовлечение пациента в процесс охраны собственного здоровья, когда пациент становится участником всех медицинских мероприятий, ощущает ответственность за результат выполнения профилактических мероприятий и лечения, обладает высоким уровнем комплаентности.

*Профилактическая* концепция медицины заключается в окружении человека заботой о здоровье, проведением профилактических осмотров, профилактических мероприятий, предупреждающих развитие необратимых процессов в организме и возникновение профессиональных и наследственных заболеваний.

*Позитивная* медицина — медицина, основанная на обеспечении психологического комфорта на любой стадии медицинского обслуживания. Известно, что уверенность в хорошем результате, основанная на доверии к врачу и протоколам терапии, позволяет добиться лучших результатов лечения даже в сложных ситуациях, а скептицизм, депрессивное состояние и апатия не позволяют пациенту победить болезнь. Таким образом, 5P определяют модель активной медицины будущего.

### Персонализированный подход в проектах телемедицины

Рассмотрим авторский проект медицинской информационной системы сопровождения терапии хронических заболеваний (МИС «СТЕРХ») и мобильного приложения для смартфонов на базе ОС Андроид как пример практической реализации медицинского проекта, направленного на удовлетворение требований парадигмы 5P [4].

Медицинская информационная система МИС «СТЕРХ» реализована на основе веб-технологий в тесном сотрудничестве с врачами-кардиологами. Назначение МИС – обеспечение информационной поддержки пациентов, мониторинг физиологических параметров пациента в режиме дистанционной трансляции и фиксации данных. На рис. 1 представлена схема взаимодействия пользователей с МИС на архитектурном уровне для первой версии системы, которая была реализована по функциональным требованиям врачей-кардиологов с целью врачебного сопровождения пациентов, которые обратились за помощью в кардиологический центр и которым был поставлен диагноз — артериальная гипертония. Данная болезнь требует длительного лечения, срок лечения, как правило, составляет срок, кратный 26 или 52 дням и, терапия включает прием назначенных врачом препаратов. Контроль за состоянием терапии и ее корректировкой удобно осуществлять дистанционно, для этого требуется получать от пациента данные измерения артериального давления, частоты сердечных сокращений в назначенное врачом время — один, два или три раза в сутки. По итогам оценки клинических данных за определенный период врач делает выводы о качестве терапии. К клиническим показателям относятся результаты измерения артериального давления, частоты сердечных сокращений, оценка уровня комплаентности [5] пациента, удовлетворенность качеством жизни [6].

Концепция персонализированного подхода в МИС реализована следующим образом. Во-первых, для дистанционного лечения и контроля состояния пациента с артериальной гипертонией врач регистрирует пациента в системе, определяет способ удаленного взаимодействия, выбирает индивидуальный режим контроля артериальной гипертонии (АГ) с учетом всех клинических данных о больном. Режим контроля АГ предполагает гибкий и индивидуальный подбор для каждого пациента способа измерения давления, времени напоминания о необходимости измерения давления и приеме назначенных препаратов. Во-вторых, врач собирает анамнез пациента, который хранится в базе данных системы. Полученная информация влияет на выбор индивидуального контроля артериальной гипертонии.

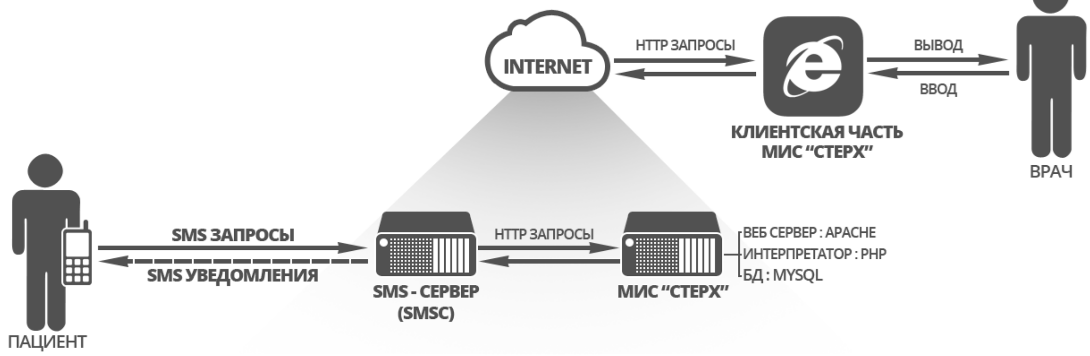



*Рис. 1. Архитектура МИС «СТЕРХ»*

Клиентская часть МИС реализована в виде web-приложения. Врач работает с системой, используя web-интерфейс, врачу для работы с системой необходим доступ в интернет и любой современный браузер. Серверная часть МИС использует web-сервер Apache, интерпретатор PHP и базу данных MySQL. Обмен данными с пациентом, имеющим сотовый телефон организована через SMS-шлюз — внешний сервис SMSC посредством его API на основе скриптов, написанных на языке php.

Для первой версии системы способ удаленного взаимодействия был возможен в одном варианте, а именно: пациент имеет телефон с функцией смс-информирования. Врач регистрирует номер телефона пациента, включает режим смс-оповещения о необходимости измерения давления, приема лекарств (опционально) в назначенное время. Пациент получает смс и отправляет ответ в смс-формате. Если смс от пациента приходит в течение двухчасового периода от момента отправки смс-оповещения, то полученные данные записываются в базу данных МИС, если ответ не приходит, то запись содержит значения NULL. На основании отсутствующих значений рассчитывается показатель комплаетности пациента.

**Развитие парадигмы 5P в МИС «СТЕРХ»**

Первая версия системы не соответствовала требованиям парадигмы 5P и впоследствии была доработана. Во-первых, для более глубокой персонификации и вовлеченности пациента в процесс терапии были разработаны еще два способа взаимодействия, в дополнение к описанному выше:

1. Пациент имеет смартфон на базе OS Android. В этом случае пациенту доступно мобильное приложение — подсистема мобильного взаимодействия в рамках МИС «СТЕРХ». Взаимодействие с пациентом осуществляется посредством напоминаний о необходимости измерения давления и приеме препаратов, ответ пациент отправляет, используя возможности графического пользовательского интерфейса мобильного приложения [7].

2. Пациент имеет тонометр с GSM-модулем. В этом случае пациент также может получать смс-оповещение или напоминание через мобильное приложение, но данные о показаниях ар-

териального давления и частоте сердечных сокращений добавляются в базу данных сразу после измерения давления. Для реализации данного режима необходимо зарегистрировать номер сим-карты, встроенной в GSM-слот тонометра, а также указать номер мобильного телефона.

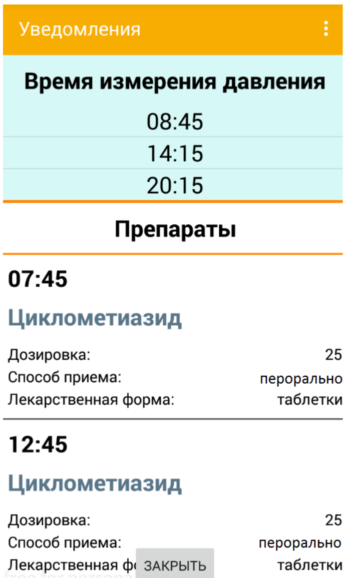



*Рис. 2. Окно с уведомлением о параметрах терапии*

Вовлеченность пациента в процесс лечения обеспечивают напоминания о необходимости измерения давления и приема препаратов с помощью sms-оповещения или уведомлений через мобильное приложение. На рис. 2 представлено окно мобильного приложения с примером уведомления.

Получив уведомление, пациент измеряет давление. Показания измерений вводятся пациентом в виде цифровых значений в поле ввода и после нажатия на кнопку «Отправить», передаются на сервер или сохраняются локально на телефоне, если связь отсутствует.

В работе мобильного приложения предполагается, что по истечении некоторого времени от выдачи сообщения о необходимости приема препарата, при отсутствии подтверждения со стороны пользователя, сообщение генерируется повторно. Все указанные действия повторяются для каждого запланированного приема. После последнего на данный день приема препарата приложение связывается с сервером для проверки изменений в схеме на следующий день, а также формирования других обязательных сообщений для пациента.

Если отсутствует соединение с интернетом, то данные сохраняются в телефоне и отправка данных осуществится сразу после установления связи с интернетом. Пока сообщения не отправлены, пользователь будет видеть знак (желтый вопросительный, который будет предупреждать, что данные еще не отправлены).

Таким образом, мобильное приложение обеспечивает организацию взаимодействия и мониторинг состояния пациента посредством МИС «СТЕРХ» в качестве клиентского приложения пациента МИС «СТЕРХ».

### Функция позитивного и предсказательного подхода в медицине на примере МИС «СТЕРХ»

С помощью мобильного приложения реализована функция оценки позитивной концепции парадигмы 5P. Для оценки психоэмоционального состояния пациента и его удовлетворенности динамикой терапии, предусмотрена отправка значения статуса качества жизни в виде смайлика.

Значение качества фиксируется в базе данных. На основании выборки значений за определенный период МИС информирует врача о позитивном или негативном тренде в оценке качества жизни пациента.

Врач может принять решение о необходимости очного контакта с пациентом, связаться с ним по телефону, обратиться к доверенному лицу пациента или изменить терапию досрочно.

Прогностическая функция в МИС «СТЕРХ» реализована на уровне создания режима автоматической терапии. На рис.3 показана схема изменения режима терапии на основе контрольного периода анализа средних значений показаний артериального давления [8].

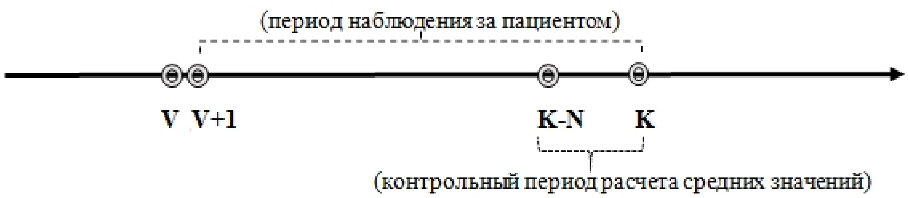



*Рис. 3. Общий подход к определению контрольных отметок*

На схеме представлены контрольные точки, имеющие следующие обозначения:

**V** — очный (первый, контрольный и т.д.) визит пациента к врачу и занесение данных в МИС.

**V+1** — следующий после визита к врачу день, когда пациент начинает принимать назначенные препарат(ы) и получать напоминания об измерении АД и приеме препаратов.

**К** — контрольная отметка, которая определяет повторяющийся интервал времени в днях от даты **V+1** начала (изменения) терапии.

При наступлении контрольной отметки МИС производит все запланированные автоматические действия.

**[К–N; К]** — контрольный период для расчета установленных значений.

Если контрольный период установлен для определения каких-либо показателей, то для МИС это будет считаться приоритетной задачей, даже, если в напоминаниях измерения АД или приема препаратов в эти дни сообщения пациенту не отправляются.

Для реализации описанного выше алгоритма в МИС реализована возможность выбора режима автоматической терапии и возможность задания параметров смены терапии по итогам оценки состояния здоровья на контрольную дату.

На рис. 4 представлен интерфейс МИС с выбором режима контроля артериального давления.

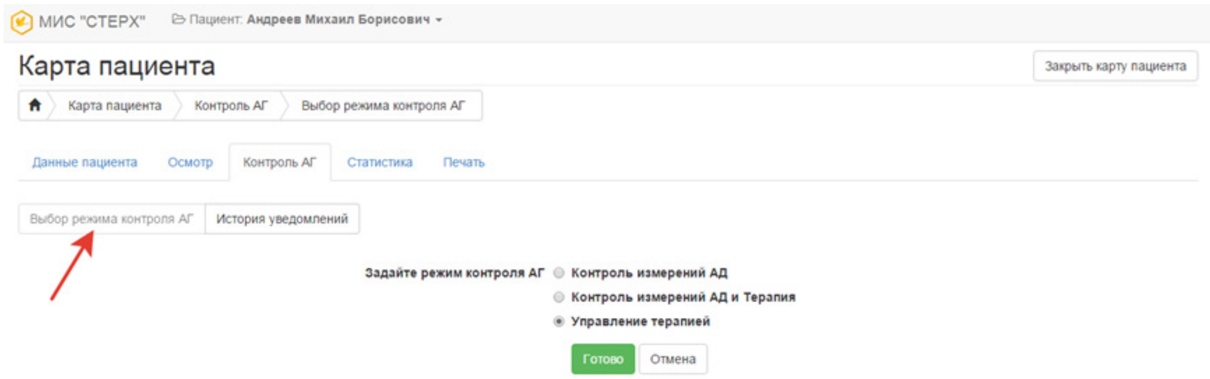



*Рис. 4. Интерфейс МИС: страница выбора режима терапии*

Тем не менее, в полной мере прогностическая функция МИС будет реализована в следующей версии системы, где на основе аппарата нечеткой логики будет проводится скоринг гипертонических кризов для каждого пациента на основе анамнеза, физиологии, метеоусловий и других факторов влияния на состояние пациента.

Также планируется уделить большое внимание мерам профилактической заботы о состоянии больных гипертонией для того, чтобы не усугублять течение болезни: контроль количества выкуренных сигарет, число шагов, количество калорий и т. д.

Для этого необходимо разработать фитнесс-приложение, сопряженное с базой данных МИС «СТЕРХ» и проработать алгоритм оценки показателей здоровья для выработки персональных рекомендаций.

## Заключение

Международные исследования применения телемедицины в рамках парадигмы 5P на практике указывают на следующие положительные тенденции использования дистанционных технологий при лечении различных заболеваний:

• значительное снижение госпитализаций и времени нахождения в больнице;

• пациенты лучше «понимают свое заболевание», поскольку вовлечены в процесс лечения;

• улучшение качества обслуживания, своевременная коррекция лекарственной терапии привели к высокой эффективности медикаментозного лечения;

• оценивается позитивное влияние телемониторинга на качество жизни, психологическое и социальное состояние пациента;

• оптимизация и высокая экономическая эффективность медицинской помощи.

С точки зрения авторов статьи, можно говорить и о шестой концепции современной медицины — медицине партнерства. Партнерские отношения пациента и врача или пациента и МИС – это возможность заключения партнерского соглашения, в рамках которого пациент обязуется выполнять требования терапии, профилактики и т. д., транслируемые МИС, а взамен получает качественную информационную поддержку, обеспечивающую инфраструктуру, например, возможность приобрести тонометр, смартфон с приложениями, фитнесс-браслеты и другие гаджеты в аренду на время действия партнерского соглашения. также важным фактором успешного взаимодействия считаем необходимость стимулирования пациента и поощрения его усилий на пути к выздоровлению различными способами.

**Литература**

1. *Хохлов, Р. А.* Применение телекоммуникационных технологий для повышения эффективности лечения артериальной гипертонии / Р. А. Хохлов, О. Ю. Лавлинская, О. С. Филатова // Врач-аспирант – 2013. – Т. 56, № 1.1. – С. 167-174.

2. *Хохлов, Р. А.* Применение информационных технологий для дистанционной терапии артериальной гипертонии / Р. А Хохлов., Лавлинская О. Ю., Курченкова Т. В., А. В Губкин // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2016. – Т. 21, № 6. – С. 2085-2092.

3. *Калинченко, С. Ю.* Болезни цивилизации XXI века: во всем ли виноваты только гены? новая модель медицины: медицина 5п – медицина эффективной профилактики и терапии / С. Ю. Калинченко // Вопросы диетологии. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 5-9.

4. Медицинская информационная система сопровождения терапии хронических заболеваний у пациентов с артериальной гипертонией (МИС «СТЕРХ») / Хохлов Р. А., Лавлинская О. Ю., Губкин А. В., Кряквин П. С. // Государственный информационный фонд неопубликованных документов ФГАНУ «Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти». – №50201351099 от 25.11.2015.

5. *Смирнова, Л. Е.* Комплаентность больных артериальной гипертензией и способы ее улучшения / Л. Е. Смирнова, М. В. Яковлева, Д. В. Алексеев // В сборнике: Медицинский дискурс: вопросы теории и практики. Материалы 7-й Международной научно-практической и образовательной конференции. Под общей редакцией Е. В. Виноградовой. – 2019. – С. 106–11.

6. *Зыкова, Н. В.* Оценка показателей качества жизни в условиях цифровой экономики / Н. В. Зыкова // В сборнике: Национальная безопасность России: актуальные аспекты. Сборник избранных статей Всероссийской научно-практической конференции. – 2019. – С. 92–94.

7 *Курченкова Т. В.* Пример реализации мобильного приложения в рамках концепции «CITIZEN HEALTHCARE» / Т. В. Курченкова, О. Ю Лавлинская // Информационные системы и технологии. – 2018. – № 1 (105). – С. 44–50.

8. *Лавлинская, О.Ю.* Применение телекоммуникационных технологий в задачах удаленного мониторинга (на примере медицинской информационной системы) / О. Ю. Лавлинская, А. В. Губкин, П. С. Кряквин // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Информационные технологии в строительных, социальных и экономических системах. – 2014. – № 2. – С. 103–108.

УДК 004.932

# ТЕКСТУРНАЯ МОДЕЛЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРИЗНАКОВ

**М. М. Ляшева, С. А. Ляшева, М. П. Шлеймович**

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ*

**Аннотация.** В системах обработки информации и управления, базирующихся на технологиях компьютерного зрения необходимо обеспечить эффективное признаковое представление изображений для их последующего анализа. Один из широко применяющихся подходов основан на построении текстурных моделей. В данной работе рассматривается описание текстуры с помощью энергетических признаков. Предложенная модель представляет собой совокупность весов пикселей изображения, отражающих их значимость с точки зрения восприятия изображений. Значимость пикселя оценивается с помощью энергии коэффициентов ортогонального дискретного кратно-масштабного вейвлет-преобразования. В работе приведены выражения для вычисления весов пикселей и показано, что полученные текстурные модели могут быть использованы для классификации изображений.

**Ключевые слова:** системы обработки информации и управления, технологии компьютерного зрения, классификация изображений, описание изображений, признаки изображений, текстура изображений, текстурная модель изображения, методы описания текстуры изображения, вейвлет-преобразование изображений, ортогональное дискретное кратно-масштабное вейвлет-преобразование Хаара, весовая модель изображения, энергетические признаки изображений.

## Введение

В системах обработки информации и управления, базирующихся на технологиях компьютерного зрения, часто применяются методы классификации изображений [1, 2]. Такие методы предусматривают описание изображений в виде набора определенных признаков, в качестве которых могут использоваться характеристики цвета, текстуры, формы и структуры [3, 4]. Совокупность значений признаков представляет собой некоторую модель изображения, отражающую его особенности с точки зрения конкретных задач извлечения и анализа информации.

Одним из широко применяющихся подходов к описанию изображений является текстурный анализ изображений. В рамках данного подхода осуществляются преобразования, позволяющие представить изображение в виде текстурной модели как совокупности текстурных признаков.

Следует отметить, что качество результатов классификации изображений при решении конкретных задач существенно зависит от используемой модели представления изображений. Поэтому вопросы разработки эффективных признаковых моделей является актуальным и практически значимым.

Существует большое количество применяемых на практике методов извлечения текстурных признаков и построения моделей описания изображений. В качестве примеров можно указать методы на основе анализа пространственных частот, краев, матрицы совместного вхождения, длин серий, энергетических характеристик Лавса, локальных бинарных шаблонов, фрактальных признаков, многомасштабных признаков, морфологических признаков, марковских цепей, цепных грамматик формы, графовых грамматик, группировки примитивов в иерархических текстурах и др.

Согласно монографии [5] подходы к представлению текстуры можно объединить в три основных класса — статистический, синтаксический и гибридный. Статистические методы подходят, если размеры примитивов сопоставимы с размерами пикселей. Синтаксические и гибридные методы более подходят для текстур, где примитивам может быть присвоена метка — тип примитива, что означает, что примитивы могут быть описаны с использованием большего разнообразия свойств, чем просто тональные свойства (например, может использоваться описание формы).

Среди других методов, к статистическому подходу к описанию текстуры относятся также многомасштабные методы, в том числе методы на основе дискретного вейвлет-преобразования. Популярность этих методов определяется тем, что вейвлет-анализ позволяет выявлять локальные пространственные и частотные характерные особенности изображений [6]. Кроме того, для ортогональных дискретных кратно-масштабных вейвлет-преобразований существую быстрые алгоритмы.

Далее будет рассмотрен разработанный авторами подход к построению текстурной модели изображений на основе энергетических признаков, вычисляемых с применением ортогонального дискретного кратно-масштабного вейвлет-преобразования Хаара.

## 1. Энергетические признаки

Энергетические признаки изображения представляют собой оценки значений энергии атрибутов пикселей. Совокупность энергетических признаков образует весовую модель изображения — набор весов, отражающих значимость пикселей изображения с точки зрения его восприятия [7].

В рамках статистического подхода текстуру определяют с помощью недетерминированных свойств, связанных с распределениями и отношениями значений яркости (уровней серого) на изображении. Оценить текстуру с этой точки зрения можно на основе анализа изменений значений яркости.

Изменения значений яркости на изображении характеризуют его локальные особенности. Согласно исследованиям в области биологического зрения именно такие особенности наиболее существенны для восприятия сцен на изображениях. В свою очередь, относительно большая величина изменения яркости в пикселе характеризует его как пиксель, принадлежащий краю. Плотность краев в различных областях изображения отражает текстуру изображения в целом. Таким образом, оценив значимость пикселя с точки зрения восприятия изображения, мы, тем самым, можем построить текстурную модель.

В данной работе для оценки значимости пикселей в качестве их атрибутов предлагается использовать сопоставленные с ними коэффициенты вейвлет-преобразования. Наиболее простым и быстрым является ортогональное кратно-масштабное преобразование Хаара. При его применении предполагается, что само исходное изображение является результатом вейвлет-разложения на последнем уровне $J$ и представляет собой матрицу аппроксимирующих коэффициентов $LL_J$, значения которых равны значениям яркости его пикселей (при этом считается, что матрицы детализирующих коэффициентов этого уровня $LH_J$, $HL_J$ и $HH_J$ содержат только нулевые значения). Для вычисления коэффициентов матриц $LL_{j-1}$, $LH_{j-1}, HL_{j-1}$ и $HH_{j-1}$ уровня $j-1$ на основе значений аппроксимирующих коэффициентов матрицы $LL_j$ уровня $j$ ($j = J, \ldots, j_0$, где $j_0$ — начальный уровень) применяются следующие выражения:

$$LL_{j-1}(m,n) = (LL_j(2m,2n) + LL_j(2m+1,2n) + LL_j(2m,2n+1) + LL_j(,2m+1,2n+1))/4, \qquad (1)$$

$$LH_{j-1}(m,n) = (LL_j(2m,2n) + LL_j(2m+1,2n) - LL_j(2m,2n+1) - LL_j(,2m+1,2n+1))/4, \qquad (2)$$

$$HL_{j-1}(m,n) = (LL_j(2m,2n) - LL_j(2m+1,2n) + LL_j(2m,2n+1) - LL_j(,2m+1,2n+1))/4, \qquad (3)$$

$$HH_{j-1}(m,n) = (LL_j(2m,2n) - LL_j(2m+1,2n) - LL_j(2m,2n+1) + LL_j(,2m+1,2n+1))/4. \qquad (4)$$

Вычислить веса для оценки значимости пикселей на основе значений коэффициентов вейвлет-преобразования можно различными способами, один из которых определяется следующим образом:

$$w_j(m_j, n_j) = k_{1j} w_{j-1}(m_j / 2, n_j / 2) + k_{2j} E_j(m_j, n_j), \tag{5}$$

где

$$E_j(m_j, n_j) = LH_j^2(m_j, n_j) + HL_j^2(m_j, n_j) + HH_j^2(m_j, n_j). \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) применяются для уровней от $j_0$ до $J-1$. При этом для начального уровня $j_0$ весовые значения $w_{j_0-1}(m_{j_0} / 2, n_{j_0} / 2)$ устанавливаются равными нулю. Весовые значения для пикселей исходного изображения, рассматриваемого на уровне $J$, вычисляются по формуле:

$$w_J(m_J, n_J) = w_{J-1}(m_J / 2, n_J / 2) \tag{7}$$

и затем нормируются:

$$w_J'(m_J, n_J) = \frac{w_J(m_J, n_J)}{\max\{w_J(m_J, n_J)\}}, \tag{8}$$

где $\max\{w_J(m_J, n_J)\}$ — максимальное значение веса.

Примеры построения весовых моделей для исходных полутоновых изображений размера 512 × 512 пикселей показаны на рис. 1, где в верхнем ряду слева направо приведены стандартные изображения mandril, peppers и pirate, а в нижнем ряду — соответствующие им весовые модели (при визуализации весовой модели бóльшие весовые значения показаны более темными точками).

*Рис. 1. Примеры весовых моделей изображений*

## 2. Текстурная модель

На основе предложенных энергетических признаков можно построить текстурную модель изображения с помощью следующих шагов:

1. Разбить изображение на прямоугольные области $R_1, \ldots, R_N$;

2.Для каждой области $R_i$, $i = 1, \ldots, N$, вычислить средний вес пикселей, входящих в эту область:

$$\overline{w}_i = \frac{\sum\limits_{(m_i, n_i) \in R_i} w(m_i, n_i)}{|R_i|}, \tag{9}$$

где $|R_i|$ — количество пикселей, входящих в область $R_i$;

3. Сформировать вектор признаков:

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N), \tag{10}$$

где $f_i = \overline{w}_i$ — значение $i$-го текстурного признака изображения.

В табл. 1 приведены результаты сопоставления текстурного описания стандартных изображений boat, cameraman, house, jetplane, lake, livingroom, mandril, peppers и pirate (в таблице изображения обозначены как $I_1 - I_9$ соответственно). При расчете весов значения масштабных коэффициентов $k_{1,j}$ всех уровней $j$ от $j_0 + 1$ до $J - 1$ равны 0,25, а значения масштабных коэффициентов $k_{2,j}$ всех уровней $j$ от $j_0 + 1$ до $J - 1$ равны 1. Начальный уровень $j_0$ и число уровней $J$ вейвлет-разложения равны 6 и 3 соответственно. Количество текстурных признаков изображений равно 64 (изображения разделены равномерно на 64 области). Для сопоставления изображений был использован критерий среднеквадратической ошибки, рассчитанный по векторам признаков.

Значения, приведенные в табл. 1, показывают, что исходные стандартные изображения могут быть классифицированы на основе полученных текстурных признаков.

Таблица 1

*Значения среднеквадратической ошибки при сопоставлении изображений*

| | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_4$ | $I_5$ | $I_6$ | $I_7$ | $I_8$ | $I_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 0,0000 | 0,0275 | 0,0264 | 0,0314 | 0,0167 | 0,0157 | 0,0654 | 0,0129 | 0,0178 |
| $I_2$ | 0,0275 | 0,0000 | 0,0323 | 0,0367 | 0,0324 | 0,0322 | 0,0706 | 0,0285 | 0,0259 |
| $I_3$ | 0,0264 | 0,0323 | 0,0000 | 0,0349 | 0,0289 | 0,0258 | 0,0659 | 0,0281 | 0,0289 |
| $I_4$ | 0,0314 | 0,0367 | 0,0349 | 0,0000 | 0,0323 | 0,0301 | 0,0653 | 0,0325 | 0,0259 |
| $I_5$ | 0,0167 | 0,0324 | 0,0289 | 0,0323 | 0,0000 | 0,0166 | 0,0559 | 0,0126 | 0,0159 |
| $I_6$ | 0,0157 | 0,0322 | 0,0258 | 0,0301 | 0,0166 | 0,0000 | 0,0591 | 0,0166 | 0,0213 |
| $I_7$ | 0,0654 | 0,0706 | 0,0659 | 0,0653 | 0,0559 | 0,0591 | 0,0000 | 0,0608 | 0,0599 |
| $I_8$ | 0,0129 | 0,0285 | 0,0281 | 0,0325 | 0,0126 | 0,0166 | 0,0608 | 0,0000 | 0,0167 |
| $I_9$ | 0,0178 | 0,0259 | 0,0289 | 0,0259 | 0,0159 | 0,0213 | 0,0599 | 0,0167 | 0,0000 |

## Заключение

Предложенный метод построения текстурной модели изображений на основе энергетических признаков прост для реализации и позволяет обеспечить высокую скорость вычислений. Полученные результаты показывают, что описанные текстурные характеристики позволяют обеспечить различение изображений. Это может быть использовано для построения эффективных классификаторов для решения задач в системах обработки информации и управления, базирующихся на технологиях компьютерного зрения.

**Литература**

1. *Шовенгердт, Р. А.* Дистанционное зондирование. Модели и методы обработки изображений / Р. А. Шовенгердт. – М. : Техносфера, 2010. – 560 с.

2. Обработка изображений в авиационных системах технического зрения / Под ред. Л. Н. Костяшкина, М. Б. Никифорова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 240 с.

3. *Гонсалес, Р.* Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – 3-е изд, испр. и доп. – М. : Техносфера, 2012. – 1104 с. – ISBN 978-5-94836-331-8.

4. *Шапиро, Л.* Компьютерное зрение [Электронный ресурс] / Л. Шапиро, Дж. Стокман; пер. с англ. – 2-е изд. (эл.). – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 752 с.

5. *Sonka, M.* Image Processing, Analysis, and Machine Vision / M. Sonka, V. Hlavac, R. Boyle. – 4th Edition. – Cengage Learning, 2015. – 920 p.

6. *Mallat, S.* A Wavelet Tour of Signal Processing / S. Mallat. – 3rd Edition. – Academic Press, 2009. – 832 p.

7. *Гизатуллин, З. М.* Метод обнаружения контуров на основе весовой модели изображения / З. М. Гизатуллин, С. А. Ляшева, О. Г. Морозов, М. П. Шлеймович // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 3. – С. 393–400. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-615.

УДК 004.6, 004.9

# ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИНТЕГРАЦИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ С ЦЕЛЬЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АНАЛИТИКИ

**Ю. А. Максименко, В. В. Ухлова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В данной статье рассматривается процесс интеграции информационных систем для возможности централизованного решения организациями задач мониторинга. В частности, описан процесс предоставления данных ведомственной системой для централизованного мониторинга в системе одного из ситуационных центров РФ. В работе рассмотрен жизненный цикл данных, используемых в рамках задачи мониторинга. Автором показана цепочка преобразования данных и освещены основные проблемы, связанные с выгрузкой, обработкой и представлением информации. Актуальность работы определяется недостаточной проработанностью механизмов интеграции ИС, в то время как подобные задачи возникают не только в СЦ, но и других организациях.
**Ключевые слова:** интеграция информационных систем, мониторинг, обработка данных, визуализация данных, формат данных, представление данных, преобразование данных.

## Введение

В настоящее время развертывание ситуационных центров (СЦ) является первоочередной задачей администраций субъектов РФ. Ключевой задачей для СЦ является консолидация информации из актуальных источников и отображение в режиме реального времени с целью мониторинга объектов и дальнейшего анализа их состояния. В свою очередь, это позволит повысить качество принимаемых управленческих решений при урегулировании социально-экономических и общественно-политических вопросов.

В зависимости от субъекта РФ спектр задач СЦ может отличаться, однако, такие вопросы как уровень безопасности в регионе, демографическое состояние, рейтинг представителей органов власти и схожие, актуальны для каждого субъекта. Соответственно, уже при развертывании СЦ ставится задача интеграции систем визуализации и анализа с информационными системами (ИС) различных ведомств. Из-за того, что изначально эти системы разрабатывались непосредственно под задачи ведомств, данные, хранящиеся в них по виду, формату и другим характеристикам зачастую не соответствуют требованиям аналитических задач СЦ. Это и определяет актуальность задач интеграции ИС с целью решения задач мониторинга и аналитики СЦ. При этом следует понимать, что подобные задачи возникают не только в СЦ.

## 1. Предмет исследования

В данной статье под вопросом интеграции ИС будем понимать процесс приведения данных, хранимых в ведомственной ИС, к виду, позволяющему использовать эти данные при решении задач мониторинга и аналитики СЦ. Рассмотрим решение задачи интеграции ИС Единого центра оперативного реагирования (ЕЦОР) с системой СЦ для разрешения вопроса визуализации чрезвычайных ситуаций (ЧС) в СЦ в режиме реального времени. Целью интеграции является отображение на географической карте региона мест возникновения ЧС. Под ЧС понимаются такие события как пожары (возгорания), дорожно-транспортные происшествия (ДТП), аварии на объектах ЖКХ и речного транспорта.

## 2. Постановка задачи

Результат, который ожидается достигнуть в итоге интеграции — возможность отображения данных сторонних ИС через систему СЦ. Следовательно, возникает потребность в исследовании принципов хранения и передачи данных внутри ведомственных ИС, формирования моделей данных для решения аналитических задач СЦ и разработки алгоритма приведения данных. Успешность интеграции зависит от многих факторов, в частности, от архитектуры хранилища ИС и качества исходных данных. В свою очередь, именно они влияют на выбор методов и инструментов интеграции.

Исходными данными задачи является информация, приходящая из ЕЦОР, в котором она собирается из Единой дежурной диспетчерской службы (ЕДДС) и Дежурной диспетчерской службы (ДДС) данного субъекта.

Выходными данными являются четыре группы массивов координат точек локаций ЧС (по видам происшествий). Соответственно, решение задачи интеграции заключается в получении данных из внешней ИС и преобразовании этих данных в формат модуля представления данных системы СЦ.

Согласно общепринятому алгоритму интеграции ИС (рис. 1), первым шагом является извлечение данных. Выгрузка данных производится исходя из модели данных, определенной на основании требований к исходным данным модуля визуализации. Вторым шагом является приведение данных ИС к модели данных модуля визуализации. Третий этап — загрузка полученных данных в хранилище для использования системой СЦ.

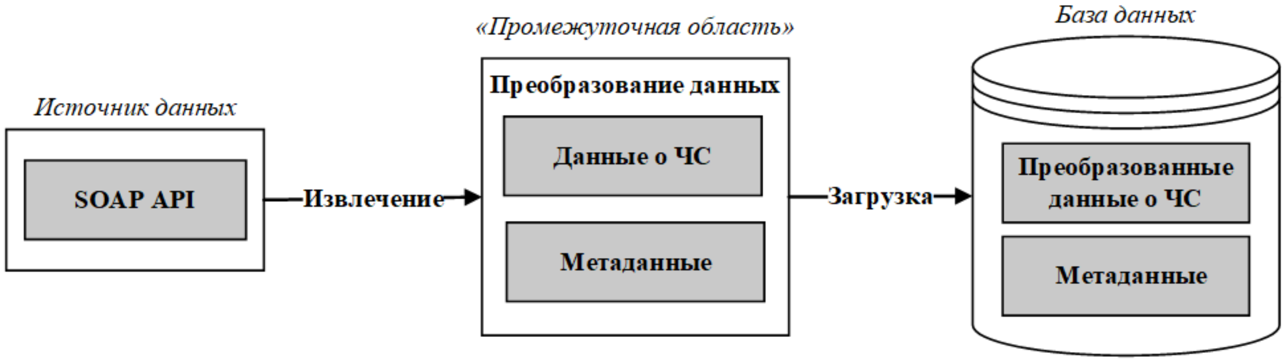



*Рис. 1. Алгоритм интеграции ИС*

Традиционное решение — использование ETL-загрузчика. Его функциональные возможности позволяют извлечь данные из нескольких источников, применить логические операции и представить данные в виде, ценном для конечного пользователя.

## 3. Решение поставленной задачи

На практике задача визуализации существенно усложняется. Первое с чем сталкивается аналитик — возможность выбора инструментов визуализации. Функциональность модуля представления данных СЦ позволяет выводить один или несколько массивов данных как по слоям, так и в одном слое. Соответственно, выгрузка может быть реализована как по виду ЧС, так и смешанным массивом. Соответственно, появляется задача выбора (подбора) инструмента визуализации. Если первичен выбор метода визуализации, то в дальнейшем придется форматировать данные под метод. Второй вариант — когда метод подбирается под формат имеющихся данных.

Вторая проблема — это формирование выборки данных. С одной стороны метод визуализации может быть неизвестен и необходима выгрузка как можно большего количества данных. В этом случае высока вероятность хранения избыточных данных, что в свою очередь усложняет в целом весь процесс интеграции. С другой стороны, запрос данных, необходимых модулем визуализации не всегда может быть исполнен. Причиной может быть, например, отсутствие запрашиваемых данных или их недостаточная точность. В качестве решения можно рассматривать вариант выбора метода визуализации, где изначально определяются обязательные параметры и желаемые.

Третья проблема связана с наличием инструментов преобразования данных. Из-за различий в модели данных ведомственных ИС и СЦ форматы данных могут не совпадать. Соответственно, не для всех пар данных исходный-выходной файл могут быть готовые конвертеры данных.

В привязке к задаче мониторинга объектов СЦ это выглядит следующим образом. Модуль представления данных СЦ предусматривает загрузку данных как: двумерный целочисленный массив (координаты точек по широте и долготе) с привязкой к отсчету времени в формате datetime и виду происшествия (набор символов). Кроме того имеется возможность отображения дополнительной информации в строковом формате.

Исходные данные для выгрузки имеют вид: координаты — строковый тип, дата — целочисленный. При этом дата представлена в виде отдельных значений дня, месяца, года, часа, минут и секунд. Вид происшествия в исходных данных не присутствует. Учитывая, что модуль представления СЦ позволяет выводить дополнительную информацию, а в системе ЕЦОР по некоторым происшествиям она есть, то и ее можно использовать в качестве исходных данных (например, адрес объекта, число пострадавших, погибших). Доступ предоставляется посредством только WSDL-файла. Сохранение данных в базе данных СЦ производится в JSON-формате.

В связи с этим, возникают две задачи:

1) генерация недостающих значений (вид происшествия);

2) преобразование форматов данных.

Информация о виде происшествия фигурирует в системе только на уровне

XML-тэгов. В связи с этим, в загрузчик ETL вводится дополнительное поле с наименованием потока. Оно сразу создается в виде набора символов и дальнейшего преобразования не требует.

Изменение форматов данных координат и времени реализуется посредством выгрузки значений через ETL-загрузчик с использованием XML-запроса. Конечным (целевым) таблицам приписываются названия, позволяющие распознать и нанести хранящуюся в них информацию на карту. Для преобразования данных используются стандартные процедуры конкатенации, объединения и преобразования форматов. Схема преобразований данных представлена на рис. 2.

Следует заметить, что при выгрузке данных была отмечена еще одна особенность: структура приходящих данных по каждому виду происшествия отличается по уровню детализации (например, варьируется число полей по каждому виду ЧС). В связи с этим, при загрузке одновременно всех данных в ETL-загрузчик, имеет место нарушение логики структуры целевой таблицы. Приведение потока данных к единому формату может привести либо к сокращению данных, либо появлению большого числа пустых значений. Поэтому для реализации задачи визуализации оптимальным решением является разделение потока данных о ЧС на 4 группы (по видам ЧС: пожары, аварии на объектах ЖКХ, ДТП, аварии на объектах речного транспорта). В свою очередь, каждый вид происшествия будет отображаться на карте в виде отдельного слоя, что существенно упрощает процесс работы с данными. При этом для выгрузки данных из ЕЦОР создается четыре ETL-загрузчика. Каждый из них в качестве источника использует предоставленный WSDL-файл, а в тело XML-запроса вносится необходимый для вызова метод.

В качестве стратегии загрузки логично применение «обновления по ключу», где ключом является поле ID — уникальный идентификатор ЧС. Таким образом, при появлении нового

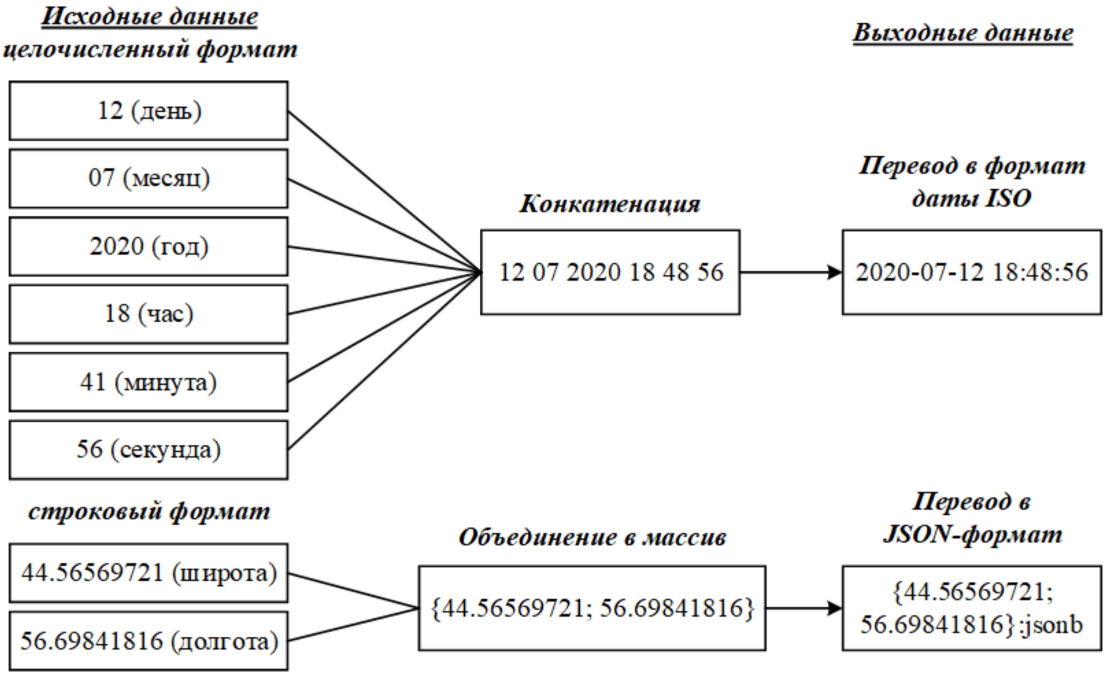



*Рис. 2. Преобразование данных*

ЧС производится проверка уникальности записи по полю ID. Если записи не существует, то она добавляется в целевую таблицу, в случае наличия записи с пришедшим ID, информация по ней обновляется. Для поддержания актуальной информации о ситуации в регионе предусматривается возможность ежечасного обновления данных.

## Заключение

Результатом интеграции системы ЕЦОР с ИС СЦ является карта региона с отметками о возникновении ЧС. События отображаются в реальном времени и по каждому из них предоставляется краткая информация.

Рассмотренные выше проблемы интеграции ИС позволяют сделать вывод, что использование только ETL-систем не всегда бывает достаточным. Вопросы, связанные с преобразованием структуры данных, их агрегированием, форматированием, очисткой, а также добавлением новых данных и удалением существующих остаются открытыми. Эти задачи могли бы решиться, например, средствами таких языков программирования как Python, R или PySark или существующими программными решениями, например, семейства Apache и других разработчиков. Однако каждый из возможных вариантов усложняет процесс подготовки данных, вместо того, чтобы его упростить. Более того, предлагаемые алгоритмы должны быть адаптивными, а еще лучше универсальными, и позволять использовать полученные данные для решения других аналитических задач СЦ. В связи с этим, задачи оптимизации алгоритмов на сегодняшний день являются актуальными для СЦ, как отдельно взятого региона, так и страны в целом.

## Литература

1. *Туманов, В. Е.* Проектирование хранилищ данных для приложений систем деловой осведомленности (Business Intelligence Systems): учеб. пособие / В. Е. Туманов. – 2-е изд. – Москва: Национальный Открытый Университет ИНТУИТ, 2016. – 619 с.

2. *Холин, А. Н.* Ситуационный центр: методология и организационное обеспечение экспертного управления: монография / А. Н. Холин, В. А. Корнилов – Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 316 с.

3. *Kimball, R.* The Data Warehouse ETL Toolkit: Practical Techniques for Extracting, Cleaning, Conforming, and Delivering Data / R. Kimball, J. Caserta. – Hoboken: Wiley, 2004. – 528 p.

4. *Fry, B.* Visualizing Data: Exploring and Explaining Data with the Processing Environment / B. Fry. – 1st Edition – Sebastopol: O'Reilly Media, 2008. – 384 p.

5. *Ware, C.* Information Visualization: Perception for Design (Interactive Technologies) / C. Ware. – 3rd Edition – Burlington: Morgan Kaufmann, 2012. – 536 p.

УДК 004.421:004.67

# РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕШИВАЮЩИХ УСТРОЙСТВ

**Е. И. Мартьянов, Е. Н. Малыгин**

*Тамбовский государственный технический университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается способ применения предметно-ориентированной программной системы, предназначенной для решения задачи по определению конструктивных параметров и режимных характеристик двухлопастной мешалки. Данная система позволяет получать более точные результаты, чем при помощи инженерных методик и при этом достаточно проста в применении. Кроме того, рассматривается алгоритм разработки предложенной системы, который может быть применен к задачам проектирования других объектов, математическое описание которых включает системы дифференциальных уравнений в частных производных.

**Ключевые слова:** вертикальный аппарат с мешалкой, двухлопастная мешалка, предметно-ориентированная программная система, CAE-системы, FreeCAD, Gmsh, OpenFOAM, Python.

## Введение

Самым распространённым процессом химических, фармацевтических и пищевых производств является процесс перемешивания гомогенных (жидкость с жидкостью) или гетерогенных (жидкость с твердым или газообразным веществом) сред. Для этого используются вертикальные емкостные аппараты с мешалками различных конструкций.

При математическом описании процессов, реализуемых в подобных аппаратах (гидродинамических, тепловых и др.), приходится использовать сложные математические конструкции, основанные на решении систем дифференциальных уравнений в частных производных. Для промышленных предприятий данный подход недоступен т.к. для его реализации требуется высококвалифицированный персонал и большие затраты времени, поэтому обычно применяется либо физический эксперимент в конкретной производственной ситуации, либо используют инженерные методики, рекомендованные к применению головными организациями.

Разработка инженерных методик расчета процессов механического перемешивания требует проведения большого количества экспериментов на лабораторных установках фиксированных размеров для мешалок разных конструкций. Любое отклонение от предложенных конструкций мешалок или пропорций аппаратов может привести к серьезным ошибкам, что может привести к неэффективному использованию оборудования или к возникновению аварийных ситуаций [7].

Более точные результаты можно получить, применив различного рода CAE-системы: ANSYS, COMSOL, STAR-CD, QForm, Nastran илиFluent [1].Однако применение данных программных комплексов ограничено высокими требованиями к возможностям используемой компьютерной техники и требует высокой квалификации персонала. Эти комплексы ориентированы на решение широкого круга задач и требуют настройки на рассматриваемую предметную область. В результате возможны потери в скорости вычисления и точности получаемых результатов. Поэтому актуальна разработка предметно-ориентированных программных систем для расчета технологического оборудования, позволяющих повысить скорость и точность вычислений за счет применения специализированных методов и алгоритмов, характерных для рассматриваемого объекта, а также сократить зависимость от иностранного программного обеспечения.

## 1. Постановка задачи

Разработка подобных программных систем базируется на формулировке конкретной задачи [5]. Задача определения режимных характеристик и конструктивных параметров двухлопастной мешалки для вертикального емкостного аппарата формулируется следующим образом: при фиксированных диаметре и высоте вертикальной емкости необходимо найти диаметр мешалки, ширину ее лопасти, высоту ее установки над днищем аппарата и частоту ее вращения, при которых суммарный вектор скорости потока жидкости достигает максимума при допустимых затратах мощности на перемешивание.

Варьируемыми параметрами этой задачи являются: диаметр $D_m$, высота лопасти мешалки $H_m$, высота установки мешалки над днищем $H_{hm}$ и частота вращения мешалки $n$. Фиксированные параметры: диаметр $D_t$ и высота $H_t$ емкости, как правило, являются стандартизированными и определяются либо технологией производства, либо ГОСТами [3]. Изменение варьируемых параметров не приводит к снижению технологичности изготовления аппарата в целом. Кроме того, при перепрофилировании производства и модернизации оборудования проще подобрать и изготовить новое перемешивающее устройство, чем проектировать новый аппарат. Варьируемые параметры изменяются в следующих интервалах:

$$D_m \in \left[0.1D_t, 0.9D_t\right] \tag{1}$$

$$H_m \in \left[0.01D_m, 0.2D_m\right] \tag{2}$$

$$H_{hm} \in \left[0.4D_m, 0.8H_t\right] \tag{3}$$

$$n \in \left[0, 200\right]. \tag{4}$$

Интервал (1) определяется из условия соблюдения норм и правил проектирования технологического оборудования (между двумя взаимно перемещающимися деталями должен быть зазор, предотвращающий их соударение [2, 4]).

Интервалы (2), (3) и (4) определяются требованиями к рассматриваемому типу перемешивающего устройства [2, 8].

Толщина лопасти мешалки $S_m$ практически не оказывает влияния на процесс перемешивания и обычно определяется по формуле:

$$S_m = 0.1H_m. \tag{5}$$

Основным критерием оптимальности значений варьируемых параметров является суммарный вектор скорости перемешиваемой среды, позволяющий достоверно оценить интенсивность перемешивания. Чем больше сумма всех векторов скорости в рассматриваемом аппарате, тем меньшее количество застойных зон (зон с низкой скоростью движения потока) образуется в его объеме. С другой стороны, нельзя бесконечно увеличивать скорости перемешиваемой среды, поэтому в критерий вводится штрафная функция – мощность, затрачиваемая на перемешивание, которая компенсирует чрезмерный рост суммарного вектора скорости и делает проектируемый аппарат эффективным не только в плане перемешивания, но и в плане энергопотребления.

## 2. Выбор языка программирования

На данный момент существует множество языков программирования, пригодных для разработки предметно-ориентированной программной системы выбора параметров механической мешалки: Python, Java, JavaScript, Perl, Tcl или Smalltalk. В результате анализа и сравнения характеристик этих языков, было принято решение использовать язык Python. Он обладает следующими особенностями [9]:

– программы, написанные на данном языке существенно короче, чем эквивалентные программы на других языках за счет встроенных высокоуровневых типов данных и динамической типизации;

– поддерживает стиль программирования, использующий простые функции и переменные без включения в определение классы, что позволяет создавать объемные программы;

– концентрируется на общих методологиях программирования, таких как разработка структур данных и объектно-ориентированное программирование.

### 3. Алгоритм работы программной системы

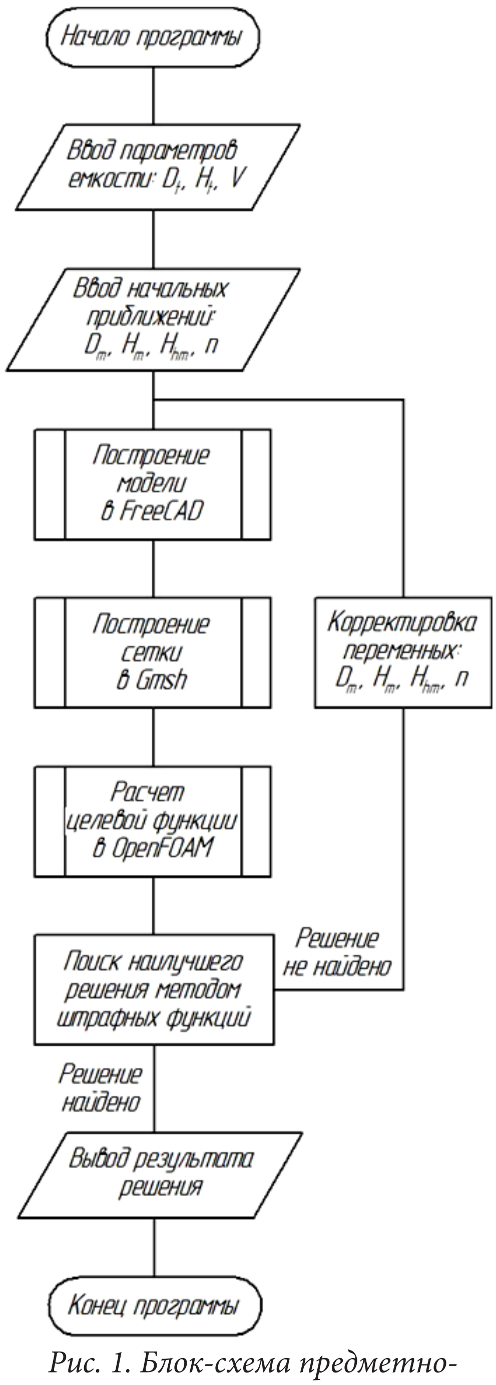



*Рис. 1. Блок-схема предметно-ориентированной программной системы*

Алгоритм работы предметно-ориентированной программной системы выбора параметров механической мешалки представлен в виде блок-схемы на рис. 1.

Введенные значения фиксированных параметров: $D_t$, $H_t$ и $V$ (объем жидкости) и начальных значений варьируемых параметров: $D_m$, $H_m$, $H_{hm}$ и $n$ передаются в программу FreeCAD, где происходит построение 3D-модели вертикального емкостного аппарата с эллиптическим днищем.

FreeCAD — параметрическая САПР общего назначения с открытыми исходными кодами. Основой геометрического моделирования твёрдых тел в ней является принцип граничного представления, но имеется и поддержка полигональных сеток. Исключительной особенностью данной программы является возможность ее работы без графического интерфейса, а также возможность создания с помощью языка программирования Python своих собственных программ.

Построение 3D-модели происходит в фоновом режиме, без участия оператора. Затраты времени не превышают нескольких секунд, т.к. не приходится использовать графический интерфейс и рисовать все объекты.3D-модель и исходные данные передаются в другую программу — Gmsh, где происходит генерация сетки конечных элементов (КЭ) по заданному алгоритму.

Gmsh — 3D-генератор конечных элементов с открытым исходным кодом. Это быстрый, легкий и удобный инструмент создания сетки КЭ с параметрическим вводом. Он включает собственный язык программирования, но может работать и сPython. С его помощью можно строить сетки любой конфигурации и сложности, как с применением встроенных алгоритмов, так и с помощью собственных. Так же как и предыдущая программа, Gmsh работает без графического интерфейса и, следовательно, практически не расходует вычислительные ресурсы ПК.

После построение сетки и визуальной проверки полученного результата данные передаются в программу OpenFOAM, где происходит расчет поля скоростей в аппарате.

OpenFOAM — свободно распространяемый инструментарий вычислительной гидродинамики для операций с полями (скалярными, векторными и тензорными). Он предназначен для реализации задач гидродинамики ньютоновских и неньютоновских вязких жидкостей, как в несжимаемом, так и сжимаемом приближении с учётом конвективного теплообмена и действием сил гравитации. Для моделирования турбулентных течений возможно использование RANS-моделей, LES- и DNS-методов. Возможно решение дозвуковых, околозвуковых и сверхзвуковых задач. Так же она позволяет решать и другие задачи:

– прочностные расчеты;
– задачи теплопроводности в твёрдом теле;
– многофазные задачи, в том числе с описанием химических реакций компонент потока;
– задачи, связанные с деформацией расчётной сетки;
– другие задачи, при математической постановке которых требуется решение дифференциальных уравнений в частных производных в условиях сложной геометрии среды.

В основе программы лежит набор библиотек, предоставляющих инструменты для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, как стационарных, так и нестационарных. В терминах программы OpenFOAM большинство дифференциальных и тензорных операторов в программном коде (до трансляции в исполняемый файл) может быть представлено в удобочитаемой форме, а метод дискретизации и решения для каждого оператора может быть выбран уже пользователем в процессе расчёта. Таким образом, полностью разделяются выбор расчетной сетки КЭ (метод дискретизации), дискретизация основных уравнений и методов их решения.

Расчёт ведется по разработанной ранее математической модели описания процесса перемешивания в аппарате с двухлопастной мешалкой [6]. Работа программы OpenFOAM осуществляется в фоновом режиме.

Для ускорения вычислений был применен алгоритм параллельных вычислений CUDA. Он позволил существенно увеличить вычислительную производительность ПК благодаря использованию графических процессоров, что, в свою очередь, привело к значительному сокращению затрат времени.

Поиск значений варьируемых параметров, соответствующих условному максимуму критерия оптимальности осуществляется методом штрафных функций. Алгоритм метода реализован на языке программирования Python. Поиск осущесвляется в фоновом режиме без участия оператора.

## Заключение

Создана предметно-ориентированная программная система выбора параметров механической мешалки, работа с которой не требует от оператора каких-то специальных навыков. Поскольку все вычислительные процессы выполняются в фоновом режиме, экономятся вычислительные ресурсы, что позволяет существенно ускорить процесс вычислений.

Проверка качества результатов, полученных с применением системы, производиться путем сравнения с результатами, полученными с применением систем конечно-элементного анализаANSYS и COMSOL. Как видно из табл. 1, разработанная предметно-ориентированная программная система затрачивает на 12–18 % меньше времени, чем ANSYS и COMSOL, а полученное с ее применением значение суммарного вектора скорости не отличается более чем на 20 %.

Таким же образом можно решать задачи проектирования других объектов. Например, задачи определения продольного сечения балок для металлических конструкций грузоподъемных сооружений или мостов, задачи тепловых расчетов систем нагрева вулканизационных гидравлических прессов, определения эффективность очистки газов в циклонах. Подобный

Таблица 1

*Сравнение результатов расчетов*

| Параметр | Предметно-ориентированная программная система | ANSYS | COMSOL |
|---|---|---|---|
| Количество КЭ в 3D-модели | 137 933 | 140 304 | 134 971 |
| Продолжительность расчета, с | 783 | 962 | 1154 |
| Суммарный вектор скорости, м/с | 854,86 | 974,31 | 1042,51 |

подход будет полезен для конструкторских и проектных отделов промышленных предприятий, где разрабатывают типовые изделия разной конфигурации и широкой номенклатуры или размерного ряда, а именно для предприятий химического машиностроения, станкостроительных и приборостроительных заводов.

**Литература**


1. *Боровков, А. И.* Компьютерный инжиниринг: учеб. пособие / А. И. Боровков [и др.]. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 93 с.

2. *Брагинский, Л. Н.* Перемешивание в жидких средах. Физические основы и инженерные методы расчета / Л. Н. Брагинский, В. И. Бегачев, В. М. Барабаш. – Л. : Химия, 1984. – 336 с.

3. *Карпушкин, С. В.* Расчеты и выбор механических перемешивающих устройств вертикальных емкостных аппаратов / С. В. Карпушкин, М. Н. Краснянский, А. Б. Борисенко. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 168 с.

4. *Лащинский, А. А.* Основы конструирования и расчета химической аппаратуры. Справочник / Лащинский А. А., Толчинский А. Р. – Л. : Машиностроение, 1970. – 752 с.

5. *Малыгин, Е. Н.* Математические методы в технических расчётах: учебное пособие / Е. Н. Малыгин. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с.

6. *Мартьянов, Е. И.* Математическое описание полей скоростей в аппарате с мешалкой / Е. И. Мартьянов, Е. Н. Малыгин // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2020. – № 54. – С. 107–111.

7. *Мартьянов, Е. И.* Применение систем автоматизированного расчета для проектирования лопастных мешалок / Е. И. Мартьянов, Е. Н. Малыгин // Виртуальное моделирование, прототипирование и промышленный дизайн: материалы V Международной научно-практической конференции. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2018. – Вып. 5, Т. 1. – С. 549–553.

8. РД 26-01-90-85. Механические перемешивающие устройства. Метод расчета. Руководящий нормативный документ. – Введ. 1986-01-01. – Л. : РТП ЛенНИИхиммаша, 1985. – 257 с.

9. *Хайнеман, Д.* Алгоритмы. Справочник с примерами на C, C++, Java и Python. / Д. Хайнеман, Г. Поляис, С. Сеяков. – СПб. : ООО «Альфа-книга», 2017. – 432 с.

УДК 004.94

# СРЕДА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ НА БАЗЕ ОТКРЫТЫХ ФОРМАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

**О. Ю. Марьясин**

*Ярославский государственный технический университет*

**Аннотация.** Рассмотрен программный комплекс для функционирования цифровых двойников на базе открытых форматов моделирования. Программный комплекс, в настоящее время, включает четыре взаимосвязанных приложения, разработанных с помощью языка Python и его специализированных библиотек. Совместное использование приложений позволяет организовать автоматизацию операций по работе с различными типами моделей, выполнению моделирования, обработке результатов моделирования и обмену данными с физическими объектами в режиме реального времени. Представленный в статье программный комплекс может служить платформой для реализации и функционирования цифровых двойников реальных физических объектов.

**Ключевые слова:** цифровой двойник, компьютерная модель, интерфейс FMI, формат ONNX, интерфейс OPC, автоматизация операций, Python.

Прорыв в развитии цифровых технологий, позволивший увеличить вычислительные мощности и обрабатывать большие объемы данных в реальном времени, привел к появлению концепции цифрового двойника (Digital Twin) [1]. В этой концепции виртуальная модель не отбрасывается после создания материального объекта, а используется в связке с физическим объектом на протяжении всего жизненного цикла: на этапе тестирования, доработки, эксплуатации и утилизации. Физический объект использует датчики, которые собирают данные о состоянии объекта в реальном времени, после чего эти сведения отправляются цифровому двойнику. На основе полученных данных уточняется цифровая модель, которая, в свою очередь, дает рекомендации по оптимизации режима эксплуатации и обслуживания реального объекта [2].

Для создания цифровых двойников могут использоваться различные пакеты для научных и инженерных расчетов, такие как MATLAB, SCILAB, пакеты, основанных на языке Modelica (Dymola, OpenModelica, MapleSim) и другие. Реализация цифровых двойников в таких системах моделирования затруднена тем, что они ориентированы на интерактивное взаимодействие с пользователем. При таком взаимодействии пользователь сначала задает параметры модели, запускает моделирование, а затем анализирует его результаты. Моделирование при этом происходит не в реальном, а в так называемом модельном времени и процессы протекающие часами, могут быть смоделированы за несколько секунд. Работа с цифровым двойником часто требует, чтобы моделирование производилось в реальном времени, в темпе поступления данных с физического объекта. Организация такого режима возможна далеко не во всех системах моделирования, а там где возможна, например, в среде MATLAB/Simulink, требует специальной настройки среды, подключения ряда специализированных библиотек и связана с большими вычислительными затратами.

При создании цифровых двойников сложных объектов возможна ситуация, когда уже существуют готовые модели отдельных компонентов сложной системы, но они выполнены в разных системах моделирования и поэтому несовместимы друг с другом. В таких случаях значительную роль для обмена данными и выполнения совместных расчетов и моделирования могла бы сыграть организация единого общепринятого интерфейса между различными пакетами для расчетов и моделирования. Основным кандидатом на роль такого интерфейса сейчас претендует интерфейс FMI (Functional Mock-up Interface) [3]. FMI разрабатывался как независимый стандарт для обмена моделями и проведения совместного моделирования. В настоящее время интерфейс FMI поддерживается более 100 различными программными системами, среди которых Adams, ANSYS, IBM Rational Rhapsody, MATLAB/Simulink, NI LabVIEW, Dymola, SimulationX, MapleSim, OpenModelica и многие др. Модели, разработанные в различных системах с помощью интерфейса FMI могут экспортироваться в FMU (Functional Mock-up Unit) модули, которые могут использоваться другими системами для обмена моделями (Model Exchange) или совместного моделирования (Co-Simulation).

Цифровые двойники могут создаваться не только на основе компьютерных моделей, построенных на базе математических моделей объектов, но и на основе цифровых или data-driven моделей [4]. Data-driven модели, в отличие от традиционных моделей, основаны не на знании физических закономерностей, а на анализе большого количества данных. Они строятся с использованием методов машинного и глубокого машинного обучения. Создание и обучение data-driven моделей может быть трудоемким и длительным процессом, а каждая такая модель является уникальной. Поэтому повторное использование готовых моделей машинного обучения сегодня является одной из назревших потребностей. Для обмена моделями между различными системами машинного обучения в 2017 году был разработан открытый формат ONNX (Open Neural Network Exchange) [5]. Модели ONNX в настоящее время поддерживаются системами Caffe2, Microsoft Cognitive Toolkit, TensorFlow, Keras, MATLAB, MXNet, PyTorch и многими другими.

Работа цифрового двойника предполагает обмен информацией между цифровым двойником и моделируемым физическим объектом. Для организации обмена данными между цифровым двойником и физическим объектом может быть использован интерфейс OPC. Данный интерфейс является общепромышленным стандартом и широко используется в системах управления и для межпрограммных коммуникаций. Системы моделирования, такие как MATLAB/Simulink, также имеют средства для поддержки интерфейса OPC. Последняя по времени выпуска спецификация OPC UA совмещает все преимущества предыдущих спецификаций и обеспечивает устойчивую работу, как в локальных, так и в глобальных сетях [6].

Учитывая все сказанное, в настоящее время, становится актуальной разработка системы для цифровых двойников на базе интерфейсов FMI и OPC, и формата ONNX. Такая система должна удовлетворять следующим основным требованиям:

• включать поддержку интерфейса FMI для загрузки моделей, созданных в различных пакетах программ и проведения моделирования;

• включать поддержку формата ONNX для загрузки моделей, созданных в различных системах машинного и глубокого машинного обучения и проведения моделирования;

• иметь развитые математические возможности, векторно-матричные операции, возможность свободного программирования, создания новых объектов;

• иметь возможность запуска моделей как интерактивно, так и в пакетном режиме, а также по заданному расписанию;

• включать поддержку интерфейса OPC для связи с физическими объектами;

• включать развитые средства визуализации, в том числе трёхмерной.

Автором разработан программный комплекс, который позволяет реализовать данные возможности. Разработанная система, в настоящее время, включает четыре взаимосвязанных приложения. Все приложения были разработаны с помощью языка Python и его специализированных библиотек. Первое приложение FMITool предназначено для выполнения следующих основных функций:

• загрузка FMU модулей, созданных в различных системах моделирования;

• выполнение моделирования для загруженной модели, в соответствии с заданными параметрами;

• представление результатов моделирования в графическом виде, экспорт результатов моделирования в формат .csv;

• выполнение типовых операций по автоматизации процесса моделирования индивидуально, в пакетном режиме или по заданному расписанию.

Вид главного окна приложения FMITool с открытой вкладкой «Редактор» показан на рис. 1. Поддерживается интерфейс FMI версий 1.0 и 2.0.

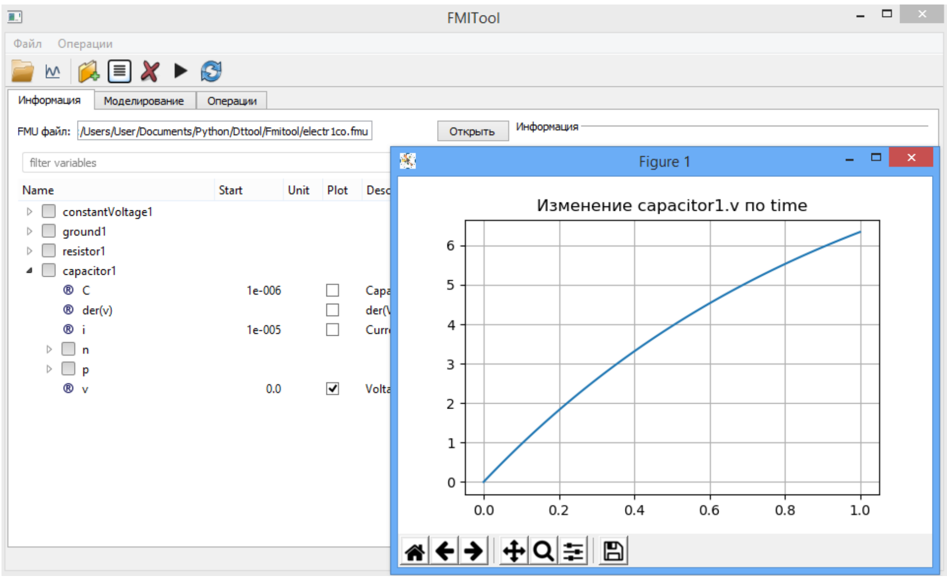



Рис. 1. Вид главного окна приложения FMITool

На вкладке «Информация» приложения FMITool можно загрузить файл FMU модуля, просмотреть информацию о модуле и его переменных. Вкладка «Моделирование» приложения позволяет выполнить моделирование открытой модели для заданных значений параметров и визуализировать результаты моделирования с помощью графиков. Поддерживается два вида графиков. Первый вид строится непосредственно на вкладке «Моделирование» для переменных, отмеченных в списке переменных на вкладке «Информация». Второй вид графиков строится в отдельном окне. Этот вид графиков может потребоваться, если необходимо: строить графики зависимостей одной переменной от другой, строить трехмерные графики, выполнить операции с изображением или его частью, сохранить изображение в одном из поддерживаемых графических форматов.

Выполнение различных операций с моделями может быть реализовано на вкладке «Операции». К настоящему времени реализованы следующие типы операций: Начать моделирование, Получить значение переменной, Установить значение переменной, Сделать шаг. Параметры каждой операции задаются пользователем в диалоговом режиме. Операции могут добавляться, удаляться, редактироваться и выполняться. Выполнение операций может производиться индивидуально, коллективно (пакетный режим), коллективно в цикле через определенный промежуток времени. Кроме того, выполнение каждой операции может быть задано по индивидуальному расписанию. Каждая операция приложения FMITool имеет внутреннюю переменную для хранения входных или выходных данных (результатов), которая одновременно является переменной операций приложения ScriptTool.

Приложение DMTool предназначено для выполнения следующих основных функций:

• загрузка моделей, созданных в различных системах машинного обучения из ONNX файлов;

• конвертация моделей Keras в формат ONNX и загрузка в систему;

• отображение параметров и визуализация структуры загруженной модели;

• загрузка тестового набора данных;

• выполнение моделирования для загруженной модели и входного набора данных;

• представление результатов моделирования в графическом виде, экспорт результатов моделирования в формат .csv;

• выполнение типовых операций по автоматизации процесса моделирования индивидуально, в пакетном режиме или по заданному расписанию.

Вид главного окна приложения DMTool с открытой вкладкой «Модель» показан на рис. 2. Вкладка «Моделирование» приложения позволяет выполнить моделирование открытой модели для загруженного набора данных и визуализировать результаты моделирования с помощью графиков.

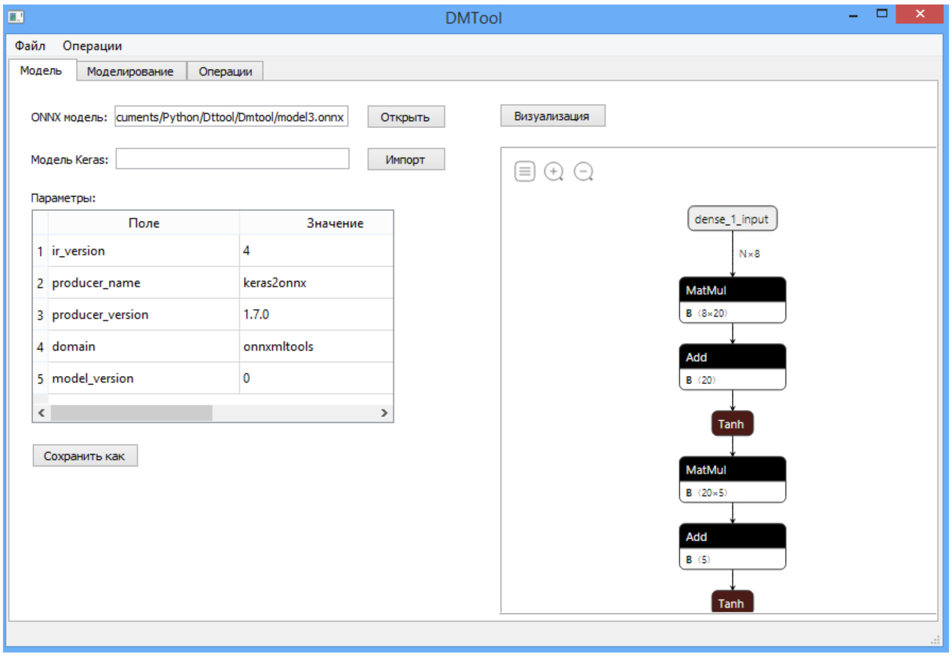



*Рис. 2. Вид главного окна приложения DMTool*

Выполнение различных операций с моделями в пакетном режиме или по расписанию может быть реализовано на вкладке «Операции». К настоящему времени реализованы следующие типы операций: Установить входной набор данных, Выполнить моделирование, Получить значение результата. Действия производимые над операциями аналогичны тем, что были описаны для приложения FMITool. Каждая операция приложения DMTool имеет внутреннюю переменную для хранения входных или выходных данных (результатов), которая одновременно является переменной операций приложения ScriptTool.

Приложение ScriptTool предназначено для выполнения следующих основных функций:

• создания, удаления и редактирования внутренних переменных ScriptTool;

• редактирования значений переменных операций внешних приложений и выходных переменных скриптов;

• создания, редактирование и выполнение произвольных скриптов на языке Python.

Приложение ScriptTool поддерживает следующие виды переменных: свободные переменные, к которым могут иметь доступ как скрипты приложения ScriptTool, так и внешние Python приложения; переменные операций, которые связаны с переменными операций внешних приложений; переменные скриптов, которые являются выходными переменными скриптов приложения ScriptTool. Скрипты могут иметь доступ ко всем перечисленным видам переменных, а внешние Python приложения могут иметь доступ к свободным переменным и, через операции, к переменным операций. Кроме того скрипты могут иметь свои локальные переменные. Такая организация переменных позволяет организовать эффективный обмен данными, как между отдельными скриптами, так и между скриптами и внешними Python приложениями.

Применение Python в качестве скриптового языка открывает широкие возможности для поддержки разработанной системы со стороны математических расчетов, статистической обработки, машинного и глубокого машинного обучения. Скрипты приложения ScriptTool могут выполняться индивидуально, коллективно в цикле через определенный промежуток времени или по индивидуальному расписанию.

Дополняет программный комплекс приложение OPCTool предназначенное для выполнения следующих функций:

• подключение к OPC UA серверу;

• просмотр структуры данных OPC UA сервера, значений атрибутов тегов OPC UA сервера;

• подписка на изменение значений тегов OPC UA сервера;

• выполнение операций чтения значений тегов OPC UA сервера в переменные приложения ScriptTool и

• операций записи значений переменных приложения ScriptTool в теги OPC UA сервера.

Вид главного окна приложения OPCTool с открытой вкладкой «OPC UA Клиент» показан на рис. 3.

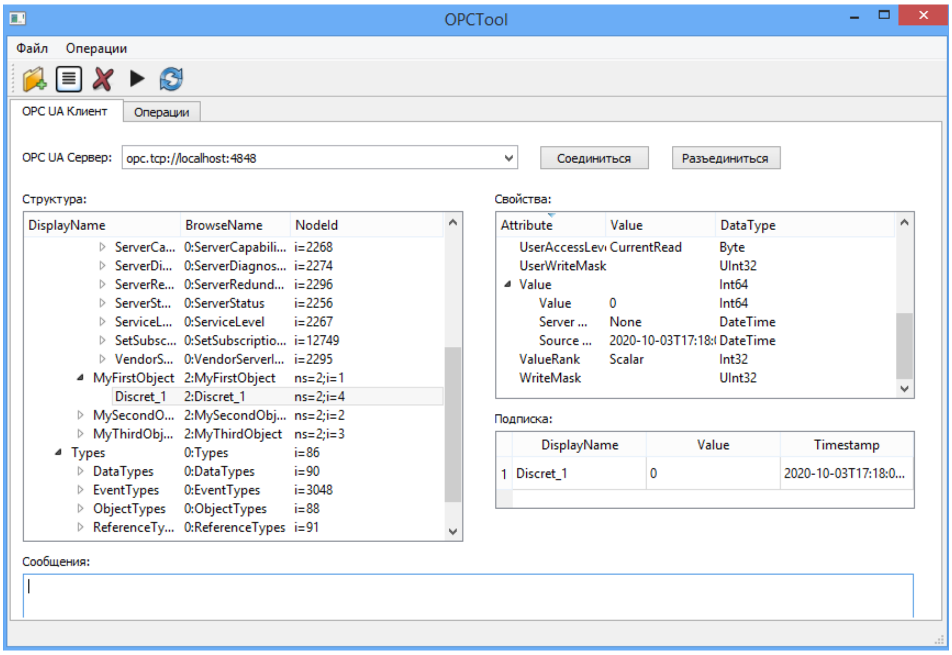



*Рис. 3. Вид главного окна приложения OPCTool*

Выполнение различных операций со значениями тегов OPC сервера в пакетном режиме или по расписанию может быть реализовано на вкладке «Операции». К настоящему времени реализованы следующие типы операций: Подключиться к OPC UA серверу, Прочитать значение тега OPC UA сервера, Записать значение тега OPC UA сервера, Отключиться от OPC UA сервера. Действия производимые над операциями аналогичны тем, что были описаны для приложения FMITool.

Совместное использование приложений FMITool, DMTool, ScriptTool и OPCTool позволяет организовать автоматизацию операций по работе с различными типами моделей, выполнению моделирования, обработке результатов моделирования и обмену данными с физическими объектами в режиме реального времени. Между операциями приложений FMITool, DMTool, OPCTool и скриптами ScriptTool может быть организован двунаправленный обмен информацией. С одной стороны входные данные моделей и результаты моделирования могут передаваться в скрипты для последующей обработки. С другой стороны данные с физического объекта с помощью приложений OPCTool и ScriptTool могут быть получены, обработаны и переданы для корректировки переменных и параметров моделей. Время и период выполнения операций и скриптов может гибко настраиваться с помощью встроенного планировщика.

Таким образом, представленный в статье программный комплекс, включающий приложения FMITool, DMTool, ScriptTool и OPCTool может служить эффективной платформой для реализации и функционирования цифровых двойников реальных физических объектов.

**Литература**


1. *Parrott A., Warshaw L.* Industry 4.0 and the digital twin technology. – Режим доступа: https://www2.deloitte.com/us/en/insights/focus/industry-4-0/digital-twin-technology-smart-factory.html

2. *Прохоров А.* Цифровые двойники. Концепция развивается. – Режим доступа: http://data.cnews.ru/articles/2018-04-18_tsifrovye_dvojniki_kontseptsiya_razvivaetsya

3. Functional Mock-up Interface. – Режим доступа: http://fmi-standard.org/

4. *Montans F. J., Chinesta F., Gomez-Bombarelli R., Kutz J. N.* Data-driven modeling and learning in science and engineering // C. R. Mecanique. – 2019. – Vol. 347. – P. 845–855.

5. ONNX | Home. – Режим доступа: https://onnx.ai/index.html

6. Home Page – OPC Foundation. – Режим доступа: https://opcfoundation.org/

УДК 004.94

# РЕАЛИЗАЦИЯ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ В БРАУЗЕРЕ НА ПРИМЕРЕ СОЗДАНИЯ ИНТЕРАКТИВНОГО МЕНЮ

**А. Е. Мащенко, С. Ю. Болотова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматриваются технологии реализации дополненной реальности в браузере, приводятся основные инструменты и библиотеки, упрощающие ее создание. Описана реализация приложения, позволяющего превратить меню ресторана или кафе в интерактивную презентацию блюда, демонстрирующую 3D-модель блюда, а также — дополнительную информацию о нем с помощью технологий дополненной реальности. Полученный программный продукт базируется на использовании библиотеки AR.js, дающей возможности отслеживать маркеры в пространстве и накладывать изображения поверх них.

**Ключевые слова:** дополненная реальность, Web-AR, маркеры дополненной реальности, библиотека AR.js, A-Frame.

## Введение

На сегодняшний день рынок приложений дополненной реальности (AR – Augmented Reality) стремительно растет, вытесняя привычные приложения. Существующие технологии позволяют интегрировать в окружающий мир виртуальные объекты, добавляя их поверх изображения реального пространства, взятого с камеры мобильного устройства. При этом пользователь может взаимодействовать с этими объектами и получать ответную реакцию приложения на свои действия.

Подобные программные продукты могут найти широкое применение на производстве, в обучении, в задачах навигации, в торговле. Преимущества использования виртуального контента для увеличения продаж тоже очевидны. С помощью подобных приложений покупатели могут получить уникальный интерактивный клиентский опыт и наглядно оценить, подходит ли им приобретаемый товар.

До недавнего времени дополненная реальность требовала создания отдельного мобильного приложения, что приводило к следующим сложностям:

• для каждой мобильной платформы было необходимо разрабатывать отдельное мобильное приложение;

• аудитория была ограничена в силу того, что не все пользователи готовы тратить время на скачивание и установку такого приложения.

И если крупные торговые компании с большим числом клиентов не испытывают описанных трудностей, то для малого бизнеса эти сложности могут стать определяющими. Путь к действительно широкой аудитории лежит через веб-приложения. Такие продукты не требуют установки дополнительного программного обеспечения, поскольку браузер поставляется вместе с почти любой операционной системой, а следовательно — пользователям нет необходимости заботиться об обновлении — существует только одна актуальная версия, и, в случае выхода новой, все пользователи автоматически переходят на нее, как правило, даже не замечая этого. Кроме того, веб-приложения являются кроссплатформенными, широко настраиваемыми и не требовательными к ресурсам и аппаратной платформе.

Таким образом, распространение технологий создания дополненной реальности в вебе Web-AR может помочь бизнесу повысить вовлеченность аудитории и вывести маркетинговые компании на новый уровень. Этому способствует так же развитие мощностей мобильных браузеров и мобильных устройств.

## 1. Обзор Web AR фреймворков

Web-AR использует комбинацию технологий, включая WebRTC, WebGL, WebVR и API [1-2] для доступа к AR-контенту через браузер. Существуют фреймворки и библиотеки для создания Web-AR, расширяющие возможности использования дополненной реальности в сети. Они позволяют разработчикам использовать как маркерные, так и безмаркерные технологии дополненной реальности на основе различных библиотек JavaScript для более глубокой интеграции трехмерных моделей и соответствующих мобильных браузеров.

Далее будут рассмотрены наиболее популярные из Web AR фреймворков.

### *1.1. AR.js*

AR.js — облегченная библиотека с открытым исходным кодом для реализации дополненной реальности в вебе, содержащая функции отслеживания изображений, создания дополненной реальности на основе маркеров и местоположения [3].

Дополненная реальность, основанная на определении местоположения, использует информацию о положении пользователя в реальном мире. Пользователь может перемещаться и через камеру своего мобильного устройства видеть контент дополненной реальности относительно объектов окружающего пространства.

Технология, основанная на отслеживании маркеров, позволяет отобразить контент поверх обнаруженного 2D-изображения маркера. В качестве маркера может выступать изображение с определенными требованиями относительно формы, цвета и размера.

Когда камера обнаруживает 2D¬-изображение, библиотека позволяет разместить контент поверх него или рядом с ним. В качестве контента могут выступать 2D-изображения, 3D¬-модели, видео и GIF.

Библиотека является кроссбраузерной, поддерживает webGL и webTRC, работает достаточно эффективно даже на медленных устройствах. А, следовательно, она подходит для использования на мобильных устройствах, работающих под управлениями большинства современных платформ.

AR.js использует ARToolKit для работы систем компьютерного зрения, обнаружения маркеров и плоскостей. Для отображения расширенного контента используется библиотека рендеринда 3d-контента на веб-странице Three.js или основанный на Three.js веб-фреймворк A-Frame [3].

### *1.2. Argon.js*

Argon.js — JavaScript-фреймворк для добавления контента дополненной реальности к веб-приложениям без привязки к используемой платформе и технологии [4]. Изначально Argon.js был разработан для использования с браузером Argon на iOS, что упростило процесс создания мобильных приложений дополненной реальности, однако, этот фреймворк может работать и с другими браузерами. Для отображения контента используется библиотека Three.js.

### *1.3. AWE.js*

Awe.js — JavaScript-библиотека, которая также использует Three.js [5]. Она позволяет создавать AR-приложения на основе местоположения, маркеров и датчика движения Leap Motion.

Для доступа и взаимодействия с дополненной реальностью платформа использует WebRTC, WebGL и getUserMedia API устройства. Экспериментальным путем установлено, что библиотека наиболее корректно работает в браузере Google Chrome для мобильных устройств, а при использовании с другими браузерами возникают проблемы обработки событий касания экрана.

### *1.4. ARToolKit*

ARToolKit — бесплатная библиотека с открытым исходным кодом для разработки дополненной реальности, поддерживающая следующие платформы: Microsoft Windows, Linux, Mac OS X, Android, iOS [6].

Для создания дополненной реальности используются алгоритмы компьютерного зрения. Библиотеки видеотрекинга позволяют вычислить реальное расположение и ориентацию камеры устройства относительно пространственных объектов или физических маркеров в режиме реального времени.

### *1.5. ARKit*

В рамках iOS 12 была представлена обновлённая платформа ARKit [7], в которую заложены функции распознавания окружающей среды, оценки размеров предметов и отслеживания изображений. С её помощью можно создавать приложения дополненной реальности, которые будут доступны через браузер без разработки дополнительных программ.

ARKit можно использовать при создании приложений для iPhone, и для iPad с процессором A9 или выше. Фреймворк позволяет обнаруживать и отслеживать 2D-изображения, находить горизонтальные и вертикальные плоскости, распознавать и размещать 3D-объекты.

### *1.6. ARCore*

Платформа Google ARCore позволяет создавать приложения дополненной реальности не только для Android-устройств, но и для устройств на базе iOS, тем самым разрабатывая кроссплатформенные программы[8]. ARCore основан на отслеживании позиции и распознавании объектов. Изначально платформа не была приспособлена для создания приложений дополненной реальности в браузере, однако, не так давно был анонсирован WebXR Hit Test API, позволяющий дополнять объектами реальный мир в вебе при помощи браузера Chrome Canary на устройствах с операционной системой Android Oreo и старше.

## 2. Реализация приложения

Анализируя описанные библиотеки, можно увидеть, что большинство из них привязаны к конкретной платформе. Для дальнейшего знакомства с технологиями создания дополненной реальности в браузере сделан выбор в пользу кроссплатформенного фреймворка Ar.js, позволяющего создать простое приложение с помощью простого HTML-кода.

В качестве демонстрационного примера выбрано приложение, позволяющее посетителям ресторанов детально рассмотреть отдельные позиции из меню с помощью возможностей дополненной реальности. Трехмерные модели блюд можно масштабировать и вращать, чтобы пользователи точно знали, как будет выглядеть заказанное блюдо. Кроме того, помимо внешнего вида блюда, пользователи могут посмотреть детальную информацию о его ингредиентах, весе, калорийности.

Для программы на основе Ar.js необходимо создать HTML-файл и импортировать одну из библиотек рендеринга: A-Frame или Three.js.

JavaScript библиотека Three.js специально разработана для 3D-рендеринга. Она предоставляет широкий набор инструментов для создания 3D-объектов, контроля над текстурами и сетками. Фреймворк A-Frame основан на Three.js, но не такой мощный и гибкий. Он подходит для использования в небольших проектах, позволяя добавлять объекты в сцену через HTML-код, что улучшает наглядность иерархии сцены и делает разработку приложений быстрой и простой. Для простого демонстрационного приложения лучшим образом подходит A-Frame.

Далее необходимо создать сцену и указать в качестве источника изображения камеру мобильного устройства. После чего можно установить отслеживаемый маркер, при обнаружении которого будет появляться объект, и добавить 3D-модель.

Для добавления основных элементов используются теги <a-scene>, <a-marker>, <a-entity>. Полный HTML-код представлен в Листинге 1.

Листинг 1

```
<html>
<head>
<script src=»aframe.min.js»></script>
<script src=»aframe-ar.js»></script>
</head>
<body style='margin : 0px; overflow: hidden;'>
<a-scene embedded arjs='sourceType: webcam;'>
<a-marker type='pattern' url='assets/pattern-qr-code.patt'>
<a-entity
                        scale=»5 5 5»
                        obj-model=»obj: url(hamburger/Ham.obj);
                  </a-entity>
                  <a-entity
                        position=»0 1 0»
                        scale=»1 1 1»
                        obj-model=»obj: url(hamburger/Ham.obj);
                  </a-entity>
                  </a-marker>
<a-camera-static/>
</a-scene>
</body>
</html>
```

Маркер представляет собой квадратное изображение с черной рамкой и максимальным разрешением 16x16 пикселей. Для создания маркера можно воспользоваться утилитой AR.js Marker Training, которая позволяет получить файл паттерна маркера .patt и сам маркер в виде jpeg-изображения. За основу маркера взят QR-код. В дальнейшем он может быть использован для перехода на веб-страницу приложения.

Для использования Web-AR технологии необходимо запустить стандартный браузер и перейти по ссылке, после чего откроется веб-страница с возможностью воспроизведения контента дополненной реальности. Этот контент появится, как только в поле зрения камеры попадет предопределенный маркер. Воспроизводимым контентом в данном примере является 3D-модель блюда, созданная с помощью программы Blender [9], хотя в общем случае, это может быть любое изображение, звук, видео, анимация и т. д.

Работа полученного приложения продемонстрирована на рис. 1.

*Рис 1. Демонстрация работы приложения*

**Заключение**

В ходе изучения технологий создания дополненной реальности были рассмотрены основные фреймворки, облегчающие создание WEB-AR-приложений, и реализовано демонстрационное приложение с использованием библиотеки Ar.js.

Одним из главных преимуществ разработанного приложения является то, что оно может быть использовано на любом мобильном устройстве, имеющем доступ к интернету, без установки дополнительного программного обеспечения.

В дальнейшем планируется продолжить изучение данной темы, расширить функциональность приложения, добавив в него анимацию приготовления блюда, а также - возможность делать и размещать фотографии и видеоролики с виртуальными объектами в социальных сетях.

**Литература**


1. *Parisi T.* Programmig 2D Applications with HTML5 and WebGL: 3D Animation and Visualization for Web Pages / T. Parisi; O'Reilly Media, 2014. – 404 p.

2. *Neelakantam S.* Learning Web-based Virtual Reality: Build and Deploy Web-based Virtual Reality Technology / S. Neelakantam, T. Pant ; Apress, 2017. – 391 p.

3. AR.js – Augmented Reality on the Web : [сайт]. – URL: https://ar-js-org.github.io/AR.js-Docs/ (дата обращения: 22.09.2020).

4. Argon.js : [сайт]. – URL: https://www.argonjs.io (дата обращения: 26.09.2020).

5. Awe : [сайт]. – URL: https://awe.media (дата обращения: 26.09.2020).

6. What is ARToolKit is? : [сайт]. – URL: http://www.artoolkitx.org (дата обращения: 26.09.2020).

7. Documentation ARKit : [сайт]. – URL: https://developer.apple.com/documentation/arkit (дата обращения: 30.09.2020).

8. Quickstart for Android : [сайт]. – URL: https://developers.google.com/ar/develop/unity/quickstart-android?hl=ru (дата обращения: 30.09.2020).

9. Blender 2.90 Reference Manual : [сайт]. – URL: https://docs.blender.org/manual/en/latest/index.html (дата обращения: 10.10.2020).

УДК 621.396

# МЕТОД И УСТРОЙСТВО ОЦЕНКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ ИНФОРМАЦИИ

**А. М. Межуев[1], И. И. Пасечников[2], Д. Л. Стуров[1], Д. В. Рыбаков[2]**

*[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж*
*[2]Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина*

**Аннотация.** В работе разработан метод оценки на основе обобщенного показателя — коэффициента полезного действия передачи информации с учетом потерь информационных пакетов. Уточнение показателя осуществляется на сетевом уровне с использованием мощности информационных потерь. Для практической реализации метода получена структурная схема устройства оценивания с указанием конкретных элементов для выполнения его функций. Проведено аналитическое и имитационное моделирование по оценке информационной эффективности телекоммуникационных систем со структурами «звезда» и полносвязная в условиях изменения входного трафика с учетом воздействия помех. Результаты моделирования подтвердили работоспособность метода и достоверность получаемых на его основе оценок, что может быть использовано при организации комплексной многоконтурной адаптации.
**Ключевые слова:** телекоммуникационная система, информационная эффективность, метод оценки, кибернетическая мощность, мощность информационных потерь, устройство оценки.

## Введение

Для функционирования современных телекоммуникационных систем (ТКС) характерно осуществление информационного обмена в условиях высокого резко изменяющегося входного трафика и влияния различного рода дестабилизирующих факторов (совокупности воздействий на ТКС, возникающих случайно или преднамеренно и приводящих к нежелательным изменениям в работе отдельных элементов и системы в целом, например, различные помехи и вызванные ими ошибки при передаче информации, сбои и отказы в работе узлов коммутации, побочные эффекты и т. д.). Одной из важных особенностей ТКС в таком режиме работы является наличие потерь информационных пакетов (информационных потерь), которые необходимо правильно учитывать и по возможности минимизировать. В этой связи актуальной является задача получения адекватной оценки эффективности информационного обмена (информационной эффективности) ТКС с учетом информационных потерь и формирования практических рекомендаций, направленных на их снижение, а также повышение и поддержание максимально возможных значений качественных показателей информационного обмена для текущих условий функционирования.

Анализ классических подходов к оцениванию эффективности информационного обмена в ТКС [1, 2] показывает, что они строятся на использовании отдельных частных параметров и характеристик, отражающих: скоростные возможности системы, временную задержку при передаче информации, статистику потерянных и ошибочно переданных пакетов. Не исключение представляют собой оценки, получаемые на основе расширенной системы QoS-параметров (Quality of Service) [3]. Отдельный класс представляют собой оценки, которые сводятся к нахождению вероятностно-временных характеристик ТКС, определяющих своевременность и достоверность передачи информации [4]. Однако в получаемых оценках проблематично выделить факторы и критерии, оказывающие основное влияние на итоговый результат, в том числе учесть наличие информационных потерь. Общеизвестные многокритериальные и условно обобщенные подходы [3, 4] содержат совокупность дополнительных параметров, не имеющих непосредственного отношения к информационному обмену, поэтому также не позволяют однозначно определить и оценить роль его конкретных характеристик в выбранном обобщенном системном показателе.

В работе [5] был предложен альтернативный метод оценки информационной эффективности ТКС на основе обобщенного показателя, отражающего на сетевом уровне свойства передачи и хранения информации, степень приближения системы к оптимальным характеристикам информационного обмена и тем не менее, имеющего четкий физический смысл и явную связь с физическими и канальными характеристиками отдельных элементов системы. Для его описания используется модель ТКС, которая отражает основные системные элементы, функционально участвующие в обеспечении информационного обмена, к ним относятся: блок устройств ввода информации (БУВИ), блок запоминающих устройств (БЗУ), блок устройств передачи информации (БУПИ) и блок устройств вывода информации (БУВВИ). Сущность данного метода оценки информационной эффективности ТКС, заключается в измерении: среднего за выбранный интервал времени общего количества находящейся информации в БЗУ и БУПИ, а также средней за этот же интервал времени производительности ТКС; вычислении кибернетической мощности ($KW$) ТКС, а также в измерении: емкостей буферов БЗУ и пропускных способностей каналов связи (КС) БУПИ; вычислении полной кибернетической мощности ТКС ($KW_{полн}$) и с учетом полученных результатов в определении КПД передачи информации ТКС:

$$\eta = \frac{KW}{KW_{полн}} \cdot 100\,\%, \tag{1}$$

где $KW = N \cdot G\big|_T$ — кибернетическая мощность ТКС; $N$ — измеренное количество информационных сообщений в системе; $G$ — измеренная производительность ТКС; $T$ — выбранный временной интервал усреднения; $KW_{полн} = \sum_{i=1}^{n}\left(N_i \cdot \sum_{k=1}^{s} C_{k,i}\right)$ — полная кибернетическая мощность ТКС; $N_i$ — измеренные емкости каждого буфера БЗУ; $\sum_{k=1}^{s} C_{k,i}$ — измеренные суммарные пропускные способности КС БУПИ для каждого элемента БЗУ; $n$ — количество буферов БЗУ; $s$ — число КС БУПИ, для обслуживания каждого $i$-го буфера БЗУ.

Однако недостатком предложенного метода оценки является невозможность учета воздействия помех на информационный обмен в ТКС, оказывающих существенное влияние на производительность системы и вызывающих потери информации.

Поэтому в развитие методологии оценивания информационной эффективности ТКС был разработан метод оценки эффективности информационного обмена с учетом воздействия помех на физическом и канальном уровнях функционирования системы [6]. Сущность данного метода заключается в том, что за выбранный интервал времени работы ТКС помимо вычисления КПД передачи информации $\eta$, дополнительно определяется общее число одиночных элементарных посылок (ОЭП) из которых состоят информационные пакеты, переданных в системе $N_{общ}$ и число ошибочно принятых ОЭП при зафиксированном отношении сигнал/помеха $N_{ош}$ и при $N_{ош} / N_{общ} \geq 0{,}1$ уточняется значение КПД передачи информации

$$\eta_{пом} = -\eta \cdot \lg\frac{N_{ош}}{N_{общ}}, \tag{2}$$

где $\eta_{пом}$ — КПД передачи информации ТКС с учетом воздействия помех, $\frac{N_{ош}}{N_{общ}} = P_{ош}$ — вероятность ошибки приема ОЭП.

В качестве недостатка данного метода можно отметить, что при определении оценки КПД передачи информации учитывается только воздействие помех на физическом и канальном уровнях ТКС количеством ошибочно принятых ОЭП без учета на сетевом уровне системных характеристик информационных потерь и потока повторных передач.

Таким образом, цель данной работы заключается в повышении точности оценки информационной эффективности ТКС путем разработки метода и устройства для определения мощности информационных потерь и коррекции с её помощью значений кибернетической мощности системы и КПД передачи информации, а также в выработке практических рекомендаций, обеспечивающих снижение потерь информационных пакетов и повышение качественных показателей информационного обмена в текущих условиях функционирования ТКС.

## 1. Материалы и методы

Сущность предлагаемого метода заключается в том, что за выбранный интервал времени ($T$) измеряется и вычисляется кибернетическая мощность $KW$ и полная кибернетическая мощность $KW_{полн}$ ТКС, дополнительно за этот интервал времени измеряются: среднее количество ошибочно принятых пакетов $N_{оп}$ в БУВВИ из системы, среднее количество недоставленных пакетов $N_{нд}$ в БЗУ, БУВИ и БУПИ, значение интенсивности потока повторных передач $\gamma_{пп}$ в БУПИ; после чего вычисляется общее среднее количество информационных потерь (пакетов)

$$N_{пот} = N_{оп} + N_{нд}. \tag{3}$$

Затем определяется мощность информационных потерь

$$KW_{ип} = N_{пот} \cdot \gamma_{пп}\big|_T \tag{4}$$

с ее помощью уточняется кибернетическая мощность ТКС и находится ее «реальное» значение

$$KW_{реал} = KW - KW_{ип}. \tag{5}$$

В результате вычисляется параметр – КПД передачи информации системы связи с учетом информационных потерь

$$\eta_{ип} = \frac{KW_{реал}}{KW_{полн}}. \tag{6}$$

Новизна предложенного метода состоит в том, что он позволяет учесть в параметре $\eta_{ип}$ характеристики информационных потерь системы в процессе передачи информации, т. е. одновременно отразить влияние помех и в целом дестабилизирующих факторов на информационный обмен в ТКС. В выражении (4) значение $N_{пот}$ определяет общее среднее значение потерянных пакетов за выбранный интервал времени $T$, а $\gamma_{пп}$ значение интенсивности потока повторных передач, осуществляемых системой для обеспечения требований по своевременности и достоверности информационного обмена. Таким образом, уточненное значение «реальной» кибернетической мощности $KW_{реал}$, определяет информационные потери ТКС как в процессе хранения, так и передачи информации. Основным достоинством получаемой оценки является четкий физический смысл параметра, подтверждаемый тривиальными расчетами и измерениями. При этом учет возникающих в процессе информационного обмена потерь пакетов в ТКС путем дополнительного определения мощности информационных потерь системы связи, согласно известным источникам [7] и проведенным исследованиям [8], позволяет существенно повысить точность оценки КПД передачи информации. Это, в свою очередь, обеспечивает своевременную реакцию системы на изменения условий функционирования для поддержания высокой эффективности информационного обмена ТКС, путем реализации процедур комплексной многоконтурной адаптации в реальном масштабе времени [9].

Доказательством технической реализуемости предлагаемого метода оценки эффективности информационного обмена ТКС, является то, что для его осуществления требуются стандартные элементы микроэлектроники, существующие средства измерительной и вычислительной техники, например, такие как: счетчики, сумматоры, перемножители, вычитающие устройства и делители, а также программное обеспечение, основой которого являются элементарные математические операции [10]. Поэтому в ходе исследований было получено устройство оценки эффективности информационного обмена в ТКС с учетом потерь информации.

Устройство оценки эффективности информационного обмена ТКС (рис. 1) содержит:

– блок 1 вычисления кибернетической мощности, предназначенный для определения значения $KW$ (включающий блоки измерения количества сообщений и производительности ТКС);

– блок 2 вычисления полной кибернетической мощности, предназначенный для определения значения $KW_{полн}$ (включающий блоки измерения емкостей буферов БЗУ и пропускных способностей БУПИ системы);

– блок 3 управления измерениями, предназначенный для задания интервала времени измерений $T$ и количества необходимых измерений $n$;

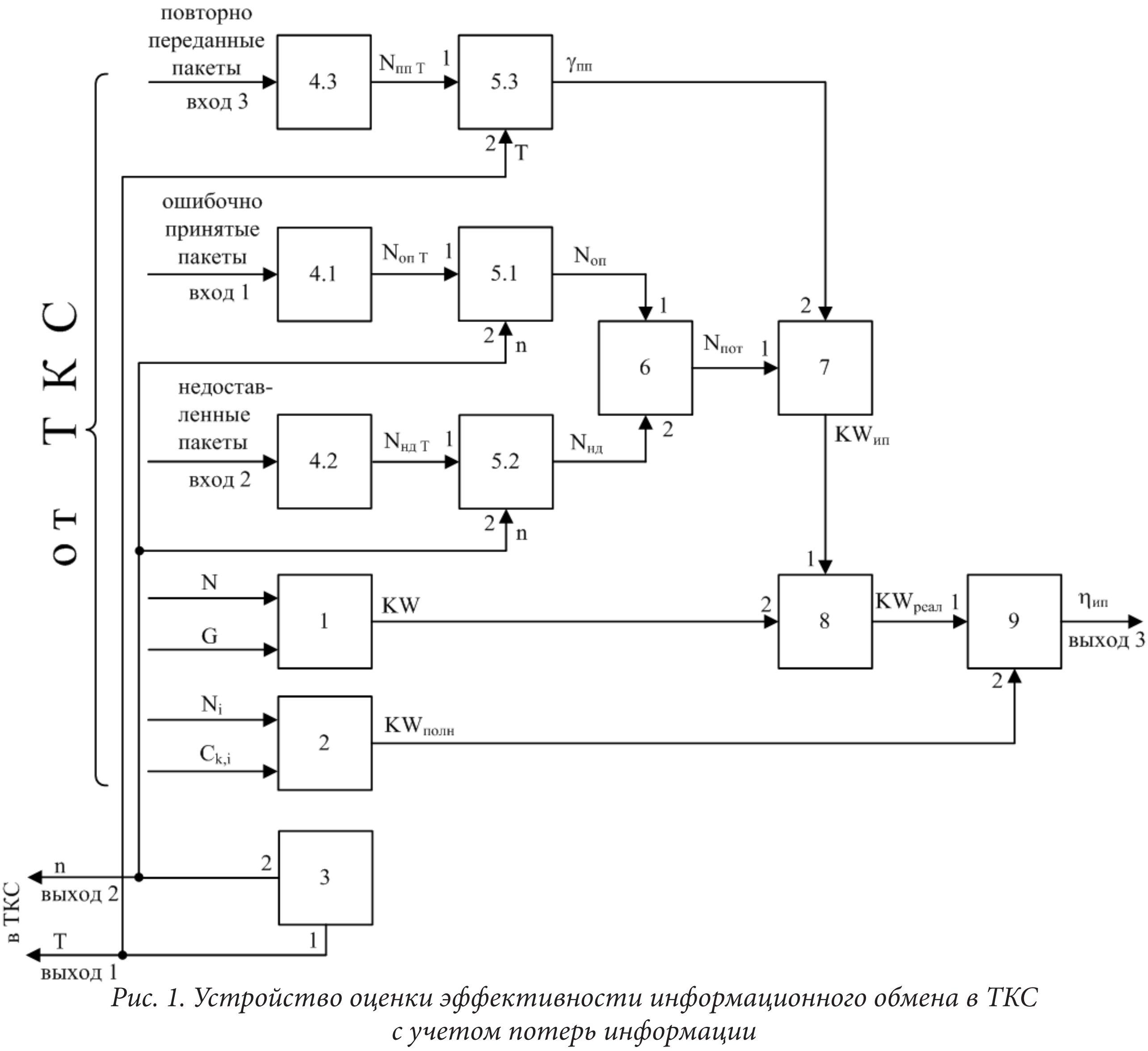



*Рис. 1. Устройство оценки эффективности информационного обмена в ТКС с учетом потерь информации*

– блок 4.1 счетчика ошибочно принятых пакетов, предназначенный для подсчета количества ошибочно принятых пакетов $N_{оп\,T}$;

– блок 4.2 счетчика недоставленных пакетов, предназначенный для подсчета количества недоставленных пакетов $N_{нд\,T}$;

– блок 4.3 счетчика повторно переданных пакетов, предназначенный для подсчета количества повторно переданных пакетов $N_{пп\,T}$;

– блок 5.1 делителя, предназначенный для определения среднего количества ошибочно принятых пакетов $N_{оп}$;

– блок 5.2 делителя, предназначенный для определения среднего количества недоставленных пакетов $N_{нд}$;

– блок 5.3делителя, предназначенный для определения значения интенсивности потока повторных передач $\gamma_{пп}$;

– блок 6 сумматора, предназначенный для определения общего среднего количества информационных потерь (пакетов) в ТКС $N_{пот}$, согласно выражению (3);

– блок 7 перемножителя, предназначенный для получения значения мощности информационных потерь ТКС $KW_{ип}$ по формуле (4);

– блок 8 вычитающего устройства, предназначенный для определения значения «реальной» кибернетической мощности ТКС $KW_{реал}$, согласно выражению (5);

– блок 9 делителя, предназначенный для получения на выходе устройства значения КПД передачи информации ТКС с учетом информационных потерь $\eta_{ип}$ по формуле (6).

Работа устройства (рис. 1) осуществляется следующим образом. В блоке 3 управления измерениями производится выбор интервала времени измерений $T$ и количества необходимых измерений $n$, которые с первого и второго выходов блока, являющихся, соответственно, первым и вторым выходами устройства, выдаются в ТКС.

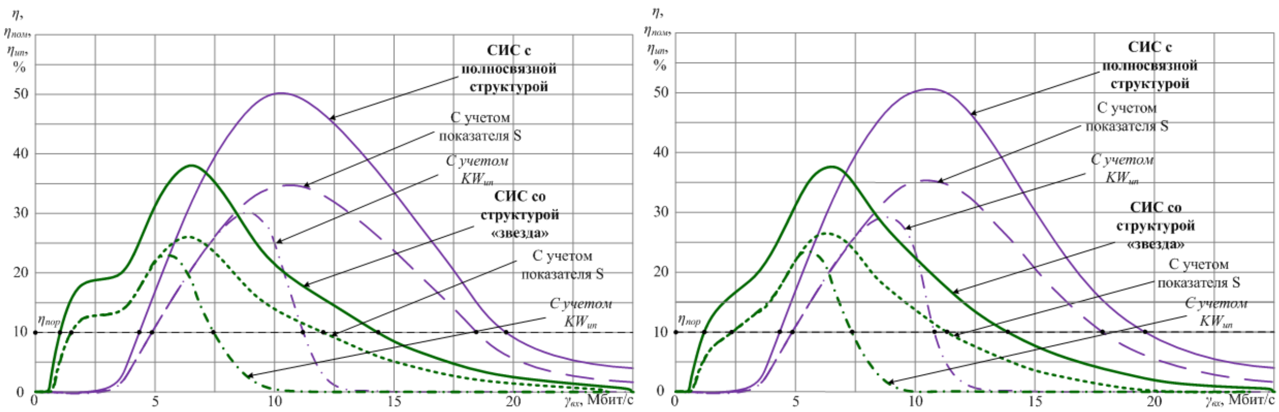
После чего из ТКС в счетчики 4.1, 4.2 и 4.3, соответственно, поступает информация об ошибочно принятых, недоставленных и повторно переданных пакетах. В счетчике 4.1 производится подсчет количества ошибочно принятых пакетов $N_{оп\,T}$, в счетчике 4.2 — количества недоставленных пакетов $N_{нд\,T}$ в системе за выбранный интервал времени измерений $T$. Посчитанные в счетчиках 4.1 и 4.2 количества пакетов $N_{оп\,T}$ и $N_{нд\,T}$ направляются, соответственно, на первые входы делителей 5.1 и 5.2, где путем выполнения операции деления на количество измерений $n$, поступающее на вторые входы делителей со второго выхода блока управления измерениями 3, находятся средние количества ошибочно принятых $N_{оп}$ и недоставленных пакетов $N_{нд}$.

Далее с выходов делителей 5.1 и 5.2, соответственно, $N_{оп}$ и $N_{нд}$ выдаются на первый и второй входы сумматора 6. В сумматоре 6 выполняется операция сложения (3) посчитанных значений $N_{оп}$, $N_{нд}$ и полученное значение общего среднего количества информационных потерь (пакетов) в системе связи $N_{пот}$ поступает на первый вход перемножителя 7. В счетчике 4.3 производится подсчет количества повторно переданных пакетов $N_{пп\,T}$ за интервал времени измерений $T$. После чего оно подается на первый вход делителя 5.3, где путем выполнения операции деления на величину интервала времени измерений $T$ в секундах, поступающую на второй вход делителя 5.3 с первого выхода блока управления измерениями 3, находится значение интенсивности потока повторных передач которое направляется на второй вход перемножителя 7. В перемножителе 7 выполняется операция умножения (4) значения $N_{пот}$ на $\gamma_{пп}$ и полученное значение мощности информационных потерь системы связи $KW_{ип}$ направляется на первый вход вычитающего устройства 8. В блоке 1 вычисления кибернетической мощности на основе входной информации, поступающей из ТКС, по методике изложенной в [5] определяется значение кибернетической мощности системы $KW$, которое с его выхода подается на второй вход вычитающего устройства 8. В вычитающем устройстве 8, согласно выражению (5), выполняется операция вычитания из значения кибернетической мощности ТКС $KW$ значения мощности информационных потерь системы $KW_{ип}$ и полученное значение «реальной» кибернетической мощности ТКС $KW_{реал}$ выдается на первый вход делителя 9. В блоке 2 вычисления полной кибернетической мощности на основе входной информации, поступающей из ТКС, согласно [6] определяется значение полной кибернетической мощности системы $KW_{полн}$, которое с его выхода подается на второй вход делителя 9. В делителе 9 производится операция деления (6) значений $KW_{реал}$ на $KW_{полн}$, поступающих на его входы, в результате чего определяется уточненное значение КПД передачи информации ТКС с учетом информационных потерь $\eta_{ип}$, которое выдается на третий (основной) выход устройства.

## 2. Результаты и их обсуждение

Для проверки работоспособности предложенных метода и устройства оценивания информационной эффективности ТКС разработаны аналитическая и имитационная модели информационного обмена в ТКС со структурами звезда и полносвязная в условиях изменений входного трафика и воздействия помех. Сформированные топологические модели ТКС выбраны в упрощенном базовом варианте из шести УК для сокращения времени моделирования и объемов производимых вычислений. Программы аналитических моделей выполнены в средах программирования Maple и Delphi 7 на основе математического аппарата тензорной методологии, а программы имитационного моделирования в средах GPSS/PC и LiteIDE X с использованием классического подхода теории систем массового обслуживания (СМО) [1, 2, 11].

Результаты работы моделей в виде графиков зависимости КПД передачи информации от входного трафика представлены на рис. 2.




а) б)

*Рис. 2. Результаты аналитического и имитационного моделирования*

С целью обеспечения одинаковой загрузки исследуемых структурных моделей ТКС моделирование в топологии «звезда» производилось при изменении интенсивности входного трафика с шагом $\Delta\gamma_{вх} = 100$ кбит/с, а для топологии «полносвязная» — $\Delta\gamma_{вх} = 200$ кбит/с, соответственно. Результаты работы аналитической тензорной ортогональной модели информационного обмена в ТКС с учетом дестабилизирующих факторов (в том числе помех) представлены на рис. 2а, имитационного моделирования на основе классического подхода теории СМО — на рис. 2б.

Полученные на их основе зависимости $\eta(\gamma_{вх})$, $\eta_{пом}(\gamma_{вх})$ и $\eta_{ип}(\gamma_{вх})$ усреднялись по трем реализациям функции информационной эффективности для каждой из исследуемых структур ТКС. Для проведения сравнительного анализа, усредненные по итерациям внешнего цикла зависимости $\eta(\gamma_{вх})$ каждой из исследуемых структур ТКС (сплошные линии) размещены в единой системе координат с результатами моделирования (пунктирные линии), обеспечивающего учет влияния помех на канальном уровне показателем помехоустойчивости $S$ и с результатами, полученными на основе разработанного метода оценки информационной эффективности при системном подходе на сетевом уровне функционирования ТКС (штрихпунктирные линии). Анализ результатов моделирования, в характерных точках полученных зависимостей, позволяет говорить о работоспособности полученных моделей, а также достоверности оценок эффективности информационного обмена в ТКС на основе представленных подходов к учету воздействия дестабилизирующих факторов на функционирование системы. В целом видно, что наблюдается уменьшение максимального значения КПД передачи информации $\eta_{\max}$ и сужение полосы пропускания ТКС $\Pi_{\gamma\,(\eta_{пор})}$ при изменении параметров помехоустойчивости (значения $P_{ош}$) на канальном уровне и варьировании параметров помехового трафика на сетевом уровне ($\gamma_{пом}$). Наиболее сильно подвержена данным изменениям ТКС с топологией «звезда», для которой наблюдается уменьшение максимума КПД $\eta_{\max} = 37{,}8\,\%$, соответственно, на 11,3 % при учете помех на канальном уровне и на 14,6 % при системном подходе. При этом также сужается область информационной эффективности ТКС, что определяется значительным уменьшением полосы пропускания по входному трафику для заданного порогового уровня $\eta_{пор} = 10\,\%$ КПД передачи информации. По результатам моделирования видно, что во всем диапазоне исследований по входному трафику полносвязная структура обеспечивает высокие показатели информационного обмена $\eta_{\max} = 50{,}5\,\%$, $\eta_{пом} = 35\,\%$, $\eta_{ип} = 29{,}5\,\%$ и $\Pi_{\gamma\,(\eta_{пор})ип} = 6{,}5$ Мбит/с. Применение разработанного метода оценки информационной эффективности ТКС обеспечивает более точный учет влияния дестабилизирующих факторов на информационный обмен в системе, что позволяет прогнозировать функционирование ТКС при изменениях трафика и помеховой обстановки.

## Заключение

Таким образом, цель работы можно считать достигнутой. Разработанные метод и устройство оценки информационной эффективности ТКС с учетом потерь пакетов обеспечивают повышение точности оценки качества информационного обмена на основе определения мощности информационных потерь системы и коррекции с её помощью значений кибернетической мощности и КПД передачи информации. Полученные на основе предлагаемого метода модели для ТКС с различными топологиями позволяют на сетевом уровне учитывать влияние дестабилизирующих факторов на эффективность информационного обмена. Построенные зависимости отражают адекватные оценки КПД передачи информации и определяют наилучшие условия функционирования ТКС при одновременном изменении информационного и помехового трафиков. Данный подход предлагается использовать при организации алгоритмов и процедур комплексной многоконтурной адаптации ТКС в реальном масштабе времени к изменяющимся условиям информационного обмена и помеховой обстановки, что позволит обеспечить повышение (поддержание) информационной эффективности и устойчивости системы.


## Благодарности

Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Мероприятия 1.3. ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» за счет средств гранта по проекту 14.577.21.0284. Уникальный идентификатор проекта RFMEFI57717X0284.


## Литература


1. *Kleinrock, L.* Queueing Systems: Problems and Solutions / L. Kleinrock, R. Gail // Wiley-Interscience, 1996. – 240 p.

2. *Bertsekas, D.* Data Networks: 2nd ed. / D. Bertsekas, R. Gallager // Prentice-Hall, Englewood Cliffs. NJ, 1992. – 556 p.

3. *Назаров, А. Н.* Модели и методы расчета показателей качества функционирования узлового оборудования и структурно-сетевых параметров сетей связи следующего поколения / А. Н. Назаров, К. И. Сычев. Красноярск : Изд-во Поликом, 2010. – 389 с.

4. *Peterson, L. L.* Computer Networks: A Systems Approach (5th ed.) / L. L. Peterson, B. S. Davie // Elsevier, 2011. – 372 p.

5. *Коренной, А. В.* и др. Прикладные задачи навигации, связи и управления. Методы анализа и синтеза / под ред. А. В. Коренного // Монография. – Москва : Радиотехника, 2015. – 161 с.

6. Патент №2602347, МПК7 H04L29/00 Способ оценки эффективности информационного обмена системы связи / А.М. Межуев, И.И. Пасечников, А.Н. Роза, А.И. Родзевич, Е.В. Коновальчук (РФ) // 2015132753/08. – Заявл. 05.08.2015; опубл. 20.11.2016. – Бюл. № 32.

7. ITU-T Recommendation G.1010 End-user multimedia QoS categories // November 2001.

8. *Межуев, А. М.* Анализ функции эффективности информационной сети и алгоритм оценки режимов информационного обмена на основе производных обобщенного показателя / А. М. Межуев, И. И. Пасечников, А.В. Коренной // Электромагнитные волны и электронные системы. – Москва, 2017. – № 5. – С. 12–22.

9. *Межуев, А. М.* Методологические основы организации многоконтурной адаптации в сетевых информационных системах /А. М. Межуев, И. И. Пасечников, А. В. Коренной // Электромагнитные волны и электронные системы. – Москва, 2019. – № 4. – С. 35–45.

10. *Микушин А. В., Сажнев А. М., Сединин В. И.* Цифровые устройства и микропроцессоры. – Санкт-Петербург : БХВ – Петербург, 2010. – 832 с.

11. *Петров, А. Е.* Тензорный метод двойственных сетей / А. Е. Петров // ООО «Центр информационных технологий и природопользования». – Москва, 2007. – 496 с.

УДК 004.424, 678.7

# РАЗРАБОТКА ОБЛАЧНОГО SAAS-СЕРВИСА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПОЛИМЕРИЗАЦИИ

**Э. Н. Мифтахов[1], С. А. Мустафина[1], Т. А. Михайлова[1], С. Л. Подвальный[2]**

[1]*Башкирский государственный университет*
[2]*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Статья посвящена описанию сетевой архитектуры разрабатываемого облачного SaaS-сервиса для осуществления комплексного исследования физико-химических процессов. Кратко озвучены основные методы и математические подходы, позволяющие решать прямую задачу прогнозирования основных молекулярных характеристик производимого продукта и обратную задачу идентификации части неизвестных кинетических параметров. Особый акцент сделан на методах и подходах разработки алгоритмов и программного обеспечения, для которых описаны основное функциональное наполнение разрабатываемого сетевого комплекса, подробно рассмотрены его основные сегменты, а также приведены все достоинства и недостатки применения данного подхода. В рамках разрабатываемого облачного сервиса подробно описана трехуровневая архитектура доступа к данным и вычислительным ресурсам, описаны основные задачи каждого уровня. Отдельное внимание уделено аппаратным и системным требованиям, предъявляемым к вычислительным узлам разрабатываемого сетевого приложения.
**Ключевые слова:** облачные технологии, SaaS-сервис, моделирование, сервер, физико-химический процесс.

## Введение

Разработка высокоэффективных технологий в направлении промышленного синтеза полимерных продуктов предполагает применение новых методов, позволяющих не только проводить эмпирическую оценку качества получаемого продукта, но и решать задачи поиска оптимальных режимов ведения производственного процесса. Такой подход позволит проектировать оптимальные процессы и системы как с точки зрения сбережения энергоресурса, так и получения оптимальных свойств производимого продукта. Переход к новым технологиям производства предполагает многократное проведение дорогостоящих лабораторных и промышленных экспериментов, в связи с чем большую актуальность приобретают средства математического моделирования, позволяющие оценить оптимальные параметры ведения процесса. С учетом того, что исследуемые процессы являются сложными в физико-химическом и техническом описании, большую значимость представляют математические модели в цифровом описании, представляющие собой разработку математических методов, вычислительных методик и уникальных алгоритмов в виде программной реализации.

Исследование подобных процессов влечет за собой необходимость применения комплекса сложных вычислительных методов, реализация которых требует мощных аппаратных ресурсов. Кроме того, результаты лабораторных и вычислительных экспериментов представляют собой ценный цифровой ресурс, позволяющий на основании его обработки выявлять закономерности протекания процессов и применять к нему новые математические методы обработки. В связи с этим, актуальными задачами являются не только организация иного формата хранения данных, с целью разработки математических методов обработки и их анализа, но и организация иного подхода при разработке программного комплекса. Наиболее перспективным в этом случае видится вынесение всей вычислительной логики разрабатываемого приложения и слоя данных на отдельные, физически удаленные друг от друга сервера.

## 1. Методы проведения комплексного исследования

Предлагаемые подходы и методы, направленные на комплексное исследование процессов полимеризации, условно можно разбить на три группы: вычислительные методы и подходы решения прямых задач прогнозирования показателей продукта производства, вычислительные методы и подходы решения обратных задач, методы и подходы разработки алгоритмов и программного комплекса.

Первая группа: вычислительные методы и подходы решения прямых задач.

Поскольку в результате исследования чаще всего интересует изменение комплексных характеристик производимого продукта во времени, то данная группа методов ориентирована на описание кинетики химических превращений и решение прямой задачи прогнозирования основных молекулярных характеристик. Причем, если речь идет о моделировании процессов в промышленном масштабе производства, то кинетического описания оказывается недостаточно и требуется учитывать гидродинамические и энергетические закономерности, присущие для данного процесса [1]. Таким образом, данная группа методов позволяет проводить эмпирическую оценку продукта и давать ответы на вопросы по качеству при различных первоначальных загрузках. Стоит отметить, что в частности для моделирования физико-химических процессов, протекающих по механизму полимеризации, ранее уже были успешно отработаны различные математические подходы и методы, в частности кинетический и статистический подходы к моделированию[2, 3].

Вторая группа: вычислительные методы и подходы решения обратных задач.

В процессе комплексного исследования физико-химических процессов решение прямой задачи позволяет дать реальную картину изменения характеристик в кинетике только в том случае, когда подлинно известны: кинетический механизм ведения процесса, значения кинетических параметров, характеризующих ту или иную стадию механизма, возможный характер полицентровости, присущий для процессов, протекающих в присутствии каталитического комплекса, и т. д. Для уточнения некоторых данных часто возникает необходимость постановки и решения обратной задачи [4]. Причем, для получения наиболее корректного решения требуется обработка наибольшего количества экспериментальных данных, полученных при различных параметрах первоначальной загрузки. Поиск значений неизвестных кинетических параметров сводится к минимизации функционала с применением различных численных методов (Хука-Дживса, Нелдера-Мида и т. д.). Для определения динамики активных центров обратная задача сводится к некорректно поставленным задачам, для решения которого применяется метод регуляризации А. Н. Тихонова [4].

Третья группа: методы и подходы разработки алгоритмов и программного обеспечения.

Поскольку построение математической модели и применение численных методов сложно реализуемо без применения средств компьютерных вычислений, то на конечном этапе возникает необходимость разработки и реализации алгоритмов. В своем конечном виде алгоритмы представляются в виде некоторого классического программного продукта, обычно имеющего оконный интерфейс и визуальные средства настройки, позволяющие в удобной среде задавать параметры первоначальной загрузки и представлять результаты расчета в различных формах (выгрузка в файл, графическая визуализация и т. д.) Ранее уже были разработаны подобные программные комплексы для задач различного масштаба[5].

Однако все подобные разработки обладают существенным недостатками: повышенные требования к аппаратным ресурсам компьютера и отсутствие возможности хранения огромного массива промежуточных данных, представляющие собой ценный продукт для дальнейших исследований. В связи с этим предлагается несколько иной подход реализации программного обеспечения, который будет представлен более сложной сетевой архитектурой и иметь клиент-серверную оболочку. Поскольку речь идет о достаточно серьезных требованиях к многопоточности и количеству ядер процессора, объему оперативной памяти, типу носителей, возникающих при применении статистических методов и решении обратных задач, то оправдано вынесение на отдельный сервер всей вычислительной логики разрабатываемого сетевого приложения. Задача хранения огромного массива данных, как экспериментальных, так и промежуточных результатов расчета, приводит к необходимости отделения базы данных от вычислительного сегмента и размещение его на отдельном серверном пространстве. Таким образом, разрабатываемое сетевое приложение будет представлено трехуровневой архитектурой, составляющие которого представлены на рис. 1.

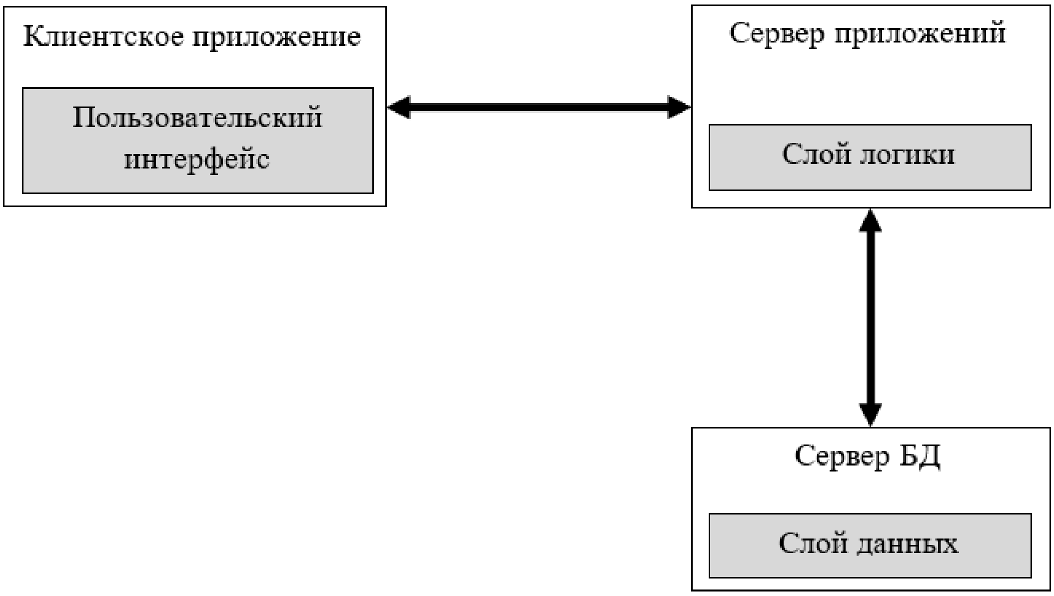



*Рис. 1. Сетевая архитектура разрабатываемого приложения*

**2. Результаты и обсуждение**

Сегментарное разделение всей вычислительной логики и логики хранения данных от клиентской части разрабатываемого облачного сервиса позволит более продуктивно подойти к вопросу конфигурирования вычислительных узлов выстраиваемой сети.

Поскольку разрабатываемая информационная система представляет собой одну из форм облачных вычислений, или модель обслуживания, при которой клиентам предоставляется готовое прикладное программное обеспечение, полностью обслуживаемое удаленно, то с технической точки зрения его можно отнести к одной из разновидности SaaS-сервиса (software as a service — программное обеспечение как услуга) [6, 7].

Рассмотрим каждый из уровней разрабатываемого сервиса более подробно.

Клиентская часть (слой клиента). В основные ее задачи входит реализация возможности в дружественной оболочке задать необходимые параметры исследуемого процесса и вывести полученные результаты. Возможные правки программного кода клиентской части приводит к необходимости представления ее в веб-интерфейсе. Аппаратные и системные требования в этом случае являются минимальными и необходимы лишь для запуска и работы в браузере с применением интернет-канала связи[8].

Сервер приложений (слой логики). Отвечает за координирование программы, обработку команд и выполнение всех расчетов, кроме того содержит набор необходимых для вычислений библиотек, представляющих собой численную реализацию ранее разработанных алгоритмов. В его функции также входит перемещение и обработка данных между клиентской частью и сервером баз данных[9]. Для формирования сервера приложений предъявляются самые высокие системные требования.

Основополагающей логикой построения сервера приложений является поддержка многопользовательского режима, позволяющая в режиме отдельных сессий выделять для каждого клиента необходимое количество вычислительных ресурсов в зависимости от задачи и организовывать параллельные расчеты нескольких пользователей. Схематичное взаимодействие клиентской и серверной части приложения, а также описание входящих и исходящих потоков представлено на рис. 2.

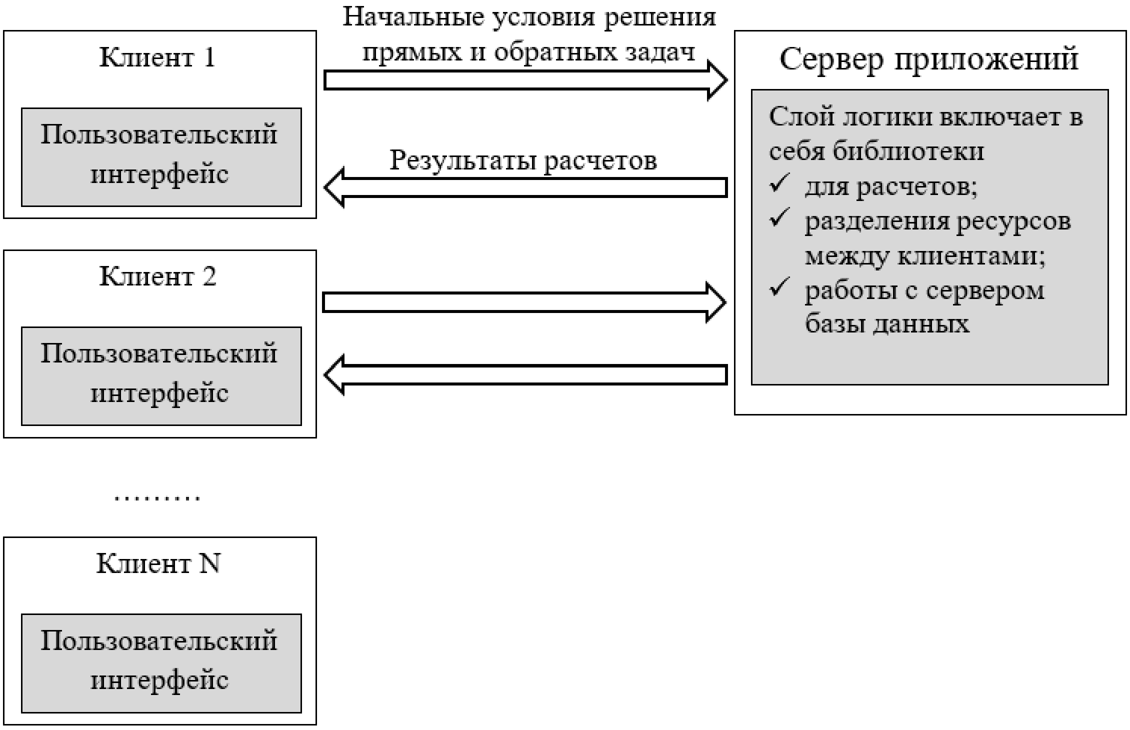



*Рис. 2. Схема взаимодействия клиентской и серверной части приложения*

Отметим также, что на данный момент сервер приложений представлен одним вычислительным кластером, в то время как допустимо применение выделенной группы вычислительных узлов, к которым подключаются клиентские приложения в зависимости от решаемой задачи.

Сервер базы данных (слой данных). Вынесен на отдельный уровень и обеспечивает хранение всех данных, которые могут применяться в исследовании моделируемых процессов. Реализация его организована средствами системы управления базами данных (СУБД) и подключение к нему возможно только с сервера приложений в рамках выделенного «окна» разрабатываемого приложения[10].

Поскольку работа системы предполагает хранение и обработку массива данных, то для организации работы будут использоваться распределенные системы хранения данных (GoogleFS, HadoopFS, GoogleBT, HBase) и специализированные технологии их распределенной обработки (MapReduce, ApacheHadoop, MicrosoftDryad).

Для разработки программных реализаций разрабатываемых моделей и вычислительных алгоритмов применяется язык программирования: C# в среде Visual Studio. Данная среда разработки позволяет создавать оконные приложения, кроме того имеет в своем ассортименте ряд инструментов для разработки веб-приложений с удаленным хранением данных на централизованном сервере. Для разработки архитектур программных реализаций сложных вычислительных методов будут применяться программные технологии и библиотеки, созданные авторами ранее.

Описанный подход по созданию облачного SaaS-сервиса, представленного трехуровневой архитектурой, несомненно влечет за собой сложности в организации работы и описании всей логики передачи данных. Однако в перспективе предлагаемое информационное обеспечение будет полезно для химико-технологических производств, так как позволит проводить исследования производственного процесса физико-химического направления, путем численного расчета основных потребительских параметров производимого продукта, а также подбирать оптимальный режим ведения процесса производства. Также разрабатываемое информационное обеспечение будет полезно для научно-исследовательских институтов и лабораторий, высших учебных заведений, в которых проводятся исследования подобных процессов и реализуются программы естественнонаучного цикла соответствующего профиля. Результаты исследования будут полезны при постановке соответствующих лабораторных и промышленных физико-химических экспериментов.

## Заключение

Создание облачного SaaS-сервиса для проведения комплексного исследования процессов полимеризации позволит не только организовать возможность удаленного проведения сложных расчетов, но и в перспективе создать единую базу данных, имеющих фундаментально важное значение для дальнейшего анализа подобных процессов. Единая организация структуры хранения данных для многочисленных пользователей позволит организовать передачу знаний и опыта в исследовании схожих процессов между различными исследователями. В перспективе перед коллективом авторов стоит задача разработки нейросетевой модели, позволяющей проводить быструю эмпирическую оценку качества продукта в условиях нехватки части данных. База данных, формируемая в процессе работы, позволит организовать необходимое дальнейшее обучение разрабатываемой нейронной сети. Вынесение вычислительной логики на отдельный сервер также позволит проводить модификацию программного кода и увеличение используемого набора библиотек с целью расширения функционала сервиса без изменения клиентской части.

## Благодарности

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

## Литература

1. *Кафаров, В. В.* Математическое моделирование основных процессов химических производств. Учебное пособие для вузов. / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. – Москва: Высшая школа, 1991. – 400 с.

2. *Miftakhov, E.* Building a model of the isoprene polymerization process in the presence of microheterogeneous neodimiumcatalytic systems / E. Miftakhov, S. Mustafina, O. Medvedeva, D. Zhavoronkov, S. Mustafina // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. – 2019. – Vol. 282. – P. 1–8.

3. *Михайлова, Т. А.* Компьютерное моделирование производства бутадиен-стирольного каучука в каскаде реакторов методом Монте-Карло / Т. А. Михайлова, Э. Н. Мифтахов, С. А. Мустафина // Системы управления и информационные технологии. – 2016. – №4. – С. 64–69.

4. *Усманов, Т. С.* Обратные задачи формирования молекулярно-массовых распределений / Т. С. Усманов, С. И. Спивак, С. М. Усманов. – Москва: Химия, 2004. – 252 с.

5. *Мифтахов, Э. Н.* Решение прямой задачи непрерывного процесса полимеризации изопрена в присутствии микрогетерогенных каталитических систем / Э. Н. Мифтахов, С. А. Мустафина. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). № 2020610226. дата рег. 10.01.2020.

6. *Erl, T.* Cloud Computing: Concepts, Technology & Architecture / T. Erl, Z. Mahmood, R. Puttini. – Prentice Hall, 2019. – 528 p.

7. *Rhoton, J.* Cloud Computing Explained: Implementation Handbook for Enterprises 2nd ed. Edition / J. Rhoton. – Recursive Press; 2nd ed. Edition, 2009. – 509 p.

8. *Сахибгареева, М. В.* Облачный сервис решения задач химической кинетики с использованием параллельных вычислений / М. В. Сахибгареева, Е. И. Глущенко, Л. В. Еникеева, Г. М. Шарипова // Системы и средства информатики. – 2017. – Т.27. – №1. – С. 155–166.

9. *Михайлова, Т. А.* Облачные вычисления для исследования процессов полимеризации / Т. А. Михайлова, С. А. Мустафина // Материалы конференции «Актуальные проблемы науки и образования в современном вузе». – 2019. – Т. 1. – С. 444–448.

10. *Mulholl, A.* Enterprise Cloud Computing: A Strategy Guide for Business and Technology Leaders /A.Mulholl, J.Pyke, P.Fingar. – Meghan-Kiffer Press, 2010. – 260 p.

УДК 004.50

# ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ И ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ВЫСШЕЙ НЕРВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА-ОПЕРАТОРА В СИСТЕМЕ «ЧЕЛОВЕК-ДИСПЛЕЙ»

**Н. М. Новикова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассмотрены психофизиологические характеристики, описывающие состояние нервной системы человека-оператора при работе с дисплеем. Особое внимание уделяется таким характеристикам нервной системы как эмоциональная устойчивость и скорость передачи информации в глазо-двигательной системе. Представлены методики измерения этих характеристика с помощью цифровых и буквенных тестов. Измерения проводились с помощью устройства, разработанного автором. Результаты проведенных экспериментов позволяют решить задачу профессионального отбора операторов с соответствующими характеристики.

## 1. Введение

Эффективность и надежность функционирования сложной человеко-машинной системы в значительной степени зависит от психофизиологического состояния человека. В связи с этим проблема профессионального отбора операторов по личным качествам, учитывающим индивидуальные особенности нервной системы как внимание, эмоциональную устойчивость, скорость передачи информации в глазо-двигательной системе, приобретает важное значение. Особенно это важно при работе с дисплеем. Решение данной проблемы значительно упрощается, если автоматизировать процесс получения психофизиологических характеристик человека-оператора.

В физиологии и психологии труда существует большое количество различных методик для оценки психического и физиологического состояния человека, а также его работоспособности [1–3]. Наиболее высокочувствительные среди них те, в которых используются цифровые и буквенные тесты [3]. Отличительная черта тестов — простота и динамичность.

**В процессе работы с дисплеем от человека-оператора требуется интенсивное устойчивое внимание.** Внимание — направленность психической деятельности на определенные предметы или явления действительности (объекты восприятия) [10]. Непроизвольное внимание возникает без всякого намерения, без заранее поставленной цели и не требует волевых усилий. Произвольное внимание возникает вследствие сознательно поставленной цели и требует определенных волевых усилий. Внимание не обнаруживается в «чистом» виде, функционально оно всегда направлено к чему-либо. Внимание обусловливает избирательность, сознательный или полусознательный отбор информации, поступающей через органы чувств. В отличие от других познавательных процессов (таких как восприятие, память, мышление и т.п.) внимание своего особого содержания не имеет, оно проявляется как бы внутри этих процессов и неотделимо от них.

Экспериментальное исследование внимания является одним из наиболее важных для практики направлений исследований психофизиологических характеристик человека-оператора. Характеризуя внимание как сложное психическое явление, выделяют его свойства: объем, концентрацию, распределение, устойчивость, отвлекаемость колебание, переключение, избирательность [1]. Объем внимания измеряется тем количеством объектов, которые могут быть отчетливо восприняты одновременно (в относительно короткий промежуток времени). У взрослого человека он, как правило, равен 6–8 объектам. Концентрация внимания есть степень сосредоточения сознания на объекте (объектах) при наличии помех. Распределение внимания выражается в умении одновременно выполнять несколько действий или вести наблюдение за несколькими процессами, объектами. Устойчивость внимания — общая направленность внимания в процессе деятельности. Ее главной характеристикой является длительность сохранения направленности и сосредоточенности психической активности без отклонения от исходного уровня. Свойством, противоположным устойчивости, является колебание — повторяющееся непроизвольное отвлечение, ослабление внимания к данному объекту или деятельности.

Переключение внимания представляет собой его намеренный перенос с одного объекта, вида деятельности на другой. Характеристикой переключения внимания является степень трудности его осуществления, измеряемая скоростью перехода субъекта от одного вида деятельности к другому. Установлено, что скорость переключения внимания зависит как от стимульного материала, так и от характера деятельности субъекта с ним. Легкость или трудность переключения внимания обусловливается также индивидуальными особенностями субъекта, а именно свойствами его нервной системы. У лиц, характеризующихся подвижной нервной системой (быстрым переходом от возбуждения к торможению и обратно), переключение внимания осуществляется легче. Не менее значимы и личностные особенности испытуемых, а именно: их активность и заинтересованность, уровень мотивации и т. д.

Избирательность внимания — это выбор из множества сигналов только некоторых из них. Она является комплексной характеристикой: включает в себя и количественные, и качественные параметры. Количественным параметром избирательности внимания считается скорость осуществления испытуемым выбора стимула из множества других, а качественным — точность, т. е. степень соответствия результатов выбора исходному стимульному материалу.

Важными качествами внимания являются его объем, быстрое распределение и быстрое переключение. Переключение внимания имеет место при переносе взора с объекта на объект. Замедленность переключения внимания ведет к снижению достоверности показаний. Физиологическим механизмом, определяющим задержки в переключении внимания и появлении ошибочных действий, является инертность нервных процессов. Сила нервной системы определяется силой основных нервных процессов: возбуждения и торможения. У человека с сильной нервной системой сильны и возбуждение и торможение, а у человека со слабой нервной системой слабы оба эти процесса. Люди, характеризующиеся сильной нервной системой, подвижностью процессов возбуждения и торможения, быстро переключаются на новое, т. е. они обладают устойчивым вниманием. Известно [4], что существует корреляция между показателями подвижности нервных процессов и вниманием. Для исследования характеристик внимания применяется таблица Платонова, состоящая из цифр разного цвета. Испытуемый должен называть цифры одного цвета в порядке возрастания, а другого — в порядке убывания. Оценивается время выполнения задания и количество допущенных ошибок [5].

Целью статьи является оценка работоспособности и состояние нервной системы человека с помощью психологических тестов.

## 2. Материалы и методы

Одним из наиболее распространенных способов исследования состояния нервной системы является метод, использующий тест-таблицу Анфимова В. Я. [3] Она содержит 1200 букв одного размера, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Буквы в таблице расположены без всякой связи, таким образом, исключается возможность запоминания и требуется при выполнении задания большого сосредоточения внимания. Оператору (испытуемому) выдается задание: вычеркивать букву, например «а». Работа идет несколько минут, конец каждой минуты отмечается экспериментатором; дают отдых на 2–3 минуты и исследования повторяют 2–3 раза. Работа испытуемого оценивается по числу допущенных ошибок и по затраченному времени на выполнение задания. Эта методика позволяет оценить состояние нервной системы (высшей нервной деятельности) по ряду показателей:

а) внешнее торможение — дается отвлекающий сигнал после 2–3 минут работы, в результате работа замедляется и ухудшается;

б) внутреннее торможение: 1) вычеркивать букву «м»; 2) вычеркивать «м», но если перед ней стоит «н», тогда не вычеркивать. Количество пропусков и ошибок будет показателем внутреннего торможения;

в) запаздывающее торможение — вычеркивать букву, расположенную через две или три буквы после каждой буквы «к». Чем больше расстояние между буквами, тем труднее задача.

Зачеркивание сходных букв, повышенная реакция на внешние раздражители, несоблюдение процессов внутреннего торможения свидетельствует о преобладании возбудительного процесса. Медленная работа, увеличение количества ошибок — пропуск букв — свидетельствует о преобладании тормозного процесса. Если эти нарушения наблюдаются после производственной деятельности, то они являются признаками утомления.

Одной из важных психофизиологических характеристик человека-оператора является скорость передачи информации в зрительной системе. Для исследования этой характеристики используется тест-таблица с кольцами Ландольта. В таблице имеется 660 колец, расположенных в случайном порядке, каждое имеет разрыв в одном из восьми возможных направлений. Испытуемому дается задание: просмотреть таблицу и посчитать количество колец, имеющих определенное направление разрыва. Оценивается количество пропущенных колец и время, затраченное на просмотр таблицы. По этим показателям можно приближенно определить скорость передачи информации в зрительно-двигательной системе по формуле (1):

$$V = \frac{0,5936N - 2,807n}{T}, \tag{1}$$

где $V$ — скорость восприятия и переработки информации в битах/с;

$T$ — время, затраченное на задание;

$N$ — число подсчитанных колец;

$n$ — количество ошибок пропущенных колец.

Из рассмотренных методик для оценки психофизиологических характеристик человека-оператора следует, что все они основаны на подсчете ошибок, совершаемых испытуемым и времени, затраченном на выполнение задания. Это позволяет автоматизировать психофизиологические исследования. С этой целью автором было разработано устройство для психофизиологических исследований [6, 7].

Эти показатели измеряются с помощью устройства, содержащего электрощуп 1, пульт испытуемого 2, блок коммутации 3, логический счетчик 4, блок формирования импульсов правильных действий испытуемого 5, блок формирования импульса ошибки 6, блок управления счетчиком времени 7, блок формирования импульсов работы испытуемого 8, блок регистрации 9, содержащий счетчик ошибок 11, счетчик времени 12, индикаторы логического счетчика 13, и блок управления 10. Блок-схема устройства представлена на рис. 1.

На пульте испытуемого устанавливается буквенная или какая-либо другая тест-таблица. Испытуемый должен выполнять задание, заключающееся в отыскании определенной буквы, например, «а», и нажимать электрощупом на контакт под этой буквой. Из 468 контактов задействовано 50, соответствующих букве «а». Перед началом работы устройство приводится в исходное состояние с помощью блока 10. Счетчики времени и ошибок устанавливаются на нуль, горит индикатор подготовки. Когда испытуемый нажимает электрощупом на контакт передней панели пульта испытуемого, то от электрощупа поступают два импульса. Один импульс поступает на блок 8 и затем через блок 7 запускает счетчик времени 12. Как только испы-

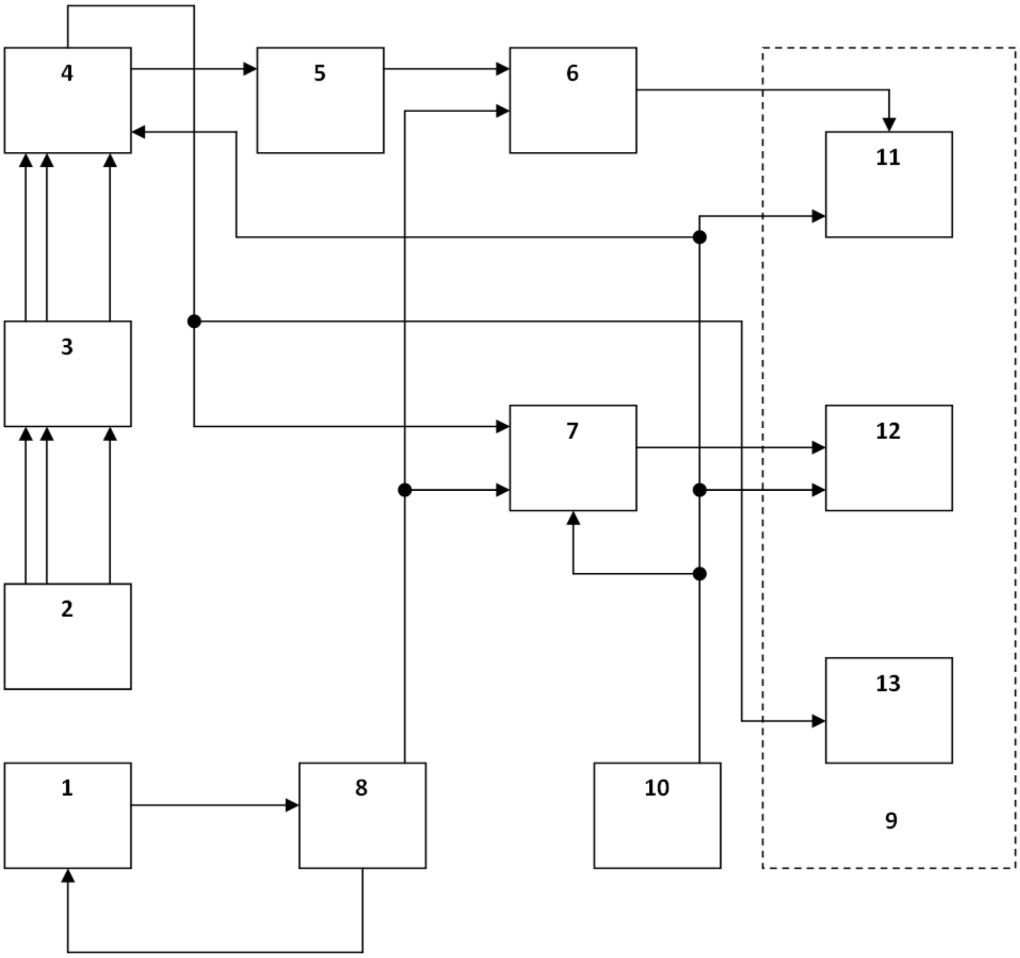



*Рис. 1*

туемый нажимает на последний задействованный контакт, то логический счетчик 4 через блок 7 остановит счет времени. Счетчик считает общее время, затраченное на выполнение задания. При правильной работе испытуемого (нажимает на нужный контакт) от второго импульса срабатывает логический счетчик 4 и загорается индикатор этого счетчика в блоке 9. В результате взаимодействия импульсов блоков 6 и 8 на выходе блока 6 имеется постоянное напряжение. Оно не запустит счетчик ошибок 11 в блоке 9. Одновременно с началом счета времени загорается индикатор логического счетчика, если испытуемый не совершил ошибку. Если испытуемый совершил ошибку (например, пропустил нужный контакт) в логическом счетчике 4 и в блоке 6 будет сформирован импульс, который запустит счетчик ошибок, кроме того, не загорится индикатор логического счетчика. Испытуемый увидит, что он совершил ошибку. Он должен исправить ошибку (при этом загорится следующий индикатор логического счетчика в блоке 9 и продолжать работу.

### 3. Результаты и обсуждение

С помощью данного устройства исследовалось состояние нервной системы группы испытуемых с использованием тест-таблицы Анфимова, состоящей из 468 букв. Испытуемому дается задание: находить заданную букву и нажимать электрощупом [5] под этой буквой. Из 468 контактов задействовано 50, соответствующих заданной букве. Измеряется время выполнения задания и число ошибок. С каждым испытуемым исследования повторялись не менее трех раз, в эксперименте участвовали студенты в возрасте 20–25 лет. В качестве примера в табл. 1 приведены результаты работы 3-х испытуемых с тест-таблицей Анфимова. Согласно известной методике [3], по проведенным измерениям можно сделать заключение о состоянии высшей нервной деятельности, а именно, у испытуемого З.К. преобладает возбудительный процесс, а у испытуемого В.П. —тормозной. Из табл. 1 видно, что испытуемый З.К. затрачивает на выполнение задания в среднем 50,6 с и совершает в среднем приблизительно 1 ошибку. Испытуемый В.П. затрачивает на выполнение того же самого задания в среднем уже 122 с, т. е. в 2,4 раза больше, и совершает уже в среднем 5 ошибок.

Таблица 1

*Результаты работы с тест-таблицей Анфимова*

| Испытуемый | № п.п. | Время, затраченное на выполнение задания (в сек) | Количество совершенных ошибок |
|---|---|---|---|
| З.К. | 1. | 60 | 2 |
| | 2. | 50 | 1 |
| | 3. | 42 | 1 |
| Б.В. | 1. | 78 | 2 |
| | 2. | 99 | 3 |
| | 3. | 105 | 3 |
| В.П. | 1. | 110 | 5 |
| | 2. | 102 | 4 |
| | 3. | 154 | 7 |

Скорость передачи информации в зрительно-двигательной системе исследовалась с помощью рассматриваемого устройства и с использованием тест-таблицы Ландольта. Испытуемый должен просматривать таблицу и нажимать электрощупом на контакты, размещенные под кольцами с определенным направлением разрыва. Из 468 контактов задействовано 60. Оценивается время выполнения задания и число пропущенных колец. По этим показателям определяется скорость передачи информации в зрительно-двигательной системе по формуле (1). С каждым испытуемым измерения повторялись не менее трех раз, в эксперименте принимали участие студенты в возрасте 20–25 лет.

В качестве примера в табл. 2 приведены результаты работы испытуемых с тест-таблицей с кольцами Ландольта. Испытуемый К.Н. имеет бо́льшую скорость переработки и передачи информации в зрительно-двигательной системе (в среднем по трем измерениям 1,262 бит/с) по сравнению с испытуемым С.В. (0,75 бит/с в среднем). Испытуемый К.Н. совершает меньше ошибок и затрачивает меньше времени на выполнение задания. У некоторых испытуемых скорость передачи и переработки информации составляла около 0,5 бит/с, у таких испытуемых наблюдалось преобладание тормозного процесса при исследовании состояния высшей нервной деятельности.

Рассмотренные методики психофизиологических исследований решают задачу диагностирования состояния человека-оператора в сложной человеко-машинной системе и профессионального отбора операторов с соответствующими характеристиками. Кроме того, с помощью рассмотренных методик оценивается работоспособность человека-оператора и выявляются признаки утомления. Это все вместе может помочь предотвратить аварии, связанные с человеческим фактором.

Таблица 2

*Результаты работы с тест-таблицей Ландольта*

| Испытуемый | № п.п. | Время, затраченное на выполнение задания (в сек) | Количество совершенных ошибок | Скорость переработки информации (бит/с) |
|---|---|---|---|---|
| К.Н. | 1. | 22,8 | 1 | 1,205 |
| | 2. | 20,0 | 1 | 1,344 |
| | 3. | 21,7 | 1 | 1,238 |
| С.В. | 1. | 30,0 | 1 | 0,896 |
| | 2. | 32,5 | 2 | 0,741 |
| | 3. | 35,0 | 3 | 0,607 |

## 4. Заключение

Обоснована задача исследования состояния нервной системы и оценки её влияния на внимание и работоспособность человека-оператора. Для этих исследований используются методика, содержащая буквы, а именно, тест-таблица Алфимова. Применение данной методики позволяет оценить состояние нервной системы по следующим показателям: внешнее торможение, внутреннее торможение, запаздывающее торможение. Для исследования скорости передачи информации в глазо-двигательной системе использовалась тест-таблица Ландольта, содержащая кольца с разрывом. Приведена формула для определения скорости передачи информации в глазо-двигательной системе. Рассмотренные методики основаны на подсчете ошибок оператора и времени, затраченном на выполнение задания. Это позволяет автоматизировать психофизиологические исследования. Автором разработано устройство для психофизиологических исследований. Все эксперименты проводились с использованием этого устройства. В статье представлены результаты экспериментов, на основании которых можно проводить отбор наиболее работоспособных операторов.

## Литература


1. *Мещеряков, Б. Г.* Большой психологический словарь / Б. Г Мещеряков, В. П. Зинченко. – Москва : АСТ, 2009. – 816 с .

2. *Мойкин, Ю. В.* Психофизиологические основы профилактики перенапряжения / Ю. В. Мойкин, А. И. Киколов, В. И. Тхоревский. – Москва : Медицина, 1987. – 256 с.

3. *Золина, З. М.* Методики исследований в физиологии труда / С. И. Горшков, З. М. Золина, Ю. В. Мойкин. – Москва : Медицина, 1974. – 311 с.

4. *Платонов, К. К.* Вопросы психологии труда / К.К. Платонов.– Москва: Медицина, 1970. – 219 с.

5. *Новикова, Н. М.* Автоматизация исследований свойств внимания человека-оператора в системе «человек-дисплей» / Н. М. Новикова, А. С. Александров // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2012. – Т. 8, № 7. – С. 43–45.

6. А.С 1664284 СССР. МКИ$^3$ А61В5/16. Устройство для психофизиологических исследований / Н. М. Новикова, В. Н. Будко. – Опубл. 1991, Бюл. № 27.

7. *Новикова, Н. М.* Автоматизация исследований психофизиологических характеристик человека-оператора / Н. М. Новикова // Известия высших. учеб. заведений. Электроника. – 2002. – № 3. – С. 74–77.

УДК 621.396

# ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ И УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ПОСАДКИ РОЯ МАЛЫХ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

**И. И. Пасечников[1], Р. И. Пасечников[2], А. С. Назаров[1], Д. В. Родионов[3]**

*[1]Тамбовский государственный университета имени Г. Р. Державина*
*[2]АО «Альфа банк»*
*[3]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж*

**Аннотация.** Решается задача посадки роя малых беспилотных летательных аппаратов (МБЛА) на роботизированную платформу. Путем имитационного моделирования показана необходимость создания в системе посадки управляемой зоны ожидания МБЛА. Раскрыт принцип воздушного движения МБЛА в пространственно-временной зоне ожидания и вопросы безопасности посадки МБЛА. Предложена структура информационно-измерительной и управляющей системы посадки МБЛА с пространственно-временной зоной ожидания МБЛА и буферной зоной посадки, приведены их основные функциональные задачи, показана возможность посадки роя МБЛА различной структуры.
**Ключевые слова:** система посадки МБЛА, информационно-измерительная и управляющая система посадки МБЛА, рой МБЛА, зона ожидания роя МБЛА.

Безопасность движения воздушных судов и надежность функционирования системы посадки в условиях повышенной их интенсивности являются основными требованиями к любому аэродрому. В работе [1] показан метод использования нескольких зон ожидания, позволяющий упорядочить движение воздушных судов на основе использования возможностей современных автоматизированных систем управления воздушным движением. В условиях быстрорастущих темпов применения малых беспилотных летательных аппаратов (МБЛА) в различных сферах деятельности человека, актуальным является применение роботизированных платформ (РП) [2], использование роев МБЛА [3] и их посадка [4], применение специальных групп МБЛА [5]. В зоне обслуживания РП вопросы безопасности воздушного движения также являются особо важными. Обслуживание РП заключается в посадке МБЛА на платформу, зарядке, либо замене их аккумуляторных батарей, погрузке МБЛА и т. п. Основной задачей при проектировании РП является автоматизация процессов обслуживания РП в указанном смысле, их привязка к сетям общего пользования и к взаимодействующим подобным РП. Очевидно, интервалы поступления МБЛА на обслуживания РП должны регулироваться задачами воздушного движения. Однако, возможны ситуации, когда темп поступления МБЛА представляют собой случайный процесс с большой интенсивностью. Вариантом такого обслуживания РП является прием на посадку роя МБЛА, либо большого разнородного потока МБЛА какой-либо узловой РП. В этом случае РП выступает в качестве обслуживающего устройства в системе массового обслуживания. Особенностью такой системы является обеспечение высоких требований безопасности воздушного движения в зоне посадки и надежность ее функционирования. Коллективом авторов предложен способ и система посадки множества МБЛА с очередью. Очередь МБЛА представляется множеством МБЛА в пространственно-временной зоне ожидания (ПВЗО). В ПВЗО МБЛА осуществляют круговые движения по непересекающимся маршрутам в тороидальной структуре. Для выравнивания скорости поступления МБЛА на линию посадки при покидании МБЛА ПВЗО предлагается использовать буферную зону посадки (БЗП). В связи с этим актуальной является задача обоснования создания структуры информационно-измерительной и управляющей системы посадки РП (ИИУСП), которая обеспечивает бесконфликтное обслуживание РП при посадке множества МБЛА.

*Цель работы*: обоснование необходимости создания управляемой зоны ожидания при посадке большого количества МБЛА на РП, разработка структурной схемы и основных функциональных задач ИИУСП посадки роя МБЛА.

## 1. Материалы и методы

### *1.1. Обоснование применения в системе посадки специализированной зоны ожидания*

Временной интервал от момента приема текущего МБЛА для осуществления посадки РП до момента ее готовности приема на посадку следующего МБЛА будем называть временем обслуживания МБЛА при посадке. Имитационная модель, позволяющая представить во временной области поступления МБЛА на посадку и ее реализацию в виде задержки при обслуживании, показана на рис. 1, результаты моделирования — на рис.2. Применен подход моделирования с использованием GPSS/W [6]. В целом модель представляется системой M/G/1 [7]. Входной поток МБЛА характеризуется пуассоновским распределением событий со средними значениями между заявками на обслуживание $\Delta t$: 60 с, 55 с, 50 с, 45 с и 40 с. Время обслуживания МБЛА при посадке является случайной величиной и определено тремя вариантами: $T_{обс} = 50 \pm 5$ (соответствует кривой 1 на рис. 2), $T_{обс} = 60 \pm 5$ с (соответствует кривой 2 на рис. 2) и $T_{обс} = 70 \pm 5$ (соответствует кривой 3 на рис. 2). Для учета мешающих факторов при посадке введена модель случайного потока порыва ветра более 10 м/с с двухминутным интервалом воздействия [8].

Как видно (рис. 2), временная задержка МБЛА при посадке существенно зависит от интенсивности их поступления. При этом для интенсивности МБЛА, определяемой средним интервалом поступления равным 35 с, среднее число ожидающих МБЛА — более 11. Этот пример показывает необходимость формирования зоны ожидания МБЛА.

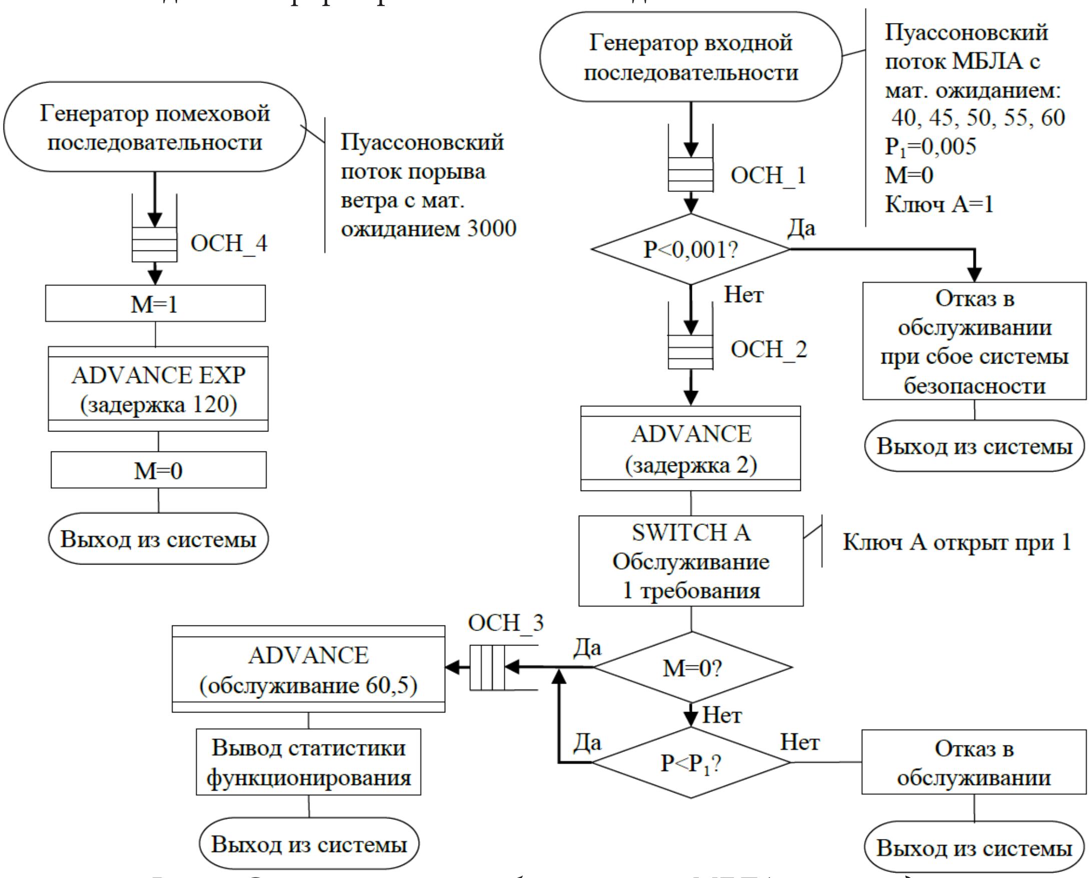



*Рис. 1. Схема алгоритма обслуживания МБЛА при посадке*

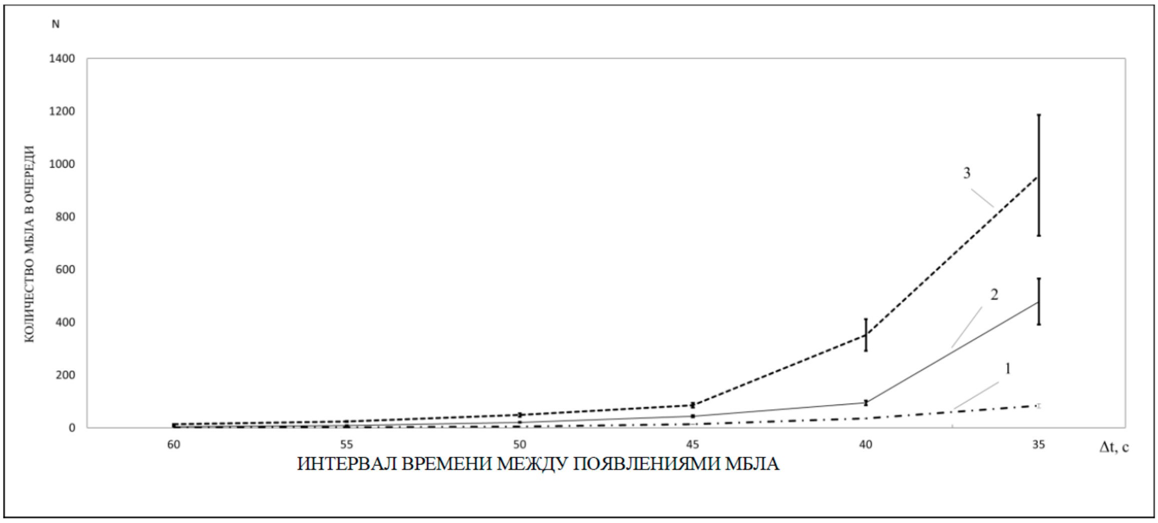



*Рис. 2. Количество МБЛА, ожидающих обслуживание РП при посадке*

### *1.2. Модель системы массового обслуживания группы МБЛА с буферной зоной посадки*

Моделирование показывает, что система посадки группы МБЛА на РП представляться системой массового обслуживания типа M/G/m или M/G/1. Так как в зоне ожидании распределение МБЛА может быть неравномерным и скорости движения не соответствующими скорости обслуживания РП, для повышения эффективного обслуживания РП МБЛА при посадке рекомендуется использовать БЗП. Основной задачей БЗП является согласование скоростей потока МБЛА, ожидающего их посадку и скорости обслуживания РП при посадке. Таким образом, модель системы массового обслуживания имеет зону ожидания с $N$ МБЛА, буферную зону посадки с $k$ МБЛА и непосредственно обслуживающее устройство — посадочную платформу. Такая структура очевидна, когда $N >> k$. Для случая $N \leq k$ БЗП может выступать и зоной ожидания с соответствующим протоколом обслуживания.

### *1.3. Особенности информационно-измерительной и управляющей системы посадки роя МБЛА*

Совместное функционирование группы МБЛА и РП в системе массового обслуживания при посадке состоит в решении двух групп задач. Первая группа связана с мобильностью и безопасностью воздушного движения множества МБЛА в ПВЗО, вторая группа — с задачей многостанционного доступа к каналу обслуживания, т.е. к общему ресурсу обслуживания. В общем случае таких протоколов может быть два: первый реализует доступ МБЛА из ПВЗО в БЗП, второй — из БЗП непосредственно на линию посадки на РП. В связи с этим необходима ИИУСП.

Решение указанных задач существенно упрощается, если использовать аналогию функциональных задач телекоммуникационных сетей на основе применения эталонной модели взаимодействия открытых систем [9] и задач, связанных с воздушным движением и обслуживанием пользователей сети РП и МБЛА [10]. Рой МБЛА может рассматриваться как сеть очередей [11], а при большом количестве аппроксимироваться моделью Джексона [12].

*Особенности построения ПВЗО и безопасное движение в нем МБЛА*

*Структура ПВЗО.* Для обеспечения бесконфликтного движения множества МБЛА предложена упорядоченная тороидальная структура МБЛА — двумерная кольцевая структура, сформированная фиксированным множеством точек. Множество точек соответствуют координатам в пространстве воздушного движения. ПВЗО в горизонтальной плоскости представляет собой множество из $N$ кольцевых структур одинакового радиуса, причем, каждая находится на определенном уровне высоты и имеет определенное смещение в горизонтальной плоскости таким образом, что в вертикальной плоскости они формируют $N$ кольцевых структур с таким же числом точек. В такой структуре организуется множество независимых кольцевых маршрутов (в одном направлении). Для входа в ПВЗО МБЛА с разных маршрутов используются сектора. В упорядоченно-структурированном пространстве расстояние между точками определяется условиями безопасного движения МБЛА в рое.

Основные требования к созданию структуры ПВЗО:

1) строгое упорядоченное построение системы с бесконфликтным и безопасным движением множества МБЛА;

2) количество МБЛА в рое от десяток до сотен и тысяч не должно влиять на принципиальную форму взаимодействия МБЛА в рое, при этом должны обеспечиваться как структурная устойчивость (строгая упорядоченность движения в структуре), так и соответствующие требования безопасности воздушного движения;

3) высокое быстродействие в системе управления роем МБЛА и относительная простота его организации.

*Безопасность движения МБЛА в ПВЗО.* Безопасность движения обеспечивается соответствующим распределением маршрутов для ожидающих посадки МБЛА. Каждый маршрут характеризуется разным фазовым сдвигом, что приводит к упорядоченному распределению двигающихся в ПВЗО МБЛА. Выход на линию посадки осуществляется через определенные точки, как вариант — находящиеся в верхней горизонтальной кольцевой структуре. МБЛА, получивший маршрут с нулевым фазовым сдвигом в маршруте, имеет наивысший приоритет и, двигаясь строго в горизонтальной плоскости, может выйти на посадку с любого сектора. В этом случае длина маршрута полностью определяется движением в горизонтальной плоскости и составляет:

$$M_0 = R_{ГП} = kL_{ГП}, \tag{1}$$

где $k$ — число секторов в тороидальной структуре; $L_{ГП}$ — длина пути между точками соседних секторов в горизонтальной плоскости. Если маршрут имеет ненулевой фазовый сдвиг, кратный одному фазовому дискрету $\alpha = 360 / m$, где $m = n$ — число точек сектора в вертикальной плоскости (оно равно числу секторов), то МБЛА, следуя от сектора к сектору в горизонтальной плоскости, должен дополнительно в каждом последующем секторе совершать перемещение в вертикальной плоскости (также против часовой стрелки). При этом его расстояние при движении в $i$-м сегменте в вертикальной плоскости определяется выражением:

$$R_{ВП} = i\alpha L_{ВП}, \tag{2}$$

где $L_{ВП}$ — длина пути между соседними точками в сегмента в вертикальной плоскости. В результате одновременного движения МБЛА в двух плоскостях по кратчайшим путям между точками формируются замкнутые циклические пути, которые позволяют МБЛА двигаться с разными периодами перехода через точки для выхода на посадку и в случае занятости РП осуществлять необходимое количество таких переходов.

При выходе МБЛА из ПВЗО на линию посадки или в БЗП при его использовании в системе предлагается использовать протоколы доступа, которые применяются в ЛВС или современных беспроводных системах доступа. При этом, применить аналогию систем с множеством МБЛА с телекоммуникационными системами [10, 11].

МБЛА при движении в ПВЗО могут совершить аварийную посадку. С этой целью под тороидальной структурой, как вариант на земле, под каждым сектором размещается маркер, например, световой, который выступает в качестве маяка для экстренной посадки в том или ином секторе. При этом, процесс посадки должен соответствовать прохождению маршрута через нижнюю точку вертикальной структуры, а из нее — в направлении маяка.

*Структура информационно-измерительной и управляющей системы посадки роя МБЛА*

Алгоритм взаимодействия МБЛА и РП начинается с момента обнаружения МБЛА и действует до момента окончания посадки на РП (рис. 3) на основе функционирования ИИУСП. Структура ИИУСП приведена на рис. 4. Она включает подсистему, позволяющую МБЛА получить дополнительные сведения для лучшей ориентации в направлении РП, доступ к РП, подсистемы контроля и управления воздушным движением в ПВЗО и БЗП, использует аппаратные средства и протоколы реализации функции множественного доступа МБЛА к БЗП и линии посадки. ИИУСП имеет специальные блоки, позволяющие производить статистический анализ и выбор размерности ПВЗО.

## 2. Результаты и обсуждения

ИИУСП решает задачи: безопасное воздушное движение в зоне посадки; бесконфликтный множественный доступ МБЛА к БЗП и линии посадки РП. Подсистема свето- и радиотехнического обеспечения включает комплекс свето-технических средств, ИК-оборудования для ориентации МБЛА, а также и группу маяков, для самостоятельного приземления МБЛА в режиме аварийной посадки. Подсистема обнаружения, измерения координат и коррекции траектории МБЛА основана на множестве определенным образом расположенных на РП спаренных оптических камер, которые обнаруживают МБЛА и позволяют контроллеру подсистемы вычислить его трехмерные координаты.

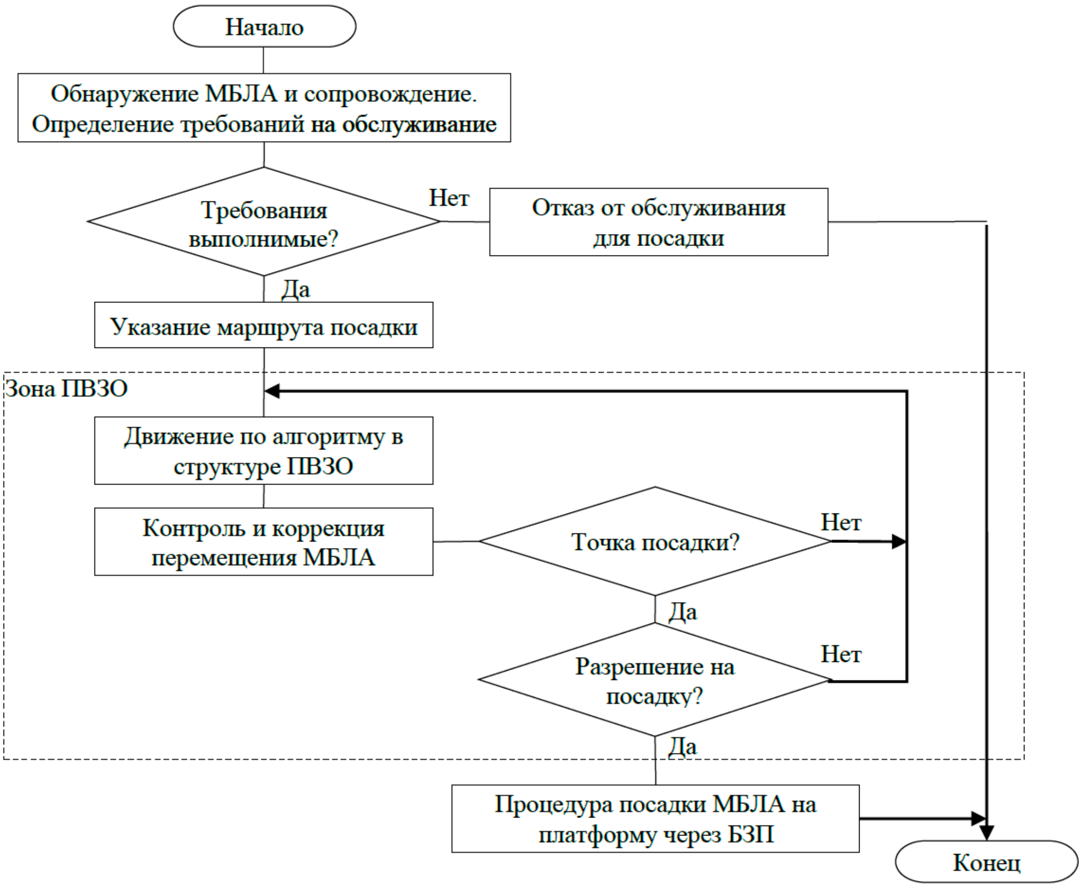



*Рис. 3. Схема алгоритма посадки МБЛА с использованием ПВЗО*

Данные о МБЛА передаются контроллеру системы посадки для организации запросного сигнала «свой-чужой» в общем канале доступа к РП (канал закреплен за РП). При положительном решении контроллер системы посадки организует сеанс связи: определяет основные характеристики и требования МБЛА к посадке (степень заряда АКБ и другие параметры, определяющие приоритетность посадки), высылает ответным сигналом уточненные координаты МБЛА, координаты точки сектора и точки входа в ПВЗО, маршрут движения МБЛА в ПВЗО или маркер.

При использовании в ИИУСП маркерного доступа к БЗП или линии посадки для контроля потока МБЛА в ПВЗО на земле (подстилающей поверхности — крыша здания и т. п.) напротив секторов размещаются устройства, которые принимают от каждого пролетающего МБЛА его маркер (временный идентификатор). Полученные данные пересылаются в специализированный контроллер управления доступом к системе посадки. При маркерном доступе маршруты МБЛА в ПВЗО имеют фиксированную различную длину с соответствующим временем ожидания перед посадкой и гарантированный доступ к линии посадки (или БЗП). Применение протокола доступа с запросным каналом предусматривает наличие запросных сигналов МБЛА на посадку при приближении к точке выхода из ПВЗО (в групповом запросном канале).

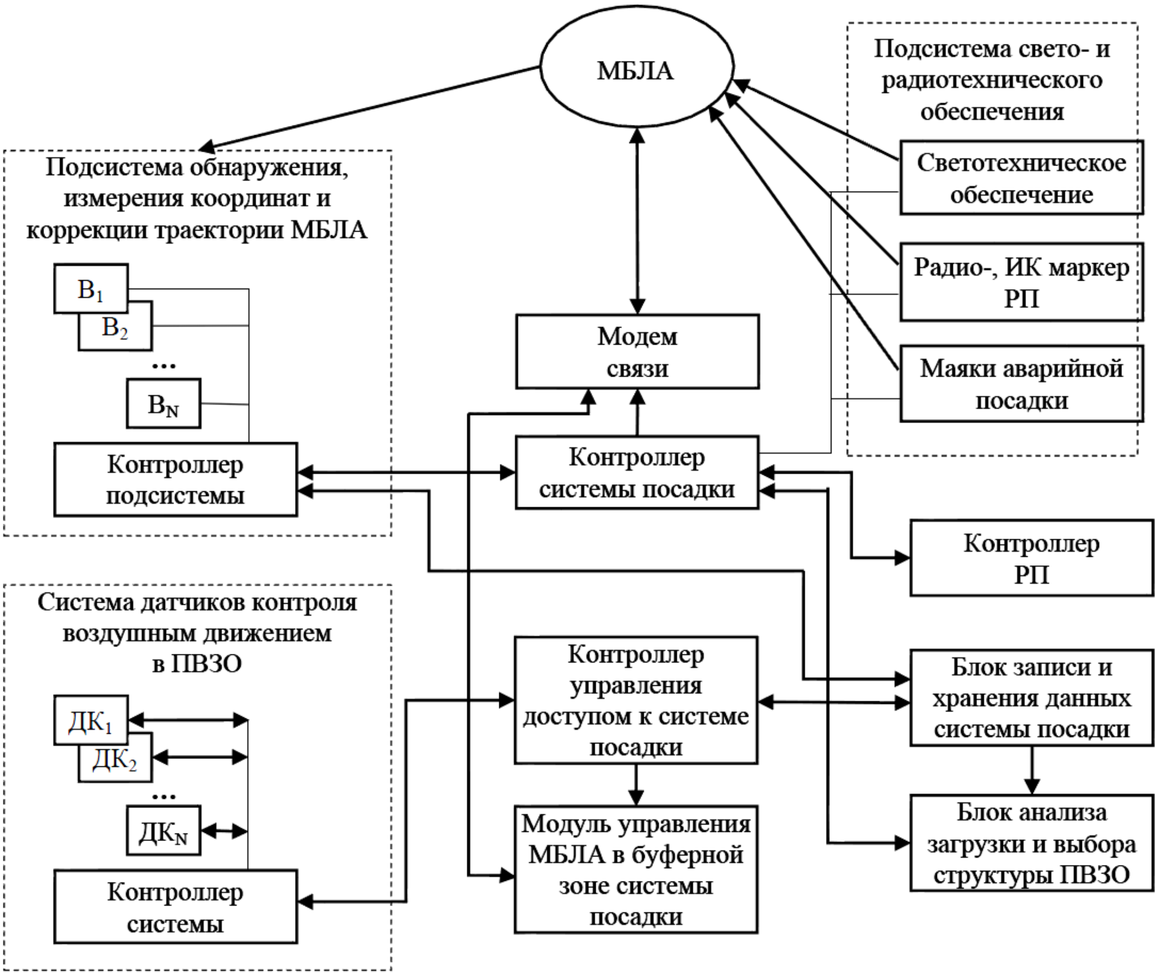



*Рис. 4. Структурная схема ИИУСП роя МБЛА*

В этом случае ответные сигналы от контроллера системы посадки (разрешение на посадку) передаются МБЛА в их индивидуальных подканалах функционального канала посадки МБЛА. Кроме того, в этих подканалах периодически контроллером системы посадки посылаются сигналы коррекции МБЛА для их движения в ПВЗО. Такие сигналы необходимо применять при любом протоколе доступа. Протокол доступа, аналогичный протоколу ЛВС Ethernet, должен предусматривать не только контроль занятости РП со стороны МБЛА перед прохождением точки выхода на посадку, процедуру рандомизации процесса выхода МБЛА в БЗП и взаимный «визуальный» контроль МБЛА, но и канал запрета выхода на посадку при обнаружении коллизии запросов ИИУСП. Блок записи и хранения данных системы посадки и блок анализа загрузки и выбора структуры ПВЗО осуществляют хранение, набор статистических данных для определения размерности тороидальной структуры ПВЗО выработку ее структуры.

## Заключение

Для безопасности воздушного движения в зоне посадки предложена тороидальная ПВЗО с упорядоченной структурой. С целью согласования скоростей МБЛА и скорости обслуживания РП рекомендуется использовать БЗП, что повышает коэффициент использования РП. Информационно-измерительное взаимодействие МБЛА и РП, управление воздушным движением в зоне посадки, решение задачи множественного доступа МБЛА к ресурсу системы посадки РП осуществляет ИИУСП. Приведена структура ИИУСП, алгоритм взаимодействия МБЛА и УРП при посадке, показаны задачи управления воздушным движением системой в зоне посадки и методы контроля МБЛА. Для реализации задач множественного доступа МБЛА из ПВЗО к линии посадки предложено использовать за основу аналогичные известные протоколы ЛВС и беспроводных сетей доступа.

## Литература

1. *Малыгин, В. Б.* Новый метод УВД в зонах ожидания / В. Б. Малыгин, С. В. Губенко, А. Н. Турков // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2014. – № 209. – С. 101-104.

2. *Косова, А. Е.* Автоматическая посадка малых беспилотных летательных аппаратов с использованием компьютерного зрения / А. Е. Косова, А. М. Кориков // Управление, вычислительная техника и информатика : доклады ТУСУРа. – 2017. – Т. 20, № 3. – С. 191–196.

3. *Ashraf, A.* Online Path Generation and Navigation for Swarms of UAVs / A. Ashraf, A. Majd, E. Troubitsyna // Scientific Programming. – 2020. – V. 2020.

4. *Dono, T. F.* Optimized landing of autonomous unmanned aerial vehicle swarms : диссертация / T. F. Dono ; Naval Postgraduate School. – Monterey, California, 2012.

5. *Sahingoz, O. K.* Networking models in flying ad-hoc networks (FANETs): Concepts and challenges / O. K. Sahingoz // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2014. – V. 74, No 1-2. – P. 513–527.

6. *Советов, Б. Я.* Моделирование систем. Практикум: учебное пособие для бакалавров / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2016. –295 с.

7. *Бертсекас, Д.* Сети передачи данных / Д. Бертсекас, Р. Галлагер ; перевод с английского Н. Б. Лиханова [и др.] под редакцией д-ра техн. наук Б. С. Цыбакова. – Москва : Мир, 1989. –544 с.

8. *Подобед, В. А.* Математическое моделирование ветровых нагрузок на портовые портальные краны / В. А. Подобед // Вестник Мурманского государственного технического университета. – 2006. – Т. 9, № 2. – С. 318–331.

9. *Олифер, В. Г.* Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: Учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер. – 5-е изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2016. –992 с.

10. *Пасечников, И. И.* Структуризация функциональных задач сети роботизированных платформ малых беспилотных летательных аппаратов с использованием эталонной модели взаимодействия открытых систем / И. И. Пасечников, А. М. Межуев, Д. В. Рыбаков, С. В. Сомов // Современное состояние и перспективы развития систем связи и радиотехнического обеспечения в управлении авиацией : IX научные чтения имени Попова: сборник пленарных

докладов IX Международной научно-технической конференции, посвященной Дню образования войск связи 14–15 октября 2020 года. – Воронеж : ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2020. – С. 13–22.

11. *Kirichek, R.* Swarm of public unmanned aerial vehicles as a queuing network / R. Kirichek, A. Paramonov, A. Koucheryavy // International Conference on Distributed Computer and Communication Networks. – Springer, Cham, 2015. – P. 111–120.

12. *Клейнрок, Л.* Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок; перевод с английского под редакцией д-ра техн. наук Б.С. Цыбакова. – Москва : Мир, 1979. –600 с.

УДК 681.5

# КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ КВАДРОКОПТЕРА С ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

**Е. А. Перепелкин**

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения*

**Аннотация.** В работе представлена компьютерная модель квадрокоптера с двухпараметрической системой управления. Модель разработана в среде Matlab/Simulink. Модель предназначенная для проведения численных экспериментов при проектировании систем автоматического управления квадрокоптерами.

**Ключевые слова:** квадрокоптер, управление, ПИД-регулятор, компьютерная модель, Matlab, Simulink.

## Введение

Проектирование систем управления беспилотными летательными аппаратами [1–3] предполагает разработку математических и компьютерных моделей летательных аппаратов и систем управления. Данная работа посвящена созданию компьютерной модели квадрокоптера с двухпараметрической системой управления. Система управления состоит из блока формирования командных сигналов и шести ПИД-регуляторов. Коэффициенты регуляторов зависят от двух параметров, значения которых выбираются на основе требований к качеству переходных процессов и на основе компьютерного моделирования. Модель создана в среде Matlab/Simulink. Модель может быть использована при проектировании систем автоматического управления квадрокоптерами.

## 1. Математическая модель квадрокоптера

Математическая модель квадрокоптера хорошо известна и описана в целом ряде работ. Рассмотрим модель [4]

$$\begin{cases} m\ddot{x} = (\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi \sin\theta)u_1, \\ m\ddot{y} = (-\cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi \sin\theta)u_1, \\ m\ddot{z} = \cos\varphi \cos\theta \, u_1 - mg, \\ I_{xx}\ddot{\varphi} = u_2 - (I_{zz} - I_{yy})\dot{\theta}\dot{\psi}, \\ I_{yy}\ddot{\theta} = u_3 - (I_{xx} - I_{zz})\dot{\varphi}\dot{\psi}, \\ I_{zz}\ddot{\psi} = u_4. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x, y, z$ — координаты центра масс квадрокоптера в неподвижной системе координат, $\varphi$ — угол крена, $\theta$ — угол тангажа, $\psi$ — угол рыскания в связанной с квадракоптером системе координат, $u_1, u_2, u_3, u_4$ — управляющие силы и моменты сил, $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ — моменты инерции относительно главных осей квадрокоптера. Предполагается, что $I_{xx} = I_{yy}$.

Уравнения линеаризованной модели имеют следующий вид [4]

$$\begin{cases} m\ddot{x} = (\sin\psi\ \varphi + \cos\psi\ \theta)\ u_1, \\ m\ddot{y} = (-\cos\psi\ \varphi + \sin\psi\ \theta) u_1, \\ m\ddot{z} = u_1 - mg, \\ I_{xx}\ddot{\varphi} = u_2, \\ I_{yy}\ddot{\theta} = u_3, \\ I_{zz}\dot{\psi} = u_4. \end{cases} \tag{2}$$

## 2. Система управления

Обозначим через $x_d$, $y_d$, $z_d$, $\varphi_d$, $\theta_d$, $\psi_d$ значения командных сигналов по переменным состояния. Соответственно обозначим ошибки управления — отклонения переменных состояния от значений командных сигналов: $e_x = x_d - x$, $e_y = y_d - y$, $e_z = z_d - z$, $e_\varphi = \varphi_d - \varphi$, $e_\theta = \theta_d - \theta$, $e_\psi = \psi_d - \psi$.

Рассмотрим два типа переходных процессов для ошибок управления. Первый задается эталонным уравнением

$$\dddot{e} + 3r\ddot{e} + 3r^2\dot{e} + r^3 e = 0 \tag{3}$$

с характеристическим многочленом $a(s) = (s+r)^3$, второй — уравнением

$$\dddot{e} + 3q\ddot{e} + 3q^2\dot{e} + q^3 e = 0 \tag{4}$$

с характеристическим многочленом $a(s) = (s+q)^3$, где $q > r > 0$ — параметры переходного процесса.

Систему управления будем строить из условия, что переходные процессы в системе (2) по координатам $x, y, z$ принадлежит к первому типу, переходные процессы по углам $\varphi, \theta, \psi$ принадлежат ко второму типу. Соответственно рассмотрим два типа ПИД-регуляторов

$$c(e,r) = 3r^2 e + r^3 \int_0^t e(\tau)d\tau + 3r\dot{e}, \tag{5}$$

$$c(e,q) = 3q^2 e + q^3 \int_0^t e(\tau)d\tau + 3q\dot{e}. \tag{6}$$

Регулятор (5) применим для управления пространственным положением, регулятор (6) — для управления угловым положением квадрокоптера.

Зададим $u_1 = mc(e_z, r)$. Тогда переходный процесс по высоте будет принадлежать первому типу и подчиняться уравнению

$$\dddot{e}_z + 3r\ddot{e}_z + 3r^2\dot{e}_z + r^3 e_z = 0.$$

Определим значения $\varphi_d$ и $\theta_d$ из условий

$$(\sin\psi\ \varphi_d + \cos\psi\ \theta_d)u_1 = mc(e_x, r), \tag{7}$$

$$(-\cos\psi\ \varphi_d + \sin\psi\ \theta_d)u_1 = mc(e_y, r). \tag{8}$$

Тем самым мы обеспечим переходные процессы первого типа по координатам $x$, $y$.

Из уравнений (7), (8) получим

$$\varphi_d = \frac{m}{u_1}(\sin\psi\ c(e_x, r) - \cos\psi\ c(e_y, r)),$$

$$\theta_d = \frac{m}{u_1}(\cos\psi c(e_x, r) + \sin\psi c(e_y, r)).$$

Зададим $u_2 = I_{xx}c(e_\varphi, q)$, $u_3 = I_{yy}c(e_\theta, q)$. Таким образом, мы обеспечим переходные процессы второго типа по углам крена и тангажа.

Для угла рыскания применим управление $u_4 = I_{zz}c(e_\psi, q)$. При этом также получим переходный процесс второго типа с уравнением

$$\dddot{e}_\psi + 3q\ddot{e}_\psi + 3q^2\dot{e}_\psi + q^3 e_\psi = 0.$$

В целом система управления состоит из блока формирования командных сигналов, задающих траекторию движения квадрокоптера и шести ПИД-регуляторов. Настройка системы управления осуществляется выбором двух параметров, которые задают два типа переходных процессов. Значения параметров выбираются на основе требований к качеству переходных процессов с учетом свойств эталонных уравнений переходных процессов (3), (4) и на основе моделирования полной нелинейной модели квадрокоптера (1).

### 3. Компьютерная модель квадрокоптера с системой управления

Компьютерная модель квадрокоптера с системой управления разработана в среде Matlab/Simulink. Simulink-модель квадрокоптера (рис. 1) состоит из трёх подсистем: Quadcopter (рис. 2), Controller (рис. 3), Commander.

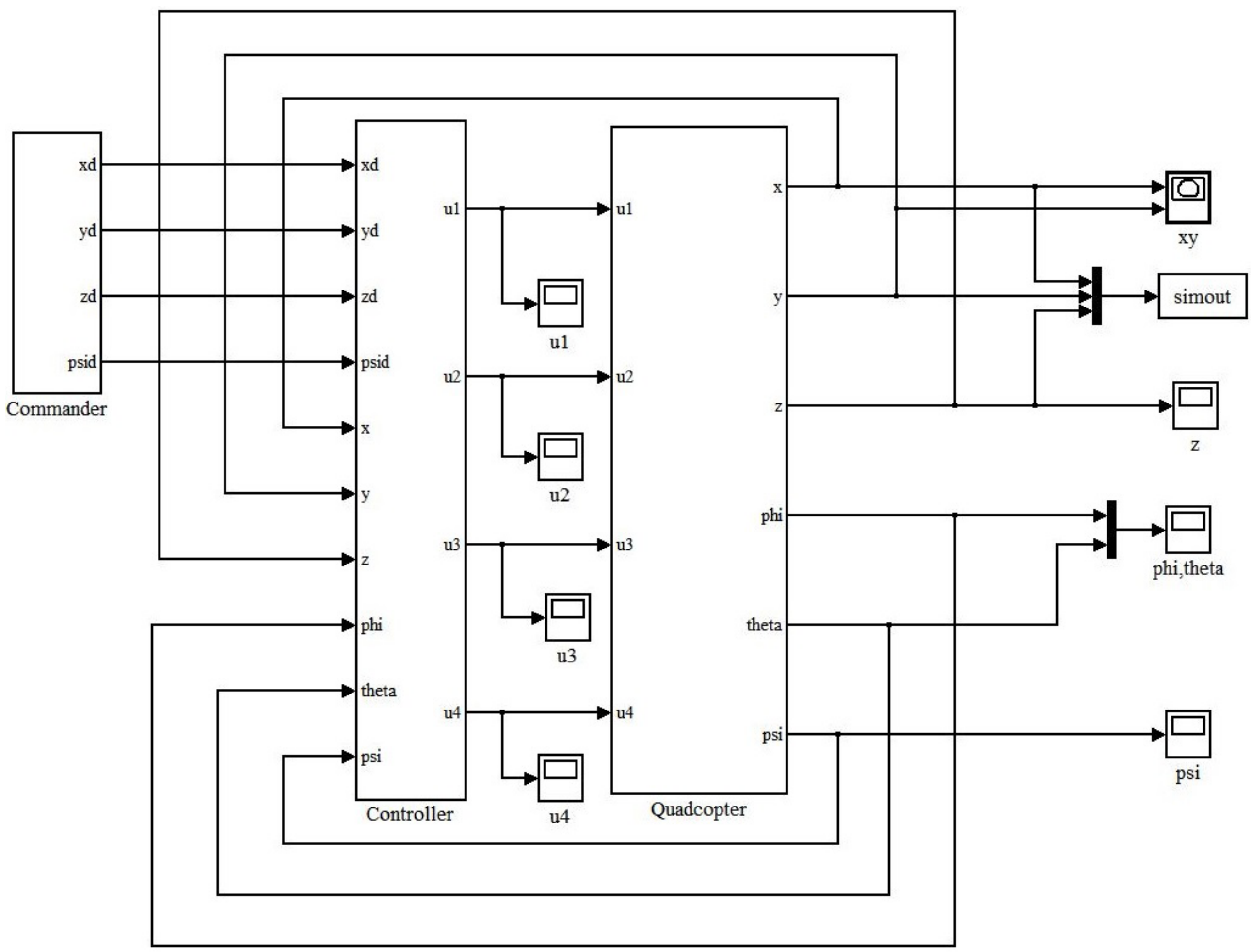



*Рис.1. Simulink-модель квадрокоптера*

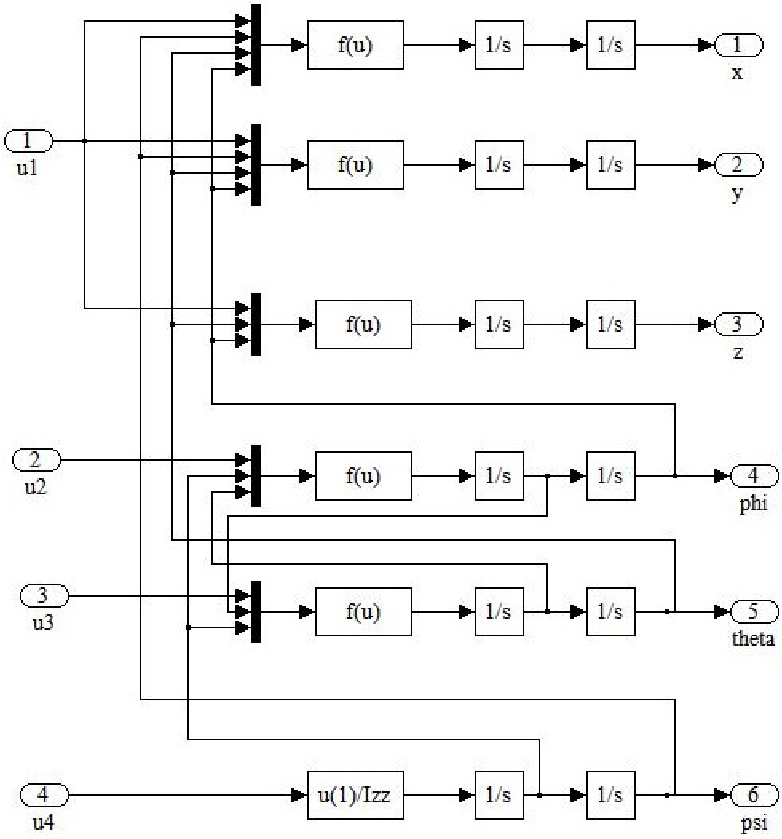



*Рис. 2. Подсистема Quadcopter*

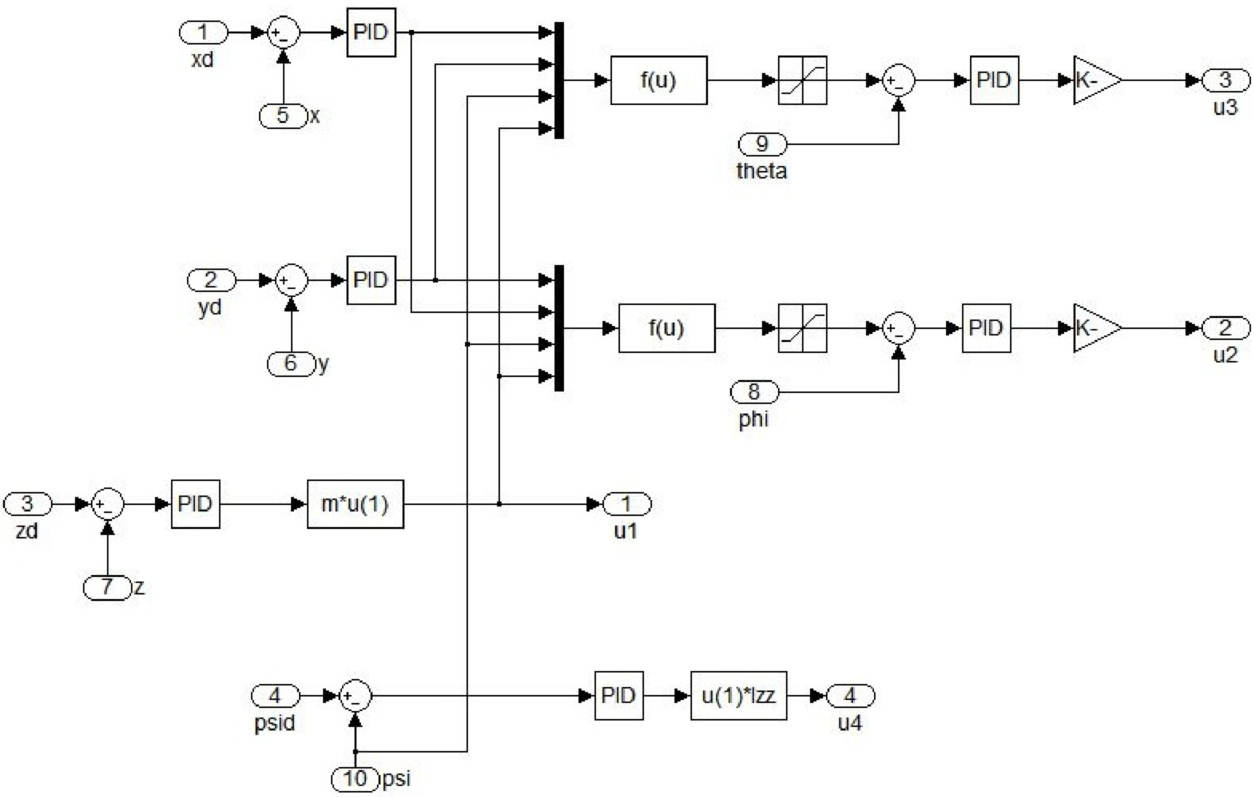



*Рис. 3. Подсистема Controller*

### 4. Пример моделирования

Рассмотрим квадрокоптер с параметрами: $m = 2,2$ кг; $g = 9,81$; $I_{xx} = I_{yy} = 0,17$; $I_{zz} = 0,23$. Необходимо обеспечить взлет квадрокоптера на заданную высоту $z = z_d$ из начального положения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, полет по заданной траектории с заданной скоростью.

На рис. 4 показаны результаты моделирования полета квадрокоптера по окружности на высоте $z_d = 10$ м. Значения параметров системы управления были заданы равными $r = 2, q = 3$.

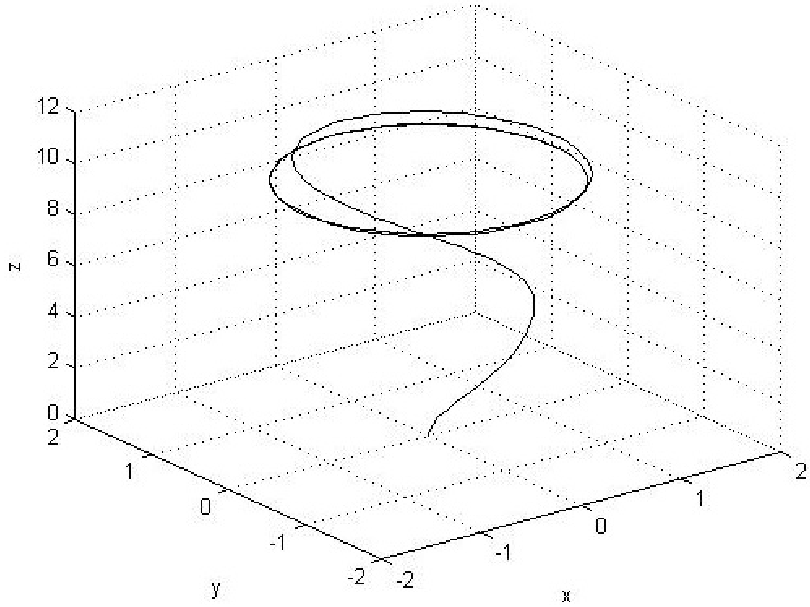



*Рис. 4. Траектория полета квадрокоптера*

### Заключение

Особенность представленной в работе компьютерной модели квадрокоптера заключается в том, что эта модель содержит два настраиваемых параметра системы управления и шесть типовых ПИД регуляторов. Значения параметров выбираются на основе требований к качеству переходных процессов с учетом свойств эталонных уравнений переходных процессов и на основе результатов моделирования. Модель может быть использована при проектировании систем автоматического управления квадрокоптерами.

### Литература


1. *Бакланов, Ф. Ю.* Стабилизация программного движения квадрокоптера / Ф. Ю. Бакланов, В. М. Морозов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 6. – С. 114–121.

2. *Белоконь, С. А.* Управление параметрами полета квадрокоптера при движении по заданной траектории / С. А. Белоконь, Ю. Н. Золотухин, А. С. Мальцев, А. А. Нестеров, М. Н. Филиппов, А. П. Ян // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 32–41.

3. *Зенкевич, С. Л.* Синтез и апробация алгоритма управления движением квадроко-птера по траектории / С. Л. Зенкевич, Н. К. Галустян // Мехатроника, автоматизация, управ-ление. – 2015. – Т. 16, № 8. – С. 530–535.

4. *Kim, J.* Accurate modeling and robust hovering control for quad-rotor VTOL aircraft / J. Kim, M. Kang, S. Park // Journal of Intelligent and Robotic Systems // 2010. – V. 57. – P. 9–26.

УДК 37:004.946

# ЦИФРОВЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ (VR) И 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Е. Ф. Подвальная**

*Курганский государственный университет*

**Аннотация.** За последнее десятилетие технологии виртуальной реальности (VR- технологии) в совокупности с современными расчетными программными комплексами нашли широкое распространение в обучении и промышленности. Использование и адаптация таких технологий в прикладных задачах имеет решающее значение в условиях цифровизации промышленности и экономики в целом.
**Ключевые слова:** виртуальная реальность, 3D моделирование, образование, программный комплекс.

## Введение

Использование современных расчетных прикладных программных комплексов для промышленности позволяет автоматизировать процесс проектирования конечного изделия и продукции в целом. Каждое предприятие в зависимости от номенклатуры производимой продукции, а также объёма и сложности решаемых задач выбирает для себя соответствующую программную среду для решения конкретных задач предприятия.

## 1. Существующие системы автоматизированного проектирования

Подобные системы автоматизированного проектирования делятся на лёгкие, средние и тяжёлые. Легкие программные комплексы (AutoCAD, Компас-2D, Bricscad) предназначены для 2D-проектирования и черчения, а также для создания отдельных трехмерных моделей без возможности работы со сборочными единицами. Средние интегрированные ракеты прикладных программ (Autodesk Inventor, SolidWorks, Компас-3D, T-FLEX, ANSYS, Comsol) — это программы для 3D-моделирования изделий, для решения линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных пространственных задач механики деформируемого твердого тела и механики конструкций, задач механики жидкости и газа, автоматизации проектирования электрических, гидравлических и прочих вспомогательных систем. Тяжелые системы (PTC Creo, NX, CATIA) предназначены для работы со сложными изделиями (большие сборки в авиастроении, кораблестроении и пр.) Функционально они делают все тоже самое, что и средние системы, но в них заложена совершенно другая архитектура и алгоритмы работы.

Кроме того, реализована эффективная работа с графикой для различных средств разработки программного обеспечения на языках программирования высокого уровня с подключением графических библиотек OpenGL и Direct3D.

Следует отметить, что практическое применение указанных специализированных пакетов для создания сложных программных комплексов (в частности — моделирующих стендов или тренажеров) не всегда удобно, поскольку готовые графические объекты в некоторых случаях трудно импортировать в разрабатываемые программные средства из-за возможной несовместимости.

Более приемлемым в этом плане следует признать вариант графических библиотек, использование которых обладает существенно большей мерой универсальности и инвариантности по отношению к принятой среде разработки. Однако использование таких библиотек при написании исходного кода представляется достаточно сложным процессом, поскольку практически каждый графический объект представляется целым комплектом сопровождающих функций. В результате, даже достаточно простым 3D моделям могут соответствовать сотни строк программного кода.

Такой подход является трудоемким, и поэтому в тех случаях, когда построение 3D модели не является самоцелью, а служит лишь одним из средств, используемых при создании сложных программных комплексов (в частности – для иллюстрации какого-либо процесса или для анализа работоспособности динамической системы), его так же следует признать мало приемлемым.

Другой вариант подхода к созданию 3D-моделей, которые легко доступны для использования в составе различных разрабатываемых комплексов с целью наглядной иллюстрации свойств исследуемого объекта или процесса. Кроме того, этот подход представляется применимым и для разработки самостоятельных графических приложений. В основе подобного подхода находятся инструментальные средства пакета прикладных программ Virtual Reality Toolbox среды MATLAB-Simulink.

## 2. Технологии виртуальной реальности (VR)

За последнее десятилетие в дополнении к указанным выше системам автоматизированного проектирования в нашу жизнь стремительно ворвались технологии виртуальной реальности (VR- технологии) и заполнили все информационное пространство. Появилась масса интереснейших возможностей применения VR-технологий, прежде всего в образовании и промышленности.

Но что такое виртуальная реальность?

**Виртуальная реальность** — созданный при помощи компьютерных технологий интерактивный трехмерный искусственный мир. Погружение в этот мир создает у пользователя иллюзию реальности происходящего. Применение виртуальной реальности позволяет производить визуализацию изучаемых процессов и явлений и по сравнению с системами автоматизированного проектирования значительно ускоряют отработку и внедрение промышленного оборудования.

На сегодняшний момент эти технологии широко используются при обучении и повышении квалификации: в науке, в авиации, в военно-промышленном комплексе, в медицине, в промышленности, в образовании, в банковской сфере, в транспортной отрасли и многих других.

Для обучения сейчас используется два типа оборудования: управляемые с помощью ПК или игровых приставок и управляемые с помощью мобильных телефонов.

Разнообразие образовательных возможностей VR поражает воображение. Но вместе с тем, ее использование диктует необходимость перестройки образовательного процесса. Поэтому существует несколько форм виртуальной реальности в образовании:

**Очное**: При такой форме классический формат урока остается неизменным, но дополняется 5–7-минутным погружением в VR.

**Дистанционное**: Такая форма дарит ученикам и преподавателям возможность взаимодействовать друг с другом, находясь в любой точке мира.

**Смешанное**: VR позволяет подключить к традиционной работе в классе учеников, не имеющих возможности посещать образовательное учреждение.

**Самообразование**: Любой человек может купить необходимое оборудование и программный контент, и заниматься дома самостоятельно с виртуальным преподавателем.

VR открывает множество новых возможностей в образовании. К основным преимуществам можно отнести: высокую степень наглядности, безопасность, вовлеченность пользователя, фокусировку, экономичность.

Уже сегодня созданы множество программ виртуальной реальности. И вот лучшие из них:

• **Labster** — интерактивный проект, позволяющий проводить научные эксперименты в оборудованных лабораториях.

• **MEL Chemistry VR** — увлекательный структурированный сборник интерактивных уроков химии.

• **Expedition Pioneer Program** — программа, позволяющая совершать виртуальные экскурсии в самые экзотические и невероятные уголки нашей планеты.

• **Virtual Reality Medical Training Simulation** — медицинский тренажер, вовлекающий студентов в принятие решений, от которых будет зависеть "жизнь" виртуального пациента.

• **Tilt Brush** позволяет рисовать в смоделированном 3D пространстве.

Сегодня проводиться много экспериментов применения виртуальной реальности, в том числе и в образовании [1]. Например, для того, чтобы проверить эффективность и жизнеспособность использования виртуальной реальности в образовании, Компания VRAr Lab разработала и провела экспериментальный урок по физике с использованием технологий виртуальной реальности. В исследовании приняли участие 153 человека: подростки 6–17 лет, их родители и родственники. Результат оказался отличным — лишь 8,5 % респондентов не усвоили материал.

Так же участники эксперимента высказали своё мнение к урокам с применением виртуальной реальности [2]. По данным VRAR Lab, 148 респондентов из 153 (97,4 %) желали бы и дальнейшего применения технологий виртуальной реальности на школьных уроках, причем в качестве дисциплин большинство указало физику и химию.

В целом, эксперимент, проведенный VRAR Lab, показал успешность применения VR в образовании.

## Заключение

Современные технологии, несмотря на долгий путь развития, еще молоды, но всё же виртуальная реальность — это следующий большой рывок в развитии сферы образования. И в ближайшее время нам предстоит увидеть множество интересных открытий в этой области.

## Литература

1. Виртуальная реальность в образовании. – URL: https://vrgeek.ru/obrazovanie-v-vr (дата обращения 14.03.2019)

2. Как технологии VR Education меняют современное образование. – URL: https://vr4you.ru/novosti/vr-education (дата обращения 14.03.2019)

УДК 004.921

# О ВИЗУАЛИЗАЦИИ МЕДИЦИНСКИХ РАДИОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

**М. М. Сучкова, С. Н. Медведев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В данной статье рассмотрена задача построения 2D и 3D моделей снимков компьютерной и магнитно-резонансной томографии. Представлено описание устройства стандарта медицинских изображений DICOM. Описан способ построения воксельных моделей по входной DICOM серии. Рассмотрены наиболее популярные программные продукты, реализующие данный алгоритм. В общем виде описана предполагаемая программная реализация.

**Ключевые слова:** компьютерная графика, DICOM, компьютерная томография, магнитно-резонансная томография, 3D моделирование, радиология, воксельная модель, воксельный рендер.

## Введение

В медицине крайне важна своевременная диагностика. Современные технологии магнитно-резонансной томографии и компьютерной томографии позволяют проводить более точные исследования пациентов, чем, например, рентген или ультразвуковые исследования. Для исследований, использующих магнитно-резонансную томографию (МРТ) или компьютерную томографию (КТ) необходимы специальные программы для просмотра результатов, дающие широкий спектр возможностей для диагностики.

В данной статье предлагаются теоретические основы, необходимые для разработки такого программного продукта, а также возможные технологии для реализации.

## 1. Постановка задачи

Необходимо разработать алгоритмы построения 2D и 3D моделей по входной серии DICOM файлов медицинского исследования. Разработанные алгоритмы требуется применить в программной реализации для просмотра и обработки снимков КТ и МРТ. В программном продукте также требуется реализовать ряд важных функций, таких как линейка для измерения расстояний на 3D модели, просмотр снимка сразу в нескольких плоскостях, мультипланарная реконструкция снимка.

## 2. О медицинских изображениях

Новейшие томографы не производят готовые изображения. Они создают серии DICOM файлов [8], содержащих информацию о пациенте, исследовании и информацию необходимую для визуализации.

Стандарт DICOM (Digital Imaging and Communication in Medicine) — это стандарт создания, хранения, передачи и визуализации медицинский изображений, используемый крупнейшими производителями радиологического оборудования. Преимущество КТ и МРТ диагностики с использованием данного стандарта перед распечатанным рентгеновским снимком заключается в информативности и в точности исследования. Врач имеет возможность рассмотреть орган со всех ракурсов, а не с одного, как в случае рентген-снимка.

Каждый DICOM файл из серии содержит информацию о срезе объекта, а именно о плотности тканей по этому срезу. Срезы могут быть в фронтальной, аксиальной, либо сагиттальной плоскостях (рис. 1). Если представить любой такой срез в виде растрового изображения, то яркость каждого пикселя в нем будет нести информацию о плотности тканей объекта.

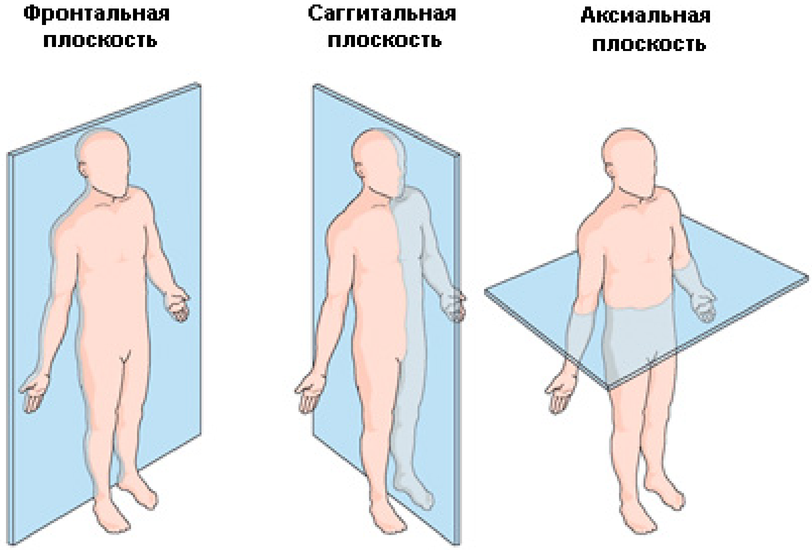



*Рис. 1. Плоскости срезов*

Для визуализации файла медицинского исследования необходимо значениям плотности тканей сопоставить яркость. Для этого используется шкала Хаунсфилда, предложенная одним из инженеров и разработчиков технологии КТ [5]. На рис. 2 представлены примерные плотности различных тканей и органов по шкале Хаунсфилда.

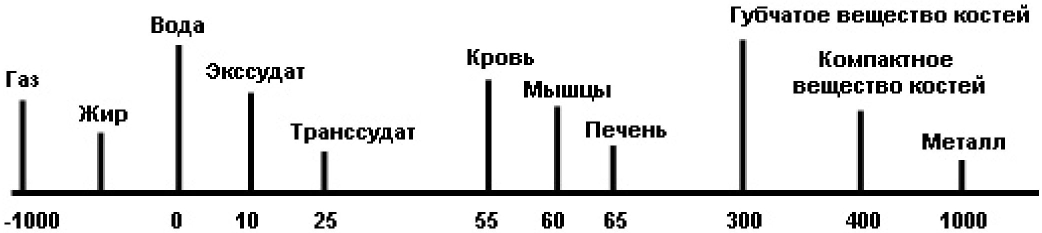



*Рис. 2. Шкала Хаунсфилда*

Шкала Хаунсфилда — это шкала линейного ослабления излучения при прохождении через ткани по отношению к дистиллированной воде, рентгеновская плотность которой была принята за 0 HU (HU — единицы измерения по шкале Хаунсфилда). Линейный коэффициент ослабления — это характеристика взаимодействия данного вида излучения с данным видом вещества, он зависит от плотности вещества. Для материала с линейным коэффициентом ослабления $\mu_X$ величина HU определяется по формуле:

$$\frac{\mu_X - \mu_{воды}}{\mu_{воды} - \mu_{воздуха}} \cdot 1000,$$

где $\mu_{воды}$ и $\mu_{воздуха}$ — линейные коэффициенты ослабления воды и воздуха соответственно [1].

На рис. 3 можно увидеть пример соответствия определенных тканей значениям по шкале. Слева направо, сверху вниз: печень (+60), кровь (+58), жировые ткани (–100), губчатая кость (+300).

### 3. Стандарт DICOM

Каждый DICOM файл представляет собой последовательность элементов, содержащих всю необходимую информацию об исследовании: место и дату проведения, тип исследования (МРТ или КТ), сам снимок объекта, а также многие другие данные. Каждый элемент состоит

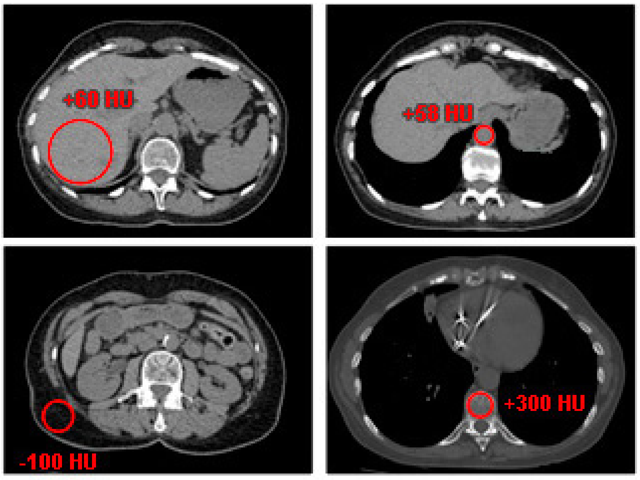


*Рис. 3. Пример плотностей некоторых тканей*

из тега, типа данных, значения длины поля данных и сами данные [7]. Стандартизованные тэги всегда открыты для чтения, теги типа UN со значением binary это либо зарезервированные производителем оборудования теги, либо ошибочные данные.

Рассмотрим несколько примеров DICOM файлов. На рис. 4 в первом столбце представлен список тэгов, во втором — их типы, в третьем — значения, а в четвертом краткое описание. Например, в тэге 00100010 содержится имя пациента.

На рис. 5 можно увидеть некоторые тэги, касающиеся изображения: 00200032 и 00200037 отвечают за позицию и ориентацию текущего среза, 00281050 и 00281051 описывают параметры окна съемки, 00280004 обозначает цветовой режим съемки.

| Тег | Тип | Значение | Описание |
|---|---|---|---|
| 00080033 | TM | 160354.757 | Content Time |
| 00080050 | SH | | Accession Number |
| 00080060 | CS | CT | Modality |
| 00080070 | LO | Philips | Manufacturer |
| 00080080 | LO | | Institution Name |
| 00080081 | ST | VORONEZ, RUSSIA | Institution Address |
| 00080090 | PN | | Referring Physicians Name |
| 00081010 | SH | HOST-336345 | Station Name |
| 00081030 | LO | Sinus STANDART | Study Description |
| 0008103e | LO | SOFT AX , iDose (4) | Series Description |
| 00081040 | LO | Radiology | Institutional Department Name |
| 00081090 | LO | Ingenuity CT | Manufacturers Model Name |
| 00081111 | SQ | | Referenced Performed Procedure Step Sequence |
| 00081140 | SQ | | Referenced Image Sequence |
| 00083010 | UI | 1.3.46.670589.33.1.63711763413510684100008.4860... | Irradiation Event UID |
| 00100010 | PN | L A.YU. | Patients Name |
| 00100020 | LO | 034 | Patient ID |
| 00100030 | DA | 19 09 | Patients Birth Date |
| 00100040 | CS | M | Patients Sex |
| 00101010 | AS | 029Y | Patients Age |
| 00180015 | CS | NOSE | Body Part Examined |
| 00180022 | CS | HELIX | Scan Options |

*Рис. 4. Пример DICOM файла, описание исследования*

Последний элемент DICOM файла это тэг 7fe00010 (рис. 6), в него записана графическая информация (Pixel Data), которая имеет значение binary, так как не представляется возможным представить ее в виде текста [4].

### 4. Обзор существующих программных продуктов

Один из самых известных программных продуктов в данной области — это Weasis Medical Viewer. Это многофункциональное, кроссплатформенное, высокопроизводительное приложение. Данный продукт предназначен для широкого спектра исследований. На рис. 7 представлен скриншот с официального сайта Weasis, демонстрирующий один из множества режимов работы приложения [10].

| Тег | Тип | Значение | Описание |
|---|---|---|---|
| 00200013 | IS | 1 | Instance Number |
| 00200032 | DS | -82.992\-13.852\536.58 | Image Position (Patient) |
| 00200037 | DS | 1\0\0\0\1\0 | Image Orientation (Patient) |
| 00200052 | UI | 1.3.46.670589.33.1.63711763361537711400002.5472... | Frame of Reference UID |
| 00201040 | LO | | Position Reference Indicator |
| 00201041 | DS | 536.58 | Slice Location |
| 00204000 | LT | SOFT AX | Image Comments |
| 00280002 | US | 1 | Samples per Pixel |
| 00280004 | CS | MONOCHROME2 | Photometric Interpretation |
| 00280010 | US | 512 | Rows |
| 00280011 | US | 512 | Columns |
| 00280030 | DS | 0.35546875\0.35546875 | Pixel Spacing |
| 00280100 | US | 16 | Bits Allocated |
| 00280101 | US | 12 | Bits Stored |
| 00280102 | US | 11 | High Bit |
| 00280103 | US | 0 | Pixel Representation |
| 00281050 | DS | 60\60 | Window Center |
| 00281051 | DS | 400\400 | Window Width |
| 00281052 | DS | -1024 | Rescale Intercept |
| 00281053 | DS | 1 | Rescale Slope |
| 00401001 | SH | | Requested Procedure ID |
| 00e10010 | UN | binary | private |
| 00e11002 | UN | binary | private |

*Рис. 5. Пример DICOM файла, описание среза*

| Тег | Тип | Значение | Описание |
|---|---|---|---|
| 7fe00010 | OW | binary | Pixel Data |

*Рис. 6. Пример DICOM файла, графическая информация*

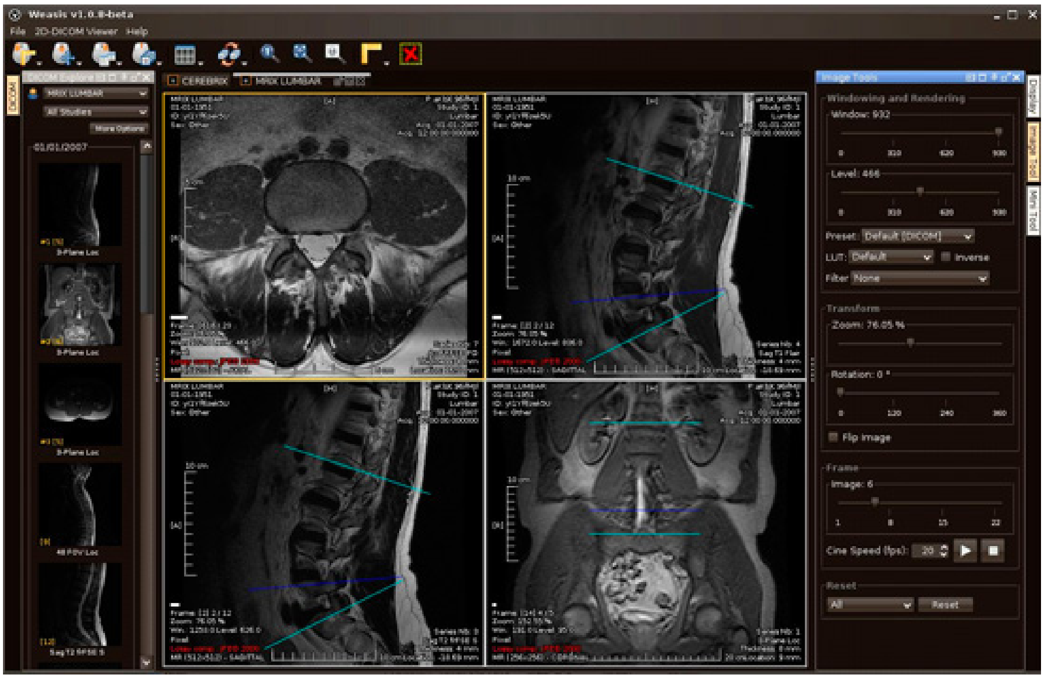


*Рис. 7. Weasis Medical Viewer*

Другой популярный продукт такого направления — Инобитек, разработанный в России. Также содержит широкий спектр функций, русскоязычный интерфейс. На рис. 8 представлена работа функции криволинейной реконструкции [3].

Помимо упомянутых высокопроизводительных и многофункциональных решений существуют также приложения с ограниченным функционалом. Они бесплатные и имеют несложный интерфейс, однако меньше подходят для профессионального использования. На рис. 9 представлено одно из таких приложений — Vidar Dicom Viewer Lite [9].

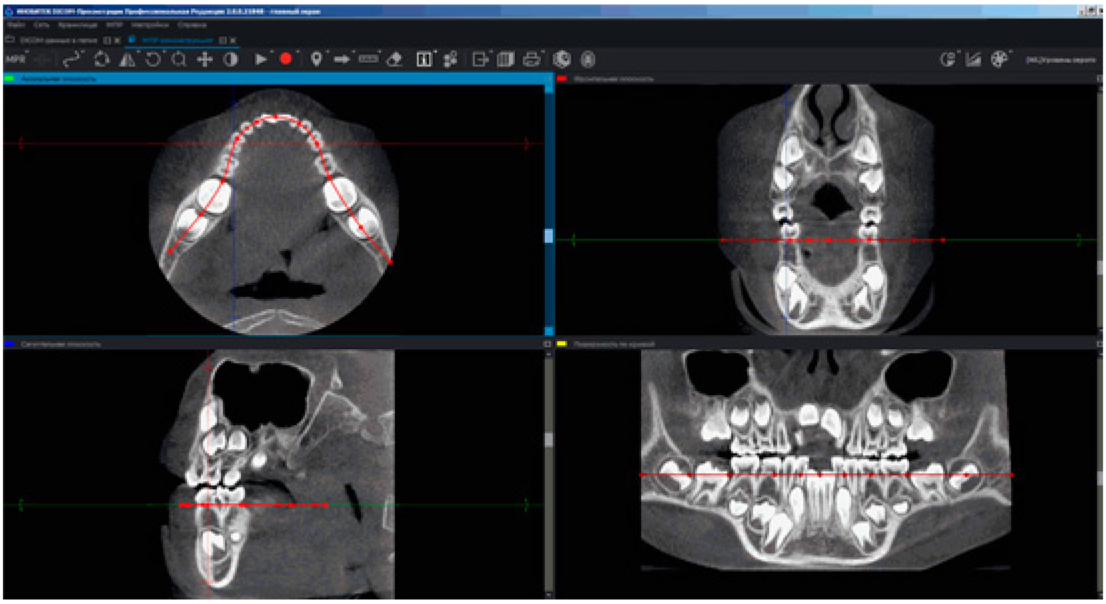


*Рис. 8. Инобитек DICOM*

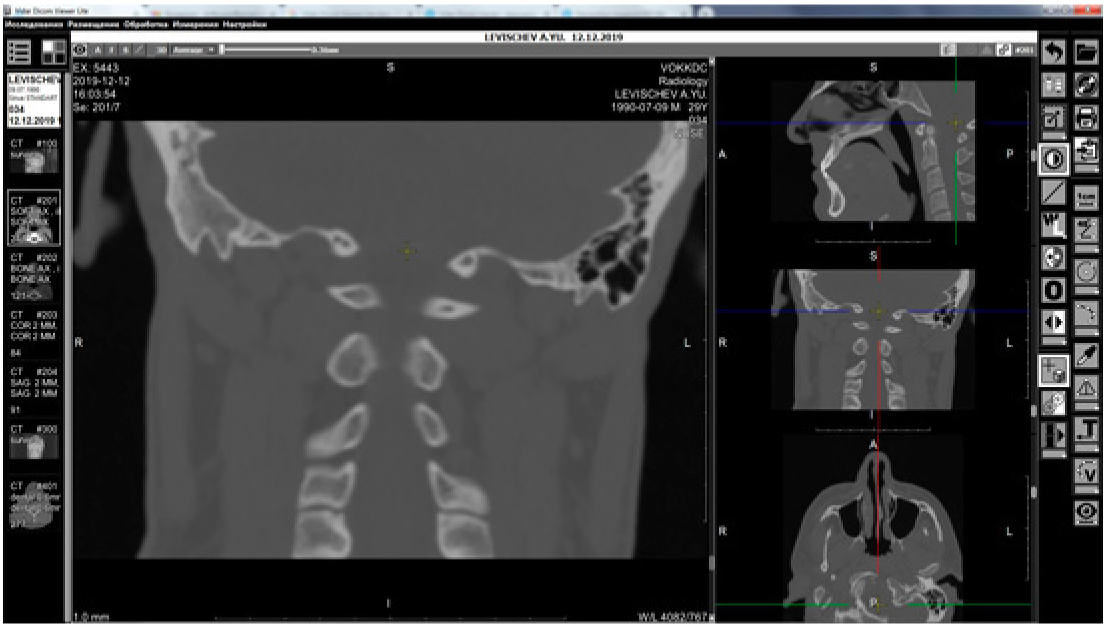



*Рис. 9. Vidar Dicom Viewer Lite*

## 5. Предполагаемая реализация

Стандарт DICOM файла предполагает построения воксельной 3D модели, так как данный стандарт генерирует не набор точек, которые можно визуализировать, а лишь информацию, представляющую определенный срез.

Воксель — это элемент объемной модели, хранящий в себе в данном случае плотность тканей в данной точке пространства [2]. Воксели позволяют преобразовать информацию о плоском срезе в объем.

В стандарте DICOM не определяется расстояние между срезами, которое необходимо для определения размеров вокселей, поэтому его необходимо вычислять из других данных. Для каждого среза известны координаты в пространстве и ориентация, по этим параметрам из двух соседних срезов можно определить расстояние между ними. Зная размер вокселей можно каждому из них сопоставить значение плотности тканей в данной точке пространства. При наложении соответствующих срезов трех плоскостей можно получить 3D модель [6].

Программный продукт планируется реализовать с использованием нескольких технологий. Воксельный 3D рендер планируется реализовывать с использованием языка C++, так как такой рендеринг требует больших затрат времени и ресурсов компьютера, а C++ позволяет эффективно реализовывать многопоточность для ускорения, например, с использованием CUDA или OpenMP. Помимо этого рассматривается возможность применения библиотек OpenGL и QT для разработки воксельного рендера. Пользовательский интерфейс предполагается реализовывать с использованием JavaScript и библиотеки React.

## Заключение

На данный момент в рамках описанной темы изучены основные принципы устройства стандарта DICOM, а также, подобрана разноплановая литература данной тематики.

## Литература

1. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом. – Режим доступа: https://studopedia.su/2_36989_oslablenie-ioniziruyushchego-izlucheniya-pri-vzaimodeystvii-s-veshchestvom.html. – (Дата обращения: 02.10.2020).

2. *Жабин, Т. С.* Преобразование изображения стандарта DICOM в 3D модель с функцией распознавания / Т. С. Жабин, Л. А. Юркевская – ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет», Оренбург. – 4 с.

3. Криволинейная реконструкция. – Режим доступа: https://inobitec.com/manual/dicomviewer/mpr/curvilinear-reconstruction-mpr. – (Дата обращения: 05.10.2020).

4. Общие сведения о DICOM-тегах. – Режим доступа: https://inobitec.com/manual/dicomviewer/view-dicom-tags/about-dicom-tags. – (Дата обращения: 05.10.2020).

5. Основополагающие термины и понятия, используемые при расшифровке КТ. – Режим доступа: https://secondopinions.ru/poleznye-materialy/kt/terminy-i-opredeleniya/osnovopolagayuschie-terminyi-i-ponyatiya-ispolzuemyie-pri-rasshifrovke-kt. – (Дата обращения: 06.10.2020).

6. Разработка биологической воксельной модели на основании данных из файлов DICOM для трехмерного электромагнитного моделирования. – Режим доступа: http://masters.donntu.org/2014/fknt/kondratov/library/translate.htm. – (Дата обращения: 07.10.2020).

7. Стандарт DICOM в компьютерных медицинских технологиях. – Режим доступа: https://mks.ru/library/article/1997/dicom.html. – (Дата обращения: 05.10.2020).

8. DICOM Standart. – Режим доступа: https://www.dicomstandard.org. – (Дата обращения: 09.10.2020).

9. Vidar Dicom Viewer. – Режим доступа: https://povidar.ru/dicom-viewer/v2. – (Дата обращения: 10.10.2020).

10. Weasis Medical Viewer. – Режим доступа: https://nroduit.github.io/en. – (Дата обращения: 10.10.2020).

УДК 004.021

# ОБЗОР АЛГОРИТМОВ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**Д. Е. Черняев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Важным этапом распознавания изображения является сегментация, которая позволяет упростить обработку изображения и получить результат, который подается на вход других алгоритмов. Цель сегментации — выявить в некотором смысле однородные области изображения. Среди алгоритмов сегментации обширный класс составляют алгоритмы кластеризации/классификации. Помимо базовых методов, среди которых стоит упомянуть метод *k*-средних, для сегментации изображений используются модификации и обобщения других базовых методов. В статье кратко излагаются основные методы, используемые для сегментации изображения и проводится их сравнительный анализ.
**Ключевые слова:** сегментация, методы кластеризации, *k*-средних, *c*-средних.

## Введение

Сегментация изображения — это процесс разделения пикселей на множество сегментов, различающихся по некоторому общему признаку. Данная процедура позволяет получить новое «упрощенное» представление изображения, которое в дальнейшем используется как основа для анализа. Полученные данные при сегментации можно использовать во многих областях, таких как медицина, фотовидеофиксация транспортных средств, обработка спутниковых изображений.

К известным и часто используемым методам сегментации относятся следующие [1–5]:

– пороговая сегментация изображения;

– Байесовский метод сегментации;

– методы, основанные на работе с регионами (метод роста региона, метод разбиения и слияния регионов);

– метод обнаружения краёв (Edge detection);

– метод кластеризации.

Опишем кратко некоторые методы.

*Пороговая сегментация* изображения основана на разделении изображения на несколько однородных областей, которые отличаются между собой средним уровнем яркости. Данному показателю соответствует некоторое пороговое значение для каждой выбранной области. Метод, с одной стороны, является вычислительно эффективным, а с другой — чувствительным к шуму изображения и сильной неоднородности.

*Байесовский метод* разбивает изображения на неперекрывающиеся области, которое в наибольшей степени соответствует наблюдаемому изображению [5–6]. В роли величины соответствия выступает апостериорная вероятность. Оптимальное разбиение будет достигаться в случае его максимальной апостериорной вероятности.

*Метод роста региона* основывается на выделение связных областей на изображении, которые имеют группы пикселей с одинаковой яркостью. На первом этапе задаются корневые точки, которые инициируют рост регионов. Корневые точки начинают присоединять соседние точки на основе заданного критерия схожести. Остановка происходит при выполнении некоторого условия, например, достигнуто максимальное значение отклонения от заданного значения фиксированного параметра. Считается, что данный метод обеспечивает лучшее качество решения, чем пороговая сегментация. Однако, он имеет и недостатки: высокая вычислительная сложность; неопределенность выбора корневых точек; неопределенность в выборе шага, на котором надо прекратить расширение регионов.

*Метод разбиения и слияния регионов* является улучшенной версией метода роста регионов. Вместо того, чтобы выбирать корневую точку, изображение делится на несвязные регионы, а затем снова объединяется на основе некоторых свойств. Таким образом, алгоритм состоит из шага разбиения и шага слияния.

*Метод обнаружения краёв* определяет границы между областями изображения, при этом условием для разграничения областей может являться сильное различие в уровне яркости областей. Выбранные методом пиксели соединяются воедино, чтобы сформировать однородную замкнутую область.

*Метод кластеризации*, как и предыдущие методы, осуществляет разбиение изображения кластеры, при этом количество кластеров может быть задано заранее или определено в процессе работы алгоритма на обучающем множестве.

Рассмотрим более подробно некоторые алгоритмы кластеризации.

### *1.1. Кластеризация методом k-средних*

Метод *k*-средних — это один из простейших итеративных алгоритмов, позволяющий разбить наборы данные в форме векторов на *k* кластеров, при этом каждый кластер имеет центр — это такая точка, для которой сумма расстояний от неё до всех остальных членов кластера минимальна [1].

Пусть имеется множество многомерных объектов, каждому из которых соответствует вектор $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j),\ \ j = \overline{1, N}.$ С учетом того, что оценка близости определяется на основе некоторой метрики (например, евклидова расстояния), метод находит некоторое разбиение векторов на группы $\{G_1, \dots, G_r\}$ и центр кластера $C_i \in G_i$ в каждой группе. В основе разбиения лежит минимизация оценки величины отклонения вектора $x^k$ от центра кластера $C_i$:

$$f = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left( \sum_{x_k \in G_i} \left\| x_k - C_i \right\|^2 \right)}_{V_i} \to \min. \tag{1}$$

Здесь $V_i$ — функция оценки группы $i,$ которая зависит от геометрических свойств кластера $G_i$ и расположения центра $C_i$.

Разделение на кластеры определяется матрицей разбиения $U = (u_{ij})_{N \times r},$ где

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ \left\| x_i - C_j \right\|^2 \le \left\| x_i - C_k \right\|^2 \ \textit{для всех} \ k \ne j, \\ 0, \ \textit{иначе}. \end{cases} \tag{2}$$

Это означает, что объект $x_i$ принадлежит к кластеру $G_j$, если центр $C_j$ является ближайшим среди всех центров. Матрица разбиения обладает следующими свойствами:

$$\sum_{j=1}^{r} u_{ij} = 1, i = \overline{1, N}; \ \ \sum_{i=1}^{N} u_{ij} = |G_i|, \ j = \overline{1, r}; \ \ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{r} u_{ij} = N;$$

$$C_i = \frac{1}{|G_i|} = \sum_{k, x_k \in G_i} x_k. \tag{3}$$

Первое ограничение означает, что каждый объект может принадлежать только одному кластеру, второе ограничение определяет мощность кластера $G_i$. Следующее ограничение фиксирует распределение $N$ объектов по $r$ кластерам.

Перечислим шаги алгоритма.

**Шаг 1:** Инициализация: задать точность вычислений $\varepsilon$; выбрать центры $C_i \ \ (i = \overline{1, r})$ случайным образом среди всего набора точек.

**Шаг 2:** Построить матрицу разбиения по формуле (2).

**Шаг 3:** Вычислить оценку разбиения по формуле (1). Если $f$ меньше определённого допустимого значения или же его улучшение после предыдущей итерации ниже порогового значения, то переходим к Шагу 4.

**Шаг 4:** Найти новые центры кластеров по формуле (3) и перейти к шагу 2.

### *1.2. Метод нечеткой кластеризации c-средних*

Заметим, что в описанном выше алгоритме элементы матрицы разбиения являются индикаторами принадлежности объекта данному кластеру. Может оказаться, что близость объекта к двум кластерам может различаться не существенно, и этот факт необходимо учитывать. Нечеткий алгоритм *c*-средних — это один из методов, в которых допускается, что объект может принадлежать более чем одному кластеру. Для каждого из объектов вводится некоторая величина принадлежности, с которой он относится к кластеру для каждого из кластеров. В этом случае матрица разбиения содержит величины принадлежности каждого объекта каждому из кластеров [10–11]. Считается, что степень принадлежности изменяется в промежутке [0,1]. Пусть имеется множество из $n$ объектов $X=\{x_1,...,x_n\}$. Нечеткий алгоритм c-средних формирует нечеткое разбиение также в виде матрицы $U$ размеров $n \times c$, где $c$ — количество кластеров, $u_{ij}$ — степень принадлежности объекта $x_i$ к кластеру $G_j$ с центром $C_j$, обладающее свойствами:

$$u_{ij} \in [0,1], \quad \sum_{j=1}^{c} u_{ij} = 1.$$

Целевая функция имеет вид

$$J_m = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{r} u_{ij}^m \left\| x_i - C_j \right\|^2 . \quad (4)$$

Здесь $m$ — это параметр нечёткости, который определяет степень нечёткости данных в кластере. На каждой итерации алгоритм минимизирует целевую функцию путем изменения степеней принадлежности объектов кластерам [9].

Перечислим шаги алгоритма.

**Шаг 1:** Инициализация: выбрать количество кластеров и построить матрицу $U$.

**Шаг 2:** Найти центр для каждого кластера по формуле:

$$c_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^m * x_i}{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^m}. \quad (5)$$

**Шаг 3:** Вычислить оценку разбиения по формуле (1). Если получившееся значение ниже определённого допустимого значения или же его улучшение после предыдущей итерации ниже порогового значения, то переходим к Шагу 4.

**Шаг 4:** Обновить матрицу разбиения по формуле

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{c} \left[ \frac{d_{ij}}{d_{kj}} \right]^{\frac{2}{m-1}}}, \quad (6)$$

где $d_{ij} = \sqrt{\left\| x_i - c_j \right\|^2}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,c}$ — расстояние между объектом $x_i$ и центром $c_j$.

### *1.3. Модифицированный метод k-средних*

Основная проблема при использовании алгоритма $k$-средних заключается в получении начальных значений центров кластеров. В основном алгоритме центры выбираются случайным образом. Для решения данной проблемы предложен модифицированный алгоритм, согласно которому новые центры кластеров вычисляются на каждой итерации с помощью выражения (5) таким образом, чтобы их значения были ближе к оптимальным значениям центров. Данная модификация позволяет значительно сократить количество итераций, необходимых для получения конечного результата [12].

Перечислим основные шаги модифицированного алгоритма:

**Шаг 1:** Инициализация: выбираются центры кластеров согласно следующей процедуре:

а) вычислить $d_{\min}$ и $d_{\max}$ на основе заданного набора данных;

b) для $j = 0,1,\ldots,k-1$ вычислить новые $C_j$ по формуле

$$C_j = d_{\min} + \left(\frac{j}{k} + \frac{1}{2k}\right)\left(d_{\max} - d_{\min}\right). \tag{7}$$

**Шаг 2:** Построить матрицу разбиения с помощью выражения (2).

**Шаг 3:** Вычислить оценку разбиения с помощью выражения (1). Если получившееся значение ниже определённого допустимого значения или же его улучшение после предыдущей итерации ниже порогового значения, то переходим к Шагу 4.

**Шаг 4:** Определить новые центры при помощи выражения (3) и перейти к шагу 2.

## 2. Вычислительный эксперимент

Для оценки применимости описанных алгоритмов кластеризации к задаче сегментации изображений и их сравнительного анализа был проведен эксперимент и разработано консольное приложение Segmentation на языке программирования C#. Первая часть эксперимента заключается в сегментации случайно созданного искусственного изображения. Входными параметрами являлись размер изображения в пикселях и количество кластеров, заданное пользователем. Полученные результаты в табл. 1 показывают отношение количества кластеров $N_f$, найденных в результате нескольких тестов алгоритмами, к заданному пользователем количеству кластеров $N_u$.

Таблица 1

*Отношение найденных кластеров к их заданному количеству*

| Изображение | $k$-средних | Модифицированный $k$-средних | Нечеткий $c$-средних |
|---|---|---|---|
| $N_f > N_u$ | 13 % | 10 % | 8 % |
| $N_f < N_u$ | 83 % | 85 % | 84 % |
| $N_f = N_u$ | 4 % | 5 % | 8 % |

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что полученные в ходе применения алгоритмов кластеры имеют большую размерность чем те, которые предполагались во входных параметрах, а значит происходит объединение кластеров, так как количество полученных кластеров в большинстве тестов меньше, чем количество кластеров, заданных пользователем, что свидетельствует о более глубокой сегментации изображения. Отметим, что среди представленных алгоритмов, наиболее эффективным по результатам тестов является алгоритм нечётких $c$-средних.

Вторая часть эксперимента заключалась в обработке реальных изображений, пример представлен на рис. 1.

*a) b) c)*

*Рис. 1. a) пример сегментируемого изображения; b) результат работы модифицированного алгоритма при k = 25; c) результат работы стандартного алгоритма при k = 25*

Сравнивая результаты выполнения стандартного и модифицированного алгоритмов $k$-средних, мы получили сильную разницу в количестве итераций для достижения входного параметра количества заданных пользователем кластеров $k$, что отражено в табл. 2.

Таблица 2

*Количество итераций алгоритмов*

| $k$ | Стандартный | Модифицированный |
|---|---|---|
| 5 | 82 | 39 |
| 10 | 74 | 35 |
| 15 | 69 | 28 |
| 20 | 61 | 23 |
| 25 | 54 | 18 |
| 30 | 48 | 15 |

Из результатов табл. 2 видно, что с помощью модифицированного алгоритма $k$-средних, необходимый пользователю результат достигается за меньшее число итераций, чем у стандартного алгоритма, а значит он эффективнее.

**Заключение**

В данной статье были описаны некоторые из методов сегментации изображений, в частности метод, использующий алгоритмы кластеризации. Были рассмотрены преимущества и недостатки каждого из алгоритмов, а также их практическое применение, в ходе выполнения которого мы получили результат работы алгоритмов. В заключении отметим, что в зависимости от целей пользователя необходимо выбирать более удобный из методов, основываясь на входных данных и требуемого результатах.

**Литература**

1. *Dhanachandra, N.* A survey on image segmentation methods using clustering techniques / N. Dhanachandra, Y. Chanu // Eur. J. Eng. Res. Sci. – 2017. – V. 2, № 1. – P.15.

2. *Pantofaru, C.* A comparison of Image Segmentation Algorithm / C. Pantofaru, M. Hebert // The Robotics Institute, Carnegie Mellon University. – 2005.

3. *Masood, S.* A survey on Medical Image segmentation / S. Masood, M. Sharif, A. Masood, M. Yasmin, M. Razar // Current Medical Imaging Reviews. – 2015. – V. 11. – P. 3–14.

4. *Миронов, Б.* Сегментация изображений кластерным методом и алгоритмом случайных скачков: сравнительный анализ / Б. Миронов, А. Малов // КО. – 2010. – № 1.

5. *Jain, A.* Data clustering: A review / A. Jain, M. Murty, P. Flynn //ACM:Computing Surveys. – 1999. – V. 31, № 3. – P. 264–323.

6. *Смехун, Я.* Байесовская сегментация изображений наноструктур / Я. Смехун, С. Полищук, Б. Грудин // МНИЖ. – 2014. – № 11.

7. *Jain, A.* K. Algorithms for Clustering Data / A. Jain, R. Dubes // Prentice Hall. – 1988.

8. *Haiyang, L.* Dynamic particle swarm optimization and k-means clustering algorithm for image segmentation / L. Haiyang, H. Hongzhou, W. Yongge // Optik. – 2015. – P. 126, 4817– 4822.

9. *Halder, A.* Dynamic Image segmentation using Fuzzy c-means based Genetic Algorithm / A. Halder , S. Pramanik, A. Kar // International Journal of Computer Application. – 2011. – V. 28. – P. 12–18.

10. *Егорова, Д.* Применение нечеткого алгоритма кластеризации c-means для сегментации изображений / Д. Егорова, Д. Курбатов // Огарёв Online. – 2019. – № 10. – URL: journal.mrsu.ru/wp-content/uploads/2019/07/kurbatov-d.i..pdf

11. *Milligan, G.* An examination of procedures for determining the number of clusters in a data set / G. Milligan, M. Cooper // Psychometrika. – 1985. – V. 5. – P. 159–179.

12. *Almerhag, I.* A Modified K-means Clustering Algorithm for Gray Image Segmentation / I. Almerhag, I. El-Fegh, A. Dulla // Proceedings of ACIT'2010. – 2010. – V. 1. – P. 205–209.

УДК 007.004

# ИССЛЕДОВАНИЕ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЯ ДАННЫХ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ 2D ПЛАНА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

**К. С. Шишкина**

*Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского*

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы повышения эффективности 3D-моделирования данных в системе автоматизированного проектирования 2D плана для использования в компьютерном моделировании.
**Ключевые слова:** компьютерное имитационное моделирование, методы, 3D-модель, САПР, 2D, пространство Simio, модели, результирующая геометрия.

## Введение

Компьютерное имитационное моделирование — дисциплина, набирающая популярность как в правительстве, так и в промышленности. Компьютерное имитационное моделирование может помочь в проектировании, создании и оценке сложных систем. Дизайнеры, руководители программ, аналитики и инженеры используют компьютерное имитационное моделирование, чтобы понять и оценить сценарии «что, если». Он может моделировать реальную или предлагаемую систему с использованием компьютерного программного обеспечения. Он полезен, когда изменения в фактической системе трудно реализуемы и требует высоких затрат или непрактичны. Некоторые примеры компьютерного моделирования, знакомые большинству из нас, например: прогнозирование погоды, имитаторы полета, используемые для обучения пилотов, и моделирование автокатастроф. В этом тематическом исследовании предлагается подход, а также инструменты и технологии. Методы, используемые для автоматизации и сокращения ресурсов, необходимых для разработки трехмерных (3D) моделей из традиционного двухмерного (2D) вида системного автоматизированного проектирования данных (САПР), которые можно использовать в компьютерном моделировании.

## 1. Подготовка к моделированию.

Управление менеджмента качества (УМК) и Управление Исследовательских служб (УИС), внедрило несколько компьютерных имитационных моделей в Национальный институт здоровья (НИЗ), федерального агентства, поддерживающего фундаментальные биомедицинские исследования, эти модели поддерживают улучшенное планирование действий в чрезвычайных ситуациях и повышают рентабельность предоставление услуг УМК сообществу НИЗ. Эти усилия предназначены для интеграции в целостную модель поддержки принятия решений (CODS), которая предоставит гибкую платформу для понимания разработки и тестирование, улучшений предоставления услуг в виртуальной среде.

В дополнение к аналитическому компоненту эта модель использует наглядное представление кампуса НИЗ. Это увеличивает полезность моделирования, так как «Отображение графических изображений динамических объектов, поведение модели во время выполнения позволяет пользователю обнаруживать ошибки».

Кампус НИЗ состоит из более чем 90 зданий на 310 акрах земли. Площадь комплекса клинического центра 3,2 миллиона квадратных футов. НИЗ так же включает в себя около 9000 парковочных мест на наземных участках и многоуровневых конструкциях.

Создание этого «виртуального мира» в среде компьютерного моделирования может потребовать значительных ресурсов и времени персонала. Навыки, необходимые для того, чтобы быть эффективным и действенным разработчиком трехмерного моделирования, значительно отличаются от навыков, необходимых для эффективного моделирования. Часто организации с большим инвентарем помещений, такие как НИЗ, поддерживают традиционные двухмерные чертежи САПР в плане планирование и управление пространством. Данные САПР могут иметь разную степень соответствия стандартам и передовым методам, что может препятствовать эффективному преобразованию в 3D-модель.

При разработке модели CODS компания УИС определила необходимость создания трехмерного изображения дороги кампуса, парковки и пешеходной сети, доступа к университетскому городку как для сотрудников, так и посетителей, а также экстерьера здания, включая соответствующий вход и выход. Кроме того, части модели CODS требовали визуализации интерьера зданий кампуса с минимальным изображением внутренних стен и дверей, а также того, как люди перемещаются по физическому пространству. Чтобы решить эти проблемы, УИС разработала различные инструменты, методы и методы рабочего процесса для использования этих 2D-ресурсов САПР в 3D-компьютерном моделировании.

## 2. Актуальные проблемы

К сожалению, не существует универсального «метода» преобразования данных 2D САПР в 3D и последующего использования в имитационной модели. Говоря конкретно о 2D-САПР, «компоновки САПР подходят для создания моделей только в том случае, если их построение следует соглашениям, принятым в конкретной предметной области; соглашения могут быть соглашением между пользователем САПР и конструктором имитационной модели. Организации накапливают ресурсы САПР с течением времени, и соответствие стандартам не всегда интегрируется в требования, поскольку эти активы разрабатываются и обновляются.

Кроме того, следует различать преобразование 2D-плана в 3D для визуализаций или виртуальных пошаговых руководств от первого лица по сравнению с использованием данных и информации из чертежа САПР для использования в моделировании в качестве инструмента принятия решений. При получении значения для принятия решения от моделирования компоновки плана этажа необходимо не только визуализировать, но также иметь некоторый способ доступа и использования базовых данных о местоположении и пространственных отношений элементов, изображенных в визуализации.

## 3.План создания

Общий подход к созданию 3D-модели внутреннего пространства в Simio включает 3 основных этапа [6]. Во-первых, генеральная планировка внутреннего пространства, включая комнаты и двери, создается в виде 3D модели [5]. Второй шаг включает в себя развитие пути перемещения людей по всему зданию. Наконец, эти геометрии импортируются в программу моделирования, в нашем случае Simio, для использования в компьютерном моделировании. Начиная с чертежей САПР каждого здания в плане, Autodesk AutoCAD использовался для разработки DATAEXTRACTION для экспорта аннотаций комнат и соответствующих координатных местоположений в развернутый файл листа [1]. Следует отметить, что в некоторых корпусах кампуса 19 этажей по 400 комнат на этаже. Этот файл был очищен, отсортирован по «этажам» и стандартизирован в формате с разделителями-запятыми. Trimble SketchUp пользовательское расширение (шаг 1) было разработано для импорта этой информации в чертеж SketchUp 3D. Затем виды плана этажа были импортированы в SketchUp и соответствующим образом ориентированы. Двери были не стандартизированные объекты САПР на предоставленных чертежах, поэтому другое расширение SketchUp (шаг 2) было специально разработано для идентификации и размещения различных стандартных дверных объектов в модели SketchUp .Затем виды в плане были преобразованы в чистые «профили» с использованием различных инструментов SketchUp, техник и плагинов. В дополнение к стандартному продукту Sketchup использовались инструменты Trimble Extension Warehouse, которые включают CleanUp, Edge Tools, Selection Toys и Architect Tools, разработанные Томасом Томассеном. Целью этого упражнения было заполнить пространства внутри геометрии стены САПР «гранями» SketchUp. И создать твердые двухмерные полигоны, представляющие геометрию стены. Этот шаг был самым трудоемким, но с помощью этих методов можно было получить относительно большой вид в плане (например, 400 комнат, 200 000 квадратных футов)(создается за 2–3 часа). Затем 2D-полигоны были выдавлены, чтобы создать базовое представление интерьера и геометрии в 3D. Кроме того, была проведена основная циркуляционная сеть по основным коридорам здания в SketchUp. Еще одна серия расширений SketchUp была разработана для автоматизации «подключения» этих основные путей к дверям и комнатам во всем здании (шаги 3–7). Наконец, эта геометрия была экспортирована с помощью специального расширения SketchUp (шаг 8) в файл электронной таблицы, отмечая определение объекта, имя и расположение [3]. Затем эти данные были импортированы в модель Simio с помощью надстройки, предоставленной LOGIO. Аналогичные этапы процесса и рабочий процесс используются для разработки общего обзора кампуса. САПР для всего рисунка кампуса был использован в качестве основы для контуров здания. Масса каждого здания была приблизительно рассчитана по этим очертания и относительно незначительные детали добавлены на основе физических наблюдений, чтобы передать ощущение среды кампуса. Кампус и окружающая сеть дорог, а также часть пешеходной сети, были получены из комбинации документов мастера планирования НИЗ и запроса OpenStreetMap данных через Overpass Turbo [2].

## 4.Выводы и будущее развитие

Используя эти методы, можно достичь создания 3D-модели, которая обеспечила достаточный уровень детализации для визуализации и моделирования движения людей в пределах территории кампуса НИЗ, и как люди, так и движение транспорта в университетской среде. Методы рабочего процесса и SketchUp API использовали ограниченные данные, доступные из 2D-макетов, чтобы избежать многих временных ограничений. Суммируя повторяющиеся шаги, можно было разрабатывать особенности модели индивидуально. Для площади 3,2 м$^2$ 18 Этаж был смоделирован комплексом NIH Clinical Center, что позволило сэкономить сотни часов времени. Дорожная сеть кампуса с использованием данных OpenStreetMap может быть создана за несколько минут и менее подвержена ошибкам, по сравнению с несколькими днями ручного повторного отслеживания аэрофотоснимка. В ходе этого проекта было установлено, что результирующая геометрия SketchUp также может быть используема во многих приложениях игрового движка, включая физику, обнаружение столкновений и контроль обоих игроков [4]. Хотя методы были разработаны специально для модели Simio , многие из них могут применяться более широко и обобщенно.

## Литература

1. AutoDesk. – http://help.autodesk.com/view/ARCHDESK/2016/ENU/

2. OpenStreetMap Foundation 2017. «Overpass API». wiki.openstreetmap.org.http://wiki.openstreetmap.org/wiki/Overpass_API

3. Trimble 2017. «Документация по SketchUp Ruby API». –developer.sketchup.com.http://ruby.sketchup.com/

4. *Bijl J. L., Бур С. А.* «Расширенная 3D-визуализация для моделирования с использованием игровых технологий». В Трудах Зимней конференции по моделированию. – 2011. – https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6147985

5. *Лоренц П., Шульце Т.* Создание модели на основе макета. – 1995. – https://www.researchgate.net/publication/3620014_Layout_based_model_generation

6. *Смит Дж. С., Старрок Д. Т., Келтон. В. Д.* Simio и моделирование: моделирование, анализ, приложения. – 2017. – https://www.simio.com/publications/Simio-and-Simulation-Modeling-Analysis-Applications-Edition-05/preview/simio_and_simulation_5e_Preview.pdf

УДК 51-8, 519.61, 519.654, 519.674, 521.8, 531.1

# О МНОЖЕСТВЕ ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЦИФЕРБЛАТА

**В. И. Штука**

*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*

**Аннотация.** Настоящий материал обращает внимание на механическую детерминированность обыденных процессов на примере системы часовых стрелок, служащих для определения времени. Анализируется множество состояний системы с показательными решениями, полученными с использованием метода наименьших квадратов за счёт невозможности нахождения точного решения. В плане расширения применяемой методики даются пояснения и особенности, на которые необходимо обращать внимание при моделировании фазовых портретов иррациональных и многомерных систем.
**Ключевые слова:** фазовый портрет, метод наименьших квадратов, приближённое решение.

## Введение

Ни для кого сейчас не секрет, как устроены обычные механические часы и что они имеют циферблат, на котором время традиционно отображается посредством трёх стрелок — часовой, минутной и секундной. Часовая стрелка перемещается медленно, её обгоняет минутная, ну а секундная стрелка крутится быстрее всех, совершая полный оборот за минуту. Порядочное число олимпиадных задач по математике то и дело относят кандидатов в победители к различным головоломкам, связанным с этим повседневным и вместе с тем удивительным механизмом [1]. Однако далее речь пойдёт о том как эти стрелки с течением времени изменяют положение относительно друг друга, определяя таким образом портрет фазовых состояний часов как системы. Кажется, что любое положение трёх этих стрелок друг относительно друга возможно и его удастся пронаблюдать как минимум раз за 12 часов, но это лишь иллюзия, на которую предлагается обратить внимание.

На самом деле, множество состояний стрелок на циферблате строго определено и не допускает произвола, поэтому ограничено. Тому можно привести множество примеров, каждый из которых будет лишь частным случаем общей закономерности, которую выразим следующими выражениями

$$\xi = 6t,\ \eta = t/10, \qquad \zeta = t/120, \tag{1}$$

где $t$ — время в секундах, а величины угловых мер $\xi,\ \eta,\ \zeta$ соответствующих часовой, минутной и секундной стрелкам определены в градусах.

На основании соотношений (1) теперь можно определить явно углы $\alpha$ и $\beta$ между часовой и минутной стрелкой, а также между минутной и секундной соответственно

$$\alpha = \xi - \eta = 59t/10, \quad \beta = \eta - \zeta = 11t/120. \tag{2}$$

## Характеристики и примеры

Выражения (2) уже позволяют изобразить фазовый портрет системы в параметрическом виде, используя время в качестве связующего элемента на плоскости $(\alpha,\ \beta)$ подобно фазовой плоскости для скоростей и ускорений механической системы. Полный фазовый портрет экстраполируется на поле 360°×360° и представляет собой почти сплошную штриховку, сложную для взгляда и отображения на печатных страницах небольшой площади даже самыми тонкими линиями, поэтому для наглядности на рис. 1.1 представлено поле 30°×30°, а далее — лишь увеличенные участки с областью 1°×1°, подобно рис. 1.2

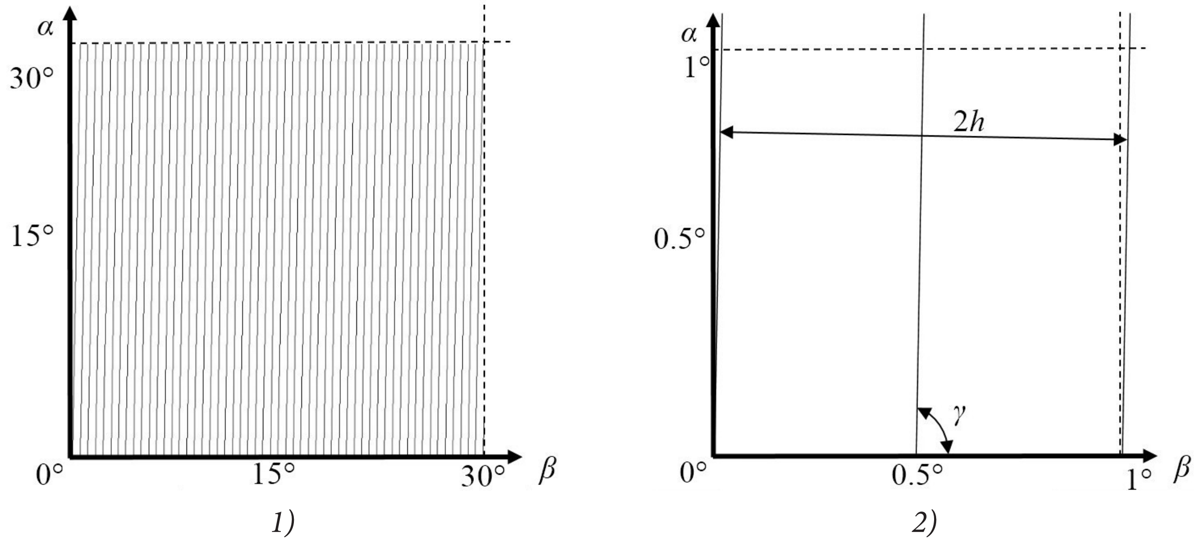



*Рис. 1. Параметрическое изображение фазового пространства соотношения (2):*
*1) – увеличенный участок множества фаз (30°×30°);*
*2) – схематические изображение параметров «штриховки»*

***Несколько свойств «штриховки», показанной на рис. 1.1:***

***А.*** угол наклона штриховки к оси абсцисс $\gamma$ составляет более 89,1099°, отрезки почти вертикальны;

***Б.*** шаг $h$ (расстояние между ближайшими отрезками) составляет 0.508413°, т.е. чуть более половины градуса;

***В.*** всё множество состояний фазового пространства изображается посредством 718 отрезков на площади 360°×360°.

Несмотря на столь плотную «штриховку» множество состояний и площадь квадрата 360°×360° можно сравнить лишь как точку и отрезок — такая вот аналогия для меры меньшего порядка. У стороннего наблюдателя может возникнуть соблазн с ходу определить принадлежность определённой комбинации углов ($\alpha$, $\beta$) к какой-либо характеристике, но его суждения и оценки будут крайне поверхностными. Поясним это на примере, который называется **«перпендикуляр»** — пусть необходимо определить время на часах, когда часовая и секундная стрелка будут лежать на одной прямой, а минутная будет располагаться к ним перпендикулярно. Такую «задачку» автору давным-давно пришло в голову задать своему младшему брату, когда тот был ещё в пятом классе — он долго кропил над решением, но одолеть по понятным причинам не смог. Попробуйте также задать эту головоломку увлечённым математикой людям и увидите, что из этого выйдет.

Точного решения данной «задачки» не существует, также как и многих других, ей подобных… Однако в рамках жёсткой системы (1) и соотношений (2) существует наилучшее приближение к решению, которое всегда можно найти.

Следует заметить, что поиск наилучшего приближения основан на методе наименьших квадратов и имеет прекрасную геометрическую интерпретацию – искомое состояние наиболее близко к заданному, т. е. располагается на минимальном от него удалении. Для разнообразия и наглядности представим результаты поиска решений на нескольких «тривиальных» примерах.

### *Перпендикуляр*

В этом примере определяется время, когда часовая и секундная стрелки смотрят в противоположные стороны, минутная — перпендикулярно им. В обозначениях системы (2)

$\alpha = \beta = 90°$ или $\alpha = \beta = 270°$. Решений такой задачи существует два и они симметричны относительно вертикальной оси – сумма показателей соответствующих углов в реализациях составляет 360°. Результаты представлены на рис. 2, где приведены их модельные реализации и фазовые портреты окрестных состояний.

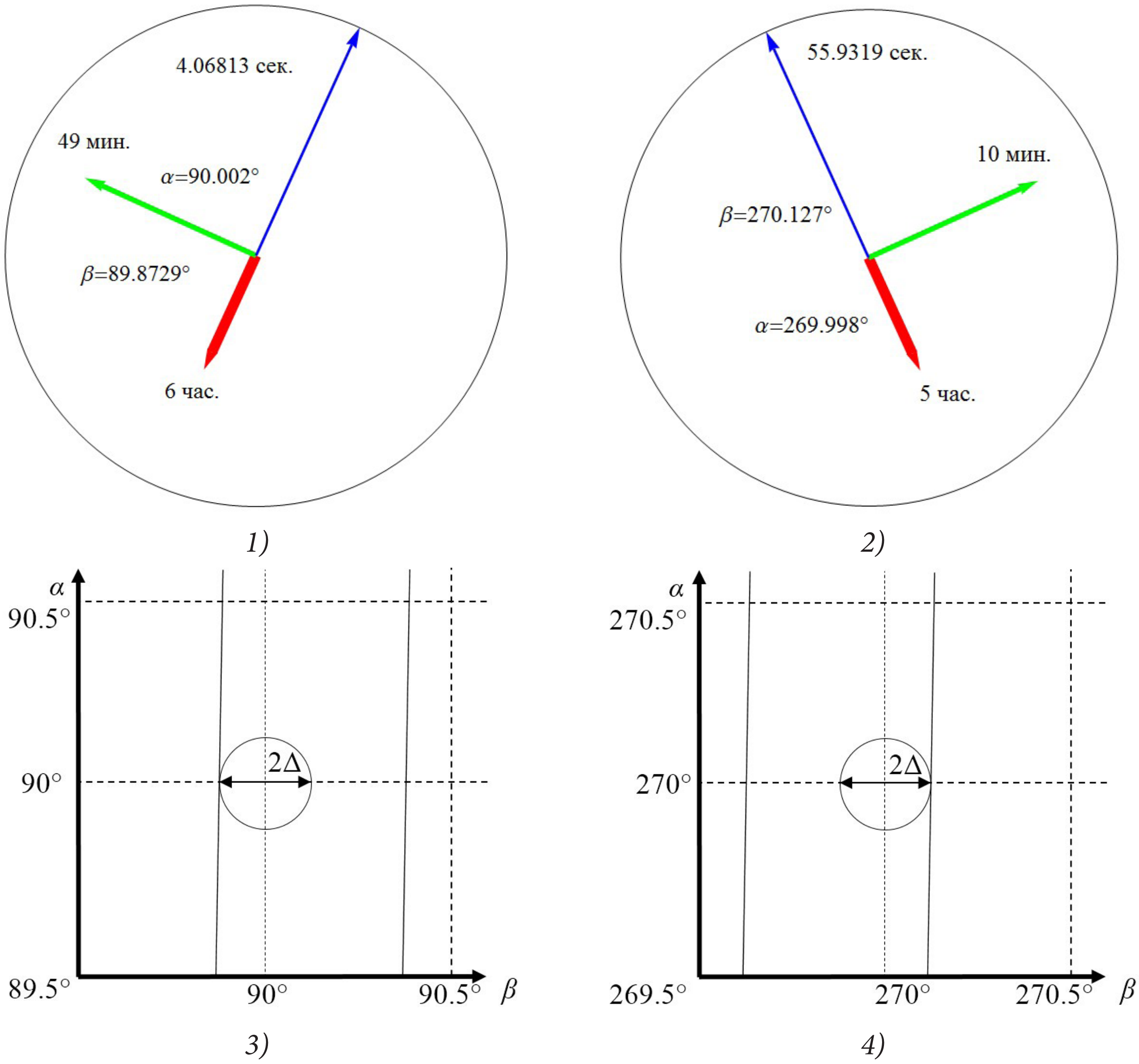



*Рис. 2. Модельные реализации задачи о* ***«перпендикуляре»*** *в состояниях:*
*1) –* *<u>6 часов 49 минут 4.06813 секунды</u>* *($\alpha = 90.002°$ и $\beta = 89.873°$), фазовый портрет 3);*
*2) –* *<u>5 часов 10 минут 55.9319 секунд</u>* *($\alpha = 269.998°$ и $\beta = 270.127°$), фазовый портрет 4)*

Качество поиска этого приближения наиболее удачно отражают картины фазового пространства в окрестности искомого состояния при величине невязки системы $\Delta = 0.127103° = h/4$, имеющей явную геометрическую ассоциацию в виде окружности, центр которой совпадает с искомыми параметрами, а радиус касается ближайшей фазовой линии (характеристики) в точке наилучшего приближения.

### *Равенство*

В данном примере определяется время, когда углы между стрелками «почти» одинаковые и циферблат разделяется на три условно равные части. В обозначениях системы (2) $\alpha = \beta = 120°$ или $\alpha = \beta = 240°$. Решений у данной задачи также два — они симметричны и представлены на рис. 3

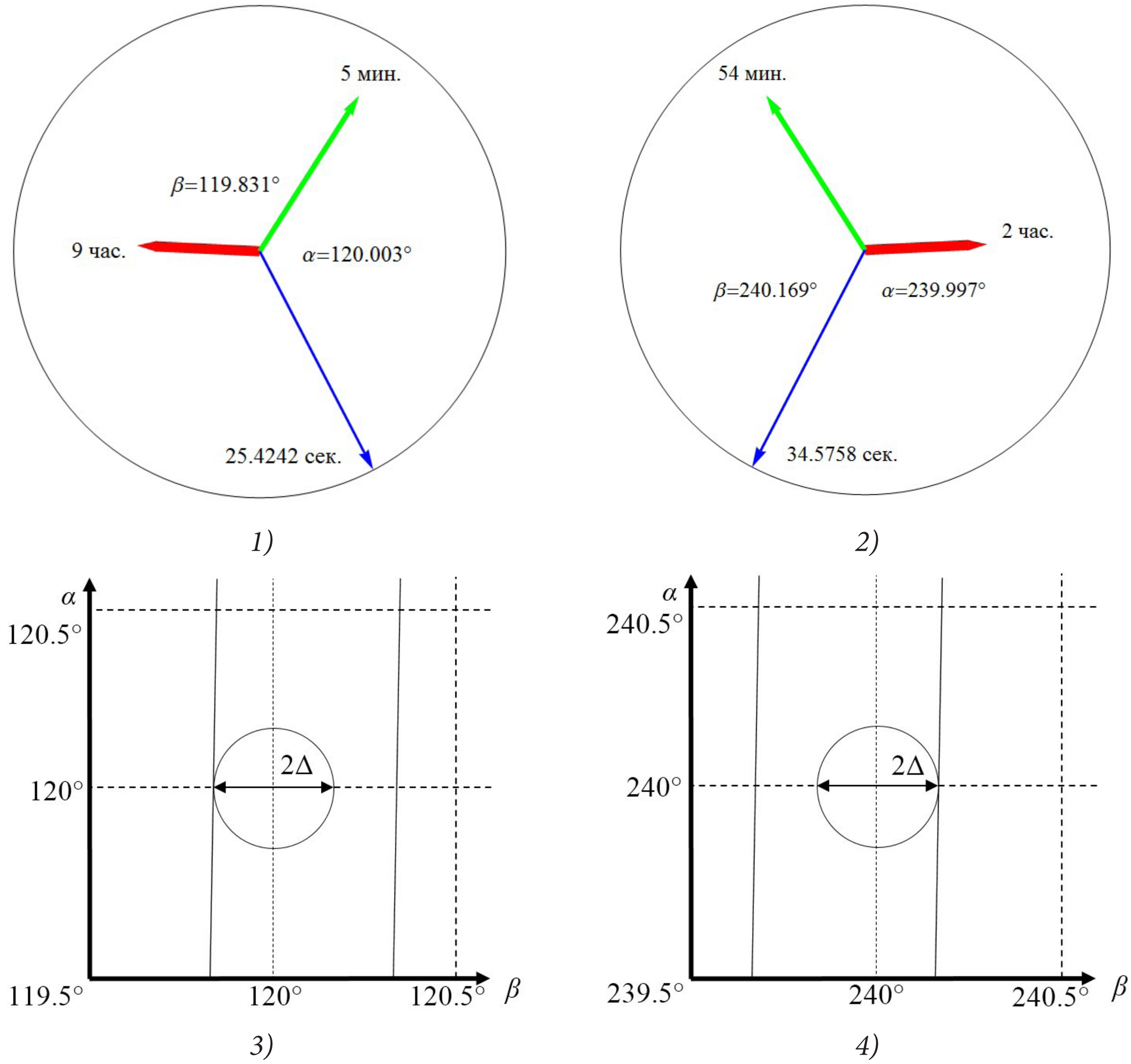


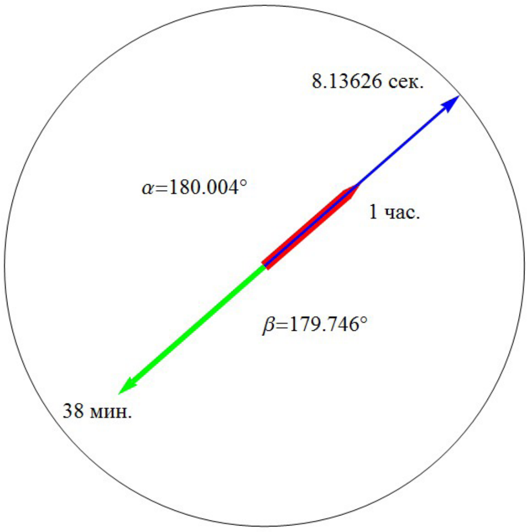

*Рис. 3. Модельные реализации задачи о* ***«равенстве»*** *в состояниях:*
*1) – 9 часов 5 минут 25.4242 секунд ($\alpha = 120.003°$ и $\beta = 119.831°$), фазовый портрет 3);*
*2) – 2 часа 54 минут 34.5758 секунд ($\alpha = 239.997°$ и $\beta = 240.169°$), фазовый портрет 4)*

Качество поиска этого приближения наиболее удачно отражают картины фазового пространства в окрестности искомого состояния при $\Delta = 0.169471° = h/3$.

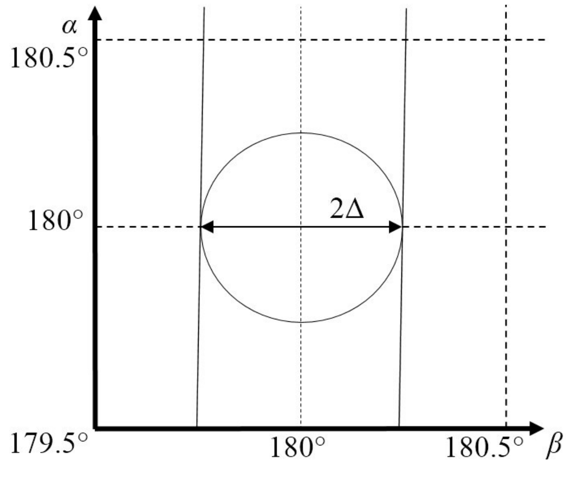
### *Противостояние*

В данном примере определяется время состояния, когда секундная и часовая стрелки смотрят в одну сторону, минутная — в другую. В обозначениях системы (2) $\alpha = \beta = 180°$. Приводим на рис. 4 лишь результат поиска наилучшего решения для одного из вариантов

Второй вариант, как уже ясно из свойств симметричных решений, будет реализован в 10 часов 21 минут 51.8637 секунд ($\alpha = 179.996°$ и $\beta = 180.254°$), т.е. расхождение во времени определения двух ближайших фазовых состояний к одному заданному составляет значительную величину — почти 9 часов или 75 % периода (для часового механизма это 12 часов). Случай этот типично дуалистический с $\Delta = 0.254207° = h/2$.




1)




2)

*Рис. 4. Модельные реализации задачи о «**противостоянии**» в состояниях: 1) – 1 час 38 минут 8.13626 секунд ( $\alpha = 180.004°$ и $\beta = 179.746°$ ), фазовый портрет 2)*

## Заключение

Вся эта задача в общем случае может быть рассмотрена в контексте плоских линейных фазовых портретов вида

$$\alpha = k\,\beta, \qquad (3)$$

где коэффициент $k = p/q$ представим отношением взаимно простых чисел $p$ и $q$.

Общее число сегментов, делящих область определения (для удобства проще рассматривать нормированную область 1×1), исчисляется величиной $p+q$, а расстояние между линиями «штриховки» определено величиной $h = 1/\sqrt{p^2+q^2}$. Каждый может изобразить фазовый портрет, например, для системы с $p=4$ и $q=3$ в нормированной области и заметить, что для его изображения потребуется ровно $6 = p+q-1$ линий, отстоящих друг от друга на величину $h = 1/5$, и попытаться определить возможные реализации какого-нибудь произвольного состояния — направление поиска определено перпендикуляром характеристикам.

До тех пор, пока коэффициент $k$ является числом рациональным, можно будет пользоваться соответствующей системой поиска наилучшего решения и определять его. Однако, как только коэффициент $k$ примет иррациональное или трансцендентное значение, вся область определения будет покрыта плотным множеством отрезков, мера которых будет равна мере площади. Тогда уже любому заданному состоянию будет соответствовать одно и только одно искомое. При такой постановке вопроса становится необходимым знать о том, когда именно наступит событие, определённое заданным состоянием. В качестве элементарных примеров читатель может попробовать изобразить всё множество состояний на фазовой плоскости для систем вида (3) при $k=\sqrt{2}$ или $k=\pi$, которое окажется плотной заливкой всей области определения…

Вместе с тем необходимо принимать во внимание величины временных расхождений двух соседних характеристик при решении предиктивных задач, чтобы не ошибиться с прогнозом и учесть все допустимые варианты, реализующиеся в некоторой окрестности искомого состояния.

Аналогом рассматриваемой системы стрелочного механизма часов могут выступать системы цилиндрических валков или шестерёнок с разными радиусами, вращающимися в противоположных направлениях и касающиеся друг друга в точке сцепления. Если центральные углы, образованные изначальными точками касания с их текущими положениями, обозначить за $\alpha$ и $\beta$, то задача примет вид (3). В этом отношении радиусы будут определять передаточный коэффициент $k$, являющийся некоторым рациональным показателем (хотя это не всегда выполнимо). Вращение валков или шестерёнок также будет сопровождаться предсказуемым поведением, если знать параметры задачи и произвести соответствующий обсчёт фазового портрета механизма.

Подобные же расчёты применимы и к более сложным пространственным системам, например, космических тел, движущихся по орбитам друг относительно друга, составляя уже многомерные фазовые портреты с целью поиска времени определённых, критических и наиболее опасных состояний, представляющих угрозу существования естественным и искусственным спутникам, орбитальным станциям или космическим миссиям [2].

### Литература


1. Часы в задачах // Контент-платформа Pandia.ru: [сайт]. – URL: https://pandia.ru/text/78/135/91162.php (дата обращения: 01.10.2020).
2. *Tapley B., Schutz B., Born G.* Statistical Orbit Determination / под ред. F. Cynar. – Elsevier, 2004.

УДК 81’322.2

# СТОП-СЛОВА КАК ОСНОВА КЛАССИФИКАЦИИ ТЕКСТОВЫХ ДОКУМЕНТОВ

**В. А. Яцко**

*Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова*

**Аннотация.** Описывается методика автоматической классификации текстовых документов, основанная на анализе распределения стоп-слов и последовательном применении двух отклонений: отклонения от коэффициента Ципфа и среднего квадратичного отклонения. К стоп-словам относятся термины, которые встречаются с высокой частотностью в текстах разных жанров и типов, не выражают смысла вне контекста, используются в одной морфологической форме. Показывается, что применение стоп-слов позволяет упростить вычисления и повысить быстродействие классификатора. Проводится сопоставление с классификацией на основе ключевых слов текста.
**Ключевые слова:** классификация текстовых документов, методы, параметры, классификатор, семантическая близость текстов, расстояние между текстами, стоп-слова, ключевые слова, отклонение от коэффициента Ципфа, среднеквадратичное отклонение, быстродействие.

## Введение

Автоматическая классификация текстовых документов — обширная и интенсивно развивающаяся область, которая в настоящее время включает такие направления, как фильтрация спама, распознавание плагиата, авторская атрибуция, категоризация текстовых документов, определение жанра. Классификация выполняется программой-классификатором, на входе у которого — текстовый документ, на выходе — бинарное имя класса (*спам/не спам, плагиат/не плагиат*); имя автора текста; имя тематической категории, к которой относится документ (*спорт, путешествия, развлечения*); имя жанра (*детектив, приключения, фантастика*). Классификатор функционирует на основе параметров текста, под которыми понимаются лингвистические единицы текста с приписанными числовыми коэффициентами, отражающими их дискриминирующую силу — способность уникально идентифицировать данный документ. К лингвистическим единицам обычно относятся слова, основы слов, словосочетания (н-грамы). На основе распределения параметров вычисляется индекс документа — числовой коэффициент, позволяющий произвести сопоставление документов и вычислить расстояние и степень смысловой близости между ними. Чем больше расстояние, тем меньше смысловая близость и вероятность того, что документы относятся к одному классу, и, наоборот, меньшее расстояние указывает на большую смысловую близость и большую вероятность принадлежности к одному классу.

Цель настоящей статьи — показать возможность использования в качестве параметра текстовой классификации стоп-слов — служебных слов, которые обычно удаляются в процессе предварительной обработки текста классификатором.

## 1. Признаки стоп-слов

К стоп-словам или шумовым словам (noise words) относятся слова, наиболее часто встречающиеся в текстах различных типов. Как мы полагаем, можно выделить три основных признака стоп-слов. 1) **Статистический признак**. Стоп слова распределены с высокой частотностью по текстам, независимо от их жанра или функционального стиля. По подсчётам в [4] десять наиболее частотных английских слов составляют 20–30 % всех токенов данного текста. Наиболее типичными стоп-словами являются артикли, частицы, местоимения, союзы, предлоги. Фильтрация стоп-слов позволяет снизить размер баз данных и повысить быстродействие лингвистических программ и приложений. 2) **Семантический признак**. Стоп-слова, взятые вне контекста, не выражают значения, в отличие от знаменательных слов. Например, слово «стол» будет обозначать соответствующий объект в ранжированном списке терминов некоторого текста, в то время как смысл местоимения «оно» может быть понят только в контексте его использования. Стоп-слова играют важную роль в тексте, обеспечивая его связность, поскольку выражают логико-семантические и грамматические отношения между его единицами. Их фильтрация возможна, если используется подход «bag-of-words», который предусматривает представление единиц текста в виде ранжированных списков без учёта взаимосвязей между ними. 3) **Морфологический признак**. Большинство стоп-слов не принимают суффиксов и окончаний. Это особенно характерно для языков со слабо развитой морфологией, таких как английский. Это существенно упрощает их обработку, так как позволяет обойтись без применения алгоритмов стемминга или лемматизации.

Фильтрация стоп-слов является типичной процедурой, выполняемой в процессе информационного поиска на основе списков стоп-слов или отрицательных словарей. Наиболее известным из таких списков для английского языка является список, составленный американским специалистом Кристофером Фоксом в 1989 году [6] и содержащий 421 словоформу. Также применяются и алгоритмические процедуры распознавания стоп-слов. Нами был предложен метод зонально-корреляционного анализа, предусматривающий выделение в составе текста зон, включающих стоп-слова, знаменательные слова, отражающие содержание текста либо предметной области, а также редких слов, неологизмов, слов с нестандартной орфографией [11]. Что касается автоматической классификации текстовых документов, то ряд авторов также считают удаление стоп-слов необходимым этапом предварительной обработки текста [3, p. 37; 7, p. 4]. Классификация, по их мнению, должна выполняться на основе ключевых слов — слов, наиболее адекватно отражающих содержание текстовых документов.

## 2. Методика анализа

Полагаем, что возможен и противоположный подход, в соответствии с которым классификация текстовых документов выполняется на основе стоп слов, в то время как знаменательные слова отфильтровываются. Мы исходим из гипотезы о том, что, распределение стоп-слов по частотности имеет высокую дискриминирующую силу, позволяющую уникально идентифицировать классы текстовых документов. В качестве параметров распределения стоп-слов ранее нами было предложено использовать отклонение от коэффициента Ципфа и среднее квадратичное отклонение [9]. Методика анализа включает следующие процедуры.

– Нахождение стоп-слов и их частотностей в текстовых документах на основе выполнения пересечения списка стоп-слов с каждым из документов.

– Подсчёт коэффициента Ципфа для каждого из стоп-слов в каждом документе. Коэффициент находится по формуле

$$Z(w_{ij}) = \frac{F(w_{1j})}{R(w_{ij})}, \tag{1}$$

где $F(w_{1j})$ — частотность слова с первым рангом в $j$-м тексте, а $R(w_{ij})$ — ранг некоторого $i$-го слова.

– Вычисление отклонения частотности каждого стоп-слова от распределения Ципфа по формуле

$$Dev(w_{ij}) = | Z(w_{ij}) - F(w_{ij}) | . \tag{2}$$

– Вычисление среднего квадратичного отклонения для числового ряда с отклонениями от коэффициента Ципфа по формуле

$$\sigma(Dev_j) = \sqrt{Var(Dev_j)}, \qquad (3)$$

где $Var$ — дисперсия.

– Вычисление расстояний ($Dis$) между текстовыми документами. Расстояния находятся как разница по модулю между показателями средних квадратичных отклонений для каждого документа. Чем меньше разница, тем больше смысловая близость ($Sim$), тем больше вероятность, что данные документы относятся к одному классу.

Как показал проведённый нами ранее анализ [1] данная методика позволяет определить высокую степень смысловой близости между текстами, написанными одним автором и низкую степень близости между тестами, написанными разными авторами. В частности, расстояние между текстами одного автора $Dis(G1, G2) = 3{,}18\,\%$, соответственно, смысловая близость $Sim(G1, G2) = 96{,}82\,\%$; расстояние между текстами разных авторов $Dis(G1, D) = 39.04\,\%$, соответственно $Sim(G1, D) = 60.96\,\%$; также $Dis(G2, D) = 40.98\,\%$, а $Sim(G1, D) = 59.02\,\%$. $G1$, $G2$ и $D$ обозначают соответственно книги *The Man of Property, Indian Summer of a Forsyte, Oliver Twist*. Первые две книги были написаны Дж. Голсуорси (J. Galsworthy) и относятся к одному циклу *The Forsyte Saga*; автор последней книги — Ч. Диккенс (Ch. Dickens). Книги были взяты с общедоступного ресурса *Gutenberg Project* [5], на котором размещаются произведения с истёкшим сроком действия авторского права.

### 3. Анализ на основе ключевых слов

Однако, для получения более достоверных результатов следует сопоставить классификацию на основе стоп-слов и классификацию на основе ключевых слов. Для этого нами были получены списки ключевых слов для тех же текстов: две книги, написанные Дж. Голсуорси — *The Man of Property* (файл $G1$), Indian Summer of a Forsyte (файл $G2$), и книга Ч. Диккенса Oliver Twist (файл $D$). Книги были взяты с общедоступного ресурса *Gutenberg Project*, на котором размещаются произведения с истёкшим сроком действия авторского права. Ключевые слова были найдены с помощью конкорданса AntConc 3.5.8 [2] со следующими настройками (keyword list preferences). Для распознавания ключевых слов использовался метод логарифмического подобия (log-likelihood) и бинарная мера сходства Сёренсена-Дайса (Dice coefficient); статистический пороговый уровень (p-значение) был установлен $p < 0{,}001$ (10.83). Нахождение логарифмического подобия требует сопоставления распределения терминов входного теста с их распределением в некотором эталонном корпусе или референтном тексте. В качестве такого референтного корпуса, использовались все художественные тексты, которые содержаться в Американском национальном корпусе [8] (105 файлов). В табл. 1 приводятся данные о полученных ключевых словах.

По нашей методике для полученных ключевых слов были получены отклонения от распределения Ципфа, а затем подсчитан показатель среднего квадратичного отклонения. В табл. 2 приводятся результаты вычислений. Приводятся три слова с наибольшей частотностью.

Очевидно, что расстояние между текстами, написанными Дж. Голсуорси существенно меньше, $Dis(G1, G2) = 3.49\,\%$, соответственно, степень смысловой близости $Sim = 96.51\,\%$. В то время как расстояние между текстами Дж. Голсуорси и Ч. Диккенса существенно больше, а степень смысловой близости — меньше: $Dis(G1, D) = 67.23\,\%$, $Sim = 32.77\,\%$; $Dis(G2, D) = 66.04\,\%$, $Sim = 33.96\,\%$. В табл. 3 показаны результаты классификации на основе стоп-слов и ключевых слов.

Таблица 1

*Распределение ключевых слов*

| Файл | Количество ключевых слов | Количество токенов | Первые три слова | Частотность | Коэффициент значимости |
|---|---|---|---|---|---|
| $G1$ | 679 | 39543 | soames | 465 | 1364.33 |
| | | | jolyon | 399 | 1170.68 |
| | | | bosinney | 343 | 1006.37 |
| $G2$ | 647 | 38521 | soames | 542 | 1599.58 |
| | | | jolyon | 355 | 1047.7 |
| | | | val | 248 | 719.4 |
| $D$ | 742 | 45493 | oliver | 778 | 2296.08 |
| | | | mr | 831 | 1598.82 |
| | | | bumble | 379 | 1118.53 |

Таблица 2

*Распределение отклонений ключевых слов*

| Файл | Первые три слова | Ранг | $F$ | $Z$ | $Dev$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $G1$ | of | 1 | 3461 | 3461,000 | 0,000 | 108,639 |
| | he | 2 | 2980 | 1730,500 | 1249,500 | |
| | a | 3 | 2704 | 1153,667 | 1550,333 | |
| $G2$ | and | 1 | 3354 | 3354,000 | 0,000 | 112,566 |
| | he | 2 | 3138 | 1677,000 | 1461,000 | |
| | of | 3 | 2722 | 1118,000 | 1604,000 | |
| $D$ | oliver | 1 | 778 | 778 | 0,000 | 331,4962 |
| | mr | 2 | 831 | 389 | 442,000 | |
| | bumble | 3 | 379 | 259,3333 | 119,667 | |

Таблица 3

*Показатели классификации на основе стоп-слов и ключевых слов*

| Тексты | На основе стоп-слов | | На основе ключевых слов | |
|---|---|---|---|---|
| | $Dis$ | $Sim$ | $Dis$ | $Sim$ |
| $G1, G2$ | 3,18 % | 96,82 % | 3.49 % | 96.51 % |
| $G1, D$ | 39.04 % | 60.96 % | 67.23 % | 32.77 % |
| $G2, D$ | 40.98 % | 59.02 % | 66.04 % | 33.96 % |

**Заключение**

В данной работе была продемонстрирована возможность использования стоп-слов в качестве основного параметра классификации текстовых документов на примере решения задачи авторской атрибуции. Анализ проводился на основе оригинальной методики, предусматривающей последовательное применение двух отклонений: отклонения от коэффициента Ципфа, который вычисляется для всех терминов документа и среднего квадратичного отклонения, которое находится применительно к числовому ряду с отклонениями от коэффициента Ципфа. Проведённый анализ показал, что предложенная нами методика показывает адекватные результаты как при классификации текстовых документов на основе ключевых слов, так и на основе стоп-слов. Следует отметить, что оба варианта дают практически одинаковую степень смысловой близости между текстами одного автора (выше 96 %), хотя использование в качестве параметра ключевых слов позволяет более адекватно разграничить работы разных авторов.

Однако, хотелось бы отметить и определённые сложности при использовании ключевых слов. 1) Выбор метрики. Мы использовали метрику логарифмического подобия, которая автоматически реализуется в приложении AntConc. Существуют и другие метрики, которые можно применять для распознавания ключевых слов текста, такие как отношение шансов (odds ratio), прирост информации (information gain), TF*IDF. При реализации конкретного проекта следует проводить сопоставительный анализ и выбирать метод, наиболее адекватный для данного текстового материала. Заметим, что при применении логарифмического подобия в список ключевых слов попали типичные стоп-слова: местоимение *he*, предлог *of*, союз *and*. Ранее нами было показано, что адекватные результаты даёт метрика «отношение шансов» [10]. 2) Существующие методы определения ключевых слов основаны на сопоставлении распределения терминов входного текста / текстов с их распределением в другом тексте / текстах. В этой связи возникает две проблемы: критерии отбора текстов для сопоставления и количества данных текстов. Однозначные критерии для такого отбора в настоящее время отсутствуют. 3) Методы распознавания ключевых слов сложны, требуют применения машинного обучения, что отрицательно сказывается на быстродействии обработки текстовых документов. Применение стоп-слов предполагает использование более простых вычислений. Список стоп-слов является постоянной величиной, его применение снимает проблему отбора текстов для сопоставительного анализа. Очевидно, что возможности применения стоп-слов в качестве параметра классификации требуют проведения дополнительных исследований на материале текстов разных типов и размеров.

**Благодарность**

Исследование поддержано грантом Российского фонда фундаментальных исследований 20-07-00124

**Литература**

1. *Яцко В. А.* Итеративный пороговый уровень и классификация текстовых документов // Наука без границ. – 2020. – № 8 (48). – С. 50–54. – URL: https://nauka-bez-granic.ru/wp-content/uploads/2020/08/%D0%9D%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%80-848-2020.pdf (дата обращения: 15.09.2020)

2. *Anthony L.* AntConc 3.5.8-2019. – Tokyo, Japan : Waseda University. – URL: https://www.laurenceanthony.net/software (дата обращения: 15.09.2020)

3. *Dalal M. K., Zaveri M. A.* Automatic text classification: A technical review // International journal of computer applications. – 2011. – V. 28, No 2. – P. 37–40. – URL: https://www.researchgate.net/profile/Mukesh_Zaveri/publication/266296879_Automatic_Text_Classification_A_Technical_Review/links/54e74a0a0cf2b199060ae1c5.pdf (дата обращения: 15.09.2020).

4. *Francis W. N., Kucera H.* Computational analysis of present day American English. Providence, R.I. : Brown University Press, 1967. – 424 p.

5. Free eBooks – Project Gutenberg: [сайт]. – 2020. – URL https://www.gutenberg.org/ (дата обращения: 15.09.2020).

6. *Fox C.* A stop list for general text // ACM SIGIR forum. – 1989. – V. 24, Iss. 1–2. – P. 19–21.

7. *Kowsari K., Meimandi K. J., Heidarysafa M., et al.* Text classification algorithms: A survey. // Information. – 2019. – V. 10, Iss. 4. – P. 1–68. – URL: https://www.researchgate.net/publication/332463886_Text_Classification_Algorithms_A_Survey (дата обращения: 15.09.2020).

8. *Randi R., Ide N., Suderman K.* American National Corpus (ANC). Second Release LDC2005T35. – Philadelphia : Linguistic Data Consortium, 2005. – URL: https://catalog.ldc.upenn.edu/LDC2005T35 (дата обращения: 15.09.2020).

9. *Yatsko V. A.* Automatic text classification method based on Zipf's law // Automatic documentation and mathematical linguistics. – 2015. – V. 49. – P. 83–88.

10. *Yatsko V. A.* Evaluation of the efficiency of the chi-square metric // Automatic documentation and mathematical linguistics. – 2016. – V. – P. 173–178.

11. *Yatsko V.* Zonal text processing // Digital scholarship in the humanities. – 2016. – V. 31, Iss. 4. – P. 773–781.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ, ПРОГРАММИРОВАНИЕ

UDC 004

# ALGORITHM AND MODEL FOR IMPROVE THE AVOIDING OF DEADLOCK WITH INCREASING EFFICIENCY OF RESOURCE ALLOCATION IN CLOUD ENVIRONMENT BY USING PROCESS TIME EXECUTION

**Azeez Ammar Emad, Yu. V. Bondarenko**

*Voronezh state university*

**Annotation.** Cloud computing now is the most popular among all the promising technologies that provide the service for many of users at the same time and all users can reach and use the resource that providing by the Virtual Machines (VMs).Hence, users process and data must arrived to the resources and this performed as disturbed system which provide dynamically scale services virtualized resources, As a result of limitation of resources the deadlock status may occur in such type of systems. In this paper, we had designed an algorithm that could increase the efficiency of deadlock avoidance, our technique will use the attribute of execution time in the process, to get better resource allocation in additional to the checking system to stay in safe state and free of deadlock.

**Keywords:** Virtual Machine (VM), deadlock, resource allocation, execution time, Quality of Service (QoS), Bankers Algorithm.

## Introduction

Recent years have seen a huge increase in the data that needs to be process as the result of this new technologies that depends on distributed computing has been developed to reduce the cost of processing the huge amount of data as well as a lot of researches appears in this direction, so as a result for this turnout pushed markets for high investment in this field, which led to its rapid development [1], millions of users now just depends on this technology such as cluster computing and Cloud computing in our research will focus on the Cloud computing which provide multi types of resource and different service it could be infrastructure as a serves it called (IaaS) that so popular (e.g., Amazon EC2) [7] which provides a capacity of Cloud resources, platform as a service (PaaS) or (SaaS) that refer to software as a service [2], all this types of resources need to be managed and delivered the service by the management of resource allocation available in Cloud and dynamically VMs resource allocation by using strategies match with Quality of service (QoS) keeping the VMs physical resource work in high performance [4].Hence, the virtualization technology give VMs ability to use cluster system and work like separated physical hardware although its sharing [5], but while here we have shared resources so there is a possibility of deadlock there is a lot of algorithms that had designed just for avoiding this problem but all these algorithms do the job form one side is to keep system far from deadlock state[8]. So we suggest in our work to use the time of process to keep the Cloud faster response to share resource and allocate the resource efficacy and the system always in a safe state.

## 1. Deadlock model design

To achieve the results of existing algorithms and proposed algorithms we had a model example for the deadlock problem although our work will deal with resource allocation in cloud computing this technology is using the concept of a smart distributed system that provide different types of resource allocation and sharing VMs so the cloud computing as the traditional distributed architecture that consists of a pool of multi-access to resources by requesting by numbers of jobs so the quality of cloud depends on the providing the best way of resource allocation and number of processing that submitted [3], in heterogeneous distributed systems there is nonsynchronous processers $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ all have a different capacity and they don't have the same global memory because the system provides as a resource shared memory, therefore in this system, the important part is the communication network between the resources itself and on the other hand between the jobs that resource allocation in this way the jobs will be able to share the physical resources (CPU cores, amount of memory, etc.) and this will lead to accomplishment the jobs in minimum cost[5] but with the job has reservation for the resource in VM the other jobs must wait until the resource be free and this will lead to a deadlock in some cases just like in operating system including the ability of modeled the status and deadlock problem by simple regular graph such as Resource Allocation Graph (RAG) and Wait For Graph (WFG) [10] that use to implement and modeled distributed systems and used as standard tool for deadlock detection. Our proposed model consider that we have a number of jobs that required a number so resource from VM. Hence, every job will have an ID that will related to VM ID that require the resource from and in this case must know all the attribute of job and the VM status.

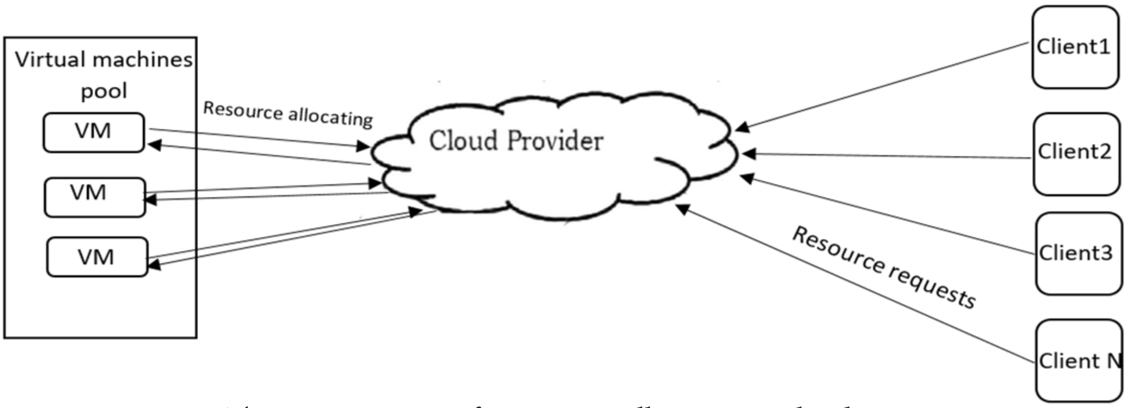



*Fig. 1. The main structure for resource allocation in cloud computing*

Figure 1 illustrates an example of multi requesting jobs to service by three VMs each of them have different capacity of CPU and each job have variant time of execution the figure shows that may be tow reoccurs are required for the same job, in the simple words the deadlock may occur where the job request for resource that already held by another job that still running this will make both of process are in wait status, and this lead to the fact that the deadlock in cloud has the same four conditions of deadlock in operating system [10]:

1. Mutual Exclusion: when the resource not sharable or haven't enough space or energy to process more than job in the same time.
2. Hold and wait: means the process (job) in holing on resource and in the same time wait for another but the resource that waiting for is already held by other process.
3. No Preemption: the process only can release the resource while the resource can't do this by itself.
4. Circular waiting: its most common condition when each process wait for held resources.

The Resource Allocation Graph is very clear way to represent the deadlock problem and it's not deferent from (WFG) here from the model we can detect the deadlock status let us assume that we have a set of process:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k\}, \text{ while } k > 1,$$

Thus deadlock status if $\forall P_i$ while $P_i \in P$ and waiting for resource that must be released from $\forall P_i \in P$ and simultaneously the same $P_i$ held another resource while its waiting for releasing that other process need so this will generate a nonfinite circle of waiting and this situation representing by (WFG), through Graph we can see if the circle was broken by making some process permanently wait for period of time to get permission before requesting if we delaying the request of $P_1$ until $P_2$ release the $R_1$ and the same action with the requesting of $P_3$ for one of resources of $R_3$ this will give time to $P_2$ to release the $R_3$ so in this way we will never enter in the circle of deadlock but this must not effect on the QoS for the cloud and this will be achieved in the technics of our proposed algorithms.

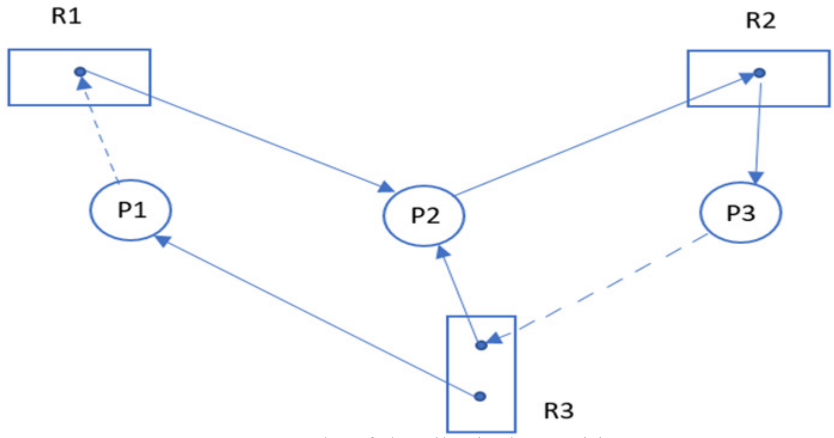



*Fig. 2. Example of deadlock showed by RAG*

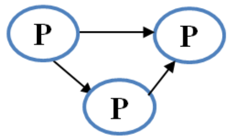



*Fig 3. Representing the deadlock status that occurred in figure2 by corresponding (WFG)*

***Algorithms for avoiding the deadlock.***

To deal with the problem of deadlock in the virtualized computing there are more than technique including the Ignoring the deadlock [9], pass it, resolve it after occur put this will effect to (QoS) of cloud because all these actions may cause a lot of delay of execution time for jobs in this paper we improved and proposed Algorithms with using the technique of detect and avoiding the deadlock before it performed in VMs that representing by direct Graph the deadlock detected if circle resource request or knot in the Wait For Graph (WFG) there are many efficient algorithm avoiding the deadlock in this paper we improved this tow of this algorithms to be very efficient and to eliminate the delay of time processing.

***Proposed algorithm.***

In this algorithm we will propose an approach that can be used to improve the exacting algorithms by reallocating resource in efficient way with taking the consideration of time of execution for every job request, firstly we assume that set of resources $R = \{r_1,\ r_2, \ldots,\ r_m\},\ m$ all the available resources in the system and the capacity of each resource represented by Cr that refer to number of instances of each resource r in other word how many tasks can the resource hold in a time and this is the most common way to model the resources[11], our algorithm suggest that performed of requested task without ignore the time of execution (t) that every process $(p)$ need to use the resource $(r)$, each of these process in job Queue must declare how much it's time for execution (release resource) before submission to the system, as a result of this statement our algorithm will use the concept of Short Job First (SJF)[10], but not the algorithm itself because in avoiding deadlock must use Algorithms for resource allocation to make the system in save status. So if there are two process requesting $(p)$ from the job queue to use the resource $r,\ r \in R$, and our algorithm will check if $p \le Cr$ and compare the time of execution of both to be sure that will not cause a deadlock in next job submission otherwise the job will be set to waiting statues in temporary queue and the system submit other request and do the same audit in this way of choosing submission jobs will guarantee the QoS and all requesting process will be able to use the resources.as a result of our technic the total execution time for all requests will be faster and free of deadlock, this technic can be achieved with any type of resource allocation algorithm that Cloud use it. In this paper we will achieve it as numerical example in Banker algorithm.

**Improve banker algorithm**
**Existing algorithm**

```
Input: n  ←     number of process
       m  ←     number of resources in VM
       MaxV[]     the maximum available resources in VM
       AlocV[]    the allocation process in initial state
       AvelV[]    the available resources in initial state
Begin
Step 1: set index[i] =0 for ∀ p where i = 0 to n–1
Step2:  NeedV[n] [m] = MaxV[n] [m] – AlocV[n] [m]
Step 3: For ∀ p find index[i] = 0 and NeedVi <= AvelV
                If true then index[i] = 1
                Free the VM resource & AvelV=AvelV+AlocV
        Until ∀ p find index[i] =1
End for
End if
Step4: the system in safe state
End
```

**Improve by PROPOSED ALGORITHM**

```
Input: n  ←     number of process
       m  ←     number of resources in VM
       MaxV[]     the maximum available resources in VM
       AlocV[]    the allocation process in initial state
       AvelV[]    the available resources in initial state
       TQ[]       temporary Queue to save the ID of waiting job request
       t  ←     total execution time for all process
Begin
Step 1: set index[i] =0 for ∀ p where i=0 to n-1
Step2: NeedV[n] [m] = MaxV[n] [m] – AlocV[n] [m]
Step 3: if there is more than resource request than start with the minimum t(pi)
        So for ∀ p arrange descending according to t(pi)
Step 4: For ∀ p find index[i] = 0 and NeedVi <= AvelV
                          If true then index[i] =1
                                  Free the VM resource & AvelV=AvelV+AlocV
                          Else set pi to TQ []
                                  Set t (pi) to TQ []
        Until ∀ p find index[i] =1
End for
End if
Step 5: if TQ [] ≠ empty
         Set all requests p only from TQ []
                      Go to step 4
Step 6: the system in safe state
End
```

So in simple explanation the proposed algorithm all requests will be served in the faster time as a result of the resource for example CPU will be available in maximum capacity faster when serve the short execution time request first.

## 2. Discussion of the result

We assume the numerical example of the algorithm as the following configurations (Table 1).

Table 1

*Numerical example illustrate allocation for 4 resources*

| Process | Execution Time(ms) | Allocation | Maximum | Available | Need |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A B C D | A B C D | A B C D | A B C D |
| $P_0$ | 140 | 0 0 1 2 | 0 0 1 2 | 1 5 2 0 | 0 0 0 0 |
| $P_1$ | 200 | 1 0 0 0 | 1 7 5 0 | 1 5 3 2 | 0 7 5 0 |
| $P_2$ | 150 | 1 3 5 6 | 2 3 5 6 | 2 8 8 8 | 1 0 0 0 |
| $P_3$ | 400 | 0 6 3 2 | 0 6 5 2 | 2 14 11 10 | 0 0 8 0 |
| $P_4$ | 600 | 0 0 1 4 | 0 6 5 6 | 2 14 12 14 | 0 6 4 2 |
| $P_m$ | | | | | |

In Table 1 we can observe that the requesting of the process for a resource can be continues as well as in the Cloud computing so in the begging we will make resource allocation by using the standard Banker algorithm and to avoid deadlock afar applying the algorithm we get the save sequence for this table as the flowing $P_0, P_2, P_4, P_3, P_1$ this sequence is a safe state for the system but the system ignored the time of execution for each process (Table 2, Fig. 4).

Table 2

*The waiting time for each process in system after applying proposed algorithm*

| Jobs request | Wait time for execution(ms) |
|---|---|
| $P_0$ | 0 |
| $P_2$ | 140 |
| $P_1$ | 150 |
| $P_4$ | 200 |
| $P_3$ | 600 |
| Total time | 1090 |

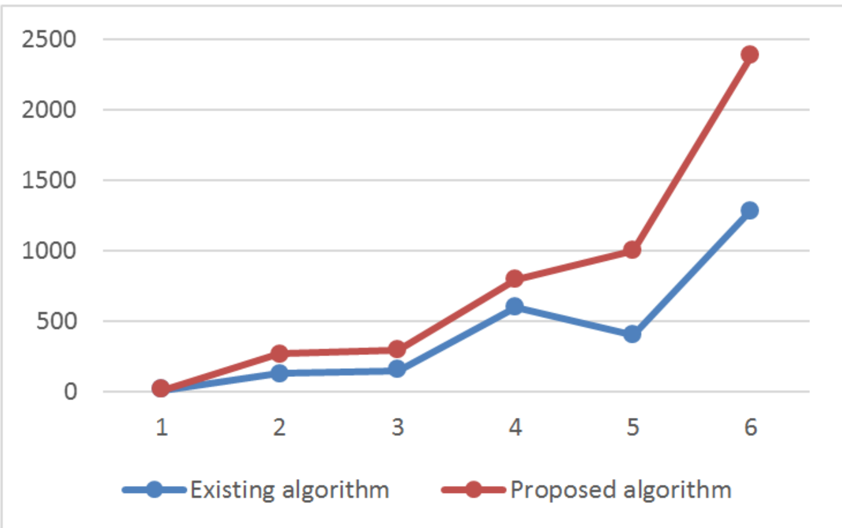



*Fig. 4. Implementation efficiency of proposal algorithm*

## Conclusion and future work

The response of the resource in cloud computing is very important and sometimes the efficiency of the whole system is measured only by the speed of the process but during the working, with multi jobs and request in during the network communication this will allow using the same resource form multi-users, one of the problems is a deadlock, therefore our work focus on solving this problem with keep improvement of QoS for Cloud by taking the consideration of timing but not only this attribute for increase the QoS so in future work we suggest to add the importance of the request and use the parallel processing when the Cloud has enough resources for more than one process request.

## References


1. *Columbus L.* Roundup Of Cloud Computing Forecasts And Market Estimates, 2015. URL: http://www.forbes.com/sites/louiscolumbus/2015/01/24/roundup-of-cloud-computing-forecasts-and-market-estimates-2015 (date: 22.10.2020)

2. *Manvi S. S.* Resource management for infrastructure as a service (IaaS) in cloud computing: a survey / S. S. Manvi, G. K. Shyam // Journal of Network and Computing Applications. – 2013. – Vol. 41. – P. 424–440.

3. *Gopalakrishnan T. R.* An Enhanced Scheduling Strategy to Accelerate the Business performance of the Cloud System / T. R. Gopalakrishnan Nair, M. Vaidehi, K. S. Rashmi, V. Suma. – Proc. InCon-INDIA 2012.– P. 461–468.

4. *Vivek Kumar Prasad* Resource Allocation in Cloud Computing / Vivek Kumar Prasad, Anuja Nair, Sudeep Tanwar // Department of Computer Science and Engineering, Institute of Technology, Nirma University, Ahmedabad (Gujarat), India. – 2019. – 382481.

5. *Warneke D.* Exploiting dynamic resource allocation for efficient parallel data processing in the cloud / D. Warneke, O. Kao // IEEE Trans. Distrib. Syst. – 2011. – 22(6). – P. 985–997.

6. *Ku M.* Analysis of virtual machine creation characteristics on virtualized computing environment / M. Ku, D. Min, E. Choi // The 7th International Conference on Networked Computing and Advanced Information Management, Gyeongju. – 2011. – P. 1–6.

7. Amazon EC2. URL: http://aws.amazon.com/ec2/ (date: 22.10.2020).

8. *Li J.* Adaptive Resource Allocation for Preempt able Jobs in Cloud Systems / Jiyin Li, Meikang Qiu, Jain-Wei Niu, YuChen, Zhong Ming // IEEE International Conference on Intelligent Systems Design and Applications, 2010. – P. 31–36.

9. *Nguyen H.* Detection and avoidance deadlock for resource allocation in heterogeneous distributed platforms / H. Nguyen, V. Le // Int. J. Comput. Sci. Telecommun. – 2015. – Vol. 6, No. 2. – P. 25–38.

10. *Silberschatz A.* Operating System Concepts / A. Silberschatz, P. B. Galvin, G. Gagne. – NJ, USA: Wiley, 2014. – P. 283–310.

11. *Wan C.* A QoS-awared scientific workflow scheduling schema in cloud computing / Wan C, Wang C, Pei J // Proceedings of the international conference on information science and technology, Wuhan, China, 23–25 march 2012. – 2012. – P. 634–639.

УДК 004.428.4

# АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ НЕЙРОСЕТЕЙ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ЧАТ-БОТОВ И ДИАЛОГОВЫХ СИСТЕМ

**Р. Ю. Алехин, И.Е. Воронина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Данная статья посвящена изучению возможности использования нейронных сетей для разработки чат-ботов. В статье рассматриваются особенности реализации существующих решений, достоинства и недостатки реализации чат-бота на основе нейронной сети, а также возможные подходы к решению возникающих проблем. Также в статье рассмотрена архитектура нового чат-бота Meena от комнании Google, позволяющая ему учитывать контекст беседы при ответе на вопрос.
**Ключевые слова:** чат-бот, виртуальный помощник, естественный язык, нейронные сети, искуственный интеллект, машинное обучение, TensorFlow.

Разработка чат-ботов (виртуальных помощников) является на данный момент одним из популярных направлений в области машинного обучения и искусственного интеллекта. В том или ином виде они встречаются практически в любом современном гаджете (мобильный телефон, планшет, смартфон, умная колонка и т. д.), а также на большинстве ресурсов сети интернет. К сожалению, чаще всего уровень их «интеллекта» оставляет желать лучшего. Зачастую они отлично справляются с очень простыми задачами (найти прогноз погоды, отправить сообщение, позвонить, открыть приложение), в то время как на более сложных задачах очевидным становится их ограниченность и несовершенство их мышления.

Большинство существующих виртуальных помощников должны оперировать только с ограниченным набором тематик, поэтому они базируются на заранее заготовленных ответах и ранжировании вариантов. Тщательная ручная настройка поддерживаемых тем позволяет добиться качественных ответов [1]. Однако когда возникает необходимость создания чат-бота, способного вести беседу на свободную тему, помогать в изучении иностранных языков [2], данный подход оказывается нежизнеспособным.

Одним из возможных подходов к созданию чат-бота, способного вести беседу на свободную тему, является использование рекуррентных нейронных сетей [3]. Для реализации чат-бота на основе рекуррентной нейронной сети используется библиотека TensorFlow, разработанная компанией Google. Данная библиотека содержит в себе готовые реализации различных моделей. В данном случае будет использована модель, предназначенная для машинного перевода текстов. Общий вид рекуррентной нейронной сети представлен на рис. 1.

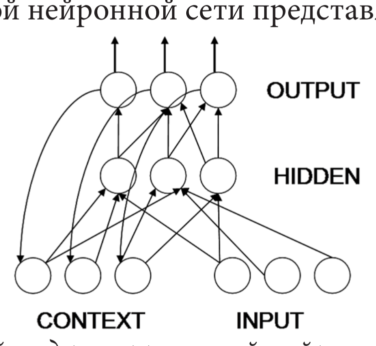



*Рис. 1. Общий вид рекуррентной нейронной сети [4, 5]*

Слой HIDDEN отвечает за сохранение всего набора ответов сети, CONTEXT – за обработку текущего запроса, INPUT и OUTPUT являются входными и выходными узлами соответственно.

Выбор данной модели обусловлен тем, что перевод подразумевает под собой получение на вход текста на одном естественном языке и отображение полученной информации на другом языке. В случае чат-бота в качестве входного языка используются предложения, поступающие на вход, а в качестве выходного языка – ответная реакция на эти предложения.

В качестве исходных данных для обучения были использованы файлы, составленные на основе переписки в сети Интернет. Весь диалог был разбит на два файла, первый из которых содержал фразу первого человека, а второй – ответы на эти реплики.

В результате обучения был получен чат-бот, который мог ответить на заданный вопрос.

Результаты обучения чат-бота представлены на рис 2.

**Message:** **Hello!**
**Answer:** **Hello.**
**Message:** **How are you?**
**Answer:** **Fine.**
**Message:** **What are you doing now?**
**Answer:** **Nothing**

*Рис 2. Результаты обучения чат-бота [6]*

Как видно из рис. 2 чат-бот осмысленно отвечает на входящие сообщения. Однако во время тестирования были замечены следующие недостатки данного решения:

• Модель не хранила контекст беседы, в результате ответы часто не были связаны с тем, что обсуждалось раньше.

• Наличие опечаток/ошибок в сообщении часто приводило к неправильному ответу.

• Модель часто отвечала короткими ответами, не давая дополнительной информации. Это заметно на рис 2. Еще один пример данного недостатка представлен на рис. 3. Обычно ответы на подробные вопросы включают в себя некоторую дополнительную информацию. Например, ответ на вопрос «Были ли Вы когда-нибудь заграницей?» часто включает в себя перечисление списка посещенных стран.

• В случае необходимости расширения знаний чат-бота требуется полное переобучение модели.

**Message:** **Do you like football?**
**Answer:** **Yes.**
**Message:** **Have you ever been abroad?**
**Answer:** **Yes.**

*Рис. 3. Пример односложных ответов чат-бота*

Таким образом, из выявленных выше недостатков данного решения следует, что использование нейронных сетей в чистом виде недостаточно для реализации чат-бота, способного вести беседу на свободную тему. Для улучшения качества работы виртуального помощника, в первую очередь, необходимо добавить возможность анализа контекста беседы. Это позволит давать логически верные ответы на сообщения в рамках одного диалога [7]. Еще одной немаловажной задачей является улучшение модуля построения ответа, чтобы избежать частого появления коротких ответов «Да», «Нет» на большую часть вопросов.

На данный момент одним из самых развитых чат-ботов является Meena, разрабатываемый компанией Google. В основе Meena лежит архитектура Evolved Transformer seq2seq. Meena работает с помощью одного блока кодера Evolved Transformer и 13 блоков декодера Evolved Transformer. Кодер отвечает за обработку контекста разговора, чтобы Meena могла понять смысл сказанного. Затем декодер использует эту информацию для формулирования ответа [8]. Пример диалога с Meena представлен на рис 4.

Как видно из примера, чат-бот анализирует всю беседу и выдает ответ на последний вопрос на основе всей беседы, а не только информации из самого вопроса. К тому же ответы чаще всего содержат предпосылки для продолжения беседы и приближены к тем, какие бы смог дать человек.

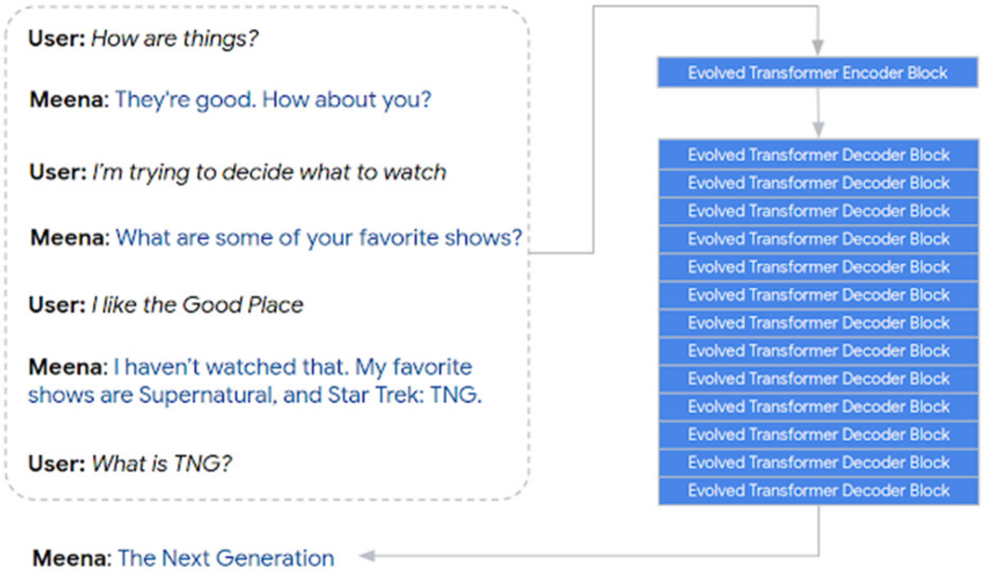



*Рис. 4. Пример работы чат-бота Meena [9]*

Таким образом, применение нейросетей в чистом виде без всяких правил на очень зашумленных данных позволяет реализовать достаточно эффективного чат-бота, умеющего давать ответы на основе входящего сообщения без опоры на контекст. В свою очередь, любое изменение либо расширение исходных данных приводит к необходимости перестройки модели, что является времязатратным.

**Литература**

1. В поисках разума: можно ли сделать «универсальный» чат-бот с помощью нейронных сетей? : статья. Режим доступа: https://habr.com/ru/company/meanotek/blog/339872/

2. *Алехин Р. Ю.* Разработка модели и алгоритма для системы текстового взаимодействия на человеческом языке / Р. Ю. Алехин, И. Е. Воронина : сб. тр. участников международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 17–19 декабря 2018г.). – Воронеж, 2018. – С. 363–365.

3. Google AI Blog. Computer, respond to this email : статья. – Режим доступа: https://ai.googleblog.com/2015/11/computer-respond-to-this-email.html.

4. Russell Stuart. Artificial Intelligence. A Modern Approach / Stuart J. Russell, Peter Norvig. – New Jersey : Pearson, 2010. – 1132 с.

5. Chatbot на базе рекуррентной нейронной сети : статья. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/317732.

6. WildML. Deep Learning for Chatbots. Part 1 : статья. – Режим доступа: http://www.wildml.com/2016/04/deep-learning-for-chatbots-part-1-introduction.

7. WildML. Deep Learning for Chatbots. Part 2 : статья. – Режим доступа: http://www.wildml.com/2016/07/deep-learning-for-chatbots-2-retrieval-based-model-tensorflow.

8. Google представляет Meena, чат-бота на нейросетях : статья. – Режим доступа: https://habr.com/ru/news/t/486102/.

9. Towards a Conversational Agent that Can Chat About…Anything : статья. – Режим доступа: https://ai.googleblog.com/2020/01/towards-conversational-agent-that-can.html

УДК 519.6:544.33:544.182.34

# РАЗРАБОТКА И АВТОМАТИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНТАЛЬПИИ ОБРАЗОВАНИЯ ОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

**А. И. Ахметьянова**

*Башкирский государственный университет*

**Аннотация.** Наилучшее решение для разработки химико-технических процессов возможно только при наличии достоверной информации о физико-химических и термодинамических свойствах химических соединений. Актуальной задачей является разработка универсальных теоретических методов расчета и прогнозирования свойств химических соединений, позволяющих самостоятельно оценивать энергосодержание вещества, выявлять неверные данные и в конечном итоге надежно определять тепловые эффекты химических реакций, что важно для разработки технологических регламентов и сознательного управления химическими процессами. Работа посвящена описанию математического аппарата для конструирования базиса ГДР на примере циклических соединений.
**Ключевые слова:** граф, базис гомодесмических реакций, энтальпия образования, теория графов, программное обеспечение.

## Введение

Термодинамические расчеты – обычная и важная часть многих химических исследований. Они составляют основу для разработки высокоэффективных промышленных технологий синтеза соединений. Следовательно, существует потребность в сборе достоверной информации о термодинамических свойствах отдельных веществ. Экспериментальные данные о термодинамических свойствах доступны для ограниченного числа соединений, поэтому разработка и совершенствование методов расчета термодинамических величин является важной и актуальной задачей. Развитие информатики и разработка новых методов квантовой химии позволяют проводить теоретические расчеты термодинамических свойств химических соединений с точностью, сопоставимой с погрешностями экспериментальных исследований. Это позволяет разрабатывать аддитивные методы, которые могут основываться не только на экспериментальных данных, но и на надежных теоретических данных. Таким образом, становится возможным установить закономерности, связывающие термодинамические свойства веществ с их структурой для самых разных соединений. Предлагается подход, основанный на теории графов [12], который стал основой для создания алгоритма расчета соотношения параметров при построении участников гомодесмических реакций.

## 1. Методы и материалы

Оптимальное решение проблем, которые могут возникнуть при разработке химико-технологического процесса, возможно только при наличии достоверной информации о химических характеристиках и термодинамических свойствах химических соединений. Накоплен значительный объем этих данных. Однако быстрое развитие технологий и появление все большего числа новых химических соединений создают разрыв между потребностью в данных и их доступностью. Экспериментальное определение термодинамических величин органических соединений часто затруднено, а иногда и невозможно. Кроме того, среди этого огромного количества экспериментальной информации есть и недостоверные данные. Поэтому появилась актуальная задача создания универсальных и высокоточных теоретических методов расчета и прогнозирования свойств химических соединений, позволяющих самостоятельно оценивать энергосодержание вещества, выявлять ошибочные данные и, наконец, надежно определять тепловые эффекты химических реакций, что имеет решающее значение для развития технологий и количественного управления химической активностью.

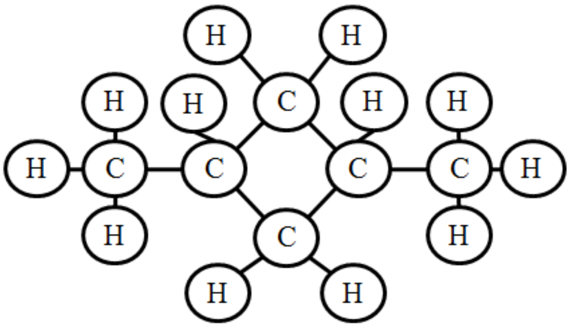
На практике механизмы реакции часто включают несколько элементарных стадий и задействованных веществ. При химическом анализе метода необходимо решить систему дифференциальных уравнений, где каждое уравнение определяет коэффициент конверсии одного из респондентов. В целом решение такой проблемы – очень трудоемкий процесс. Кроме того, невозможно измерить концентрации всех веществ, участвующих в механизме.

Химическая термодинамика позволяет рассчитать тепловой эффект реакции, определить, возможна ли конкретная реакция, и вычислить ее состояние равновесия, то есть предел, до которого она может протекать. Чтобы рассчитать тепловой эффект реакции, необходимо знать энтальпии образования всех вовлеченных веществ. Часто экспериментальные данные об энтальпии образования, взятые из разных источников, имеют разный смысл. Более того, получение экспериментальных данных для некоторых соединений сложно, непомерно дорого или даже невозможно. Эти проблемы побудили к появлению теоретических методов оценки энтальпии образования химических соединений.

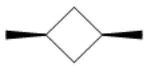
Один из этих методов основан на использовании гомодесмических реакций (ГДР) [9]. Метод ГДР представляет собой разложение исходного соединения на внутренние термохимические группы[1]. Понятно, что степень такого разложения зависит от количества внутренних групп, составляющих химическое соединение. Совокупность всех независимых ГДР составляет основу ГДР. Таким образом, получив разные оценки энтальпии образования для каждой ГДР, можно судить о достоверности экспериментальных данных из разных источников.

### 2. Постановка задачи

Апробацию представленного метода ГДР проведем на примере двух циклических соединений цис-1,3-диметилциклобутан $C_6H_{12}$ и транс-1,3-диметилциклобутан $C_6H_{12}$ (рис. 1). Цис-транс-изомерия – один из видов стереоизомерии: он заключается в возможности расположения заместителей на одной или на противоположных сторонах плоскости двойной связи или неароматического цикла.



Цис-1,3-диметилциклобутан



Транс-1,3-диметилциклобутан

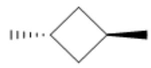


*Рис. 1. Молекулы цис-1,3-диметилциклобутан $C_6H_{12}$ и транс-1,3-диметилциклобутан $C_6H_{12}$*

Применяя метод Бенсона [1] с условием непрерывности кратной связи C = C, мы представляем структуру 1,3-диметилциклобутана как комбинацию двух типов внутренних (B01, B02) и концевой (K01) групп (рис. 2) .

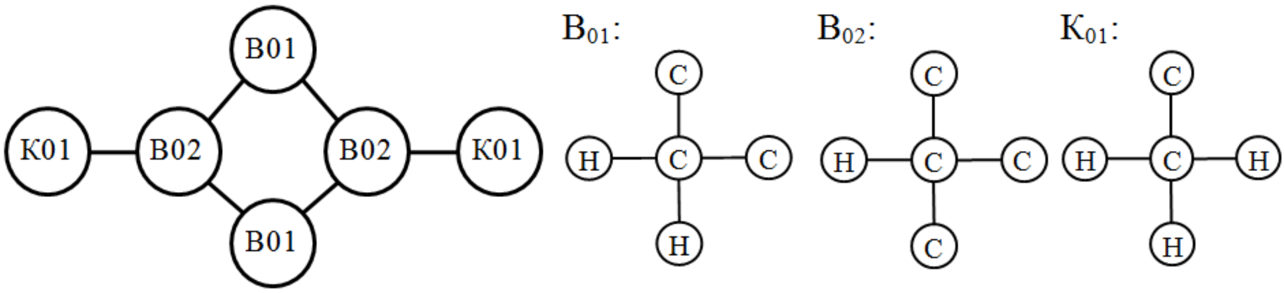



*Рис. 2. Молекула 1,3-диметилциклобутан $C_6H_{12}$, представленная в виде комбинации внутренних и концевых групп*

Далее представим все возможные вариантов «развернутой» молекулы, которая получается из исходной путем «разрыва» циклической связи (рис. 3).

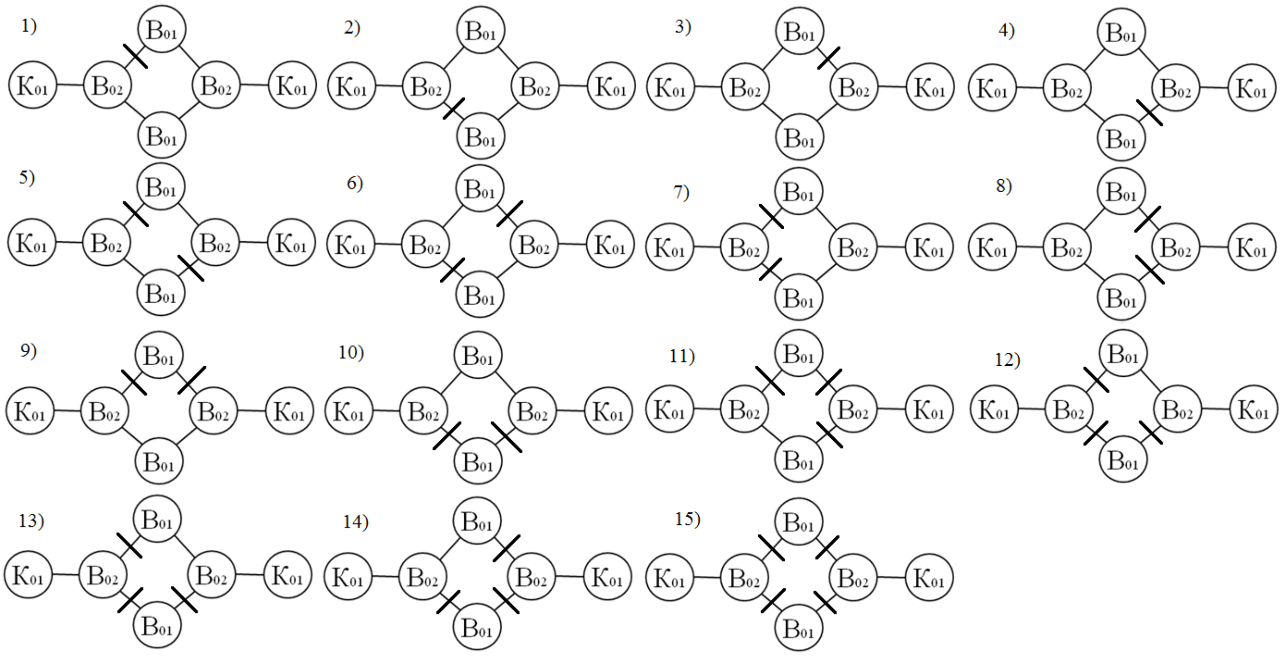


*Рис. 3. Всевозможные варианты разрывов циклической связи в молекуле 1,3-диметилциклобутана $C_6H_{12}$*

Из рис. 3 видно, что для разрушения цикла в молекуле достаточно одного разрыва. Кроме того, разрывы «1-2-3-4» являются симметричными, поэтому в наших расчетах мы будем использовать лишь один из четырех вариантов разрывов. По аналогии из представленных на рисунке вариантах «5-6», «7-8», «9-10», а также «11-14» разрывов учитывать будем только один вариант. Таким образом, мы для молекулы 1,3-диметилциклобутана получены 6 базисных ГДР.

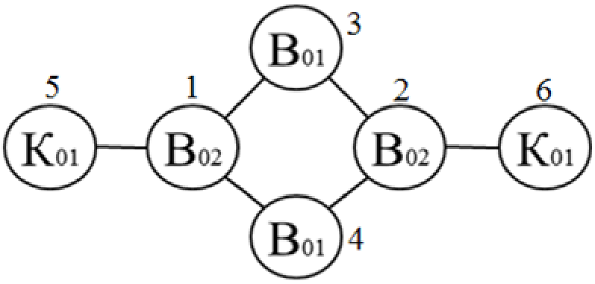
1. $C_6H_{12}$ + $C_2H_6$ (Этан) → $C_8H_{18}$ (2,4-Диметилгексан) «1-2-3-4»
2. $C_6H_{12}$ + 2 $C_2H_6$ (Этан) → 2 $C_5H_{12}$ (2-Метилбутан) «5-6»
3. $C_6H_{12}$ + 2 $C_2H_6$ (Этан) → $C_4H_{10}$ (Изобутан) + $C_6H_{14}$ (3-Метилпентан) «7-8»
4. $C_6H_{12}$ + 2 $C_2H_6$ (Этан) → $C_7H_{16}$ (2,4-Диметилпентан) + $C_3H_8$ (Пропан) «9-10»
5. $C_6H_{12}$ + 3 $C_2H_6$ (Этан) → $C_4H_{10}$ (Изобутан) + $C_5H_{12}$ (2-Метилбутан) + $C_3H_8$ (Пропан) «11-14»
6. $C_6H_{12}$ + 4 $C_2H_6$ (Этан) → 2 $C_4H_{10}$ (Изобутан) + 2 $C_3H_8$ (Пропан) «15»

### 3. Программная реализация

Процесс конструирования базиса ГДР автоматизирован. Разработка программы основана на графической интерпретации химических соединений[8, 10]. Использование теории графов позволяет автоматизировать процедуру выделения основания ГДР, а также получить наглядную геометрическую интерпретацию основания, что важно для последующего физико-химического анализа.

Реляционная база данных была разработана для хранения информации об энергетических характеристиках химических соединений [7]. В работе [2] проводится анализ возможностей использования СУБД различных классов для хранения и поиска данных о термодинамических свойствах отдельных веществ. Результаты анализа показывают, что использование реляционных СУБД для хранения большого количества информации о физических и химических свойствах веществ можно считать вполне приемлемым. Для ациклических соединений программа была разработана ранее авторами в [3, 4, 5].

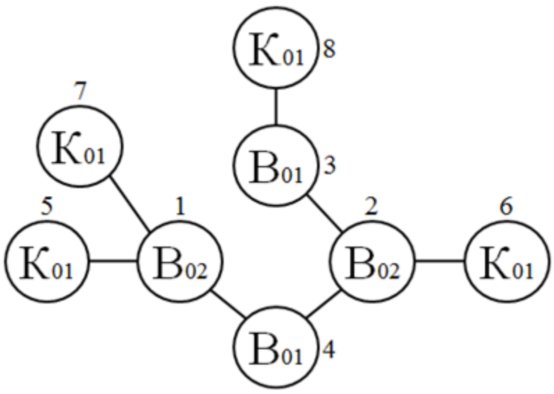
Использование матриц смежности – один из методов представления химического графа в виде матрицы. В исследуемом примере циклической молекулы 1,3-диметилциклобутана, матрица смежности будет иметь следующий вид (рис .4).




| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_{02}$ | $B_{02}$ | $B_{01}$ | $B_{01}$ | $K_{01}$ | $K_{01}$ |
| 1 | $B_{02}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | $B_{02}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | $B_{01}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | $B_{01}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | $K_{01}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | $K_{01}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Рис. 4. Молекула 1,3-диметилциклобутан $C_6H_{12}$ и ее матрица смежности*

В матрице смежности, единицами и нулями, обозначаются связи между внутренними и концевыми группами. Для наглядности работы программы проиллюстрируем первый вариант разрыва одной связи, из рис. 3, между группами $B_{01}$ и $B_{02}$ (рис. 5).




| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_{02}$ | $B_{02}$ | $B_{01}$ | $B_{01}$ | $K_{01}$ | $K_{01}$ | $K_{01}$ | $K_{01}$ |
| 1 | $B_{02}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | $B_{02}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | $B_{01}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | $B_{01}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | $K_{01}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | $K_{01}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | $K_{01}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | $K_{01}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Рис. 5. Разрыв связи между группами $B_{01}$ и $B_{02}$ и расширенная матрица смежности*

При разрыве любой связи в соединении к каждом внутренней группе мы должны присоединить подходящую концевую, как это показано на рис. 5. Следовательно, матрица смежности должна увеличиться на два столбца и две строки, поскольку добавляются две концевые группы $K_{01}$. Аналогичные действия программа выполняет и для остальных разрывов, Затем происходит инициализация из базы данных и происходят расчеты.

Реализованное программное обеспечение [7, 8] конструирует базис ГДР, рассчитывает энтальпии образования исследуемого химического соединения (рис. 6). Все имеющиеся экспериментальные данные получены из NIST Standard Reference Database Number 69 [6]. Применен специализированный метод перебора, который был описан нами ранее[11], основанный на рекурсии.

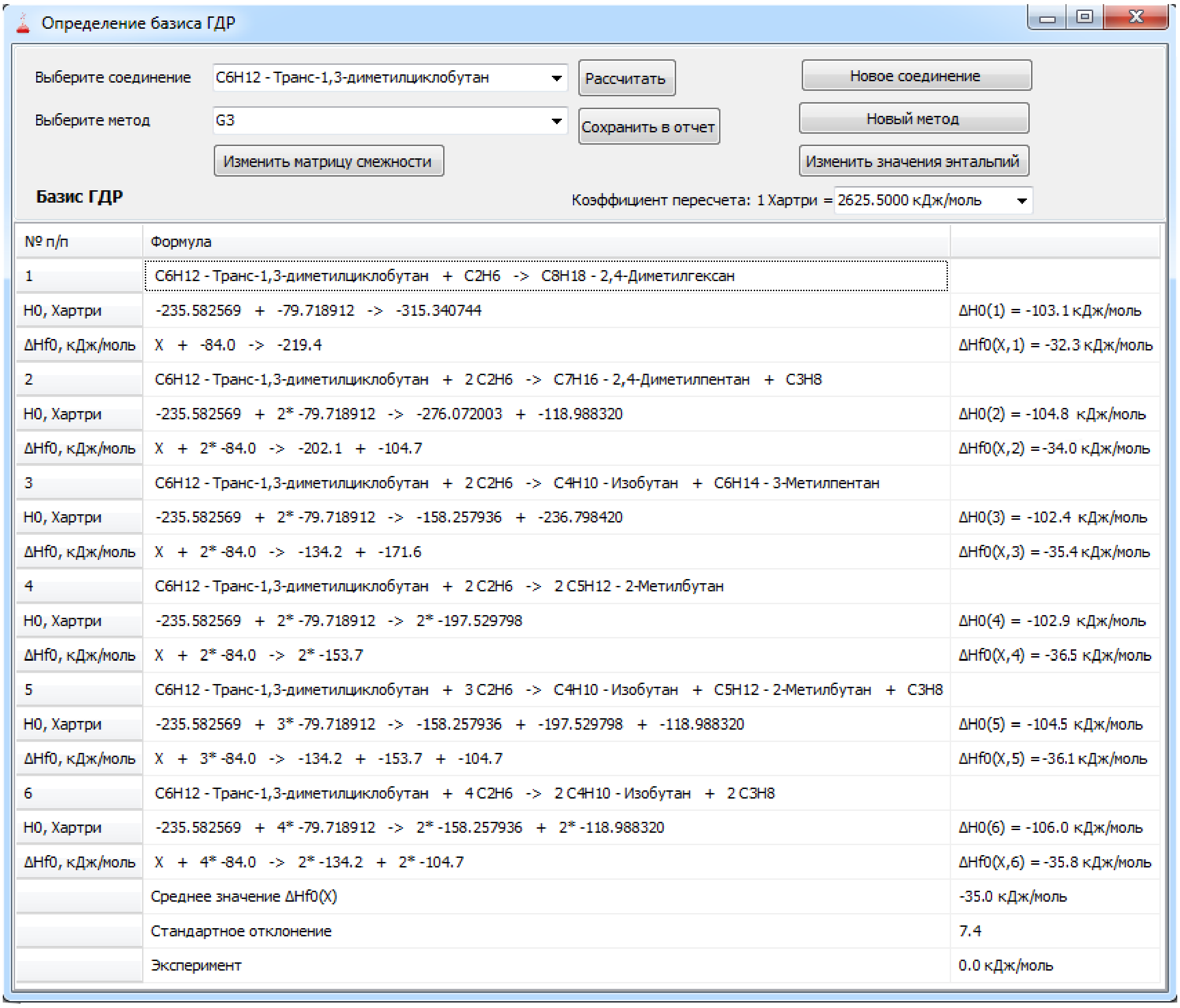
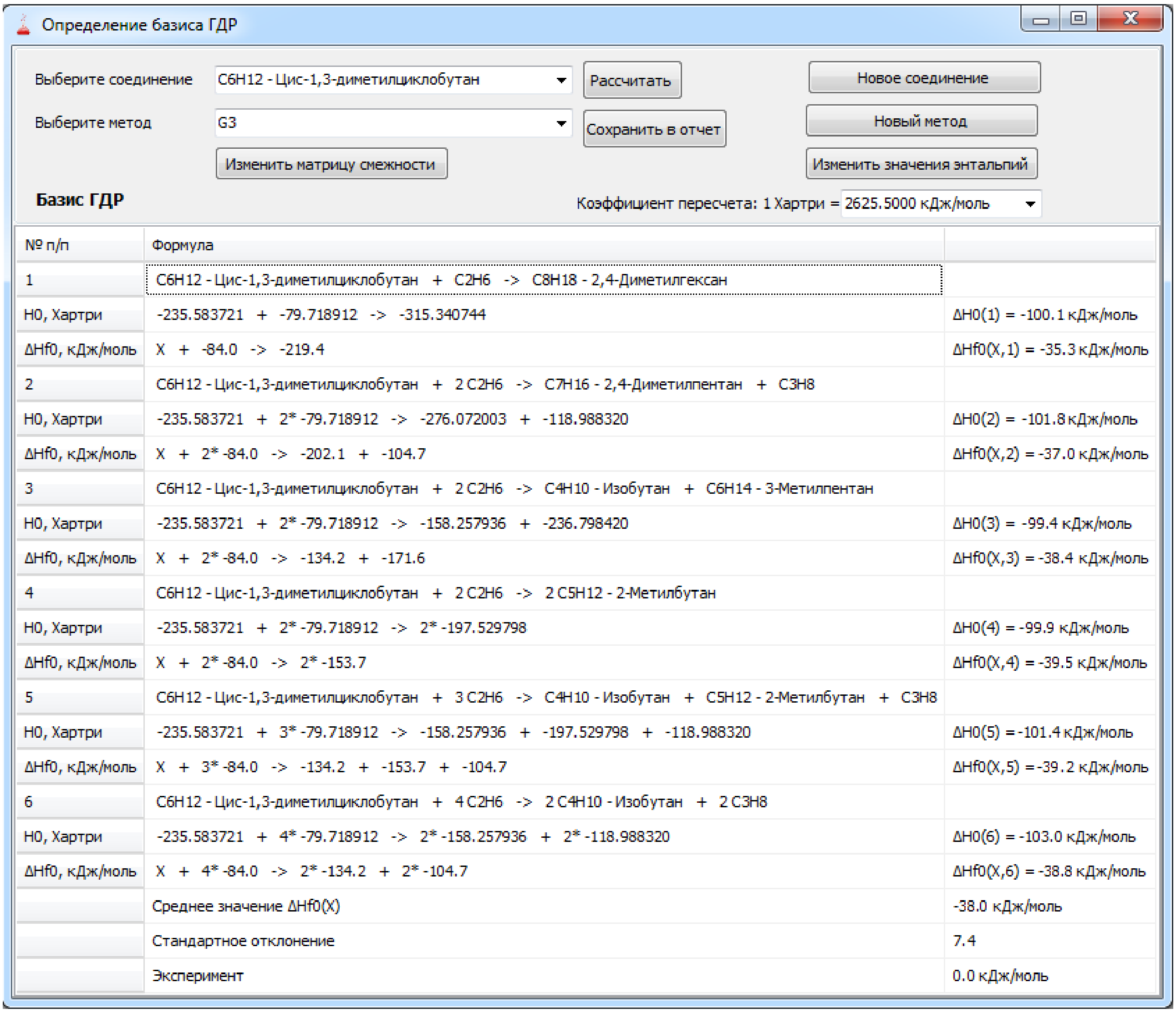



*Рис. 6. Программа, демонстрирующая расчет для соединения транс-1,3-диметилциклобутана*

Таким образом, в настоящей работе приведена теоретико-графовая интерпретация строения молекул цис-1,3-диметилциклобутана и транс-1,3-диметилциклобутана. На основе алгоритма сконструирован базис гомодесмических реакций для исследуемых соединений. В настоящий момент перед нами стоит задача расширения базы данных и тестирование полученного программного обеспечения на различных органических соединений с целью выявления недочетов и их устранения в работе программного обеспечения.

## Заключение

Разработан математический аппарат для оценки энергетических характеристик химических соединений (энтальпия образования, энергия напряжения цикла, прочность связи)[11]. Применен метод сравнительного расчета, основанный на использовании гомодесмических ре-




| № п/п | Формула | |
|---|---|---|
| 1 | C6H12 - Цис-1,3-диметилциклобутан + C2H6 -> C8H18 - 2,4-Диметилгексан | |
| H0, Хартри | -235.583721 + -79.718912 -> -315.340744 | ΔH0(1) = -100.1 кДж/моль |
| ΔHf0, кДж/моль | X + -84.0 -> -219.4 | ΔHf0(X,1) = -35.3 кДж/моль |
| 2 | C6H12 - Цис-1,3-диметилциклобутан + 2 C2H6 -> C7H16 - 2,4-Диметилпентан + C3H8 | |
| H0, Хартри | -235.583721 + 2* -79.718912 -> -276.072003 + -118.988320 | ΔH0(2) = -101.8 кДж/моль |
| ΔHf0, кДж/моль | X + 2* -84.0 -> -202.1 + -104.7 | ΔHf0(X,2) = -37.0 кДж/моль |
| 3 | C6H12 - Цис-1,3-диметилциклобутан + 2 C2H6 -> C4H10 - Изобутан + C6H14 - 3-Метилпентан | |
| H0, Хартри | -235.583721 + 2* -79.718912 -> -158.257936 + -236.798420 | ΔH0(3) = -99.4 кДж/моль |
| ΔHf0, кДж/моль | X + 2* -84.0 -> -134.2 + -171.6 | ΔHf0(X,3) = -38.4 кДж/моль |
| 4 | C6H12 - Цис-1,3-диметилциклобутан + 2 C2H6 -> 2 C5H12 - 2-Метилбутан | |
| H0, Хартри | -235.583721 + 2* -79.718912 -> 2* -197.529798 | ΔH0(4) = -99.9 кДж/моль |
| ΔHf0, кДж/моль | X + 2* -84.0 -> 2* -153.7 | ΔHf0(X,4) = -39.5 кДж/моль |
| 5 | C6H12 - Цис-1,3-диметилциклобутан + 3 C2H6 -> C4H10 - Изобутан + C5H12 - 2-Метилбутан + C3H8 | |
| H0, Хартри | -235.583721 + 3* -79.718912 -> -158.257936 + -197.529798 + -118.988320 | ΔH0(5) = -101.4 кДж/моль |
| ΔHf0, кДж/моль | X + 3* -84.0 -> -134.2 + -153.7 + -104.7 | ΔHf0(X,5) = -39.2 кДж/моль |
| 6 | C6H12 - Цис-1,3-диметилциклобутан + 4 C2H6 -> 2 C4H10 - Изобутан + 2 C3H8 | |
| H0, Хартри | -235.583721 + 4* -79.718912 -> 2* -158.257936 + 2* -118.988320 | ΔH0(6) = -103.0 кДж/моль |
| ΔHf0, кДж/моль | X + 4* -84.0 -> 2* -134.2 + 2* -104.7 | ΔHf0(X,6) = -38.8 кДж/моль |
| | Среднее значение ΔHf0(X) | -38.0 кДж/моль |
| | Стандартное отклонение | 7.4 |
| | Эксперимент | 0.0 кДж/моль |

*Рис. 7. Программа, демонстрирующая расчет для соединения цис-1,3-диметилциклобутана*

акций (ГДР). В общем случае для произвольного химического соединения существует неоднозначность в выборе ГДР. Эта проблема решена с помощью процедуры декомпозиции молекулярного графа исследуемого соединения и соответствующей матрицы связи термохимических групп. Результатом декомпозиции является базис независимых ГДР. Определение базиса ГДР позволяет осуществлять независимые оценки энергии молекул, контролировать воспроизводимость результатов и повышать надежность теоретического определения энергетических характеристик.

## Благодарности

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-07-00584 А)

## Литература

1. *Бенсон С. У.* Термохимическая кинетика / С. У. Бенсон. – Москва : Мир, 1971. – 308 с.

2. *Белов Г. В.* Использование СУБД для хранения и поиска информации о физико-химических свойствах веществ / Г. В. Белов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2003. –Т. 1. http://chemphys.edu.ru/issues/2003-1/articles/47/

3. *Хурсан С. Л.* Теоретико-графовый метод определения базиса гомодесмических реакций для ациклических химических соединений / С. Л. Хурсан, А. С. Исмагилова, С. И. Спивак // Доклады Академии наук. Физическая химия. – 2017. – Т. 474, № 4. – С. 454–457.

4. *Ахмеров А. А.* Конструирование гомодесмических реакций и расчёт энтальпии образования органических соединений / А. А. Ахмеров, А. С. Исмагилова, С. И. Спивак, С. Л. Хурсан // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015617060. 29.06.2015.

5. *Ахмеров А. А.* Энергетические характеристики органических соединений / А. А. Ахмеров, А. С. Исмагилова, С. И. Спивак, С. Л. Хурсан // Свидетельство о гос. регистрации базы данных № 2015621003. 01.07.2015

6. *Afeefy H. Y.* Neutral Thermochemical Data / H. Y. Afeefy, J. F. Liebman, and S. E. Stein // In: NIST Chemistry Webbook, NIST Standard Reference Database Number 69. Eds. P. J. Linstrom and W. G. Mallard, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg Md, 20899, DOI: https://doi.org/10.18434/T4D303

7. *Ахметьянова А. И.* Энергетические характеристики органических соединений для расчета стандартной энтальпии образования и энергии напряжения циклов / А. И. Ахметьянова, Ф. Т. Зиганшина, А. С. Исмагилова, А. А. Ахмеров // Свидетельство о гос. регистрации базы данных № 2020621607. 02.09.2020

8. *Ахмеров А. А.* Теоретический расчет энергетических характеристик органических соединений / А. А. Ахмеров, Ф. Т. Зиганшина, А. И. Ахметьянова, А. С. Исмагилова, А. А. Юнусов // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2020660354. 02.09.2020

9. *Хурсан С. Л.* Конструирование гомодесмических реакций органических соединений и расчет энтальпий образования органических соединений / С. Л. Хурсан, А. С. Исмагилова, А. А. Ахмеров, С. И. Спивак // Журнал физической химии. – 2016. – Т. 90, № 4. – С. 569–575.

10. *Ахметьянова А. И.* Программное обеспечение для термохимического анализа энергетики химических соединений / А. И. Ахметьянова, А. С. Исмагилова, Ф. Т. Зиганшина, А. А. Ахмеров // В сборнике: Математическое моделирование процессов и систем. материалы IX Международной молодежной научно-практической конференции. – 2019. – С. 55–59.

11. *Akhmetyanova A.* Mathematical apparatus for the construction of homodesmic reactions / A. Akhmetyanova, A. Ismagilova, F. Ziganshina // В сборнике: Proceedings – 2019 1st In ternational Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2019. – 2019. – P. 69–72.

12. *Хурсан С. Л., Исмагилова А. С., Ахметьянова А. И.* Определение базиса гомодесмотических реакций циклических органических соединений с использованием теории графов // Журнал физической химии. – 2018. – Т. 92, № 7. – С. 1076–1085.

УДК 004.42

# ФОРМАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ СЕТОК С ПОСЛЕДУЮЩИМ ПРИМЕНЕНИЕМ НА ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТАХ

**А. Н. Викарчук, Е. В. Трофименко**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** При использовании трехмерного сканирования при разработке компьютерных игр топология полученного объекта имеет недостаток, который заключается в том, что, записанную анимацию и сгенерированную полигональную сетку для одного объекта невозможно применить к семантически такому же объекту. В работе приведено решение данной проблемы, доработан алгоритм минимизации разности между двумя облаками точек двух объектов, применяемый при наложении объектов. Разработано и реализовано приложение, позволяющее применить это решение на трехмерных объектах.
**Ключевые слова:** интерполяция, алгоритм Blend Shape, математическая модель, полигональная сетка модели.

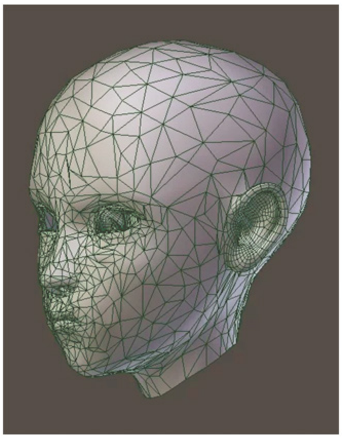
## Введение

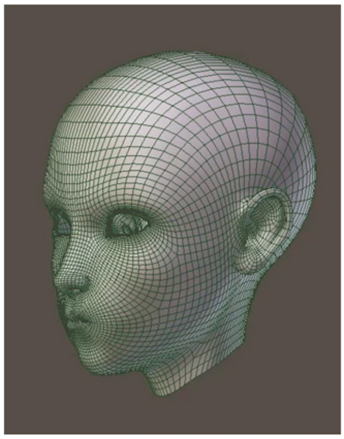
Лицевая анимация применяется для широкого круга целей, среди которых — компьютерная анимация, создание видеоигр, создание социальных аватаров и цифровых помощников. Для создания лицевой анимации в реальном времени аниматорам приходится значительно упрощать используемую модель. В настоящее время в сфере трёхмерной визуализации применяются методы трёхмерного сканирования. Например, для создания лицевой анимации актёра необходимо лишь записать игру этого актёра на несколько камер. После чего, полученные видеозаписи обрабатываются, и компьютер генерирует трёхмерный результат сканирования (рис. 1а). Проблема состоит в том, что топология полученного объекта имеет несколько серьёзных недостатков. Такая топология

не позволяет инструментам для работы с трёхмерной графикой корректно выполнять свои функции, поскольку при разработке этих инструментов разработчики подразумевают, что модель, на которой будут применяться инструменты, выполнена корректно с точки зрения топологии. [1]

Также недостаток сгенерированной полигональной сетки состоит в том, что записанную анимацию для одного объекта невозможно применить к семантически такому же объекту. Предположим, что в проекте участвуют несколько актёров. Для компьютерных копий их лиц и голов были созданы несколько объектов и затем для одного из них была создана какая-либо лицевая анимация. Далее для того, чтобы создать такие же анимации для оставшихся актёров, придётся создавать их заново для каждого трёхмерного объекта, хотя все эти объекты семантически одинаковые — всё это голова человека. Таким образом, приведение всех семантически одинаковых объектов к универсальной топологии позволяет использовать анимацию для одного объекта на другом, применять алгоритмы, работающие на одном объекте, для другого. На рис.1б приведена, созданная (универсальная) топология — топология, в которой, происходят правильные деформации во время анимации, и используется минимальное количество полигонов для описания нужной формы.

Таким образом, существует проблема приведения трёхмерного результата сканирования объекта к универсальной, заранее определённой топологии для таких объектов. Можно создать вручную трёхмерный объект, который несёт в себе тот же смысл, что и объекты, с которыми мы будем работать. Например, если предстоит работа с человеческой ногой — необходимо создать трёхмерную полигональную сетку человеческой ноги с необходимой топологией. Затем эту полигональную сетку мы будем применять на все последующие ноги, сканирование которых мы будем получать.





*а)* *б)*

*Рис. 1. Пример сгенерированной полигональной сетки:*
*а) трехмерный результат сканирования, б) созданная универсальная топология*

Традиционно для построения лицевой анимации используются алгоритмы, основанные на морфинге (blendshape) модели. Блендшейпы (blendshapes) — это 3D-модели идентичной топологии (т.е. одинаковое количество вершин и их нумерация), в которых базисные векторы не ортогональны, а представляют отдельные выражения лица. Отдельные базисные векторы были названы мишенями blendshape и morph, цели или (более грубо) как формы или смешанные формы. Соответствующие веса часто называют ползунками, так как они появляются в пользовательском интерфейсе.

Алгоритм blend shape генерирует выражения лица как линейную комбинацию нескольких выражений лица, blend shape «цели». Каждая цель может быть полным выражением лица, или выражение «дельта», такое как поднятие бровей или уголка рта и т. п.

Крайние состояния форм называются Shape keys. Shape keys можно перевести как ключи формы (по аналогии с ключами анимации). Для создания блендшейпа необходимо создать несколько копий частей персонажа требующих такого рода анимации (например, голова) и зафиксировать каждую в крайних позах.

По завершению подготовительной работы необходимо указать 3d-редактору, где базовая модель в нейтральной позе, а где модель цель. После чего 3d-программа создаст управляющие элементы для каждого из блендшейпов.

На данный момент существует несколько программ, включающих в себя функциональность смешивания полигональных сеток объектов, использующих алгоритм blendshape. Среди них наиболее известные — Wrap3D, Maya, Blender3D.

Wrap3D разрабатывается компанией Russian3DScanner. Программа включает в себя большое количество функций для работы с трёхмерными объектами. Для смешивания полигональных сеток может предложить только до 4 объектов, участвующих в смешивании. Распространяется по схеме платной подписки.

Maya, разрабатываемая компанией Autodesk. Позволяет включить в процесс смешивания сколько угодно моделей. Распространяется по платной лицензии.

Blender3D — приложение для работы с трёхмерными объектами. Предоставляет широкий выбор инструментов для трёхмерных художников — аниматоров, широко применяется в индустрии видеоигр. Позволяет смешивать только два объекта одновременно. Распространяется бесплатно.

## Применяемые алгоритмы

Для совмещения двух объектов в пространстве используют алгоритм Iterative Clostest Points для смешивания двух полигональных сеток используют алгоритм Blendshape.

Алгоритм Iterative Closest Points (ICP) [2] описывает уменьшение разности между облаками точек в трёхмерном пространстве. Минимизировать разность между двумя объектами необходимо перед применением интерполяции, поскольку иначе разность между облаками точек будет вносить погрешность при вычислении интерполяции. Алгоритм итерационно выполняет поиск переменных, при которых уравнение (1) стремится к своему минимуму.

В прикладном смысле для трёхмерных объектов алгоритм предоставляет возможность минимизировать разность между двумя объектами в пространстве. Это значит, что объекты будут совмещены в пространстве по положению и повороту.

Алгоритм Blendshape [3–5] описывает идею смешивания моделей, реализованную в приложениях Wrap3D, Maya, Blender3D. Поскольку строгая математическая модель не была представлена авторами идеи и их последователями, нам необходимо вывести математическую модель смешивания для её применения.

В виду того, что часть приложений, реализующих алгоритм Blend Shape, является платной, а единственное приложение, распространяющееся бесплатно, может предложить смешивание только двух объектов, есть необходимость реализации подобного приложения. Также в виду того, что общая математическая модель для идеи Blend Shape не была представлена в научных трудах, нам необходимо вывести ее.

## Постановка задачи

Разработать и реализация приложение, которое включает в себя функциональность, позволяющую применять модель интерполирования нескольких полигональных сеток друг с другом.

Также приложение, должно позволять выполнять следующие действия: реализовывать трёхмерную сцену и все объекты, загружать новые объекты в сцену, управлять положением и поворотом камеры, манипулировать положением и поворотом каждого объекта, применять модель интерполяции для любых выбранных в сцене объектов.

**Методы решения.** Для совмещения двух объектов в пространстве был выбран алгоритм ICP, предложенный в 1991 году Ченом Янгом и Герардом Медиони. Он направлен на минимизацию разности между двумя облаками точек в пространстве [1].

Облако точек — это множество точек $V \subset R^3$, определяющих какой-либо трёхмерный объект.

При выполнении алгоритма на каждой итерации мы будем искать необходимую трансформацию для облака точек источника. Для этого нам понадобится для каждой точки из облака источника найти соответствующую точку из облака цели. Есть несколько способов сделать это, мы остановимся на самом наивном и наименее эффективном — простом переборе.

Пусть $V^* \subset R^3$ — множество точек, принадлежащих цели, $V \subset R^3$ — множество точек источника, а $V' \subset R^3$ — множество точек цели после применения очередной итерации трансформации.

Будем называть точку $v^* \subset V^*$ соответствующей точке $v \subset V$, если

$$\forall v_i \subset V : \left\| v - v^* \right\| < \left\| v_i - v^* \right\|, \quad i = 1..\left\| V \right\|.$$

Неригидная трансформация — это трансформация облака точек вида

$$V'(R,t) = RV + t,$$

где $V$ — исходное облако точек, $R \subset M^{4\times4}$ — матрица поворота, $t \subset M^{4\times4}$ — матрица перемещения, $V'$ — результат трансформации. Задача сводится к нахождению таких $R$ и $t$, при которых ошибка между двумя облаками точек будет минимальной.

Ошибка между двумя облаками точек — это величина вида

$$E(R,t)=\sum_{i=1}^{n}\left\|v_i'(R,t)-v_i^*\right\|^2, \quad (1)$$

где $v' \in V'$ — облако точек источника после применения неригидной трансформации, $v^* \in V^*$ — облако точек целевого объекта, $n$ — количество точек облака точек источника, $v_i$ соответствует $v_i^*$ для $i=1..n$, норма — евклидова.

Имея два облака точек на входе, алгоритм находит такую неригидную трансформацию, которая перемещает одно облако точек к другому так, что ошибка между двумя облаками точек минимальна.

Формализованная задача состоит в том, чтобы теперь найти поворот $R$ и перемещение $t$.

После минимизации разности между двумя облаками точек мы можем применить интерполяцию между их полигональными сетками. Рассмотрим идею Blend Shape и представим её формализацию.

Определим, что такое смешивание объектов.

Пусть мы имеем K трёхмерных объектов, которые хотим смешать, чтобы получить новый объект с необходимым набором характеристик.

Пусть $V \in R^3$ — множество точек трёхмерного пространства,

Медианной точкой для точек $v_j \in V_j$, $j=1..K$ будем называть точку $v'$ такую, что

$$v_x'=\sum_{j=1}^{K}\frac{1}{M}v_{jx},$$

где $x$ — очередной элемент трехмерного вектора $v'$.

Для очередной $i$-й точки облака точек $V$ её новое положение после смешивания примет вид согласно модели

$$\hat{v}_i=v_i+\sum_k w_k(v_{ik}^b-v_i),$$

где $\hat{v}_i$ — положение $i$-й точки после смешивания моделей, $k$ — количество облаков точек, участвующих в смешивании, $w_k$ — вес интерполяции для $k$-го облака точек, $v_{ik}^b$ — изначальное положение $i$-й точки $k$-го облака точек, $v_i^{\wedge}$ — медианная точка для всех соответствующих друг другу $i$-х точек из всех облаков точек.

Стоит отметить, что эта модель подразумевает, что все облака точек семантически несут в себе одно и то же и имеют одинаковую топологию. В связи с последним условием, все наши облака точек сначала необходимо привести к одной универсальной топологии.

Это достигается следующим способом. Для того, чтобы привести наши семантически одинаковые объекты к одной топологии, нужен дополнительный объект, несущий в себе то же самое семантически, но выполненный вручную. Он не имеет формы необходимых нам объектов, но имеет подходящую топологию, которая станет универсальной для всех последующих объектов.

Пусть $V^* \in R^3$ — множество точек из облака точек объекта, чью топологию необходимо изменить, а $V \in R^3$ — множество точек из облака точек вручную созданного объекта. Необходимо получить новое облако точек, которое имеет форму $V^*$, но топологию $V$.

Для каждой точки $V$ найдём соответствующую ей точку из $V^*$.

Напомним, что точка $v \in V$ называется соответствующей $v^* \in V^*$ если

$$\forall v_i \in V : \left\|v-v^*\right\| \le \left\|v_i-v^*\right\|.$$

После нахождения соответствий, мы работаем с моделью смешивания таким образом, что за $i$-ю точку на облаке точек берём просто соответствующую ей на универсальной топологии.

Для достижения поставленной цели (напомним, что целью является получение трёхмерного объекта, имеющего известную универсальную топологию и одновременно с этим форму необходимого конкретного объекта) необходимо применить общую математическую модель совмещения облаков точек и интерполяцию объектов.

Общая модель выглядит следующим образом:

$$\hat{v}_i(w,R,t) = R\left(v_i' + \sum_k w_k (v_{ik}^b - v_i')\right) + t, \qquad (2)$$

где $\hat{v}_i$ — положение точки после интерполирования, $w$ — вес интерполяции, $R$ — поворот модели, $t$ — перемещение модели, $v_i'$ — медианная точка для облака точек $V$, $v_{ik}^b$ — изначальное положение $i$-й точки $k$-го облака точек.

## Решение поставленной задачи

Модель задачи, которую нам необходимо решить:

$$E(R,t) = \sum_{i=1}^{n} \left\| v_i'(R,t) - v_i \right\|^2.$$

Наша задача — минимизировать эту функцию ошибки. Перепишем её таким образом:

$$E(R,t) = \sum_{i=1}^{n} \left\| Rv_i' + t - v_i \right\|^2.$$

В условии задачи мы принимаем, что объекты имеют отдалённое сходство и исправить необходимо лишь их топологии. Таким образом, мы можем переместить наши объекты в центр координат и работать с поворотом после этого.

Медианной координатой назовём координату вида

$$X' = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} x_i,$$

где $X'$ — медианная координата облака точек $X$, $N_x$ — количество элементов в множестве $X$, $x_i \in X$.

Опустим $t$, взяв его за $\mu$ (медиану):

$$E(R,t) = \sum_{i=1}^{n} \left\| Rv_i' - v_i \right\|^2.$$

Теперь найдём $R$. Положим $\hat{v}_i' = v_i' - V'$, а $\hat{v}_i = v_i - V'$.

$$E(R,t) = \sum_{i=1}^{n} \left\| R\hat{v}_i' - \hat{v}_i^* \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (R\hat{v}_i' - \hat{v}')^T (R\hat{v}_i' - \hat{v}^*) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{v}_i'^{\,T} R^T - \hat{v}_i^{*T})(R\hat{v}_i' - \hat{v}_i^*) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\hat{v}_i'^{\,T} R^T R\hat{v}_i' - \hat{v}_i'^{\,T} R^T \hat{v}_i^* - \hat{v}_i^{*T} R\hat{v}_i' + \hat{v}_i^{*T} \hat{v}_i^*).$$

Последнее слагаемое не содержит наших аргументов, поэтому можем его опустить, из чего последует, что

$$E(R,t) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{v}_i'^{\,T} R^T R\hat{v}_i' - \hat{v}_i'^{\,T} R^T \hat{v}_i^* - \hat{v}_i^{*T} R\hat{v}_i').$$

Так как $\hat{v}_i'^{\,T} R^T R\hat{v}_i' = \hat{v}_i'^{\,T} \hat{v}_i'$, и от $R$, $t$ не зависит, то получаем

$$E(R,t) = -\sum_{i=1}^{n} (\hat{v}_i^{*T} R\hat{v}_i').$$

Так как мы решаем задачу минимизации, то можем взять

$$E(R,t) = \sum_{i=1}^{n} (\hat{v}_i^{*T} R\hat{v}_i')$$

и решать задачу максимизации.

Воспользовавшись свойством следа матрицы:

$$E(R,t)=\sum_{i=1}^{n} tr(\hat{v}_i^{*T} R\hat{v}_i')=\sum_{i=1}^{n} tr(R\hat{v}'\hat{v}_i^{*T})=tr\left(\sum_{i=1}^{n} R\hat{v}'\hat{v}_i^{*T}\right)=tr\left(R\sum_{i=1}^{n}\hat{v}'\hat{v}_i^{*T}\right).$$

Обозначим $B=\sum_{i=1}^{n}\hat{v}_i'\hat{v}_i^{*T}$ и получим

$$tr\left(R\sum_{i=1}^{n}\hat{v}_i'\hat{v}_i^{*T}\right)=tr(RB).$$

Воспользовавшись сингулярным разложением матрицы, $B=USV^T$ получим

$$E(R)=tr(RUSV^T).$$

Поскольку $V^T RU=I$, то получаем: $V^T RU=I$, $RU=V$, $R=VU^T$, где $V$, $U$ — матрицы из сингулярного разложения матрицы $B$, упомянутые выше.

Для нахождения перемещения обратимся к ранее упомянутым медианным значениям облаков точек: $\mu_p$ — медианное значение облака точек источника, $\mu_x$ — медианное значение облака точек цели.

Таким образом, для совмещения двух облаков точек при известном повороте $R$ перемещение $t$ будет найдено следующим образом:

$$t=\mu_x-R\mu_p.$$

Для решения задачи смешивания полигональных сеток необходимо обратиться к формуле (2). Всё, что неизвестно на данный момент — это веса интерполяции для каждой модели из тех, что взяты для смешивания. Они являются входными данными и будут определяться пользователем методом ввода.

## Результаты

В результате была разработано приложение на языке программирования C++ с использованием кроссплатформенного фреймворка Qt [6] и библиотеки OpenGL 4.0 [7], которое позволяет визуализировать сцену, загружать и управлять трехмерными объектами в сцене и применять алгоритм смешивания полигональных сеток для двух выбранных объектов.

Разработанная диаграмма классов представлена на рис. 2. Класс Scene является классом, реализующим функции трёхмерной сцены. Он содержит массив трёхмерных объектов, которые отрисовываются в сцене. В сцене так же присутствует камера, реализованного классом Camera. Ссылка на сцену так же есть у класса Renderer. Используя информацию о шейдерах — объектах, определяющих, как рисовать сцену — он отрисовывает сцену и отображает её во Viewport. Трёхмерные объекты реализованы в классе Model. У каждой модели так же есть Mesh, описывающий полигональную сетку объекта. Класс OBJLoader реализует возможность загрузки новых объектов из *.obj-файлов. Класс GLModel3D отвечает за отрисовку и хранит в себе основную часть логики OpenGL. Классы ICP и BlendShaper реализуют алгоритмы ICP и смешивания полигональных сеток соответственно.

Интерфейс программы представлен на рис. 3–4. На рис. 3а используемая модель имеет нужную форму (нужное выражение лица), но неприменимую для дальнейшей работы топологию. На рис. 4б в окне отрисовки изображена модель, семантически равная модели представленной на рис. 3а, но имеющая применимую в дальнейшей работе топологию. Цель приложения — получить модель с полигональной сеткой модели, представленной на рисунке 3б, но имеющей форму (выражение лица) модели, представленной на рис. 3а.

На рис. 4а можно видеть два объекта в трёхмерной сцене, которые выбраны для смешивания своих полигональных сеток. Объекты уже совмещены в пространстве с помощью реше-

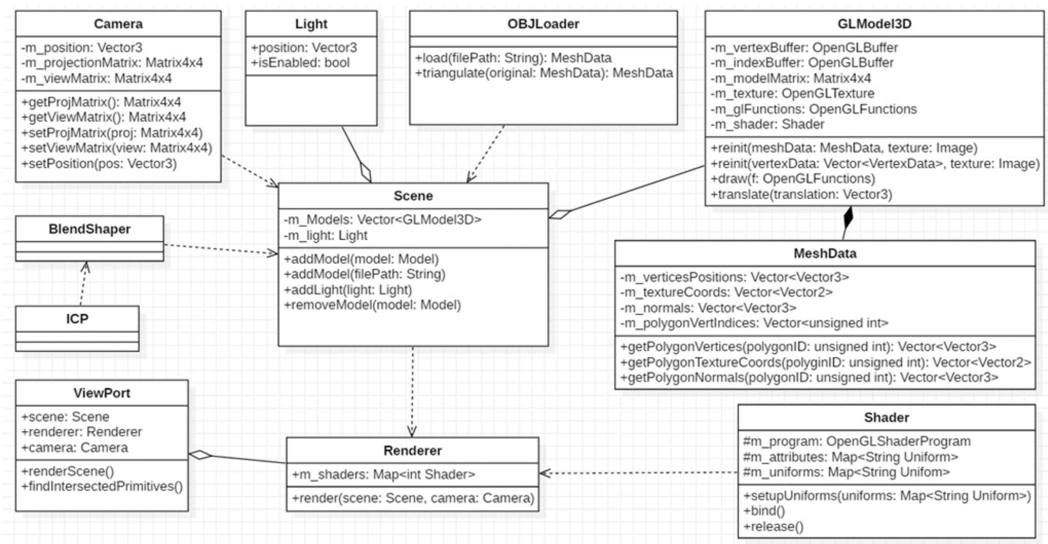
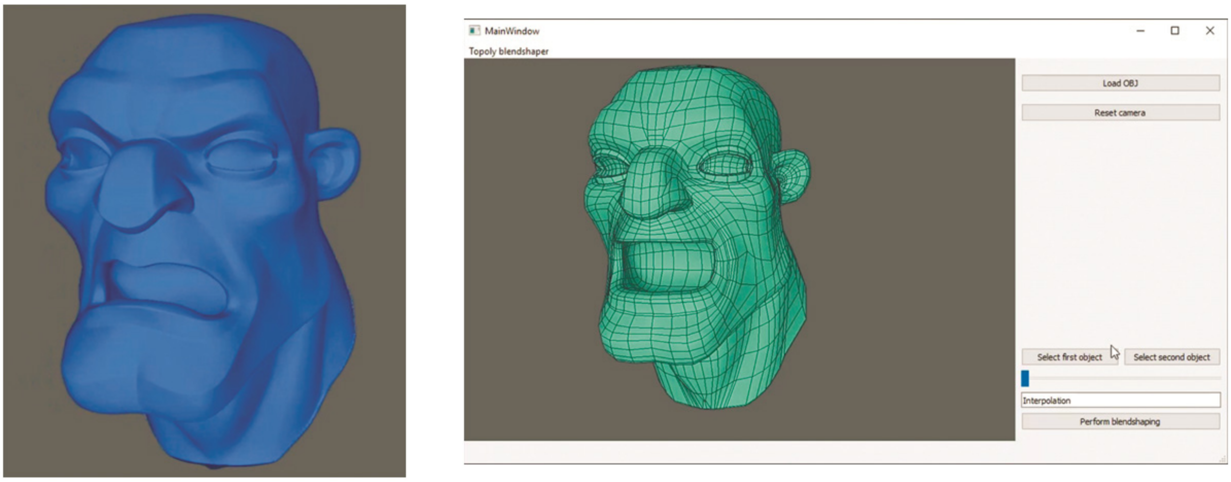


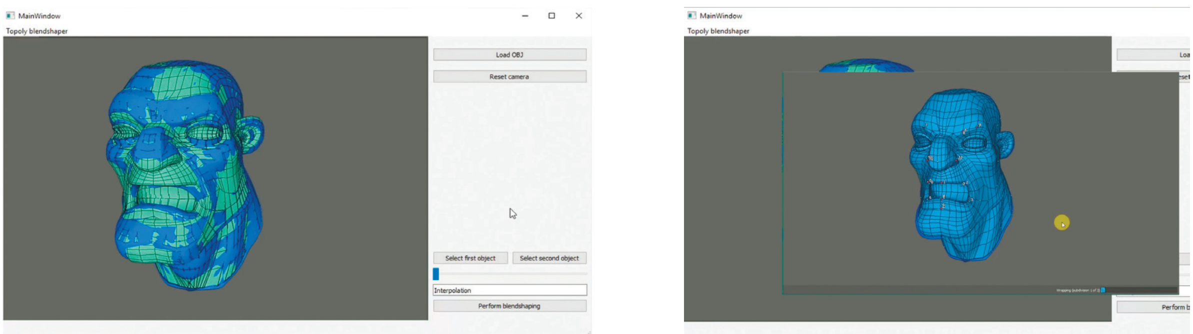

*Рис. 2. Диаграмма классов*

ния ICP и процесс интерполирования между объектами уже завершён. Можно видеть, что оба объекта имеют одинаковую форму. Следовательно, мы достигли поставленной цели — модель с универсальной топологией теперь имеет нужную форму, принадлежащую другой модели.




*а)* *б)*

*Рис. 3. Интерфейс реализованного приложения. а) нужная форма, но плохая топология; б) универсальная модель*



*а)* *б)*

*Рис. 4. Интерфейс приложения а) результат совмещения двух объектов, выбранных для смешивания; б) смешивание полигональных сеток в реализованном приложении*

На рис. 4б изображено реализованное приложение, в котором запущен процесс смешивания полигональных сеток. Приложение выводит новое окно с отдельной сценой, в которой визуализирует процесс смешивания моделей.

Приложение работает в два шага. Сначала приложение с помощью ICP алгоритма совмещает два объекта в пространстве и для каждой точки одного объекта находит соответствующую (ближайшую) точку, принадлежащему другому объекту. Затем каждая точка первого объекта (который имеет нужную нам топологию, но не нужную форму) сдвигается в сторону соответствующей себе точки на другом объекте согласно формуле (2). Достигнув определённого пользователем порога погрешности, модель завершает работу и мы получаем объект, имеющий и нужную топологию и нужную форму (выражение лица в нашем случае).

Во время визуализации процесса смешивания приложение отображает некоторые точки, которые были выбраны им как «якоря» (те самые точки, поставленные в соответствие на первом шаге друг другу). Их отображение помогает понять, в чём проблема, в случае неверного смешивания.

**Заключение**

Были доработаны алгоритмы ICP и Blend Shape, использующиеся для работы с трёхмерной графикой и их применение. Доработан алгоритм минимизации разности между двумя облаками точек двух объектов. Формализована идея Blend Shape. Для полученной формализации была разработана математическая модель, в соответствии с которой было реализовано приложение.

Приложение визуализирует сцену, содержащую трёхмерные объекты. Приложение позволяет манипулировать объектами в трёхмерном пространстве, контролировать положение и поворот камеры, загружать новые объекты в трёхмерную сцену из *.obj-файлов.

Приложение также позволяет применять алгоритм смешивания полигональных сеток для двух выбранных объектов. Смешивание полигональных сеток работает по описанной модели Blend Shape, интерполируя два трёхмерных объекта.

**Литература**

1. *Heikkilä E.* A Guide To Building 3D Game Character / E. Heikkilä, University Of Applied Science, Kajaani. – 2017 – P. 11–13.

2. *Chen Yang.* Object modelling by registration of multiple range images / Chen Yang, Gerard Medioni: Image Vision Comput. – 1991. – P. 145–155.

3. *Lewis J. P.* Practice and Theory of Blendshape Facial Models / J. P. Lewis, Ken Anjyo, Taehyun Rhee//Eurographics 2014 STAR. – Strasbourg, 2014. – P. 53–76.

4. *Pawaskar C.* Expression Transfer: A System To Build 3D Blend Shapes for Facial Animation / C. Pawaskar, Wan-Chun Ma, K. Carnegie, J. P. Lewis // International Conference on Image and Vision Computing (IVCNZ 2013) – New Zealand, 2013. – P. 27–29.

5. *Williams L.* Performance-driven facial animation / L. Williams // SIGGRAPH '90 Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques – New York. – V. 24, No 4. – 1990. – P. 235–242.

6. Qt_(software) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.qt.io/what-is-qt/ (28.04.2019)

7. *Вольф Д.* OpenGL 4. Язык шейдеров. Книга рецептов / пер. с англ. А. Н. Киселёва. – М. : ДМК Пресс, 2015 – 368 с.

УДК 004

# ПРИМЕНЕНИЕ БИБЛИОТЕКИ TESSERACT В РАСПОЗНАВАНИИ СОДЕРЖИМОГО ДОКУМЕНТОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ФОРМЕ

**Д. Ю. Власов, А. О. Северов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья описывает разработанный программный комплекс для выборочного распознавания данных из документов с помощью библиотеки Tesseract. Программный комплекс позволяет распознавать текстовые данные из пакета однотипных документов в заранее выбранных пользователем областях. Он состоит из двух приложений, одно из которых предназначено для подготовки шаблонов, другое для распознавания текстовых данных из документов по выбранному пользователем шаблону.
**Ключевые слова:** распознавание текста, форма документа, шаблон документа, программный комплекс, библиотека.

## Введение

Организациям необходимо переводить на цифровые носители большое количество однотипных документов, заполненных сотрудниками или другими лицами, обратившимися в организацию. Большинство из этих документов, имеет определенную заранее подготовленную форму и требует заполнения только специально выделенных областей. Данные из этих областей и обрабатываются в дальнейшем организацией. Для уменьшения времени, затрачиваемого оператором на внесение данных из таких документов на электронный носитель (БД, другие приложения, файлы и т. д.), создан программный комплекс, обеспечивающий распознавание данных из заранее заданных областей, а также сортировку полученной информации.

Разработанный программный комплекс, обладает двумя основными функциями: подготовка общего шаблона с указанием необходимых полей и непосредственно выборочное распознавание текста. Данное приложение имеет возможность интегрирования в различные системы документооборота для дальнейшей обработки данных.

## Структура программного комплекса

Программный комплекс (рис. 1) состоит из 2 приложений, которые осуществляют взаимодействие друг с другом посредством базы данных.

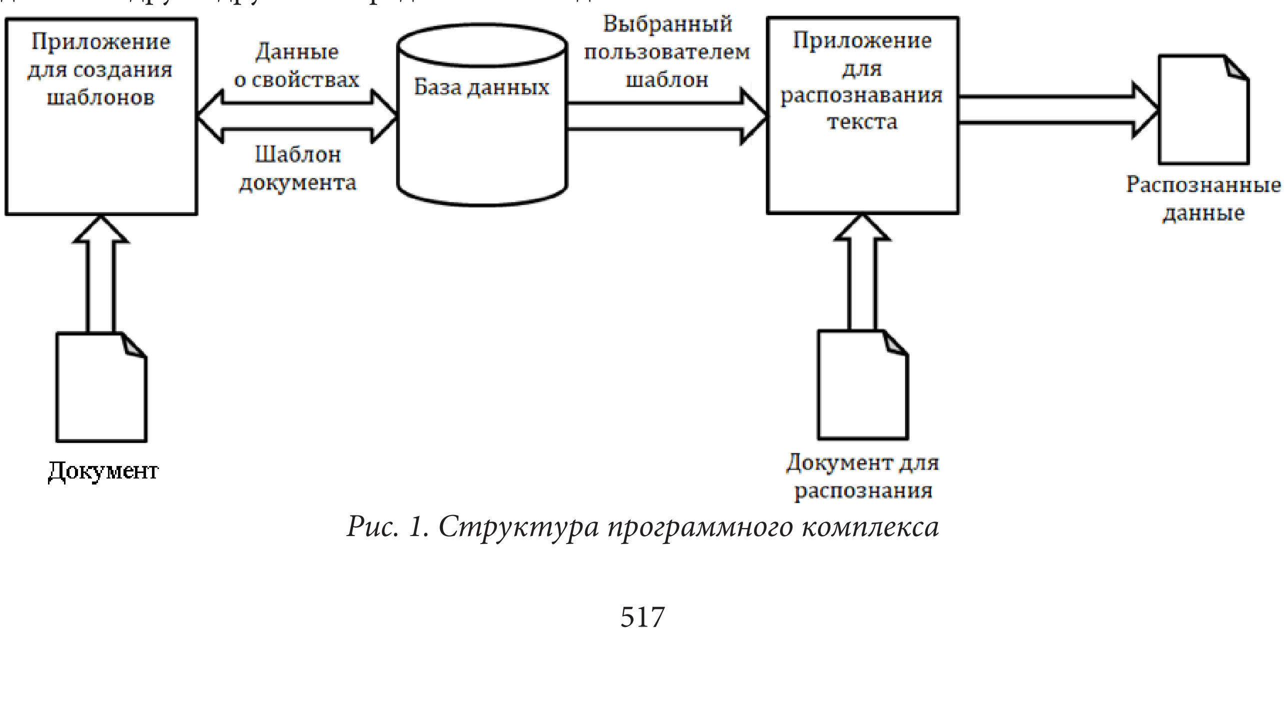



*Рис. 1. Структура программного комплекса*

## Процесс создания шаблонов

Шаблон представляет собой форму документа. В нее заранее внесен текст, одинаковый для всех документов этого типа, и оставлены пустые поля для заполнения. Пример шаблона представлен на рис. 2.

Унифицированная форма № Т-10
Утверждена постановлением Госкомстата РФ
от 5 января 2004 г. № 1

| | Код |
|---|---|
| Форма по ОКУД | |
| по ОКПО | |

наименование организации

| Номер документа | Дата составления |
|---|---|
| | |

**КОМАНДИРОВОЧНОЕ УДОСТОВЕРЕНИЕ**

| Табельный номер |
|---|
| |

Работник

фамилия, имя, отчество

структурное подразделение

должность (специальность, профессия)

командируется в

место назначения (страна, город, организация)

для

цель командировки

на календарных дней (не считая времени нахождения в пути)

с “ ” 20 г. по “ ” 20 г.

Действительно по предъявлении паспорта или заменяющего его документа

наименование, серия, номер

**Руководитель**

должность личная подпись расшифровка подписи

*Рис. 2. Пример шаблона*

Шаблон состоит из нескольких частей: название шаблона, описание шаблона, изображение исходного документа, список полей. Каждое поле включает в себя название и координаты области.

Приложение для создания шаблонов работает следующим образом: на вход поступает документ, в котором пользователь выделяет места, требующие распознания, а также присваивает им название. Таким образом пользователь может создать целый список полей. Для дальнейшего сохранения конструкции, пользователю необходимо добавить название и описание шаблона. Эти данные передаются из приложения в базу данных. В дальнейшем сохраненные шаблоны используются второй частью программного комплекса при обработке документов.

Полный алгоритм программы по созданию шаблонов представлен на рис. 3.

## Распознавание данных

Для распознавания текста была выбрана библиотека Tesseract OCR. Данная библиотека находится в свободном доступе, имеет возможность интеграции в другие системы, а также присутствует поддержка русского языка. Несмотря на большое количество плюсов, данная библиотека всё же является бесплатной и не лишена ряда минусов: отсутствие поддержки производителей.

При работе с Tesseract OCR было выявлено, что библиотека работает неидеально. Ниже приведены проблемы, которые часто встречаются при распознании текста:

• сходство букв в алфавите одного и того же языка: яркими примерами данной проблемы служат следующие наборы букв в русском языке: «Н» и «И», «Ш» и «Щ»,«Ь» и «Ъ», «Е» и «Ё» и другие. Данная проблема также встречается и в других языках. Далее представлены примеры из и немецкого алфавита: «I» и «l», «H» и «N», «Q» и «O», «U» и «Ü», «B» и «ß»;

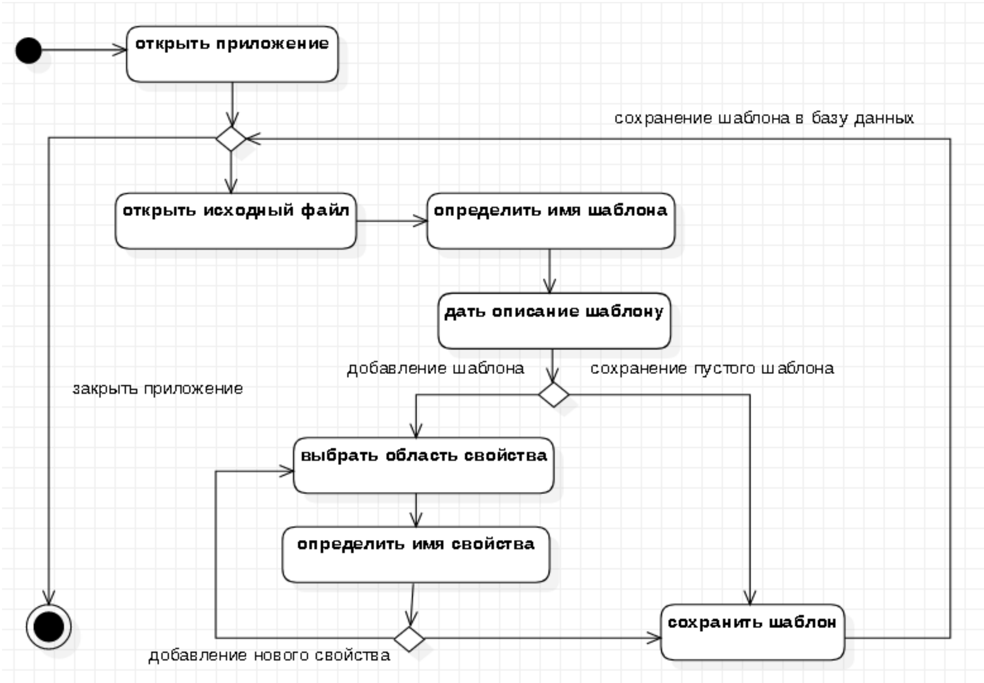



*Рис. 3. Диаграмма деятельности приложения*

• сходство различных букв и цифр, а именно: «O» и «0», «l» и «1», «I» и «1», «S» и «5», «З» и «3»;

• ошибка в изображении символов. Причины данной проблемы могут иметь различный характер, начиная с небольших проблем, связанных с распознаваемым изображением, заканчивая дефектом самого источника;

• особенности заполнения распознаваемого изображения: наличие в документе различных помех, закрывающих требующий распознавания текст, таких как: печати, подписи, марки, а также оставленные в результате неправильного обращения с документом дефекты.

Последние две проблемы невозможно решить программными методами, поэтому при использовании необходимо их учитывать. Оставшиеся же можно решить путём дообучения используемой библиотеки.

## Обучение библиотеки

Для распознавания текста на конкретном языке Tesseract использует языковые модели и словари. Tesseract позволяет расширять стандартный словарь для любого поддерживаемого языка добавлением собственных слов, либо обучить языковую модель, полностью заменив слова стандартного словаря своими словами. После загрузки библиотеки устанавливаются все необходимые инструменты для обучения языковой модели. После чего к модели добавляются необходимые слова. Добавление происходит следующим образом:

1. Создаётся специальный текстовый файл.
2. В него добавляются необходимые слова.
3. Файл копируется в папку библиотеки и распаковывается там.

## Процесс распознавания данных

Приложение для распознавания данных работает следующим образом. На вход, в главную форму (графический интерфейс), поступает документ, требующий распознания. Далее при помощи блока работы с БД происходит соединение с базой данных с целью выбрать необходимый шаблон. Дальше документ и данные о шаблоне отправляются в библиотеку, где при помощи интегрированного модуля Tesseract OCR происходит распознание текста. Готовые данные сохраняются в отдельный файл формата json. При необходимости пользователь может проверить результаты распознания каждого документа отдельно.

Подробная структура приложения представлена на рис. 4.

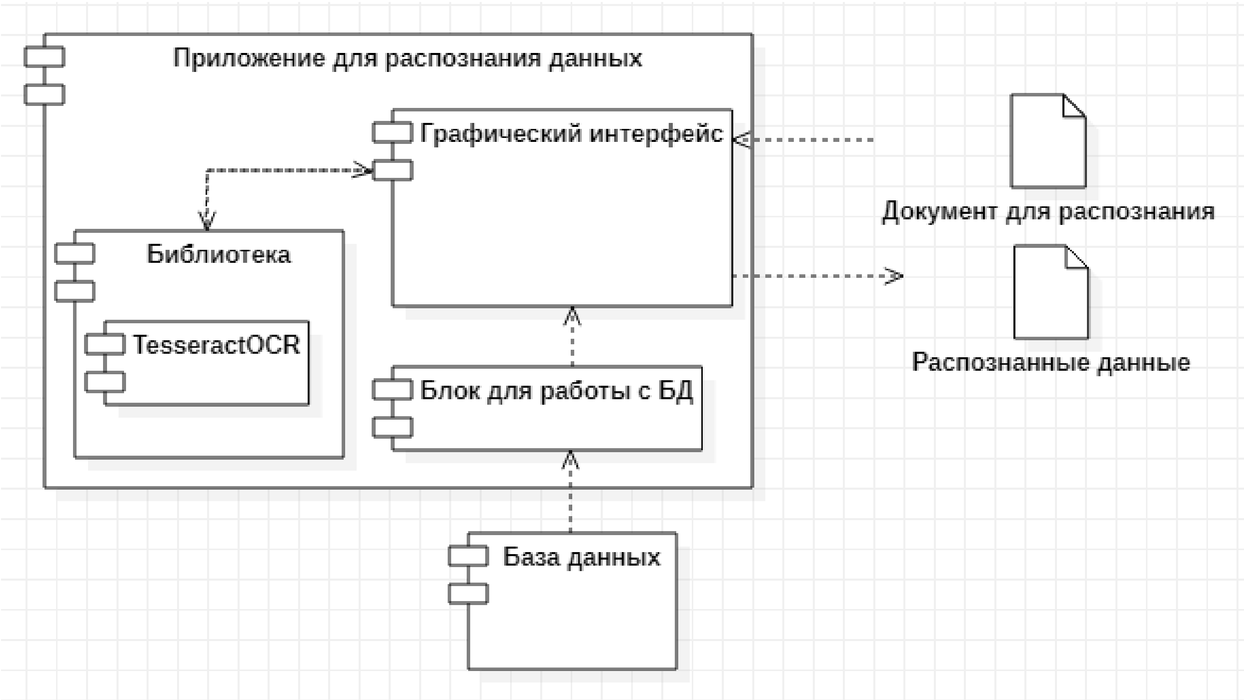



*Рис. 4. Структура приложения для распознавания текста*

После распознавания файл сохраняется в специальном формате json. Поскольку одной из целей программного комплекса является возможность интеграции с другими сервисами, то именно это стало главной причиной использования данного формата.

## Заключение

В результате проделанной работы был создан программный комплекс, предназначенный для распознавания большого количество однотипных документов по заранее созданным шаблонам. Комплекс имеет возможность свободной интеграции в другие системы благодаря использованию бесплатной библиотеки Tesseract OCR и выводу данных в формате json.

## Литература


1. *Власов Д. Ю.* Приложение для выборочного распознавания текстовых данных из изображений : дипломная работа / Власов Денис Юрьевич ; рук. А. А. Старикова ; ВГУ. – Воронеж, 2020. – 33 с.

2. *Северов А. О.* Приложение для подготовки шаблонов выборочного распознавания текстовых данных из изображений : дипломная работа / Северов Артём Олегович ; рук. А. А. Старикова ; ВГУ. – Воронеж, 2020. – 34 с.

УДК 004.42

# РАЗРАБОТКА WEB-СЕРВИСА «БОНУСНАЯ ПРОГРАММА ЛОЯЛЬНОСТИ»

**М. А. Гладков[1], И. В. Хмелёва[1], Е. В. Трофименко[2]**

*[1]Кыргызско-Российский Славянский университет*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе представлен web-сервис для создания системы кешбэка. В системе имеется 2 подсистемы — Клиентская подсистема и подсистема для Администраторов, Менеджеров и Кассиров, в статье показана вторая подсистема. Разработанный сервис позволяет администратору осуществлять управление всем функционалом системы; менеджеру организации - осуществлять ввод информации об организации, видах и размерах бонусов, создание ивентов и мероприятий, отслеживание активности клиентов; пользователю просматривать список всех продавцов с имеющимися баллами и скидками. Каждый продавец имеет свою систему начисления баллов и возврата денег.
**Ключевые слова:** кешбэк, продавец, покупатель, сервис, администратор, функционал, бонусы, роли.

## Введение

В интернете есть огромное количество сайтов и платформ, которые предлагают пользователям услугу кэшбэка. Там можно зарегистрироваться и получать промокоды, скидки и непосредственно кэшбэк. Ресурс подключает сразу несколько магазинов и соответственно покупатель может получать больше скидок [1, 2].

В данной работе представлен сервис «CashBack» для организации системы кэшбэка. Предполагается, что этим сервисом могут пользоваться продавцы всех видов товаров и услуг, для клиента имеется возможность просмотра мероприятий любого продавца, просмотр всех баллов покупателя у каждого продавца. Продавец может назначать баллы или бонусы, предложенные системой, на свои товары или услуги, вводить новые и редактировать старые сведения о филиалах и мероприятиях, управлять сотрудниками и клиентами.

Наличие подобной системы в Кыргызстане позволит поддерживать не только крупные организации, но и малый, средний бизнес в стране. В большинстве организаций малого и среднего бизнеса производится недостаточное финансирование области, позволяющей разработать индивидуальную систему по начислению бонусов для организации, тогда как сервис «CashBack» предлагает площадку, готовую к использованию. Это значительно выгоднее, поскольку компания не только получает готовый сервис, но и привлекает дополнительные потоки клиентов и каналы рекламы.

## 1. Функциональность продукта

Предлагаемый сервис имеет трехуровневую архитектуру и два уровня пользователя- клиент и администратор. На уровне администратора имеется три роли: Администратор, Менеджер и Кассир. Для каждой роли разработана своя подсистема с реализацией доступных ей функций[3].

Администратор — Управляет всем функционалом системы (рис. 1), а именно:
- редактирование организаций;
- изменить или удалить бонус;
- изменить или удалить клиента.

На рис. 2 приведен скриншот интерфейса подсистемы Администратор.

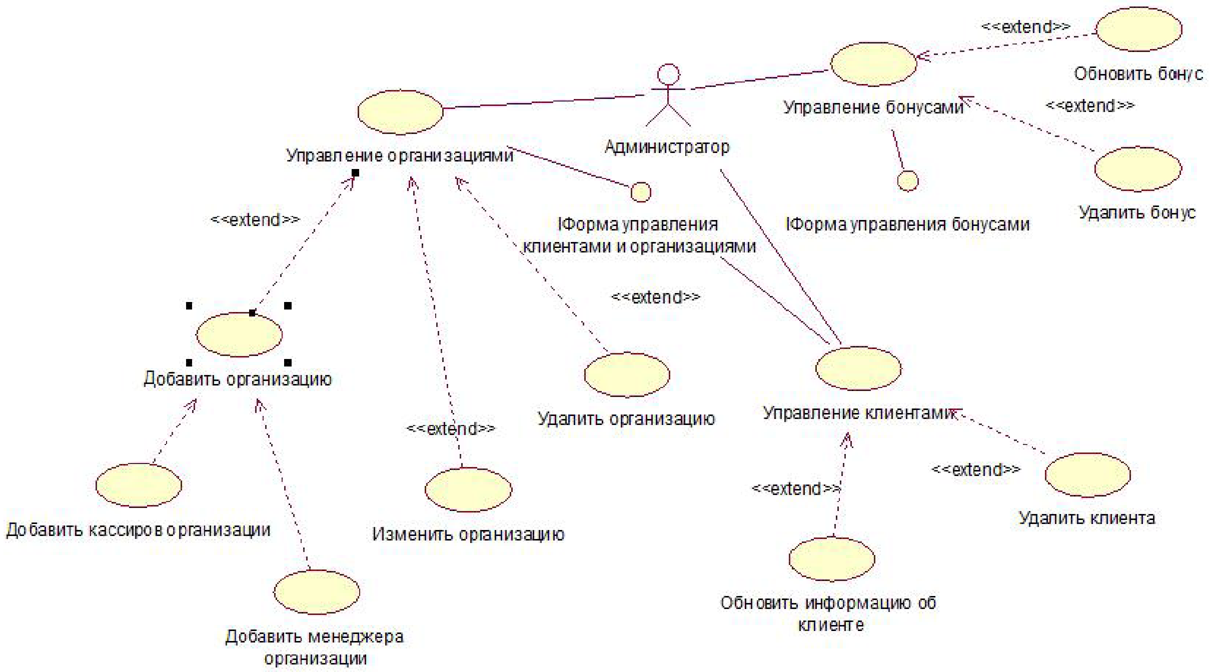



*Рис. 1. Функции подсистемы для Администратора сервиса «Cash Back»*

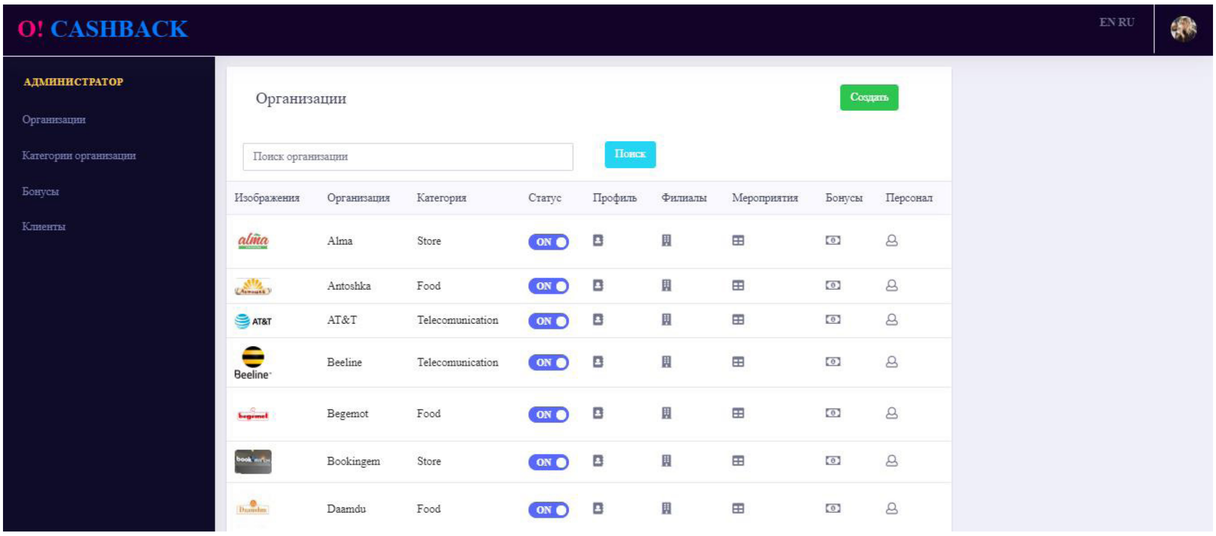



*Рис. 2. Демонстрация подсистемы для Администратора сервиса «Cash Back»*

На рис. 3 показан функционал подсистемы для Менеджера. Подсистема позволяет:

• редактировать информацию о филиалах;

• редактировать мероприятие;

• редактировать информацию о работнике;

• изменить установить тип и размер бонуса для организации;

• изменить профиль организации;

• посмотреть предпочтения клиентов организации.

На рис. 4 показан интерфейс подсистемы Менеджера.

Кассир — управляет бонусным счетом клиента, начисляет бонусы и списывает их за услугу (рис. 5):

• ввод суммы покупки (в зависимости от суммы рассчитываются баллы для клиента, выписывается чек);

• просмотр истории транзакций.

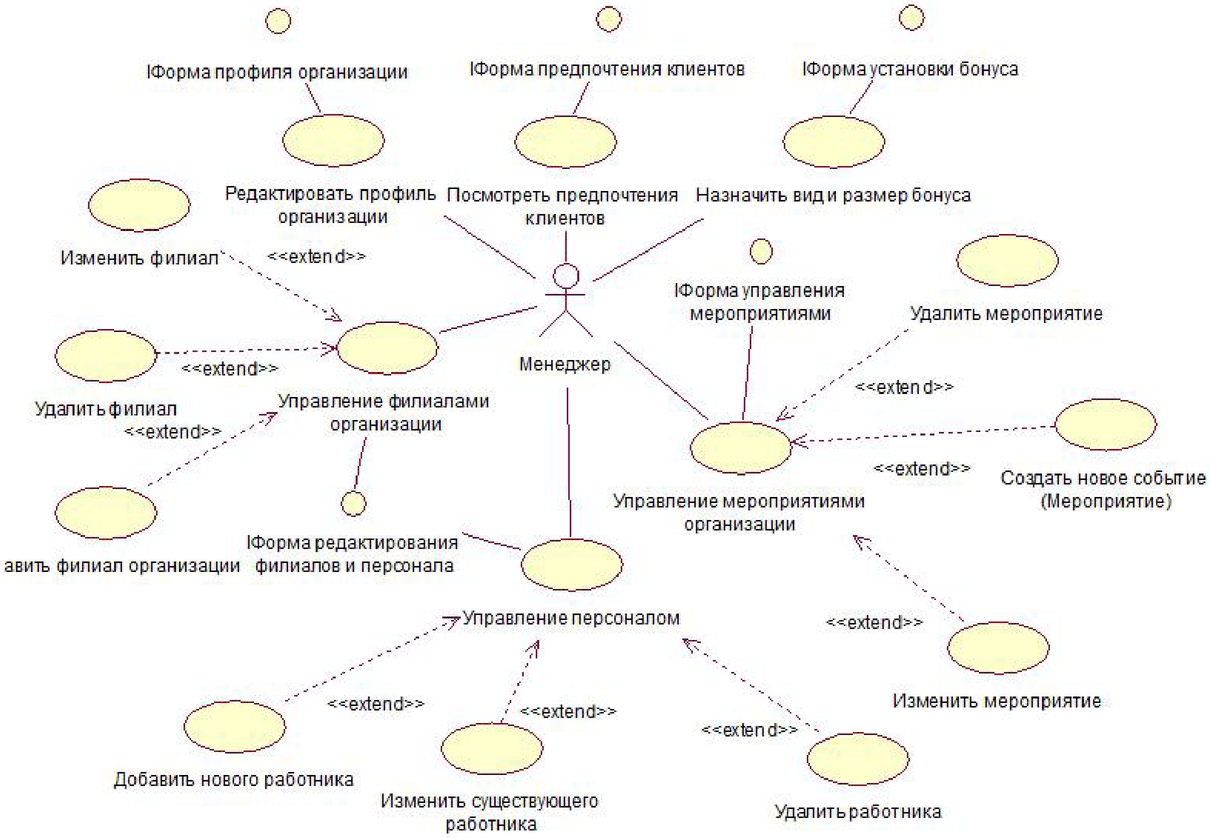



*Рис. 3. Функционал подсистемы для Менеджеров сервиса «Cash Back»*

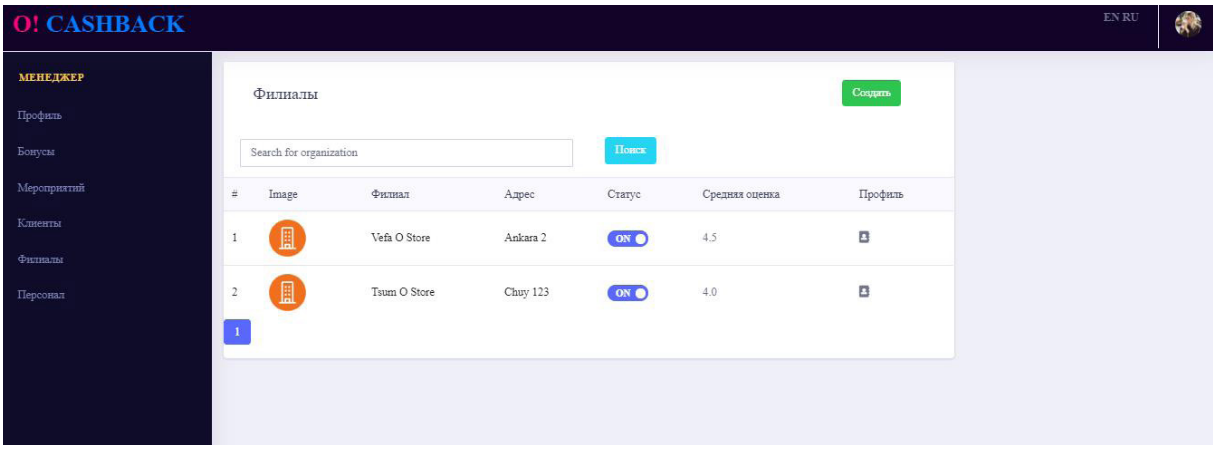



*Рис. 4. Демонстрация подсистемы Менеджера сервиса «Cash Back»*

На рис. 6 показан интерфейс подсистемы Кассир.

В разработанном сервисе предлагаются следующие виды бонусов:

1) «Welcome» бонус — организация может установить размер бонуса, который будет доступен только 1 раз для нового клиента. Виды «Welcome» бонуса:

a) На месте при посещении организации — для получения бонуса клиенту необходимо будет указать код, который задаст организация в админ панели. Размер бонуса устанавливается в виде единоразовой суммы зачисляемой на баланс.

b) По рекомендации друга — в данном случае указывается код друга, который порекомендовал организацию, в этом случае клиенту начисляется бонус, а также начисляется бонус клиенту, который порекомендовал организацию. Размер бонуса для клиента и друга, порекомендовавшего организацию, также задается в админ панели.

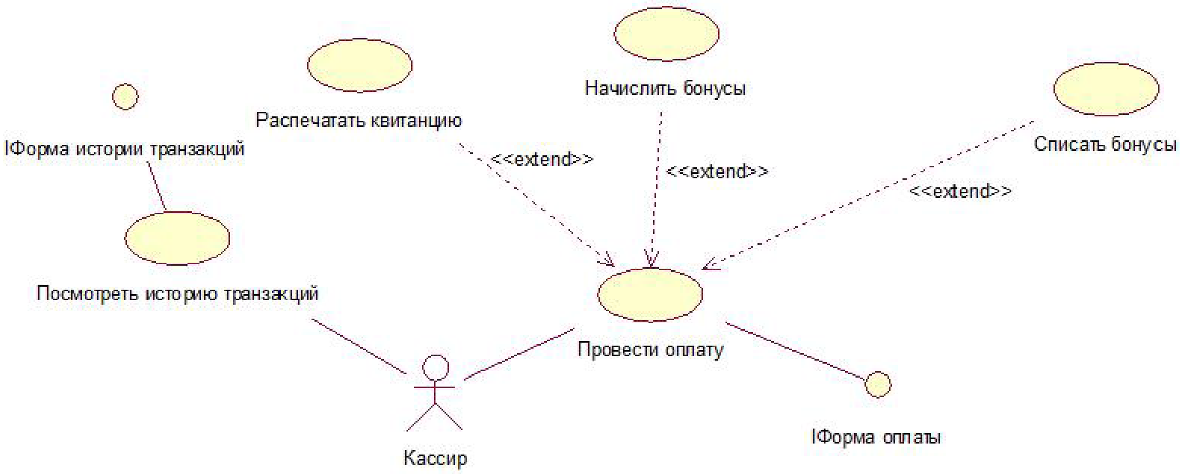



*Рис. 5. Функционал подсистемы для Кассиров сервиса «Cash Back»*

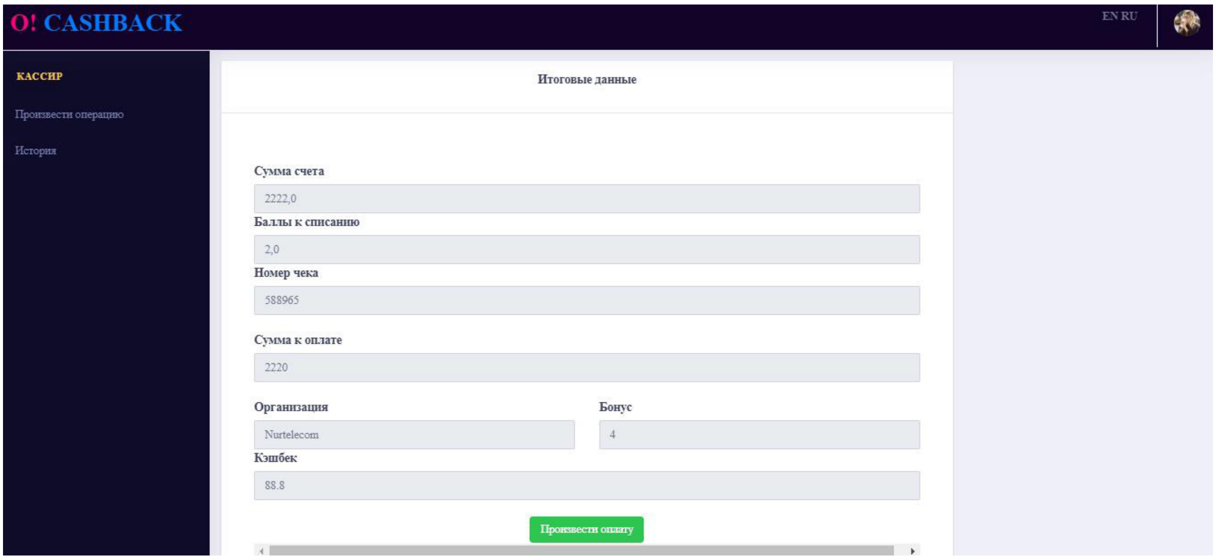



*Рис. 6. Демонстрация подсистемы Кассир  сервиса «Cash Back»*

Для «Welcome» бонуса необходимо указать период действия в днях, в течение которого его необходимо израсходовать, в противном случае бонус будет аннулирован.

2) Фиксированный бонус — организация для своих клиентов может установить фиксированный бонус в процентах, независимо от размера и объема приобретаемых услуг.

«Кешбек» бонус — делится на 2 типа:

a) Фиксированный «Кешбек» — организация для своих клиентов может установить размер «Кешбека» в процентах, который начисляется при покупке товара или услуги и доступен для оплаты за следующую покупку.

b) накопительный процент «Кешбека» — организация для своих клиентов может установить размер «Кешбека» в процентах в зависимости от размера приобретаемых товаров и услуг.

## 2. Стек технологий

При разработке сервиса был использован следующий стек технологий:

• Java — строго типизированный объектно-ориентированный язык программирования, разработанный компанией Sun Microsystems.

• Java Core — базовые java пакеты с классами, реализующие работу java приложения.

• Java EE (Java Enterprise Edition) — представляет платформу для создания корпоративных приложений на языке Java. Прежде всего это сфера веб-приложений и веб-сервисов.

• PostgreSQl — это свободно распространяемая объектно-реляционная система управления базами данных, наиболее развитая из открытых СУБД в мире и являющаяся реальной альтернативой коммерческим базам данных.

• Hibernate — это популярный framework, цель которого связать ООП и реляционную базу данных.

• Spring — представляет собой контейнер внедрения зависимостей, с несколькими удобными слоями (например: доступ к базе данных, прокси, аспектно-ориентированное программирование, RPC, веб-инфраструктура MVC). Это все позволяет вам быстрее и удобнее создавать Java-приложения.

• Maven — фреймворк для автоматизации сборки проектов.

• Git — распределённая система управления версиями.

• HTML/CSS — язык разметки гипертекста и каскадные таблицы стилей соответственно.

• JavaScript — мультипарадигменный язык программирования.

• Tomcat — контейнер сервлетов с открытым исходным кодом, разрабатываемый Apache Software Foundation. Реализует спецификацию сервлетов, спецификацию JavaServer Pages и JavaServer Faces

На рис. 7 показаны программные компоненты системы и их взаимодействие.

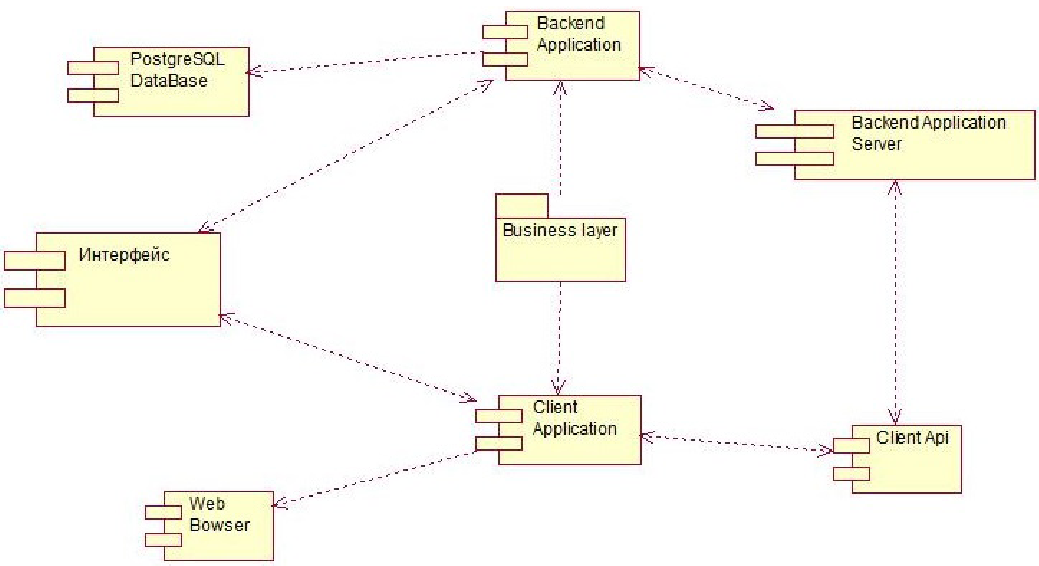



*Рис. 7. Диаграмма компонентов сервиса «Cash Back»*

**Заключение**

Тестирование системы показало, что реализованный проект полноценно функционирует и прост в использовании всеми субъектами сервиса «CashBack», также решены задачи в области его обслуживания. В последующем планируется добавить в функционал программы параметр отчетности о сбоях и ошибках, которые и будут являться неким каналом связи между сервисом и поддержкой.

**Литература**

1. Кэшбэк в 2019 году: что это, как работает, виды, плюсы и минусы. Компаньон Онлайн – URL:https://kompanion.online/biznes-termini/keshbek-chto-eto/ (дата обращения: 10.04.2020)

2. Как создать свой кэшбэк сервис – URL: https://cashback2.ru/info.php?read=13 (дата обращения: 12.04.2020)

3. Основы UML. Диаграммы использования – URL: https://pro-prof.com/archives/2594 (дата обращения: 1.04.2020)

УДК 004.42

# РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕРАКТИВНОГО СЕРВИСА ПОДДЕРЖКИ ОБУЧЕНИЮ ЯЗЫКУ SQL

**А. Э. Зинченко, М. В. Матвеева**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе рассматривается процесс проектирования интерактивного сервиса поддержки обучения языку SQL. Проведен анализ существующих приложений. На основе полученных данных выделена необходимая функциональность приложения, а также разработаны основные требования, по которым была построена модель данных и спроектирован интерфейс нового интерактивного сервиса поддержки обучения языку SQL, генерирующего задания по загружаемой пользователем схеме базы данных.
**Ключевые слова:** интерактивный сервис поддержки обучения, база данных, модель данных, SQL.

## Введение

Рынок веб-приложений каждый год пополняется огромным количеством обучающих ресурсов. Обучение языку структурированных запросов SQL остается достаточно популярным направлением, так как на данный момент его знание требуется во многих профессиональных областях, таких как: разработка и тестирование программного обеспечения, бизнес-аналитика, маркетинг.

На сегодняшний день существует множество сервисов, позволяющих овладеть и углубить знания языка запросов SQL. Данные сервисы интересны не только пользователям, желающим изучить язык SQL, но и преподавателям, которые могут использовать подобные средства для проверки уровня знаний студентов. В большинстве случаев такие сервисы включают в себя возможность самостоятельно написать операторы, которые должны вернуть или изменить данные, требуемые заданием.

У каждого из этих сервисов есть свои особенности и преимущества, но по большей мере они все схожи по функциональности и не соответствуют современным требованиям к веб-приложениям в сфере оформления визуальных интерфейсов и удобства в эксплуатации. К сожалению, ни один из сервисов на сегодняшний день не включает в себя возможность генерации заданий по модели данных, загруженной пользователем, а также выборки задач случайным образом. Помимо вышеперечисленного, ни в одном из существующих сервисов не реализовано разграничение прав доступа и не выделены специальные функциональные возможности для преподавателей.

Таким образом, актуальность работы определяется необходимостью разработки сервиса, полностью отвечающего современным требованиям, ориентированного на программы для обучения студентов и начинающих изучать язык SQL, с которым было бы удобно работать как студенту, так и преподавателю.

Цель работы состояла в разработке и реализации алгоритма генерации индивидуальных заданий на составление SQL-команд по произвольной модели данных, а также в реализации программного модуля для проверки решений.

## 1. Анализ существующих приложений

Наиболее известные сервисы на данный момент:

1) sql-ex;

2) pgexercises;

3) SQLBolt;
4) sqlzoo;
5) hackerrank.
Результаты сравнительного анализа представлены в табл.1.

Таблица 1

*Сравнительный анализ существующих приложений*

| **Критерий сравнения** | **sql-ex** | **pgexercises** | **SQLBolt** | **sqlzoo** | **hackerrank** |
|---|---|---|---|---|---|
| Поддержка русского языка | + | – | – | – | – |
| Личный кабинет | – | – | – | + | + |
| Вход от имени преподавателя | – | – | – | – | – |
| Многопользовательская авторизация | + | – | – | + | + |
| Современный дизайн | – | + | + | – | + |
| Проверка форматирования решений | – | – | – | – | – |
| Возможность загрузки базы данных | – | – | – | – | – |
| Возможность загрузки шаблонов заданий и типовых решений | – | – | – | – | – |
| Случайная генерация заданий по загруженной базе данных | – | – | – | – | – |
| Возможность преподавателя назначить индивидуальные задания | – | – | – | – | – |

Проанализировав пять различных сервисов, можно отметить, что все они имеют небольшой набор функциональных возможностей, а также не совсем удобный пользовательский интерфейс. Помимо этого, все, кроме одного сервиса, поддерживают только английский язык, что существенно осложняет изучение языка манипулирования данными для новичков.

Из представленных данных следует необходимость создания приложения, которое будет учитывать недостатки существующих сервисов и поддерживать их преимущества.

## 2. Метод генерации заданий

Многовариантными заданиями называют особый вид здания, которые имеют несколько вариантов условий и отличаются исходными данными или деталями постановки вопроса. Многовариантные заданий используются и для проверки знаний учащихся, где каждый ученик получает свой вариант условия, что затрудняет списывание, и для закрепления навыков за счет решения большого количества заданий на определенную тему.

Для автоматизации процесса генерации заданий преподавателями достаточно широко используются генераторы заданий, размещенных на общедоступных сервисах: kpolyakov.spb.ru, mytestbook.com, generatorzadach.narod.ru, www.schoolhousetech.com, www.math-aids.com, wolframalpha.com. Подробное описание методов работы данных сервисов представлены в статье [1] и монографии [2].

Проанализировав подходы к генерации заданий в указанных выше сервисах можно сделать вывод, что многовариантность задач достигается путем вариации коэффициентов, числовых значений, отдельных слов и в тестовых заданиях порядка следования вариантов ответа. Для математических дисциплин данные подходы являются достаточно эффективными, однако при формировании заданий на составление SQL-команд достичь желаемого результата с помощью применения таких подход не получится, так как вариация в числовых значениях не влияет на само решение, а приводит лишь к незначительным отличиям. С целью повышения вариативности заданий на составление SQL-команд используются индивидуальные схемы данных, которые загружаются в виде SQL-скриптов, содержащих операторы создания таблиц с ограничениями, накладываемыми на данные.

Для реализации генераторов в общем случае требуются знания программирования и использование специальных алгоритмов. Создание редактора генератора всегда основывается на некотором методе генерации заданий.

Рассмотрев и проанализировав популярные методы генерации тестовых заданий, для осуществления задачи формирования индивидуальных заданий на построение SQL-команд был выбран метод основанный на построении шаблонов. Выбранный метод является достаточно простым в использовании и реализации, так как не требует специальных знаний для добавления новых шаблонов в систему. При применение данного метода к индивидуальным входным схемам баз данных будет возможность получить большое количество многовариантных заданий.

Таким образом система позволяет пользователю загружать схемы баз данных, представленные в виде SQL-скриптов, содержащих операторы создания таблиц с ограничениями, накладываемыми на данные. Пользователи имеют возможность задавать шаблоны заданий. Параметрами шаблона для реализации генерации заданий на составление SQL команд являются имена таблиц, имена атрибутов, числовые значения, названия функций или знаки сравнения. Для каждого типа параметров реализован алгоритм генерации значений.

### 3. Алгоритм генерации заданий

Для генерации заданий используются шаблоны. Шаблон указывается в текстовом формате. В квадратных скобках в шаблоне указываются параметры. В программе в созданный массив помещаются все параметры, содержащиеся в шаблоне.

Для параметров также могут указываться дополнительные сведения. Для таблиц указывается число, для атрибутов дополнительными сведениями являются: падеж и тип данных. Программа разделяет массив из найденных параметров по их типам, так как для каждого предусмотрена различная обработка.

Для параметра «таблица» из базы данных находятся подходящие таблицы, которые содержат атрибуты необходимого типа, исключая из сравнения, атрибуты, которые имеют ограничение PRIMARY KEY или FOREIGN KEY.

Если не было найдено ни одной подходящей таблицы, программа заканчивается, и задание к этому шаблону не создается. В противном случае из списка найденных таблиц, случайным образом выбирается одна и для нее также случайным образом подбираются атрибуты необходимого типа.

Параметры «число», «знак сравнения» или «функция агрегирования» выбираются случайным образом из списка возможных значений сохраненных в программе.

Для параметров «таблица» и «атрибут» находятся в базе данных эквивалентные названия. Склонение названий атрибутов и таблиц по падежам, осуществляется с помощью веб-сервиса «Морфер» 3.0. Веб-сервис «Морфер» предназначен для склонения по падежам слов на русском языке, в программу он подключается в виде библиотеки с помощью фреймворка для автоматизации сборки Gradle.

Полученные значения подставляются в шаблон, на место их соответствующих параметров. Готовые задания сохраняются в базу данных.

Дополнительно в программе осуществляется проверка на уникальность сформированного задания в базе данных.

На рис. 1 представлена диаграмма компонентов модуля генерации заданий.

Компоненты модуля генерации заданий:

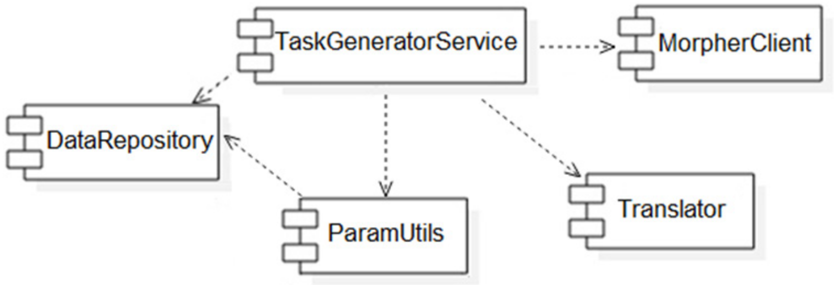


*Рис. 1. Диаграмма компонентов модуля генерации заданий*

• TaskGeneratorService — содержит бизнес-логику генерации заданий.

• MorpherClient — содержит классы для подключения к внешнему веб-сервису с ресурса morpher.ru.

• Translator — отвечает за поиск и подстановку эквивалентных названий.

• ParamUtils — отвечает за подбор параметров типа «число», «знак сравнения» или «функция агрегирования».

• DataRepository — включает в себя работу с базой данных.

**4. Метод проверки решений**

Во многих приложениях, посвященных обучению языку SQL, метод проверки правильности составления SQL-команд реализован на основе сравнения результатов эталонного решения и решения пользователя. Однако при реализации данного метода проверки возможен риск выдачи положительной оценки решению, которое является ошибочным, непрофессиональным или неоптимальным с точки зрения логики, так как получено всего лишь методом подбора [3].

Из этого следует, что существует необходимость анализировать не только результаты выполнения SQL команд, но и код решения. Для реализации проверки кода решения, оптимальным вариантом является сравнения решения задания по определенной теме с типовым решением подобного класса задач. Для этого необходимо осуществить хранение типовых решений, которые удобно было бы представить так же, как и задания в виде шаблонов.

Для каждого задания необходимо указать типовое решение, примеры типовых задач с ответами представлены в табл. 2 [4]. При введении типового решения преподаватель указывает параметры в квадратных скобках. Чтобы ускорить процесс поиска всевозможных различий в ответе студента необходимо вместо параметров подставлять определенные значения.

Таблица 2

*Примеры типовых заданий и типовых решений*

| Тема | Типовое задание | Типовое решение |
|---|---|---|
| SELECT * | Выбрать все данные о [таблица]. | SELECT *<br>FROM [таблица]. |
| WHERE + BETWEEN | Напишите запрос, выводящий все данные о [таблица], с id входящим в множество [число]. | SELECT *<br>FROM [таблица]<br>WHERE [атрибут] BETWEEN [число] AND [число]. |
| CASE | Выбрать [атрибут], и если есть [атрибут], то [функция агрегирования]. | SELECT [атрибут], CASE (WHEN [атрибут]<br>THEN [атрибут]<br>ELSE [функция агрегирования]<br>END)<br>FROM [таблица]. |

| | | |
|---|---|---|
| GROUP BY + HAVING | Выбрать [атрибут]. В результат включить только те [атрибут], количество которых [знак сравнения] [число]. | SELECT [атрибут]<br>FROM [таблица]<br>GROUP BY [атрибут]<br>HAVING COUNT([атрибут])[знак сравнения][число]. |

Стоит учесть то, что если введенное решение не соответствует типовому, то это не означает, что ответ неверный. Окончательную оценку правильности и оптимальности решения проводит преподаватель.

На рис. 2 представлены результаты проверки решений системой, где преподаватель может указать правильность выполнения задания.

### 5. Функциональные возможности и основные процессы системы поддержки обучения

Проанализировав все необходимые элементы интерактивного сервиса, возможности которого удовлетворяли бы студентов и преподавателей, была составлена следующая структура интерактивного сервиса (рис. 3).

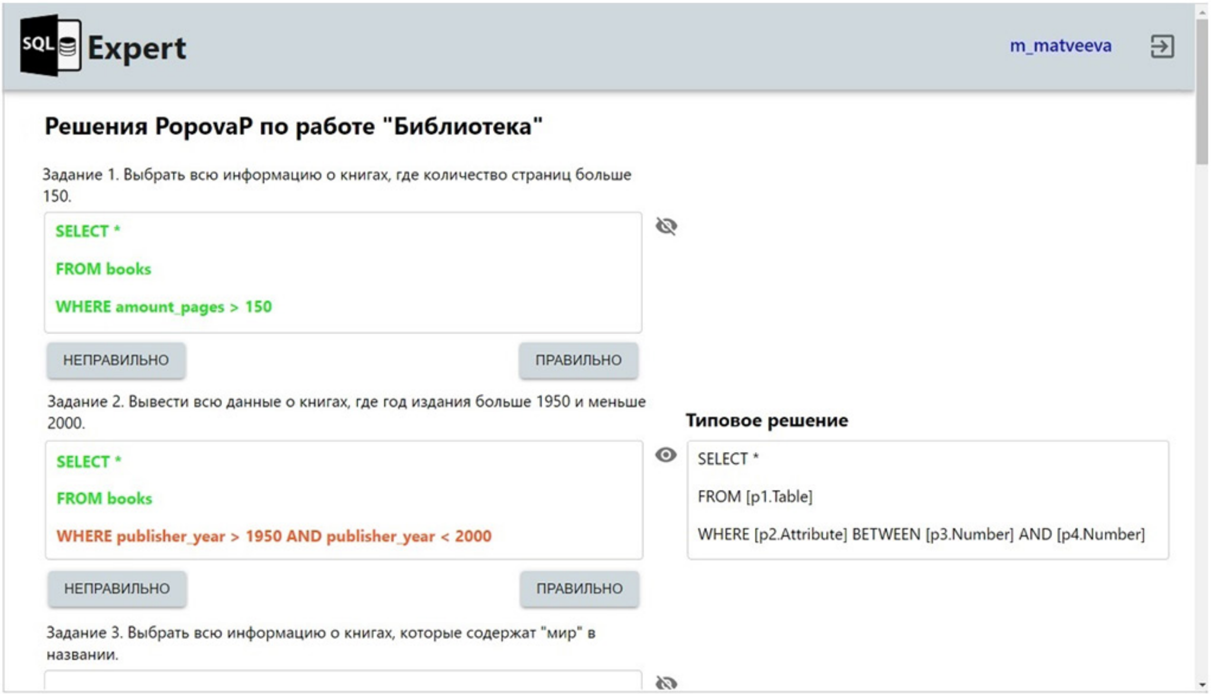



*Рис. 2. Страница, содержащее результаты проверки решений студента*

Серверная часть приложения состоит из следующих модулей, каждый из которых отвечает за определенную функциональность:

- модуль создания объектной модели базы данных;
- модуль генерации заданий;
- модуль проверки ответа студента с типовым решением.

На входе в систему поступает готовая база данных в виде SQL скрипта, который загружает преподаватель. В модуле создание объектной модели загруженный скрипт преобразуется и сохраняется в базу данных в виде отдельных названий таблиц, столбцов и их ограничений. На основе созданной объектной модели в модуле генерации заданий приложение с помощью хранимых тем и шаблонов, которые также загружает преподаватель, генерирует набор индивидуальных заданий по схеме. Сгенерированные задания поступают студенту в текстовом формате.


*Рис. 3. Общая структура интерактивного сервиса*

Студент в текстовом формате отправляет решённые задания с сайта на сервер, где они проверяются в системе на соответствие с типовым решением, которые хранятся в базе данных.

На основании результата проверки задания системой, преподаватель принимает решение о правильности решения студента.

В результате работы приложения отображаются и суммируются правильно решённые задания студента, которые потом также хранятся на сервере.

### 6. Реализация программного комплекса

При реализации проекта использовались следующие программные средства:

- интерактивная среда разработки IntelliJ IDEA Community Edition 2018.1.3;
- язык разработки Java;
- реляционная система управления базами данных PostgreSQL;
- фреймворк для автоматизации сборки Gradle;
- фреймворк для Java-платформы Spring;
- фреймворк React JS.

Приложение имеет REST-архитектуру, которая позволяет разделить написание серверной части и клиентской части. Серверная часть подразделяется на 3 слоя: слой для работы с базой данный, слой, отвечающий за бизнес-логику, и слой, обрабатывающий запросы к серверу и отправляющий сформированные ответы.

Слой для работы с базой данных представлен следующими типами данных:

- сущности, которые отражают структуру базы данных в виде Java-классов, которые ставятся в соответствие таблицам с помощью ORM-фреймворка Hibernate;
- классы-репозитории, которые предоставляют операции чтения, создания, обновления и удаления данных из базы посредством соответствующего манипулирования сущностями.

Слой, отвечающий за бизнес-логику приложения, содержит 3 основных модуля:

- модуль ScriptParser;
- модуль TaskGenerator;
- модуль CheckAnswer.

Сервисы, относящиеся к модулю ScriptParser, отвечают за анализ SQL-скриптов и преобразование их в объектную модель. Модуль TaskGenerator осуществляет генерацию заданий на составление SQL-команд по указанной базе данных и выбранным шаблонам. Модуль CheckAnswer реализует проверку решений заданий.

Классы-контроллеры относятся к слою, обрабатывающем HTTP-запросы клиента и формирующему ответы по соответствующим URL.

## Заключение

Результатом работы является реализация интерактивного сервиса поддержки обучения языку SQL с возможностью генерации индивидуальных задач по схемам баз данных и проверки введенных решений.

## Литература

1. *Коновалов, Я. Ю.* Генератор контрольных заданий по высшей математике: опыт создания и применения / Я. Ю. Коновалов, С. К. Соболев // Инженерный вестник. – 2015. – № 04. – С. 1046–1055.

2. Посов, И. А. Обзор генераторов и методов генерации учебных заданий / И. А. Посов // Образовательные технологии и общество. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 593–609.

3. Семенова, З. В. Сравнительная характеристика средств автоматизированной проверки правильности составления SQL-запросов / З. В. Семенова, С. А. Любич, А. Г. Кузнецов, П. А. Мальцев // Вестник СибАДИ. – 2017. – № 3(55). – С. 152–160.

4. Матвеева, М. В. Язык манипулирования данными. Практикум / М. В. Матвеева. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. – 44 с.

УДК 004

# РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ БАНКА-АГЕНТА, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩЕГО ВЫПЛАТЫ СТРАХОВОГО ВОЗМЕЩЕНИЯ

**Ю. О. Игнатьева, Е. С. Барановский**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Данная работа посвящена разработке веб-приложения для банка-агента, осуществляющего выплаты страхового возмещения вкладчикам банков, потерпевшим страховой случай. Результатом работы является приложение, реализованное с помощью технологии ASP.NET.

**Ключевые слова:** технология ASP.NET, веб-программирование, банк, страхование вкладов, банк-агент, выплата страхового возмещения, ASP.NET MVC Framework, ADO.NET Entity Framework, Code First, базы данных, паттерны проектирования.

## Введение

Банк — финансово-кредитная организация, производящая разнообразные виды операций с деньгами и ценными бумагами и оказывающая финансовые услуги правительству, юридическим и физическим лицам. Банк — это коммерческое юридическое лицо, которое:

– создано в целях извлечения прибыли;

– имеет право осуществлять банковские операции;

– имеет исключительное право на привлечение денежных средств юридических и физических лиц с целью их последующего размещения от своего имени; а также на открытие и ведение банковских счетов юридических и физических лиц;

– действует на основании специального разрешения (лицензии) полномочных государственных органов;

– не имеет права осуществлять производственную, торговую, страховую деятельность.

Вся банковская деятельность делится на несколько частей:

– прием и безопасное хранение вкладов;

– кредитование;

– расчетное обслуживание;

– дисконтирование — учет векселей;

– информационно-консультационные услуги;

– торгово-комиссионная деятельность;

– и другие.

Все банковские вклады и счета частных лиц и малых предприятий застрахованы. Если у банка отзывают лицензию, вкладчики гарантированно получают свои средства в пределах 1,4 миллиона рублей. Функция возврата застрахованных средств является основной функцией «Агентства по страхованию вкладов» (ГК «АСВ»). Все банки, которые имеют право работать с частными вкладами, обязаны входить в ССВ и уплачивать взносы в Фонд обязательного страхования вкладов (ФОСВ). Из этого фонда и выплачивается страховое возмещение при отзыве у банка лицензии. Вклады в банке считаются застрахованными со дня включения банка в реестр банков-участников системы обязательного страхования вкладов.

При наступлении страхового случая у какого-либо банка ГК «АСВ» осуществляет выплату страхового возмещения вкладчикам этого банка самостоятельно и (или) через банки-агенты, действующие от его имени и за его счет. Конкурсный отбор банков-агентов, а также их взаимодействие с Агентством осуществляется в порядке, установленном регулятивными документами Агентства. Страховым случаем, согласно Федеральному закону № 177-ФЗ, признаются отзыв (аннулирование) лицензии у банка или введение Банком России моратория на удовлетворение требований кредиторов банка (право на отсрочку платежа по долговому обязательству, предоставляемое в административном или судебном порядке).

ГК «АСВ» для каждого страхового случая выбирает несколько банков-агентов, которые помогают ему в осуществлении выплат страхового возмещения пострадавшим вкладчикам. Этим могут заниматься банки помимо своей основной деятельности. АО «Банк ДОМ.РФ» также является банком-агентом. С полным списком участников в выплатах страхового возмещения пострадавшим вкладчикам можно ознакомиться на сайте ГК «АСВ».

На текущий момент у банка-агента АО «Банк ДОМ.РФ» нет соответствующего программного обеспечения, которое бы позволило ему без проблем обмениваться данными с ГК «АСВ» и осуществлять выплаты страхового возмещения вкладчикам.

## 1. Постановка задачи

Рынок не предоставляет решений данной задачи, поэтому необходимо реализовать свое. Приложение должно позволять:

1. Загружать данные из пакетов обмена данными с АСВ, просматривать их и совершать поиск по критериям.

2. Осуществлять действия над записью отдельного вкладчика:

– просматривать информацию о вкладчике, размер обязательств и встречных требований, информацию о представителях в случае юридических лиц;

– регистрировать выплату страхового возмещения, отказ в выплате или несогласие с размером возмещения с формированием соответствующих документов для печати;

– формировать справку о выплатах и выписку из реестра о вкладчике;

– в случае необходимости регистрировать возврат суммы возмещения.

3. Формировать отчеты с информацией процесса выплаты страхового возмещения:

– еженедельные отчеты (по выплатам и несогласным вкладчикам, а также специальный отчет);

– промежуточные отчеты (по выплатам за счет, предоставленных АСВ и за счет собственных средств);

– итоговые отчеты (перечни вкладчиков, подавших заявление о выплате, вкладчиков с неверно указанными реквизитами, вкладчиков, непрошедших проверку и вкладчиков, получивших возмещение;

– сведения о возвратах выплаченных сумм страхового возмещения.

4. Создавать запись физического лица, индивидуального предпринимателя или юридического лица в случае, когда лицо не было передано через пакеты обмена данными.

5. Отображать статистику выдачи возмещения за определенный период.

## 2. Выбор технологий и способа реализации

Удобным для разработки большого приложения будет использование шаблона MVC. Данный шаблон хорошо реализован в ASP.NET, поэтому в качестве языка программирования был выбран C#, а в качестве фреймворка — ASP.NET MVC [1]. Для хранения данных выбрана СУБД Microsoft SQL Server, а для работы с базой данной из приложения — технология доступа к данным — Entity Framework [2].

Исходя из документов обмена данными банка-агента и АСВ, было выявлено большое количество сущностей. Чтобы сократить количество кода и оптимизировать процесс работы с сущностями, внутри приложения было принято решение использовать такой паттерн проектирования, как Unit of Work.

В приложениях ASP.NET MVC нередко используется паттерн Generic Repository для инкапсулирования логики работы с источниками данных. И нередко приходится оперировать множеством сущностей и моделей, для управления которыми создается также множество классов-репозиториев. Паттерн Unit of Work позволяет упростить работу с различными репозиториями и дает уверенность, что все репозитории будут использовать один и тот же контекст данных. Вместо того, чтобы использовать классы репозиториев по отдельности, все они помещаются в класс, реализованный в соответствии с паттерном Unit of Work, через который и происходит работа с ними.

## 3. Реализация

Приложение разработано по шаблону MVC. Оно содержит около 30 классов моделей, которые были написаны в соответствии с форматами обмена данными. Также в приложении есть около 10 классов типа ViewModel. Они необходимы для скрытия той логики приложения, знать которую пользователю не обязательно, и дополнения той логикой, которая в моделях отсутствовала.

Приложение содержит три контроллера:

– ReportController — класс контроллера, отвечающего за формирование документов;

– HomeController — класс контроллера, отвечающего за основную логику приложения, работу с моделями;

– AuthController — класс контроллера, отвечающего за аутентификацию только тех сотрудников, которые будут принимать участие в выплате страхового возмещения.

Для отображения моделей в приложении есть обычные и частичные представления. Частичные используются для отображения данных без перезагрузки страницы с информацией о вкладчике, а обычные для отображения страниц с формированием отчетов.

Также были реализованы вспомогательные классы:

– WordGenerator, TxtHelper и XmlHelper — классы для формирования отчетов;

– BankInfoConverter, Commitmentconverter и т.п. — классы для конвертирования строчек файлов из пакета обмена данными в объекты соответствующих типов;

– LoadFile, LoadFileMethods и LoadSearchFiles — классы с функциями загрузки данных из файлов.

## 4. Технические требования

Разработанное веб-приложение предназначено для использования на компьютере, имеющем выход в интернет. Требуется наличие любого браузера из представленных ниже:

– Google Chrome версии 6.0 и выше;

– Internet Explorer версии 9.0 и выше;

– Safari версии 5.0 и выше;

– Firefox версии 4.0 и выше;

– Opera версии 10.6 и выше.

Для более быстрой работы приложения желательно наличие высокоскоростного интернета.

Для локального запуска приложения:

– Microsoft .NET Framework 4.5 и выше;

– СУБД MS SQL Server.

Размер минимального занимаемого дискового пространства сейчас: 28 Мб. Размер минимального требуемого дискового пространства вовремя работы приложения сейчас: 208 Мб.

## Заключение

Результатом работы является веб-приложение, позволяющее банку-агенту участвовать в выплате страхового возмещения. Были реализованы функции, указанные в постановке задачи. Приложение было опубликовано на внутреннем сервере компании для будущей работы с ним.

## Литература

1. ASP.NET MVC 5 с примерами на C# 5.0 для профессионалов / А. Фримен. – 6-е изд. – Москва : Вильямс, 2018. – 736 с.

2. Programming Entity Framework: Code First / Julia Lerma, Miller Rowan. – 1-е изд. – California : O'Reilly Media, 2012. – 196 с.

3. JavaScript. Подробное руководство / Дэвид Флэнаган ; пер. с англ. – 6-е изд. – Санкт-Петербург : Символ-Плюс, 2012. – 1080 с.

4. *Казимагомедов А. А.* Банковское дело. Организация деятельности центрального банка и коммерческого банка, небанковских организаций. Учебник / А. А. Казимагомедов – Москва : Инфра-М, 2017. – 504 с.

УДК 004.42

# АНАЛИЗ ТОНАЛЬНОСТИ ТЕКСТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОСЕТИ

**П. В. Казаков**

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** В настоящее время нейронные сети начали массово применяются для разного рода задач. В связи с этим было принято решение использовать их и в центре поддержки пользователей одной компании, для определения тональности текста в созданной клиентом заявке, с целью скорейшей передачи информации негативно настроенного пользователя, менеджерам по общению с клиентами. Это позволит экстренно решать проблему возможного причинения репутационного вреда компании. В данной статье предложен подход, который использует текстовые данные для распознавания текущих эмоций пользователя, применяя технику доминирующего значения.
**Ключевые слова:** тональность текста, интеллектуальная система обучения, нейронные сети, дерево доминирующих значений.

## Введение

В центрах технической поддержки определение настроения пользователя является довольно важным фактором. Своевременное реагирование на негативно настроенного пользователя может помочь сгладить его впечатления о продукте, который по каким-либо причинам ему не понравился.

В данной работе будет приведена новая методика, в основе которой лежит метод доминантного значения, то есть набор «ключевых» слов, которые наилучшим образом соответствуют предполагаемому значению целевого слова и оценочной метод — для определения тональности текста. Другими словами, этот подход будет воспринимать целевое значение как главное слово, а для определения целевого смысла необходимо добавить несколько ведомых слов к главному.

Таким образом, мы можем отделить сочетания слов «не буду использовать этот продукт» от «буду использовать этот продукт». Очевидно, что смысл с добавленным «не» становится совершенно иным. Другой пример: слово «программа» может иметь различное значение в зависимости от контекста: 1) компьютерная программа с такими словами как: код, алгоритм и расчет; 2) учебная программа — школа, знание, учитель и т.д.; 3) ТВ программа — телевизор, фильм и другое.

Оценка текста (или теория «Смысл — Текст») — это лингвистическая теория, созданная И. А. Мельчуком, которая пытается смоделировать способность языка к определенным мнениям и отношениям в рассматриваемом тексте [4]. Такой анализ содержит три различных аспекта: отношение, вовлеченность и градация [2]. В данной статье из приведенных аспектов внимания будет удостоено лишь отношение и его классификации.

Отношение делятся на три категории: влияние, осуждение и признательность, и определяется режимом, в котором человек действует в определенном состоянии и отражает свой эмоциональный настрой. Они представляют собой способность выражать эмоциональные, нравственные и эстетические чувства соответственно. Например, «при добавлении элемента управления X у меня не возникло особых сложностей и ошибок при запуске» и другое предложение «при добавлении элемента управления X я был впечатлен его возможностями». Таким образом, получаем, что при использовании методов доминирующего значения, слова «сложность и ошибка» могут быть интерпретированы как отрицательная эмоция, а слово «впечатлен» — как положительная.

Определение тональности теста полезно для понимания отношения пользователя в конкретном обсуждении с использованием интеллектуальной системы обучения. Для проверки алгоритма было проанализировано несколько десятков заявок от пользователей и дискуссий с ними, которые в дальнейшем были распределены по эмоциям: радость, гнев, печаль, отвращение, стыд и ненависть. Процесс обучения нейронной сети состоял из двух этапов:

1) отделение 25 % текстов, извлечение признаков на основе оценочного метода, создание иерархии доминирующих значений и обучение нейронной сети на подготовленных примерах.

2) использование полученной сети для прогнозирования тональности текста.

## 1. Методика определения тональности

Как было сказано выше, архитектура предлагаемой сети содержит два этапа: этап обучения и этап классификации. Этап обучения происходит на стороне сервера. Применяя методы доминирующего значения на выбранном наборе данных, формируется дерево иерархии [3]. На основе текстов получают дерево из шести характеристик: радость, гнев, печаль, отвращение, стыд и ненависть.

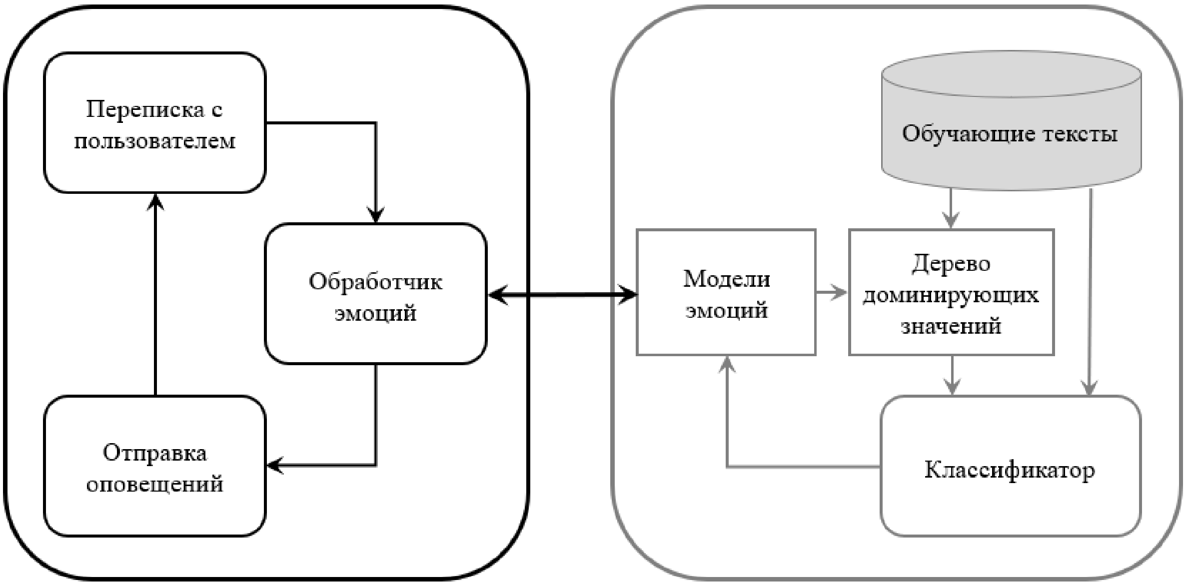



*Рис. 1. Схема определения тональности текста*

Классификатор на входе получает два вида информации. Это дерево иерархии для доминирующего значения для шести классов и заявки от пользователей, дискуссии с ними. Так как при использовании подобных классификаторов используется довольно большое количество обучающих данных для классификации текста, это является очень трудоемкой задачей, которая занимает длительное время. В предлагаемом подходе идея состоит в том, чтобы сначала построить дерево доминирующих значений, а затем использовать его для классификации обрабатываемых текстов на основе данных из модуля эмоций. В этом модуле содержится два типа набора слов. Итак, сначала обработчик эмоций извлекает некоторый набор слов из переписки с пользователем, удаляет стоп слова и переставляет слова для удобства работы модуля. Стоп словами обычно являются слова, которые не несут смысловой нагрузки в тексте, такие как предлоги, местоимения и другие.

Обработчик эмоций использует внутри себя алгоритм, определяющий эмоциональный окрас сформированного набора слов, на основе моделей эмоций и дерева доминирующих значений. После определения негативной эмоции происходит отправка оповещения отделу по работе с клиентами о недовольстве конкретного пользователя, чтобы оперативно уладить этот вопрос и не позволить ситуации усугубится.

## 2. Построение дерева доминирующих значений

Чтобы наглядно описать предлагаемый подход, представим, что коллекция состоит из $m$ эмоций, т. е. $E = \{\xi_k\}_{i=1}^{m}$. Так как набор для обучения по каждой эмоции ограничен, то нужно попытаться представить эту коллекцию как иерархию доминирующий значений [1]. В этом случае каждая эмоция будет представлена конечных набором примеров, т. е. $\xi_k = \left\{ D_v^k \middle| v = 1,\ldots,r_k \right\}$. Теперь вопрос состоит в том — как использовать эти примеры для построения доминантных значений соответствующей эмоции. То есть, эти примеры содержат в себе слова, означающие конкретную эмоцию. Задача в том, чтобы определить эти слова.

Каждый пример представлен фиксированным набором слов, таким образом $D_v^k = \left\{ w_{jv}^k \middle| j = 1,\cdots,n_v \right\}$, где $w_{jv}^k$ — частота появления слова $w_j$ в примере $D_v^k$, принадлежащий к эмоции $\xi_k$. Частота определяется как количество слов $w_j$ в $D_v^k$.

Цель состоит в том, чтобы выбрать топ слов $T$, которые могут быть представлены как доминирующие значения конкретной эмоции. Предположим, что слово $w_c^k$ символизирует эмоцию $\xi_k$. Тогда порядок действий будет следующим:

1) Найдем значения $w_{jv}^k$ для каждого $j, v$. (1)

2) Предположим, что $\beta_{kv}$ — частота появления эмоции $\xi_k$ в примере $D_v^k$.

3) Вычислим максимальное значение $\beta_{kv}$ для каждого $v$

$$F_c^k = \max_{v=1,\ldots,r_k} \left\{ \beta_{kv} \right\}. \tag{2}$$

4) Определим максимальное значение $w_{jv}^k$ для каждого $j, v$

$$F_{wj}^k = \max_{v=1,\ldots,r_k} \left\{ w_{jv}^k \right\}. \tag{3}$$

5) Выберем $F_c^k$, удовлетворяющий условию $0 \le F_{wj}^k \le F_c^k$.

6) И наконец, рассмотрим доминирующее значение вероятности

$$P_{kj} = P_{kj}\left( w_j \middle| \xi_k \right) = \frac{1}{r_k} \left[ \sum_{v=1}^{r_k} \frac{w_{jv}^k}{F_c^k} \right], \tag{4}$$

где $j = 1,\ldots,n_v$, $k = 1,\ldots,m$.

Поэтому делим $w_{jv}^k$ на максимальное значение $F_c^k$ частоты эмоции $\xi_k$, а затем нормализуем результаты путем деления на количество примеров $r_k$ в коллекции $\xi_k$. Основываясь на формулу (3) получаем, что $0 \le P_{kj}\left( w_j \middle| \xi_k \right) \le 1$.

## 3. Построение нейронной модели

Описанная выше система создаст шесть моделей — по одной для каждой из характеристик тональности: радость, гнев, печаль, отвращение, стыд и ненависть.

Для каждой эмоции $\xi_k$, у нас есть набор из $N$ примеров $\xi_k$. Для каждого набора эмоции применив формулы (1)–(4), получим множество доминантных значений, каждое слово в котором имеет $P_{kj}$ значение для слова $w_i$ и эмоции $\xi_k$.

Сортируем значения коллекции $\left\{ P_{k1}, P_{k2},\ldots, P_{kn} \right\}$ в порядке убывания. В результате доминирующие значения эмоции могут быть представлены набором слов, соответствующим коллекции $\left\{ P_{k1}, P_{k2},\ldots, P_{kn} \right\}$, то есть $\xi_k^n = \left\{ w_{k1}, w_{k2},\ldots, w_{kn} \right\}$.

Таким образом, мы выбираем топ $N$ значений $P_{kj}$ для формирования дерева доминирующих значений. Каждая эмоция соединяется с зависимым словом. Эта зависимость представляет собой доминирующее значение и связана с вероятностью этой эмоции, как показано на рис. 2.

Исходя из этого, можно создать шесть моделей для представления каждой из эмоций. Каждая модель представляет собой набор, называемый эмоционально-доминантными нейронными моделями $M_k$. Каждая $M_k$ содержит топ $N$ доминирующих значений вероятностей $M_k = \{P_{k1}, P_{k2},\ldots, P_{k10}\}$.

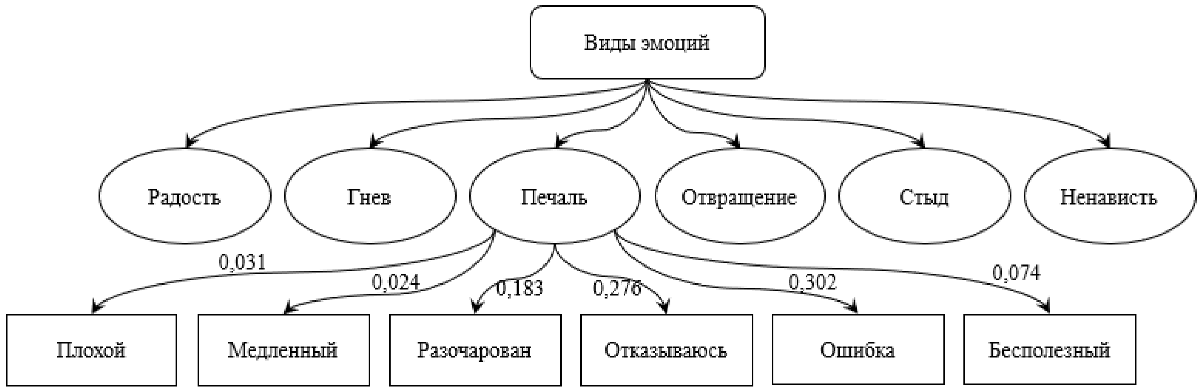



*Рис. 2. Дерево доминирующих значений*

Соответствующий набор слов для модели $M_k$ представлен в виде $\xi_k^N = \{w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{k10}\}$.

Для примера рассмотрим $\omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$, где $e_t$ является словом в тексте $\omega$. Для каждой эмоции находим значение $\Lambda_k$ модели:

$$\Lambda_k(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_{ki}, \tag{5}$$

где $\alpha_i = \begin{cases} 1 & e_i \in \xi_k^N \\ 0 & e_i \notin \xi_k^N \end{cases}$, для каждого $i = \overline{1, N}$.

Алгоритм, используя уравнение (5), для вычисления значений модели для каждой эмоции, определяет тональность текста и возвращает эмоцию, которая представляет собой набор слов. Поэтому в нем определяется наибольшее значение, и возвращается его индекс, который используется для определения главной эмоции.

## 4. Результаты нейросети

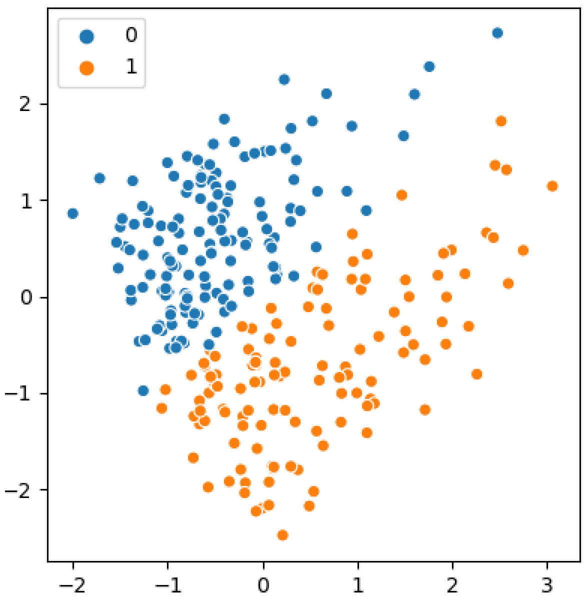



*Рис. 3. Распределение текстов по двум эмоциям (радость и гнев)*

Для упрощения получения результатов использования нейронных сетей была использована переобученная нейронная сеть «BERT-Base, Multilingual Cased» от Google, основанная на данных из всемирной библиотеки Wikipedia для 104 языков, для получения базовых связей слов. Для удаления стоп слов была использована специальная библиотека на Python — nltk.corpus. Основываясь на уравнениях (1)–(5), были получены результаты, представленные на рис. 2.

Каждый узел содержит в себе одну эмоцию. Каждая эмоция ассоциируется с верхним N-доминантным значением слова. Узел между словом и эмоцией обозначен с его доминирующей вероятностью значения, как показано на рис. 2.

Для более явной оценки полученного алгоритма были отобраны и отсортированы вручную по 100 текстов для 2-х эмоций — радость и гнев. Затем эти тексты были обработаны алгоритмом для оценки правильности распределения, с предварительным обучением модели на 25 % текстов. Полученные результаты отображены на рис. 3. Анализ этих данных показал, что алгоритм ошибочно отнес не в ту группу около 10 % текстов. Подобные результаты можно отнести к допустимой погрешности.

## Заключение

Определение тональности текста становится важной областью в различного рода исследованиях. В данной статье предложен подход для получения информации о настроении пользователя на основе текстов, полученных от центра технической поддержки компании X. Был использован метод доминирующих значений для определения тональности не, по ключевым словам, а по их значению в тексте. Было построено иерархическое дерево для шести эмоций — «радость», «гнев», «печаль», «отвращение», «стыд» и «ненависть», и предлагаемый на его основе алгоритм позволяет классифицировать обрабатываемый текст и отправлять сообщения в случае обнаружения негативного настроя пользователя.

## Литература


1. *Нигматулина А. Н.* Генетический алгоритм выбора доминантных признаков для нейронной сети // Программные продукты и системы. – 2009. – № 3. – С. 5–8.

2. *Николенко С., Кадурин А., Архангельская Е.* Глубокое обучение. – СПб. : Питер, 2018. – 480 с.

3. *Morin, F., Bengio, Y.* Hierarchical Probabilistic Neural Network Language Model // Aistats. – 2005. – 5.

4. Мельчук И. А. Опыт теории лингвистических моделей «Смысл $\Leftrightarrow$ Текст». – М. : 1999. – 368 с.

УДК 004.622

# РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

**А. А. Капранчикова, М. П. Лукин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Данная работа посвящена разработке приложения для определения характеристик кооперативной игры. При разработке приложения использован язык С#. Цель данной работы — реализовать алгоритмы для вычисления по заданной кооперативной игре ее различных характеристик.
**Ключевые слова:** десктоп приложение, теория кооперативных игр, оптимальные стратегии, С#.

## Введение

С развитием экономики вопрос о совместной деятельности экономических субъектов вышел на новый уровень. Так, для увеличения прибыли некоторые участники экономики могут объединяться в коалиции. В них они могут добровольно обмениваться информацией, совместно выбирать стратегии, передавать друг другу части выигрышей и т.п. Такое поведение и является базовым в *кооперативных играх* [4]. Сама же кооперативная игра может быть задана некоей функцией, ставящей каждому множеству игроков в соответствие их максимальный уверенно получаемый выигрыш.

*Теория кооперативных игр* [5] исследует типы коалиций, образующихся в процессе игры и условия, необходимые для их устойчивого существования.

Для определения оптимальной стратегии экономической деятельности субъектов было разработано приложение, позволяющее задавать кооперативные игры и вычислять их характеристики.

## 1. Анализ

### *1.1. Словарь используемых терминов*

Игра называется *кооперативной*, если в ней игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях, таких как добровольный обмен между игроками информацией, совместный выбор стратегий, передача игроками части выигрыша друг другу и т. п. Иначе говоря, игроки могут образовывать коалиции. Кооперативная игра называется *существенной*, если сумма выигрышей всех отдельно взятых игроков меньше выигрыша коалиции, образованной ими [5].

Функция, ставящая в соответствие каждой коалиции наибольший уверенно получаемый ею выигрыш, называется *характеристической функцией* [4]. *Супераддитивность* характеристической функции свидетельствует о том, что объединение игроков в коалиции (а образовавшихся коалиций — в еще большие коалиции) является целесообразным с точки зрения увеличения выигрыша [4].

### *1.2. Общий анализ задачи*

Для решения поставленной задачи необходимо написать программу, позволяющую задавать различные кооперативные игры посредством установления характеристической функции — функции, которая ставит в соответствие каждой коалиции $S$ наибольший уверенно получаемый ею выигрыш $V(S)$, проверять кооперативную игру на существенность, то есть на соответствие кооперативной игры следующей формуле: $\sum_{i \in N} V(i) < V(N)$, проверять характеристическую функцию игры на супераддитивность, то есть на выполнение для всех непересекающихся подмножеств $A$ и $B$ неравенства: $V(A \cup B) \geq V(A) + V(B)$, строить (0 1)-редуцированную форму игры. Эта форма должна удовлетворять следующим условиям: $V(i) = 0$, $\forall i \in N$ и $V(N) = 1$. Тогда характеристическую функцию можно вычислить по следующей формуле: $V'(S) = \dfrac{V(S) - \sum_{i \in S} V(i)}{V(N) - \sum_{i \in N} V(i)}$.

## 2. Реализация

Проект состоит из файла, отвечающего за логику программы, файла, отвечающего за отображение пользовательского интерфейса, файла, отвечающего за работу алгоритмов и вспомогательного файла.

За обработку действий пользователя и логику работы с приложением отвечает форма CoopGame.cs. Она содержит в себе следующие методы:

– `void IDLE(object sender, EventArgs e)` — обработчик простоя программы, настройка доступности элементов управления и размера таблицы.

– `void SetDataGridView( DataGridView dgv, int rows, Dictionary<Coalition, double> source, bool setValues = false)` — настройка заголовков таблицы, доступности ячеек и их содержимого.

– `bool CheckCoalitions()` — проверка правильности введенных значений характеристической функции.

Для реализации алгоритмов предназначены следующие файлы:

1) `Game.cs` — файл, описывающий кооперативную игру, а также реализующий алгоритмы проверки игры на существенность, проверки характеристической функции на супераддитивность и построения (0-1)-редуцированной формы игры.

Поля:

– `Dictionary<Coalition, double> V` — характеристическая функция кооперативной игры.

– `int N` — количество игроков.

Методы:

– `Dictionary<Coalition, double> GenerateInitialCoalitions(int n)` — генерация всех возможных коалиций для заданного числа игроков.

– `bool IsEssential()` — проверка кооперативной игры на существенность.

– `bool IsSuperadditive()` — проверка характеристической функции игры на супераддитивность.

– `Game getReducedForm()` – получение (0-1)-редуцированной формы заданной игры.

– `string ToString()` — возвращение строкового представления кооперативной игры.

2) `Coalition.cs` — файл, описывающий коалицию и методы для работы с ней.

Поля:

– `SortedSet<int> set` — множество игроков в коалиции.

– `int Count` — количество игроков в коалиции.

Методы:

– `bool Contains(int player)` — проверка наличия игрока в коалиции.

– `bool Equals(object obj)` — проверка коалиций на равенство.

– `bool IsIntersect(Coalition other)` — проверка коалиций на пересечение.

– `string ToString()` — возвращение строкового представления коалиции.
– `int PlayerAt(int index)` — возвращение игрока на заданной позиции.
– `int CompareTo(object obj)` — сравнение коалиций по заданному порядку.
– `Coalition operator+(Coalition c1, Coalition c2)` — объединение двух коалиции.

Для отображения пользовательского интерфейса предназначен следующий файл: CoopGame.Designer.cs — файл, отвечающий за интерфейс экрана приложения. В этом файле описаны все элементы управления, заданы их свойства и закреплены обработчики событий, определенные на форме. Внешний вид программы представлен на рис. 2.1.

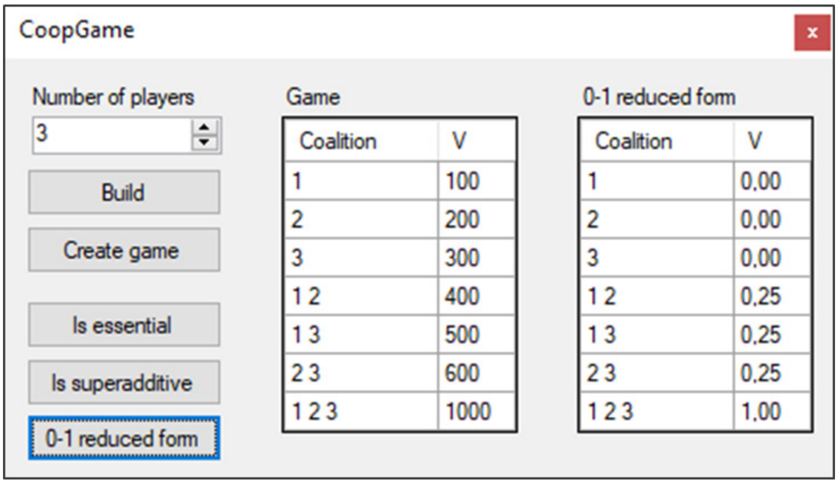



*Рис. 2.1. Внешний вид программы*

## Заключение

В работе проанализированы алгоритмы теории кооперативных игр. В ходе работы реализовано приложение, предназначенное для определения характеристик кооперативной игры, позволяющее задавать различные кооперативные игры, проверять кооперативную игру на существенность, проверять характеристическую функцию игры на супераддитивность, строить (0-1)-редуцированную форму игры.

## Литература

1. *Губко, М. В.* Теория игр в управлении организационными системами. Учебное пособие / М. В. Губко, Д. А. Новиков. – Москва : СИНТЕГ, 2002. – 148 с.

2. *Замков, О. О.* Математические методы в экономике: учебник. 3-е изд., перераб / О. О. Замков. – Москва : «Дело и сервис», 2001. – 368 с.

3. *Интрилигатор, М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – Москва : Айрис-пресс, 2002. – 575 с.

4. *Мулен, Э.* Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен. – Москва : Мир, 1985. – 200 с.

5. *Смагин, Б. И.* Кооперативные игры: учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей / Б. И. Смагин. – Мичуринск : МичГАУ, 2008. – 28 с.

6. *Хачатрян, С. Р.* Методы и модели решения экономических задач: учебное пособие / С. Р. Хачатрян, М. В. Пинегина, В. П. Буянов. – Москва : Экзамен, 2005. – 384 с.

УДК 681.3.06

# РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ СТУДЕНЧЕСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ В СЛОЖНОЙ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОЙ ОБСТАНОВКЕ

**И. Д. Коток**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья посвящена разработке программного продукта для студенческого совета факультета ПММ. Сложная эпидемиологическая обстановка в связи с пандемией COVID-19 требует перехода на дистанционный формат работы. В данной статье рассматривается проблема работы студенческого объединения в сложной эпидемиологической обстановке, ее программное решение. Разрабатываемое программное обеспечение благоприятно повлияет, как на работу студенческого объединения, так и на участников их мероприятий.
**Ключевые слова:** факультет прикладной математики, информатики и механики, веб-разработка, Воронежский государственный университет, интеллектуальные викторины, COVID-19, MVC, ASP.NET MVC 5, .NET Framework, Entity Framework, контроллеры, студенческий совет, студенческое объединение.

## Введение

Настоящий, 2020 год, стал очень тяжелым, как для политики, экономики, так и студенческой жизни. Он сильно повлиял на работу студенческих объединений и заставил их перейти на новый формат, где большая часть работы и различных мероприятий начали проводиться в дистанционном режиме. Студенческий совет факультета ПММ не стал исключением из этих правил. Очень большое количество запланированных событий пришлось отменить или перенести до нормализации эпидемиологической обстановки.

В связи с этим было решено начать работу по переводу мероприятий в онлайн режим. Основными для студенческого совета стали интеллектуальные викторины, такие как «Что? Где? Когда?», «Где логика?», «Своя игра» и другие [1]. Ранее уже была проделана работа по включению дистанционного режима для отбора участников на очный этап кубка ПММ по интеллектуальным играм, в связи с большим количеством участников [2–3]. Благодаря этому, студенческий совет уже имел небольшую базу для перехода к новому формату.

Так как при проведении турнира по интеллектуальным играм в формате спортивной версии игры «Что? Где? Когда?» нельзя отказаться от очного этапа, было решено рассмотреть альтернативные игры, формат которых позволит проводить их в онлайн режиме, не подвергая здоровье участников и их близких опасности. Решением стала популярная телевизионная игра-викторина «Своя игра», правила которой позволяют провести ее дистанционно.

В качестве платформы было решено использовать уже готовую, которая была разработана ранее для проведения заочного этапа кубка ПММ по интеллектуальным играм. Из-за того, что форматы игр отличаются друг от друга, необходимо добавить новый режим, в котором без проблем можно будет проводить мероприятия, не нарушая ограничительных мер.

## 1. Разработка web-приложения

Изменения, которые будут сделаны в новом приложении не затронут базы вопросов и новостей, а также основные методы по работе с ними. Приложение было написано с использованием двух основных технологий, таких как Entity Framework для работы с базой данных и ASP.NET MVC 5 для разработки самого приложения [4]. В качестве шаблона проектирования было решено остановиться на MVC так, как он является базовым для выбранных технологий.

### *1.1. Взаимодействие с базой данных*

Для работы с базой данных приложение использует Entity Framework, уже ставший стандартом для приложений, написанных на .NET Framework.

Для создания базы данных используется подход CodeFirst. Для этого классы-модели были сконструированы специальным образом. Для того, чтобы Entity Framework знал с какими классами-моделями ему необходимо работать, нужно было создать специальные классы GameContext и NewsContext.

Класс GameContext отвечает за работу с базой данных GamesStore, которая является основным хранилищем объектов, необходимых для решения основной задачи.

Класс NewsContext, в свою очередь, отвечает за работу с базой данных NewsStore. Она хранит в себе всю информацию о новостной ленте web-приложения.

Для взаимодействия с элементами базы данных, передачи их в контроллеры и представления, используются классы GameDBStorage, NewsDBStorage. Они отвечают за выполнение запросов в базу данных, во время работы приложения, для оптимизации кода, чтобы избавиться от его дублирования в контроллерах.

### *1.2. Контроллеры и их методы*

Контроллер является одним из основных составляющих шаблона MVC. Он получает запросы пользователя, обрабатывает их и возвращает соответствующие им представления [4].

Во время использования контроллеров необходимо соблюдать некоторые правила, одно из основных: его название должно оканчиваться на суффикс «Controller»; всё, что находится до этого слова, принято считать именем этого контроллера.

#### *1.2.1. Контроллер новостной ленты*

Для добавления новой новости в ленту сайта, необходимо быть администратором данного ресурса. Метод, который добавляет новость в базу данных, а в дальнейшем и на сайт, продемонстрирован в листинге 1.

Листинг 1

*Метод AddNews*

```
public ActionResult AddNews(News model, HttpPostedFileBase Img)
        {
            if (ModelState.IsValid && Img != null)
            {
                byte[] imageData = null;
                // считываем переданный файл в массив байтов
                using (var binaryReader = new BinaryReader(Img.InputStream))
                {
                    imageData = binaryReader.ReadBytes(Img.ContentLength);
                }
                // установка массива байтов
                model.Photo = imageData;
            }
                model.DateTime = DateTime.Now;
            if (ModelState.IsValid)
            {
                _storage.Add(model);
                return RedirectToAction(«NewsList»);
```

```
            }
            return View(model);
        }
```

Get-метод передает в представление пустую модель типа News, где происходит заполнение формы и добавление изображения к новости. Post-метод AddNews получает на вход частично заполненную модель и закодированное изображение. Для хранения изображений был выбран подход BLOB. Если получаемая модель удовлетворяет всем ограничениям, которые были на нее наложены, вызывается метод Add класса NewsDBStorage, который принимает наш объект класса News. Таким образом новость отправляется в базу данных новостей.

Для получения информации о новости используется Get метод NewsInfo, который принимает только идентификатор новости. Метод продемонстрирован в листинге 2.

Листинг 2

*Метод NewsInfo*

```
public ActionResult NewsInfo(int? Id)
        {
            if (Id == null)
            {
                return HttpNotFound();
            }
            return View(_storage.Get(Id));
        }
```

Если на входе получено Null значение, то пользователю будет выведен ответ, что по данному запросу страницы не обнаружено, иначе пользователю возвращается соответствующее представление. Также в данном методе можем пронаблюдать метод Get класса NewsDBStorage, который возвращает всю информацию о новости, идентификатор которой он получил.

Метод EditNews выполняет редактирование выбранной новости. В Get-метод поступает Id новости, если он не Null, новость передается в соответствующее представление, иначе выдается сообщение о том, что страницу по данному запросу воспроизвести не удалось. В случае успешного завершения и заполнения представления изменения новости, система переходит в Post-метод, где модель проверяется на корректность, добавляется новое изображение и вносятся изменения в базу данных, используя метод Edit класса NewsDBStorage. Post-метод EditNews продемонстрирован в листинге 3.

Листинг 3

*Метод NewsEdit*

```
public ActionResult NewsEdit(News model, HttpPostedFileBase Img)
        {
            if (ModelState.IsValid && Img != null)
            {
                byte[] imageData = null;
                // считываем переданный файл в массив байтов
                using (var binaryReader = new BinaryReader(Img.InputStream))
                {
                    imageData = binaryReader.ReadBytes(Img.ContentLength);
                }
                // установка массива байтов
                model.Photo = imageData;
            }
            else
                return View(model);
            _storage.Edit(model);
```

```
            return RedirectToAction(«NewsList»);
        }
```

Для удаления новости используется метод DeleteNews. Изначально по запросу пользователя передается идентификатор новости. Если ошибки не было выявлено, новость есть и идентификатор имеет не Null значение, пользователь сможет увидеть представление, которое отвечает за удаление полученной новости. При согласии пользователя удалить эту новость, id новости отправляются в Post-метод DeleteNewsConfirmed. Данный метод представлен в листинге 4.

Листинг 4

*Метод DeleteNewsConfirmed*

```
public ActionResult DeleteNewsConfirmed(int Id)
        {
            _storage.Delete(Id);
            return RedirectToAction(«NewsList»);
        }
```

Заметим, что Post-метод отличается названием от Get-метода, чтобы позволить пользователю просмотреть удаляемую новость. Для решения этой проблемы используется специальная аннотация ActionName («DeleteNews»), которая производит связь между DeleteNewsConfirmed и DeleteNews. Также в данном методе можно пронаблюдать Delete метод класса NewsDBStorage, который отвечает за удаление новости из базы данных.

### *1.2.2. Контроллер для работы с вопросами*

Для работы с вопросами, турнирами и пакетами вопросов был создан контроллер GameController. В этом классе происходят все взаимодействия между тремя перечисленными сущностями.

Для добавления нового вопроса используется метод AddQuestions. В Get-методе в представление передается список всех имеющихся категорий и сложностей вопросов. После успешного заполнения представления Post-метод получает заполненную модель, если этот объект удовлетворяет всем ограничениям, которые накладываются на данную модель, то происходит добавление в базу данных. Этот метод продемонстрирован в листинге 5.

Листинг 5

*Метод AddQuestions*

```
public ActionResult AddQuestions(Questions model, string Complexity, string
Categories, string NameAutor)
        {
            if (ModelState.IsValid)
            {
                model.CompQuestId = _storage.FindComplexity(Complexity);
                model.QuestionCategoriesId = _storage.FindCategory(Categories);
                if (NameAutor != «»)
                {
                    model.QuestionCreatorId = _storage.AddCreatorQuestForAddQue
st(NameAutor);
                }
                else
                    model.QuestionCreatorId = null;
                if (User.IsInRole(«admin»))
                    model.CorrectQuestions = true;
```

```
                else
                    model.CorrectQuestions = false;
                _storage.AddQuestions(model);
                return RedirectToAction(«ListQuestions»);
            }
            else
            {
                ViewBag.QuestionCategories = new SelectList(_storage.
GetAllNameCategories());
                ViewBag.ComplexityOfTheQuestion = new SelectList(_storage.
GetAllNameCompexity());
                return View(model);
            }
        }
```

В данном методе происходит также заполнение поля CorrectQuestions. Если добавлением вопроса занимался пользователь с ролью администратор, поле CorrectQuestions получает значение true, а вопрос сразу становится доступным всем пользователям ресурса, в противном случае, поле получает значение false. Вопросы, помеченные как false, видит только администратор сайта и может решить сделать ли этот вопрос общедоступным или удалить.

Для просмотра всех вопросов используется метод ListQuestions, который принимает три параметра:

- название уровня сложности;
- название категории;
- номер страницы.

Данный метод продемонстрирован в листинге 6.

Листинг 6

*Метод ListQuestions*

```
public ActionResult ListQuestions(string Complexity, string Categories, int? page)
        {
            ViewBag.QuestionCategories = new SelectList(_storage.
GetAllNameCategoriesWithALL());
            ViewBag.ComplexityOfTheQuestion = new SelectList(_storage.
GetAllNameCompexityWithALL());
            int pageSize = 5;
            int pageNumber = (page ?? 1);
            if (User.IsInRole(«admin»))
             return View(_storage.GetAllAdmin(Complexity, Categories).
                    OrderBy(p => p.QuestionsId).
                    ToPagedList(pageNumber, pageSize));
            else
             return View(_storage.GetAll(Complexity, Categories).
                    OrderBy(p => p.QuestionsId).
                    ToPagedList(pageNumber, pageSize));
        }
```

В этом методе происходит выборка вопроса по заданным критериям. Помимо этого, вопросы отбираются с учетом роли, которую имеет пользователь. Для распределения вопросов по страницам и налаживания навигации на них используется библиотека PagedList.

Для изменения информации о вопросе используется метод EditQuest. В Get-методе передается в представление заполненная модель по заданному идентификатору. Post-метод продемонстрирован в листинге 7.

Листинг 7

*Метод EditQuest*

```
   public ActionResult EditQuest(Questions model, string Complexity, string
Categories, string NameAutor)
           {
               if (ModelState.IsValid)
               {
                   model.CompQuestId = _storage.FindComplexity(Complexity);
                   model.QuestionCategoriesId = _storage.
FindCategory(Categories);
                   if (NameAutor != «»)
                   {
                       model.QuestionCreatorId = _storage.AddCreatorQuestForAdd
Quest(NameAutor);
                   }
                   else
                       model.QuestionCreatorId = null;
                   if (User.IsInRole(«admin»))
                       model.CorrectQuestions = true;
                   else
                       model.CorrectQuestions = false;
                   _storage.EditQuest(model);
                   return RedirectToAction(«ListQuestions»);
               }
               else
               {
                   ViewBag.QuestionCategories = new SelectList(_storage.
GetAllNameCategories());
                   ViewBag.ComplexityOfTheQuestion = new SelectList(_storage.
GetAllNameCompexity());
                   ViewBag.QuestCr = _storage.GetAutorName(_storage.Get(model.
QuestionsId).QuestionCreatorId);
                   return View(model);
               }
           }
```

Этот метод принимает модель из представления. После проверки модели на удовлетворение всем ограничениям, которые она имеет, полученные изменения вносятся в базу данных. Если модель нарушает ограничения, она возвращается пользователю с указанием всех недочетов.

Для удаления новости используется метод DeleteQuest. Изначально по запросу пользователя передается идентификатор вопроса, если ошибки не было выявлено, вопрос есть и идентификатор имеет не Null значение, пользователь сможет увидеть представление, которое отвечает за удаление полученного вопроса. При согласии пользователя удалить этот вопрос, id вопроса отправляется в Post-метод DeleteQuestConfirmed. Данный метод представлен в листинге 8.

Листинг 8

*Метод DeleteQuestConfirmed*

```
public ActionResult DeleteQuestConfirmed(int Id)
        {
            _storage.Delete(Id);
            return RedirectToAction(«ListQuestions»);
        }
```

Стоит заметить, что Post-метод отличается названием от Get-метода, чтобы позволить пользователю просмотреть удаляемую новость. Для решения этой проблемы используется специальная аннотация ActionName («DeleteQuest»), которая создает связь между DeleteQuestConfirmed и DeleteQuest. Также в данном методе можно пронаблюдать Delete метод класса GameDBStorage, который отвечает за удаление вопроса из базы данных. После удаления система переходит к списку всех вопросов.

**Заключение**

Разработанное программное обеспечение поможет развитию студенческой совета в сложной эпидемиологической обстановке в связи с пандемией COVID-19. Создаст возможность дистанционного общения между студентами, преподавателями и сотрудниками университета, поспособствует их социализации, развитию критического и креативного мышления, эрудиции. Помимо этого, программное обеспечение сможет разнообразить деятельность студенческого совета и после пандемии, увеличит его аудиторию в интернет ресурсах.

**Литература**

1. *Коток И. Д.* Интернет-технологии в активизации работы студенческого совета факультета прикладной математики, информатики и механики / Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых ученых и студентов, Воронеж, 27 апреля 2020 г. – Воронеж: Научная книга, 2020. – С. 123–126.

2. *Коток И. Д.* Разработка программного обеспечения для проведения интеллектуальных компьютерных игр студенческим советом факультета прикладной математики, информатики и механики / Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч.-техн. конф. (Воронеж, 11–13 ноября 2019 г.). – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2020. – С. 443–444.

3. *Коток И. Д.* Разработка программного обеспечения для проведения интеллектуальных викторин / Информационные технологии в образовательном процессе вуза и школы: материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции (Воронеж, 25 марта 2020 г.). – Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2020. – С. 171–175.

4. METANIT.COM – сайт о программировании [Электронный ресурс]. URL: https://metanit.com/ (дата обращения: 20.01.2020).

УДК 004.925.3

# ОТРИСОВКА МЯГКИХ ТЕНЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРАССИРОВКИ ЛУЧЕЙ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

**П. В. Котолевский, С. Н. Медведев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается задача рендеринга мягких теней с соблюдением баланса между качеством теней и временем отрисовки кадра. Приводятся известные подходы для решения этой задачи. Подробно рассмотрен метод обратной трассировки лучей. Предложена оптимизация этого метода путем уменьшения количества трассируемых лучей на пиксель с помощью метода Монте-Карло. Описан побочный эффект данной оптимизации — шум в местах полутени. Приведено описание реализации предложенного подхода. Протестирована производительность подхода в сравнении с методом обратной трассировки лучей для точечного источника света.

**Ключевые слова:** метод Монте-Карло, мягкие тени, освещение, трассировка лучей, рендеринг в реальном времени, opengl, glsl.

## Введение

Трехмерная графика и моделирование активно применяется в современных компьютерных играх, кинематографе. В процессе создания изображений или видео путем моделирования трехмерных объектов важно стремиться к реалистичности и естественности. Это позволит игроку или зрителю, наблюдающему созданную сцену, максимально погрузиться в происходящее в ней.

Ощущение естественности и реализма во многом создается благодаря воспроизведению явлений, возникающих при распространении света. Одним из таких явлений является тень. Именно поэтому множество исследований направлены на изучение возможностей генерации теней, как можно более приближенных к физически корректным.

## 1. Постановка задачи

Необходимо реализовать физически корректный рендеринг мягких теней трехмерных моделей, а также исследовать возможности повышения качества полученных теней и возможности уменьшения времени отрисовки кадра. При освещении объекта объемным источником формируется область полной тени и область полутени (рис. 1).

На рис. 2 приведено схематическое изображение образования области тени и области полутени. Источник света освещает объект и плоскость — приемник (обозначена на рисунке прямой AD). Область полной тени BC формируется там, где объект полностью закрывает источник света, для ее построения проведены вспомогательные лучи 1, 2. Области полутени AB и CD формируются там, где объект частично перекрывает свет, исходящий от источника. Для построения этих областей проведены вспомогательные лучи 3, 4, 5, 6. Степень затемнения постепенно уменьшается от полной (в точках B и C) до отсутствия затемнения (в точках A и D, и при дальнейшем удалении).

Если в процессе рендеринга сцены на приемниках тени отрисовывается как область полной тени, так и область полутени, то совокупная тень называется мягкой. Тени, сгенерированные таким образом, выглядят более естественно, чем четкие тени — отрисованные только с учетом области полной тени.

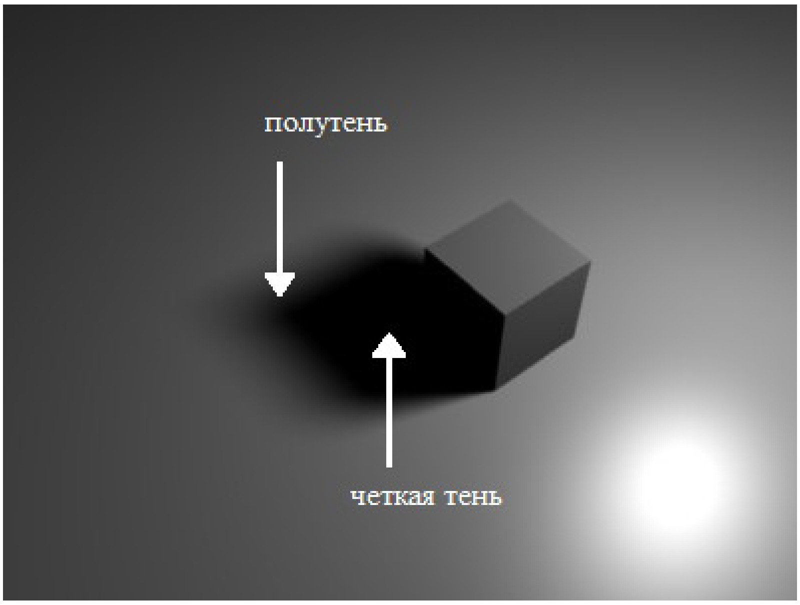



*Рис. 1. Тень при освещении объемным источником света*

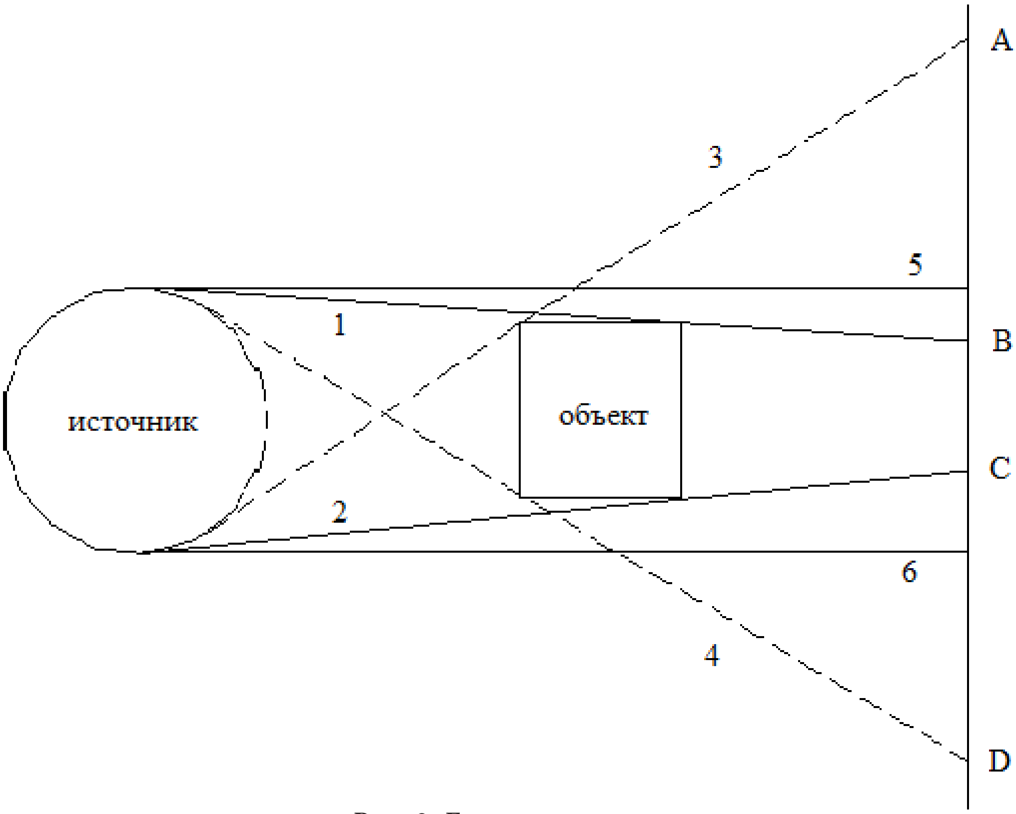



*Рис. 2. Геометрия тени*

Рассмотрим задачу рендеринга мягких теней в реальном времени с соблюдением баланса между качеством теней и временем отрисовки кадра.

## 2. Описание известных подходов

Существует множество известных способов реализации рендеринга теней. Приведем некоторые из них:

- проекция геометрии [1];
- теневые объемы [2];

• теневые буферы [3];
• обратная трассировка лучей [4].

На самом деле способы проекции геометрии, теневых объемов и теневых буферов генерируют четкие тени, но существует метод, позволяющий расширить их таким образом, чтобы генерировать мягкие тени. А именно, необходимо выбрать нескольких случайных точек на объемном источнике света и применить выбранный способ для каждой из них. Затем на основе результатов каждого прогона получить общий результат путем усреднения.

Заметим, что качество полученной полутени напрямую зависит от количества точек, выбранных на источнике.

Для отрисовки тени первым способом [1] объект, отбрасывающий тень, необходимо спроецировать на объект, принимающий тень (рис. 3). Таким образом, полученная проекция является четкой тенью от объекта. Такой подход выгоден в случае, если необходимо получить тени на небольшом количестве плоских поверхностей.

Второй способ, теневые объемы [2], предполагает расчет теневого объема для объекта, который должен отбрасывать тень. Прочие объекты сцены, расположенные в теневом объеме, будут затенены (рис. 4).

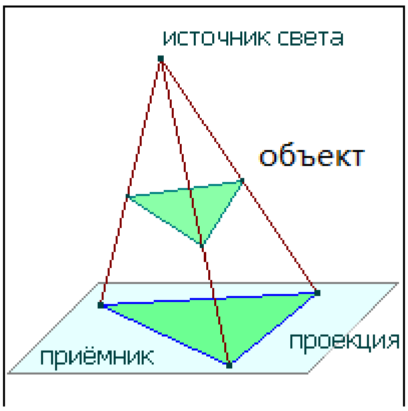



*Рис. 3. Проецирование геометрии*

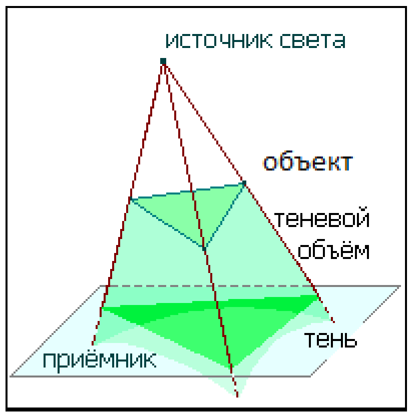



*Рис. 4. Теневой объем*

Такой подход является более универсальным, чем первый, так как позволяет отрисовывать тень на объектах со сложной формой, исходя из того, что они находятся в теневом объеме.

Но имеется множество проблем и подзадач, которые необходимо решить при реализации. Например, необходимо решить подзадачу расчета минимального силуэта объекта, отбрасывающего тень, для его проецирования на объект, принимающий тень. К проблемам можно также отнести большие требования к ресурсам, так как необходимо хранить геометрию теневых объемов и проводить дополнительный тест глубины для определения, находится ли точка сцены в теневом объеме.

Для отрисовки теней с использованием теневых буферов [3] рассмотрим сцену с точки зрения источника света. Объекты или их части, которые видно от источника света, должны быть освещены, а те, которые не видно — затенены.

Данный метод довольно просто реализуем на современных графических адаптерах, поддерживающих работу с внеэкранными буферами и z-буферами. При реализации необходимо отрисовать сцену с точки зрения источника света во внеэкранный буфер глубины — таким образом сформировать карту теней, представляющую собой двухмерную текстуру. Затем, при отрисовке сцены в экранный буфер, нужно сравнить глубину отрисовываемого фрагмента с глубиной, записанной в z-буфер. Если глубина фрагмента будет больше, чем глубина, сохраненная в карту теней, то объект будет затенен, иначе освещен (рис. 5).

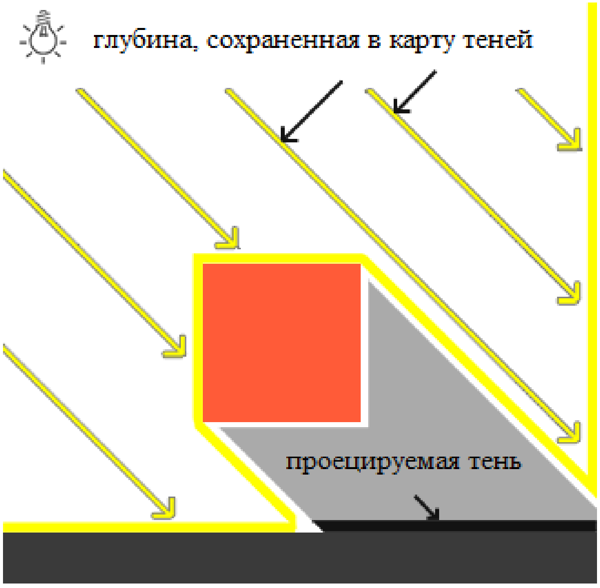



*Рис. 5. Теневой буфер*

Этот метод также позволяет отрисовывать тени на объектах со сложной формой. Он не является требовательным к ресурсам в случае использования для освещения сцены направленных и конусных источников света. В случае же с точечными (всенаправленными) источниками света алгоритм требователен к ресурсам. Так происходит из-за того, что для направленного источника света достаточно отрисовать сцену в z-буфер только один раз, а именно в направлении источника, а для всенаправленного источника необходимо строить кубическую карту из шести z-буферов, и вычислять с их помощью глубину освещаемой точки.

Метод обратной трассировки лучей [4] позволяет отрисовывать наиболее реалистичные тени. Определение затененности точки сцены определяется следующим образом (рис. 6):

1. Выпускается первичный луч от камеры к точке сцены;
2. Если первичный луч достиг точки, из нее выпускается пучок вторичных лучей, направленных к источнику света. Если первичный луч не достиг точки сцены, значит она не видна от камеры. Нет необходимости определять затененность такой точки;
3. Вычисляется доля вторичных лучей, достигших источника;
4. Определяется затененность точки на основе вычисленного значения.

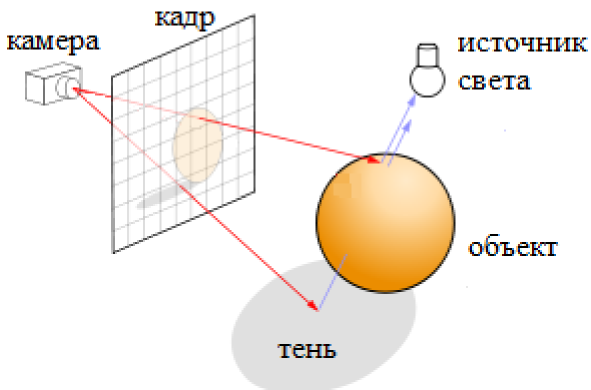



*Рис. 6. Трассировка лучей*

Для получения мягких теней на шаге 3 выпускается пучок лучей к различным точкам на объемном источнике света. Чем больше лучей, тем более физически корректная тень получится. Проблема заключается в том, что для каждого луча необходимо проверять пересечения с размещенными на сцене объектами, а это ресурсоемкий процесс. Существуют способы оптимизации данного процесса, направленные на уменьшение количества лучей, выпускаемых для отрисовки одного пикселя и направленные на оптимизацию проверки пересечения луча с объектами на сцене.

### 3. Описание предлагаемого подхода

Воспользуемся алгоритмом обратной трассировки лучей для рендеринга мягких теней. Оптимизируем процесс путем уменьшения необходимого количества вторичных лучей для отрисовки одного пикселя (фрагмента).

Освещенность фрагмента будет зависеть от того, какая доля вторичных лучей не была заблокирована объектами сцены, поэтому нам необходимо оценить это значение. Время, затраченное на процесс трассировки лучей, количество которых будет достаточно для получения приемлемого изображения, не позволяет отрисовывать кадры в реальном времени [5].

Вычислим освещенность фрагментов с помощью метода Монте-Карло [5]. Выберем только одно случайное направление для каждого пикселя, таким образом придется трассировать только один вторичный луч на пиксель.

Данная оценка довольно грубая, поэтому получится кадр с шумом в местах полутеней, отбрасываемых объектами сцены. В области полной тени шума не будет, так как любой случайный луч не достигнет источника света. Шума также не будет там, где тени нет, так как любой случайный луч достигнет источника света.

В области полутени, отбрасываемой объектами сцены, плотность затененных пикселей будет разной. В более затемненных местах вероятность того, что случайный луч достигнет источника света меньше. Поэтому плотность затененных пикселей будет падать при движении от области полной тени к полностью освещенной области. Это обеспечит эффект мягкой тени.

В дальнейшем необходимо отфильтровать полученный шум, чтобы улучшить качество сгенерированных теней. Ожидается, что ресурсоемкость метода фильтрации не будет превышать ресурсоемкость трассировки дополнительных лучей.

### 4. Анализ подхода

В основе предложенного метода лежит обратная трассировка лучей — приближенная к реальной модель освещения. Это позволяет генерировать тени, приближенные к физически корректным.

Помимо этого, вычисления, необходимые для генерации теней приведенным методом, хорошо поддаются распараллеливанию. Луч для каждого пикселя можно трассировать в отдельном потоке. В случае же с теневыми буферами, и другими алгоритмами, генерирующими четкую тень, необходимо последовательно отрисовать сцену несколько раз для каждой из случайных точек, выбранных на объемном источнике света.

### 5. Реализация

Для отрисовки сцены воспользуемся программным интерфейсом opengl API. Описанный метод будет реализован с помощью вершинного и фрагментного шейдера.

В процессе вычисления цвета каждого пикселя необходимо:

1. Выбрать случайную точку на источнике света;
2. Определить вторичный луч;
3. Проверить наличие пересечений луча с объектами сцены;
4. Определить итоговый цвет пикселя.

Для разных форм объемных источников света процесс получения случайной точки на нём может быть различным. Например, для кубического источника света с длинной стороны $L$ необходимо генерировать три случайных числа из отрезка $[-L/2, L/2]$. Затем полученные числа необходимо прибавить к соответствующим координатам центра куба. Таким образом получится случайная точка на кубическом источнике света.

Началом вторичного луча будет точка сцены, отрисовываемая на данном фрагменте. Направление луча будет определяться случайной точкой на источнике света.

Следующий шаг — проверка наличия пересечений луча с объектами, размещенными на сцене. Если модели объектов состоят из треугольных полигонов, задача сводится к проверке пересечения луча и треугольника. Её можно решить тестом Моллера-Трумбора [6].

На этапе определения итогового цвета пикселя необходимо учесть отраженный отрисовываемой поверхностью свет, если не найдено пересечений.

В результате описанных действий при рендеринге сцены будут сгенерированы зашумленные мягкие тени размещенных на ней объектов (рис. 7).

*Рис. 7. Сцена № 1*

## 6. Тестирование производительности

Для оценки производительности предложенного алгоритма сравним его с методом обратной трассировки лучей для точечного источника, исходя из предположения, что мягкие тени получится сгенерировать за почти такое-же время, как и четкие тени.

Для сравнения были выбраны сцены с различным числом полигонов.

Критерий сравнения — время отрисовки кадра.

Тесты проводились на графическом адаптере Nvidia Geforce 840m.

В табл. 1 приведены результаты проведенных тестов. Сцены № 1 и № 2 изображены на рис. 8. Сцена № 3 изображена на рис. 7.

Таблица 1

*Сравнение времени отрисовки кадра*

| Сцены | Количество полигонов (шт.) | Время (в мс.) | |
|---|---|---|---|
| | | Обратная трассировка для точечного источника | Алгоритм для объемного источника |
| 1 | 2804 | 865 | 870 |
| 2 | 590 | 188 | 189 |
| 3 | 1766 | 608 | 610 |

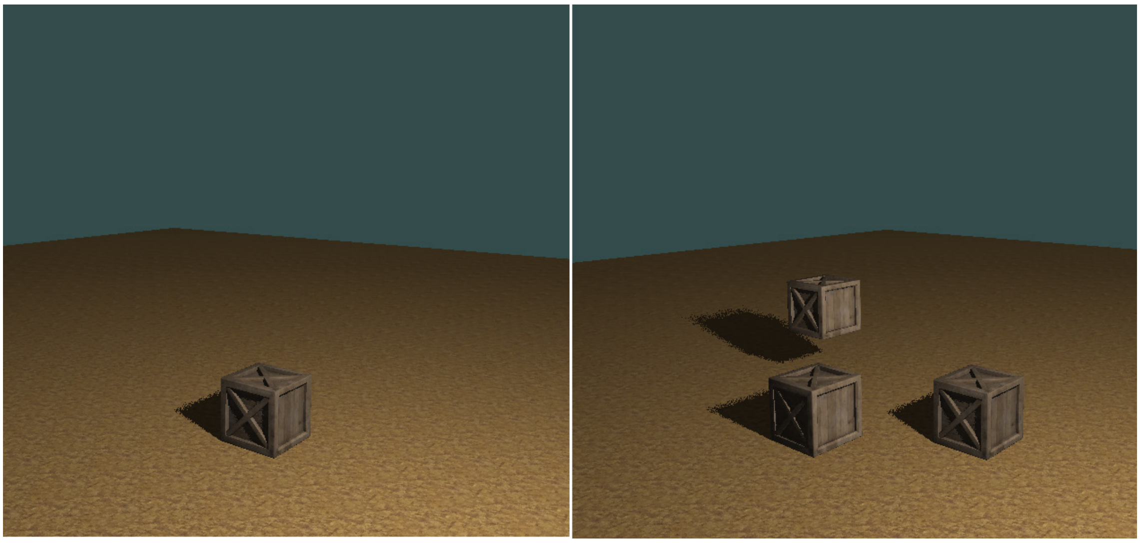


*Рис. 8. Сцена № 2 и № 3*

Можно видеть, что рассматриваемые методы отрисовывают кадр практически за одинаковое время, разница не превышает 0.5 %.

Таким образом, предложенная оптимизация метода обратной трассировки лучей, используя метод Монте-Карло, позволяет генерировать мягкие тени, лишь немного увеличив время отрисовки кадра, по сравнению с генерацией четких теней.

## Заключение

С помощью метода Монте-Карло удалось оптимизировать метод обратной трассировки лучей для отрисовки мягких теней.

Помимо мягких теней алгоритм генерирует шум, который необходимо удалять. Чтобы оптимизация была оправданной, необходимо фильтровать шум за значительно меньшее время, чем необходимо на трассировку дополнительных лучей. В данном направлении будут проведены дальнейшие исследования.

## Литература


1. *Tessman, T.* Casting shadows on flat surfaces / T. Tessman // Iris Universe. – 1989. – Winter. – С. 16–19.
2. *Franklin, C.* Crow. Shadow Algorithms for Computer Graphics / Crow, Franklin C // Computer Graphics (SIGGRAPH '77 Proceedings). – Vol. 11, No 2. – P. 242–248.
3. *Lance, W.* Casting curved shadows on curved surfaces / W. Lance // ACM Siggraph Computer Graphics. – 1978. – T. 12, No 3.
4. Ray Tracing Gems / под ред. E. Haines, T. Akenine-Möller. – Berkley : Apress, 2019. – 607 с.
5. Monte Carlo Ray Tracing / H. Jensen, J. Arvo, P. Dutre // Siggraph 2003 Course 44.
6. *Möller, T.* Fast Minimum Storage Ray/Triangle Intersection / T. Moller, B. Trumbore // Journal of Graphics Tools. – 1997. – October. – P. 21–28.

УДК 004.4’413

# ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ АНАЛИЗА ЗАВИСИМОСТЕЙ ПРОГРАММНЫХ МОДУЛЕЙ ПРИЛОЖЕНИЙ

**О. Д. Горбенко, Д. В. Кочергин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Анализ зависимостей программных модулей в приложениях является важным этапом разработки программных продуктов, однако почти всегда он остается в тени более общих и частых проблем. Создание общей математической модели, описывающей анализ зависимостей на фундаментальном уровне — одна из задач, которые могут позволить ускорить разработку новых утилит для анализа зависимостей для самых разных систем модулей и языков программирования.
**Ключевые слова:** лексический анализ, регулярные выражения, синтаксический анализ, ES-модули, JavaScript, ECMAScript, граф, визуализация графа, граф зависимостей.

## Введение

Современные программные продукты представляют собой сложные системы, включающие в себя большую кодовую базу, как правило разделенную на модули, связанные между собой зависимостями. От структуры данных модулей, а также от способов организации зависимостей между ними может зависеть как архитектура, так и стабильность работы программного продукта, его отказоустойчивость.

Организация зависимостей — важный процесс, начинающийся с написания самых первых модулей в программе, и продолжающийся вплоть до завершения цикла разработки программного продукта, который может иметь и большую сложность. Анализ таких зависимостей позволяет ускорить процесс разработки программного продукта, а также избежать множества проблем, которые обычно возникают на разных этапах разработки из-за недостаточно продуманной организации зависимостей программных модулей разрабатываемой программы. Предметом анализа может служить как нахождение циклических зависимостей, так и, например, кластеризация графа зависимостей с использований различных алгоритмов [1].

## 1. Постановка задачи

### *1.1. Общие сведения*

В рамках данной статьи была разработана модель графа зависимостей, позволяющая проводить анализ структуры модулей различных приложений. Кроме этого, одной из задач модели является общее описание зависимостей модулей без ссылок на конкретные языки программирования.

Модель имеет ряд возможностей:

- Формирование графа зависимостей.
- Нахождение циклических зависимостей между модулями.
- Нахождение неиспользуемых или изолированных модулей в графе зависимостей.

На основе такой модели можно также создать программное обеспечение, позволяющее проводить анализ программных модулей для разных языков программирования. Пример такого программного обеспечения будет рассмотрен в конце данной статьи.

### *1.2. Анализ предметной области*

В настоящее время не было найдено строго сформированных алгоритмов и моделей, позволяющих проводить анализ графа зависимостей. Подобные алгоритмы используется в системах сборки и таск-раннерах для различных языков программирования (например, [2-4]), но они не формализованы и разработаны с учетом требований и возможностей конкретного языка программирования, что не позволяет рассматривать их на фундаментальном уровне в отрыве от конкретного языка программирования.

## 2. Разработка модели

### *2.1. Основные понятия и определения, используемые в модели*

Основными понятиями, вокруг которых строится модель, являются модуль и граф зависимостей. На основе модулей происходит построение графа зависимостей и далее модель работает уже только с графом зависимостей.

**Определение.** Модулем будем называть некую сущность, абстрагирующую в себе часть приложения, ссылающуюся на другие подобные сущности, которые также могут ссылаться на данную.

Сущности, на которые ссылается модуль, будем называть импортами, а набор сущностей, которые ссылаются на данный модуль — экспортами.

Кроме ссылок на другие сущности, модуль может содержать дополнительную информацию о самих ссылках и тех модулях, на которые они указывают.

**Определение.** Графом зависимостей некоторого приложения (программного продукта) называется ориентированный мультиграф без петель, с возможными висячими и изолированными вершинами, такой, что:

- Каждой вершине графа ставится в однозначное соответствие некоторый программный модуль из рассматриваемого приложения.
- Каждая дуга в графе представляет собой набор зависимостей конкретного модуля и однозначно ассоциируется с этим набором.

Таким образом, граф зависимостей является математическим представлением некоторого приложения, если говорить точнее, то он является представлением его модульной структуры. Рассмотрим далее алгоритмы для построения и анализа данного графа.

### *2.2. Алгоритм построения графа зависимостей*

Формирование графа зависимостей происходит на основе множества модулей в два этапа:

1. Формирование графа зависимостей на основе множества модулей.
2. Насыщение графа дополнительной информацией об использовании модулей и их конкретных зависимостей.

На первом этапе, используя связи (ссылки) одних модулей с другими, происходит построение основной структуры графа. Связи между модулями становятся дугами в ориентированном графе, а сами модули — вершинами (следует из определения графа зависимостей).

Существует несколько способов построения дуг в графе на данном этапе, различающихся тем, можно ли связать две вершины $A$ и $B$ только двумя дугами (из $A$ в $B$ и наоборот), или же количество дуг между двумя вершинами не ограничено.

В случае применения первого способа, в графе зависимостей каждой дуге из $A$ в $B$ необходимо поставить в соответствие набор зависимостей, которые импортируются в модуль $B$ из модуля $A$. Это влечет за собой усложнение алгоритмов как построения, так и анализа зависимостей в целом.

Для применения второго способа никаких дополнительных манипуляций с графом зависимостей не требуется, каждая зависимость будет ассоциирована с отдельной дугой графа. В таком случае для анализа можно применять стандартные алгоритмы на графах. Например, поиск всех простых циклов или изолированных вершин.

На втором этапе происходит добавление в граф дополнительных данных, которые могли храниться в модулях. Чаще всего, эти данные зависят от конкретного языка программирования, на котором написана программа, а также от выбранной системы модулей и зависимостей. К таким данным может относиться информация об использовании зависимостей внутри модулей, ссылки на файловую систему (если от нее зависит система модулей) и так далее.

После построения графа зависимостей дальнейшая работа происходит только с ним, так как все данные о модулях и их связях, (включая все зависимости) уже включены в граф зависимостей.

Следующим этапом работы модели будет анализ графа зависимостей на предмет наличия или отсутствия особых состояний узлов и дуг, описывающих определенные ситуации в исследуемом приложении.

### *2.3. Анализ графа зависимостей*

На данный момент анализ графа зависимостей проводится по нескольким критериям:

1. Циклические зависимости в графе.
2. Зависимость модулей нижних уровней от модулей более верхних уровней.
3. Изолированные и неиспользованные модули.

Далее эти критерии могут быть расширены по мере совершенствования модели и описания новых ситуаций в приложениях, отслеживание которых имеет смысл для улучшения скорости и удобства разработки.

Задача поиска циклических зависимостей в графе сводится к поиску простых циклов в ориентированном графе (которым и является граф зависимостей). Для этой задачи разработано множество алгоритмов, оптимальных как по скорости, так и по времени работы. Как пример одного из самых быстрых, можно привести алгоритм Дональда Джонсона [5, 6].

Под зависимостью модулей нижних уровней от модулей более верхних уровней подразумевается ситуация, когда в модуль нижнего уровня происходит импорт функциональности из модуля как минимум на один уровень выше в иерархии директорий файловой системы. Для нахождения такие модулей необходимо пройти по всем вершинам графа, и для каждой вершины найти ребра, которые входят в данную вершину из вершины, ассоциированной с модулем, находящимся в директории более высокого уровня, чем данный. Вершины, у которых количество таких ребер больше нуля, и будут ассоциированы с искомыми модулями.

**Определение.** Модуль называется изолированным, если он ассоциирован в графе зависимостей с изолированной вершиной.

Нахождения изолированных модулей сводится к нахождению изолированных вершин в графе зависимостей.

**Определение.** Модуль называется неиспользуемым, если он не является зависимостью хотя бы для одного другого модуля.

В каждом графе зависимостей есть как минимум один такой модуль — модуль точки входа. Однако наличие в системе больше одного такого модуля не является хорошей практикой.

Для нахождения всех модулей, подходящих под эти критерии, можно перейти к взвешенному графу зависимостей, где под весом вершины будет пониматься количество входящих и исходящих из нее дуг. Также можно пометить вершины численными характеристиками, соответствующими отдельно количеству входящих и исходящих дуг.

После данных операций проверка критериев будет сводиться к численной проверке веса вершины, а также других ее параметров, помеченных в графе.

## 3. Реализация модели

### *3.1. Основные сведения*

Как пример реализации данной модели была разработана утилита, позволяющая проводить анализ ES-модулей (соответствующих стандарту ECMAScript [7]) в JavaScript-приложениях.

Утилита устанавливается в зависимости целевого приложения и анализирует его на предмет наличия некоторых изъянов, таких как:

- Наличие циклических зависимостей.
- Наличие изолированных модулей.
- Наличие неиспользуемых модулей.

Для формирования графа зависимостей и его анализа утилита использует библиотеки ESPree [8] и EScope [9]. Эти библиотеки позволяют производить лексический и синтаксический анализ [10], а также анализировать зоны видимости для определения использования зависимостей внутри модуля.

Также утилита предоставляет интерактивную визуализацию графа зависимостей с возможностью просмотра информации о каждом модуле и вывода общего отчета по количеству модулей и импортов, а также их использованию.

### *3.2. Структура утилиты*

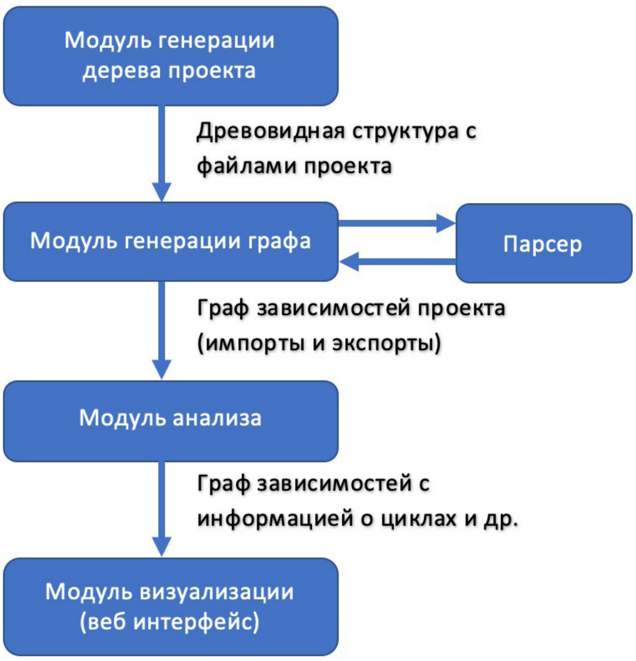



*Рис. 1. Модули утилиты и связи между ними*

Структура утилиты основывается на модулях, это позволяет декомпозировать функциональность и разделять зоны ответственности в соответствии с математической моделью.

Создание графа и его наполнение информацией (то есть анализ) разносятся в разные модули, это позволяет также выделить в отдельную сущность процесс получения множества модулей для графа и тем самым сделать возможным реализацию построения графа зависимостей для приложений, написанных на разных языках программирования, используя различные парсеры. Схема, описывающая основные модули утилиты и связи между ними, изображена на рис. 1.

Основным отличием по структуре от математической модели является наличие модулей генерации дерева проекта и визуализации. Первый является особенностью реализации модели под конкретный язык программирования — JavaScript. Второй же является дополнением к модели, позволяя визуализировать результаты работы. Подробное рассмотрение визуализации графа зависимостей и результатов его анализа выходит за рамки данной статьи.

### 3.3. Интерфейс утилиты

Для использования утилиты необходимо установить ее в зависимости разработчика для целевого *Node.js* приложения. Для этого можно воспользоваться следующей командой:

*npm install –D dependency-util*

После успешной установки приложение-утилиту можно запустить из секции *scripts* в *package.json* целевого приложения. Для этого в секцию *scripts* необходимо добавить следующую команду:

*du <params>*

Под *params* подразумеваются параметры утилиты, описанные в табл. 1.

Таблица 1

*Входные параметры утилиты*

| **Название** | **Вид параметра** | **Обязательность** | **Описание** |
|---|---|---|---|
| *Entry* | Неименованный | Да | Точка входа в приложение. Представляет собой путь к корневой папке приложения |
| *Port* | Именованный | Нет | Порт, на котором будет развернуто веб-приложение с интерактивной визуализацией. Значение по умолчанию — 3000 |
| *BaseUrl* | Именованный | Нет | Базовый путь, от которого разрешаются неотносительные импорты (аналогичный параметр есть у систем сборки). Значение по умолчанию равно значению параметра Entry |

После успешного запуска в консоль выводится сообщение:

*DU server is listening on 3000*

Это значит, что теперь можно зайти в браузер (поддерживается *Chrome*) и отрыть страницу *http://localhost:3000* для просмотра графа зависимостей. После загрузки на экране отобразится стартовая страница (рис. 2) с возможностью просмотра отдельных модулей и циклических зависимостей в графе (рис. 3).

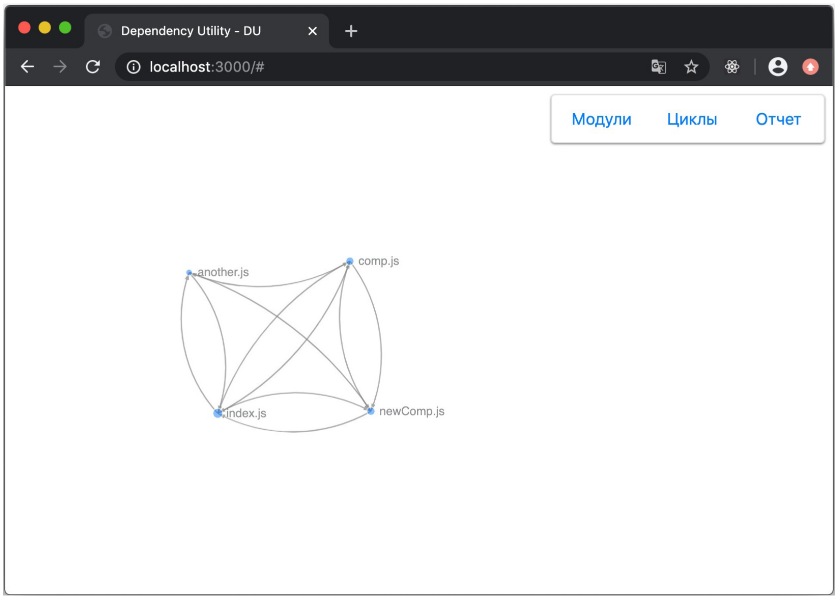



*Рис. 2. Начальная страница утилиты*

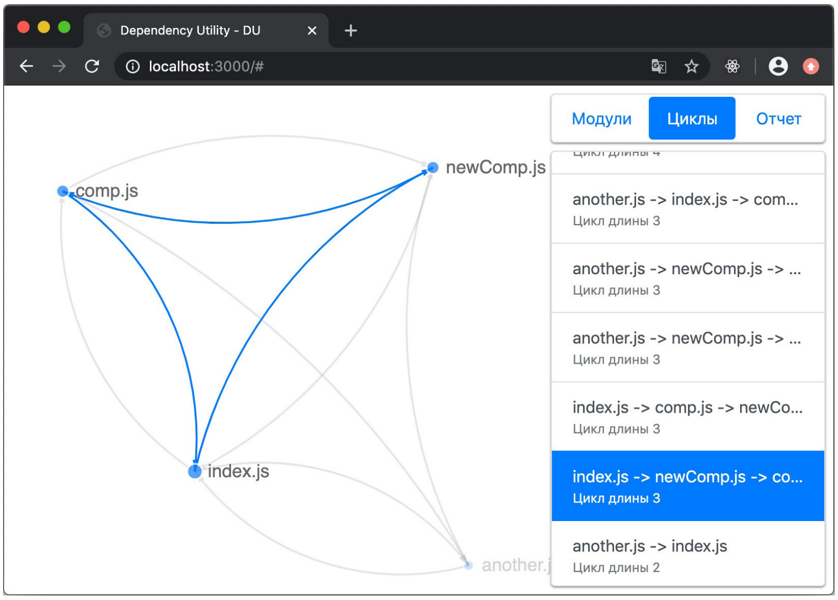



*Рис. 3. Просмотр циклических зависимостей в графе*

## Заключение

В результате данной работы была разработана и формализована модель для осуществления анализа зависимостей программных модулей, а также разработано приложение-утилита, как пример реализации данной модели. Использование данной модели позволит разработчикам улучшить качество создаваемых ими приложений и уменьшить время, затрачиваемое на поиск изъянов в зависимостях создаваемых приложений.

## Литература


1. *Bittencourt, R.* Comparison of Graph Clustering Algorithms for Recovering Software Architecture Module Views / R. Bittencourt, D. Serey Guerrero // Proc. Software Maintenance and Reengineering (CSMR 09). – 2009. – P. 251–254.

2. webpack – URL: https://webpack.js.org (дата обращения: 26.09.2020).

3. gulp.js – URL: https://gulpjs.com (дата обращения: 26.09.2020).

4. Grunt: The JavaScript Task Runner – URL: https://gruntjs.com (дата обращения: 08.10.2020).

5. Donald B. Johnson. Finding All the Elementary Circuits of a Directed Graph / Donald B. Johnson // SIAM Journal on Computing. – 1975. – V. 4, No 1. – P. 77–84.

6. Frank Meyer – Search all elementary cycles in a given directed graph – URL: http://normalisiert.de/code/java/elementaryCycles.zip (дата обращения: 02.10.2020).

7. ECMAScript® 2019 Language Specification – URL: https://www.ecma-international.org/ecma-262/10.0/index.html#sec-modules (дата обращения 26.09.2020).

8. GitHub – eslint/espree: An Esprima-compatible JavaScript parser – URL: https://github.com/eslint/espree (дата обращения: 26.09.2020).

9. GitHub – estools/escope: Escope: ECMAScript scope analyzer – URL: https://github.com/estools/escope (дата обращения: 26.09.2020).

10. Компиляторы. Принципы, технологии, инструменты / А. Ахо, Р. Сети, Д. Ульман, М. Лам. – Москва : Вильямс, 2008. – 1184 с.

УДК 004.422.81

# РАЗРАБОТКА МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ПОКАДРОВОЙ АНИМАЦИИ

**А. О. Шабанов, М. Э. Красиков**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье приводится обзор приложение, позволяющего делать покадровую анимацию, на основе фото или live-фото.
**Ключевые слова:** анимация, SwiftUI, IOS, live-фото, приложение.

## Введение

С каждым годом умение создавать медиа-контент становится все более и более востребованным навыком. В первую очередь это касается  таких отраслей как маркетинг и журналистика. Однако для большой части современных людей создание фото и видео становится повседневной задачей даже если это не связано с их работой. Это обусловлено тем, что с развитием технологий, темпа жизни и насыщенности информационного поля время, которое человек может потратить на тот или иной пост/событие сильно сокращается. В следствии, фото и видео-контент(особенно короткий) постепенно вытесняет текстовый. Первым глобальным проявление этого можно считать колоссальный успех приложения Instagram.

Также в последнее время все более и более доступным для обычных пользователей соцсетей становятся инструменты по созданию видео.  К этому можно отнести как различные фильтры так и AR-маски. Однако остаётся еще большая часть эффектов для создания которых требуется сложное программное обеспечение, доступное только на компьютерах. Один из таких эффектов — это покадровая анимация поверх готового видео или фото. Похожие эффект можно часто встретить под название scribble. В результате возникла идея создать мобильное приложение под операционную систему iOS, позволяющее быстро и просто реализовать его без помощи компьютера.

Для того чтобы приложение было удобным и полезным нужно было обеспечить всю необходимую функциональность и создать удобный лаконичный интерфейс.

На данный момент приложение разработано находится в открытом доступе в магазине приложение AppStore.

## 1. Функциональность

### *1.1. Фото*

Фотография может быть взята из галереи пользователя и с камеры устройства. В целях безопасности личных данных для получения доступа к изображениям был использован новый системный контроль PHPickerViewController. Его основное отличие заключается в том, что он не требует от пользователя дополнительного разрешения на доступ к его данным благодаря тому, что отображение фото для выбора осуществляется на уровне системы, а не самого приложения.

### *1.2. Live фото*

Live фото – это особенный формат медиа-данных, использующийся в экосистему продуктов Apple, работающих под управлением операционных систем: iOS, ipadOS, macOS. Его особенность заключается в том, что live фото включает в себя основную фотографию, а также короткое видео — запись с камеры за несколько мгновений до и после непосредственно осуществления фотографии. Разрабатываемое приложение позволяет вести работу как с основным фото так и с видео частью live фото.

### *1.3. Видео*

При проектировании приложения было принято решение отказаться от поддержки обработки длинных видео, т. к. в условиях обработки на телефоне создание покадровый анимации занимало бы слишком много времени.

### *1.4. Производительность*

Хотя современные мобильные телефоны имеют достаточно мощные процессоры, при импорте фото и рендеринге итогового видео было принято решение сжимать исходные файлы до разрешения fullHD, а также максимальный фреймрейт до 12 кадров в секунду. Это позволило ускорить процесс создания анимации и обработки. Все данные, возникающие во время работы приложения сохраняются в локальной файловой системе, а после сохранения видео в галерею очищаются. При рендеринге видео используется AVFoundation — мультимедийный фреймворк с API, реализованном на Objective-C и Swift, который предоставляет высокоуровневые сервисы для работы с современными аудиовизуальными носителями в операционных системах Apple Darwin: iOS, macOS, tvOS и watchOS.

### *1.5. Основные функции*

Процесс создания анимации представляет собой рисование поверх каждого кадра будущего видео. Приложение поддерживает жест pinch-to-zoom для увеличения изображения, различные настройки кисти для рисование, а также отмену предыдущего действия. После завершения работы над анимацией ее можно сохранить на устройстве или отправить в другие приложения.

### *1.6. Кисти*

Для кисти доступны настройки цвета, прозрачности, ширины, а также стиля. К стилям относятся обычная линия(карандаш), линия с тенью и линия с эффектом неоновой лампы(она имеет тень заданного цвета, но при этом основа линии становится белой).

## 2. Интерфейс

При разработке интерфейса был использован SwiftUI — это представленный Apple фреймворк, который позволяет проектировать и разрабатывать пользовательские интерфейсы с написанием малого количества кода, декларативным способом. В отличие от более старой библиотеки UIKit, SwiftUI полностью основан на программном коде. Тем не менее, его синтаксис очень прост для понимания и проект можно быстро просмотреть с помощью специальных инструментов предпросмотра.

Приложение имеет всего два основных экрана(не считая экранов выбора фото и камеры — они как сказано выше управляются системой) — это главный экран и экран-хост.

### *2.1. Главный экран*

Главный экран (рис. 1) предоставляет пользователю возможность выбора исходного файла(фото/live фото/камера). Он же отвечает за начальную обработку фото или видео и передачу его на холст.

### *2.2. Холст*

Этот экран является основным в приложении и на нем размещены все необходимые инструменты. Для сокращения элементов управления вместо текстовых обозначений были использованы стандартные символы из набора SF Symbols. Это и позволило разместить все элементы на одном экране, что сокращается время создания анимации.

Этот же экран отвечает за итоговый рендеринг анимации (рис. 2).

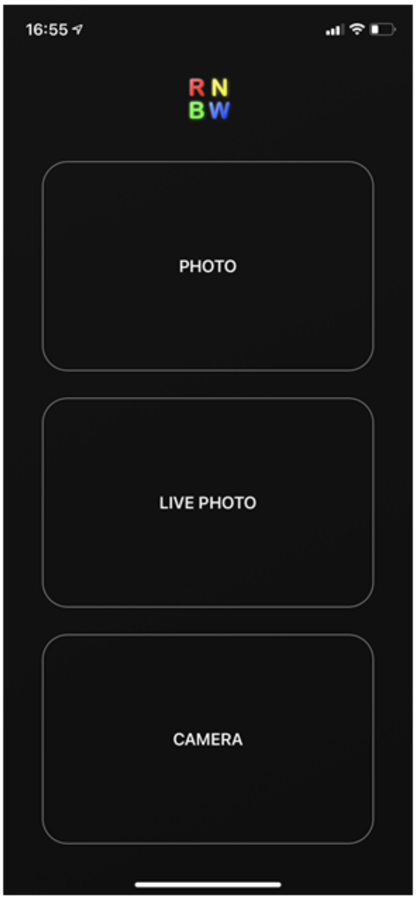



*Рис. 1. Главный экран*


*Рис. 2. Холст*

## Литература

1. The Swift Programming Language / Documentation: – URL: https://swift.org/documentation (дата обращения 10.09.2020)

2. *Тидвел, Дж.* Разработка пользовательских интерфейсов / Дж. Тидвел. – Санкт-Петербург: Питер, 2011. – 480 с.

УДК 004.021

# АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ ПОИСКА КЛЮЧЕВЫХ ТОЧЕК ИЗОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ АВТОРСТВА ПОДПИСИ

**М. А. Лактионова, И. Е. Воронина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Задача распознавания и подтверждения авторства подписи статическим методом требует разработки автоматизированных средств высокой точности. Статья посвящена исследованию эффективности алгоритмов компьютерного зрения SIFT, SURF и ORB, представленных в библиотеке OpenCV, для решения задачи без использования средств машинного обучения. Указанные алгоритмы вычисляют положение и характеристики особых точек на изображениях, которые затем используются для поиска соответствий между двумя изображениями, что позволяет утверждать, находится ли искомый объект на обоих изображениях или нет.
**Ключевые слова:** анализ подписей, подтверждение авторства подписи, компьютерное зрение, ключевые точки изображения, дескриптор изображения, SIFT, SURF, ORB, OpenCV, поиск объекта на изображении.

## Введение

Подпись является одним из самых распространенных способов подтверждения документов. Но часто человеку достаточно сложно отличить настоящую подпись от подделки, так как две подписи одного и того же человека могут существенно различаться, в том числе в зависимости от условий написания. Поэтому задача создания программных средств распознавания и подтверждения подписи является актуальной. Такие средства должны отличаться высоким уровнем точности.

Существует два метода получения и дальнейшего анализа подписи человека — статический и динамический.

При использовании статического метода человек расписывается на бумаге, изображение сканируется или фотографируется, а далее компьютерная система анализирует полученное изображение. Часто этот метод называют «offline» методом. Статический метод дает меньше информации по сравнению с динамическим, поскольку известны лишь координаты характерных точек подписи.

При использовании динамического метода человек расписывается в графическом планшете, который считывает подпись в режиме реального времени. Данные, получаемые с помощью графических планшетов, отражают динамику мускульных движений руки, и, следовательно, являются биометрической характеристикой конкретного человека. Этот метод называют также «online» методом.

Концепция ключевых точек в компьютерном зрении подразумевает поиск ключевых особенностей изображения, которые используются для сравнения двух изображений с целью поиска одинаковых частей.

Такие алгоритмы, как SIFT, SURF и ORB, обладают инвариантностью к некоторым характеристикам объектов на изображении, что является их преимуществом при решении поставленной задачи.

Целью данной статьи является проведение сравнительного анализа эффективности указанных алгоритмов в условиях задачи проверки авторства статических подписей.

## 1. Описание работы выбранных алгоритмов

Особой (или ключевой) называется такая точка объекта на изображении, которая является отличительной и с большой вероятностью может быть найдена на ином изображении исходного объекта. Такие точки каждый алгоритм определяет по-своему.

Дескриптором точки называется набор данных, который позволяет идентифицировать ее среди других точек. Он представляет собой массив из чисел, позволяющих идентифицировать особую точку. Область, окружающая точку, имеет влияние на такой идентификатор точки.

Выбранные для исследования алгоритмы позволяют находить ключевые (или особые) точки на изображениях и строить их дескрипторы, которые затем передаются в так называемые матчеры. Они осуществляют поиск соответствий между двумя наборами точек изображений.

### *1.1. SIFT*

Алгоритм SIFT (Scale-Invariant Feature Transform) состоит из нескольких этапов [6]. А именно:

1. Поиск точек-кандидатов для включения в набор ключевых точек.
2. Проверка найденных точек на пригодность.
3. Нахождение ориентации особых точек.
4. Построение дескрипторов особых точек.

Стоит отметить, что в рамках первого шага выполняется построение пирамиды гауссианов и разностей гауссианов, которые также будут использованы в пунктах 3 и 4.

Различные методы и метрики, которые используются в данном алгоритме, позволяют достичь инвариантности. Например, в рамках второго шага отбрасываются точки, которые имеют низкий контраст, так как они являются чувствительными к шуму в изображениях.

### *1.2. SURF*

Алгоритм SURF (Speeded Up Robust Features) использует для нахождения особых точек матрицы Гессе [1, 3, 8]. Определитель матрицы Гессе достигает экстремума в точках максимального изменения градиента яркости. Это позволяет обнаруживать углы и края линий.

Для каждой ключевой точки находится направление максимального изменения яркости и масштаб.

В конце также формируются дескрипторы особых точек.

Данный алгоритм также имеет инвариантность относительно масштаба и вращения объекта в плоскости изображения.

SURF не инвариантен к аффинным преобразованиям. При размытии и высокой степени сжатия также падает точность из-за потери информации в изображении.

Также стоит отметить, что SURF не выделяет объект из фона, а рассматривает изображение как единое целое. Следовательно, метод плохо работает для объектов простой формы и без ярко выраженной текстуры. Из-за этого объект может быть не распознан на другом изображении.

Согласно исследованиям, алгоритм SURF имеет близкую к SIFT эффективность, но является более быстрым [4]. С другой стороны, имеются данные, что в случае, когда скорость не критична, SIFT превосходит SURF [5].

### *1.3. ORB*

Алгоритм ORB (Oriented FAST and Rotated BRIEF) является улучшенной комбинацией алгоритма поиска особых точек FAST и дескриптора BRIEF [7]. Последний является неустойчивым к повороту объекта в плоскости изображения, и ORB имеет преимущество в данном аспекте.

Ключевые точки находятся с использованием древовидного FAST на исходном изображении и на нескольких изображениях из пирамиды уменьшенных изображений. Для обнаруженных точек вычисляется мера Харриса, кандидаты с низким значением меры Харриса отбрасываются. Затем вычисляется угол ориентации особой точки. Далее последовательность точек для бинарных сравнений в дескрипторе BRIEF поворачивается в соответствие с этим углом. В конце по полученным точкам строится дескриптор BRIEF.

Исследования показывают, что ORB на два порядка быстрее, чем SIFT. Более того, алгоритмы SIFT и SURF являются запатентованными, а, значит, запрещено их несогласованное использование в коммерческих целях, в то время как ORB не является запатентованным.

## 2. Обоснование выбора алгоритмов

Представленные алгоритмы были выбраны для анализа, так как они обладают инвариантностью к масштабу, смещению и повороту изображений. Кроме того, имеется частичная устойчивость к изменению освещения и точке обзора. Это значит, что если на вход поступят две подписи, масштаб одной из которых будет больше, чем у другой, то нет необходимости делать предобработку входных изображений, например, приведение их к одинаковому размеру. Данный факт также полезен и в случае, если направление подписи человека отличен на предоставленных изображениях.

## 3. Средства поиска соответствия между изображениями

Для установления соответствий между изображениями были использованы матчеры Brute-Force и FLANN (Fast Library for Approximate Nearest Neighbors). Последний является более быстрым, чем Brute-Force, так как он находит хорошее соответствие, которое в итоге может оказаться не самым лучшим. В то время как первый будет сравнивать всевозможные варианты комбинаций особых точек и найдет лучшую.

## 4. Использованные программные средства

Исследование проводилось в облачном сервисе Google Colab на основе Jupyter Notebook на языке Python 3. Исследуемые алгоритмы были взяты из библиотеки OpenCV 3.4.2.17. Также в качестве вспомогательных были использованы Matplotlib и statistics.

## 5. Данные для исследования

Для исследования был использован набор изображений с различными подписями CEDAR. Данный набор содержит несколько образцов подписей 55 человек. Для каждого из них имеется 24 оригинальных и 24 подделанных подписи. Изображения представлены в оттенках серого.

Вследствие большого количества исходных данных, сравнение проводилось между первыми 12 оригинальными и подделанными подписями каждого из авторов.

## 6. Исследование применимости алгоритмов

Объекты матчеров были созданы с параметрами, рекомендуемыми создателями библиотеки OpenCV для исследуемых алгоритмов.

При поиске тех соответствий, которые можно было бы считать ближайшими, а, значит, указывающими на нахождение искомого объекта на проверяемом изображении, отбрасывались те, соотношение евклидовых расстояний от заданного вектора дескриптора которых было больше 0,8.

При принятии решения о выдаче положительного результата использовалось два подхода. В первом если у исследуемых изображений имелось более 20 общих особых точек, то алгоритм выдавал положительный результат. Во втором подходе сначала для каждого автора делался прогон алгоритма с использованием только изображений оригинальных подписей, при этом делалась запись о количестве общих точек для каждой пары. Затем из списка бралось медианное значение, которое затем использовалось как минимальное требуемое для выдачи положительного результата при проверке подписей текущего автора.

При положительном результате считалось, что на сравниваемом изображении был искомый объект с оригинального изображения. В рамках задачи это означает, что на обоих изображениях находятся подписи, сделанные одним человеком.

### *6.1. SIFT и FLANN*

На рис. 1 пример соответствия особых точек оригинальной и подделанной подписей. На изображении видно, что многие точки, которые алгоритм посчитал соответствующими, таковыми не являются. Это отражается в том, что расположение таких точек на подписи полностью отличается, что не позволяет полагаться на результаты сравнения.

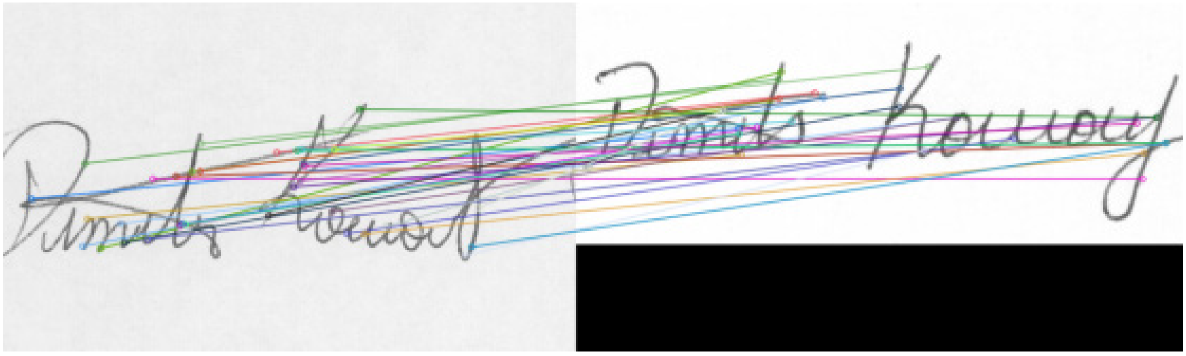


*Рис. 1. Общие особые точки, найденные с применением SIFT и FLANN*

Был произведен подсчет количества ложноположительных результатов, то есть как если бы оригинальная и подделанная подпись были сделаны одним и тем же человеком. При фиксированном минимальном требуемом количестве общих точек из 7920 проверок 7588 были ложноположительными. При медианном значении — 2552.

Аналогично был произведен подсчет количества ложноотрицательных результатов, то есть будто проверяемое изображение с подлинной подписью содержало подпись другого лица. При фиксированном значении из 7920 проверок 31 были ложноотрицательными. При медианном — 3097.

### *6.2. SIFT и Brute-Force*

На рис. 2 изображен пример соответствия особых точек оригинальной и подделанной подписей для текущей исследуемой комбинации методов.

При фиксированном минимальном требуемом количестве общих точек 7536 результатов оказались ложноположительными и 34 результата ложноотрицательными. При медианном значении — 2487 и 3040 соответственно.

### *6.3. SURF и FLANN*

На рис. 3 изображен пример соответствия особых точек оригинальной и подделанной подписей для текущей исследуемой комбинации методов.

*Рис. 2. Общие особые точки, найденные с применением SIFT и Brute-Force*

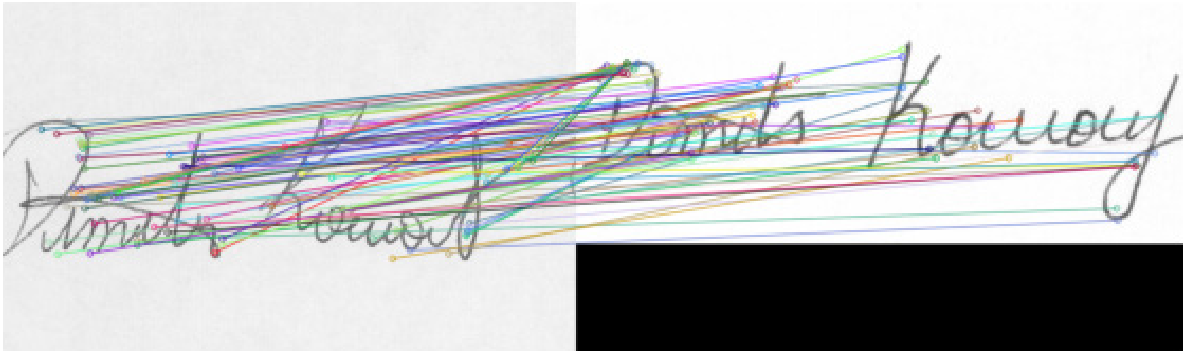


*Рис. 3. Общие особые точки, найденные с применением SURF и FLANN*

При фиксированном минимальном требуемом количестве общих точек 7544 результатов оказались ложноположительными и 45 результатов ложноотрицательными. При медианном значении — 2491 и 3003 соответственно.

### *6.4. SURF и Brute-Force*

На рис. 4 изображен пример соответствия особых точек оригинальной и подделанной подписей для текущей исследуемой комбинации методов.

При фиксированном минимальном требуемом количестве общих точек 7527 результатов оказались ложноположительными и 45 результатов ложноотрицательными. При медианном значении — 2483 и 2985 соответственно.

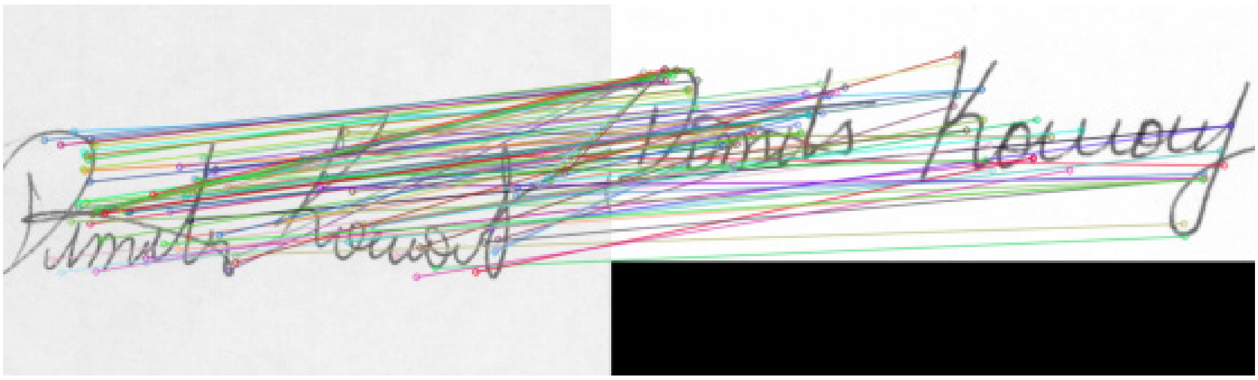


*Рис. 4. Общие особые точки, найденные с применением SURF и Brute-Force*

### *6.5. ORB и FLANN*

На рис. 5 изображен пример соответствия особых точек оригинальной и подделанной подписей для текущей исследуемой комбинации методов.

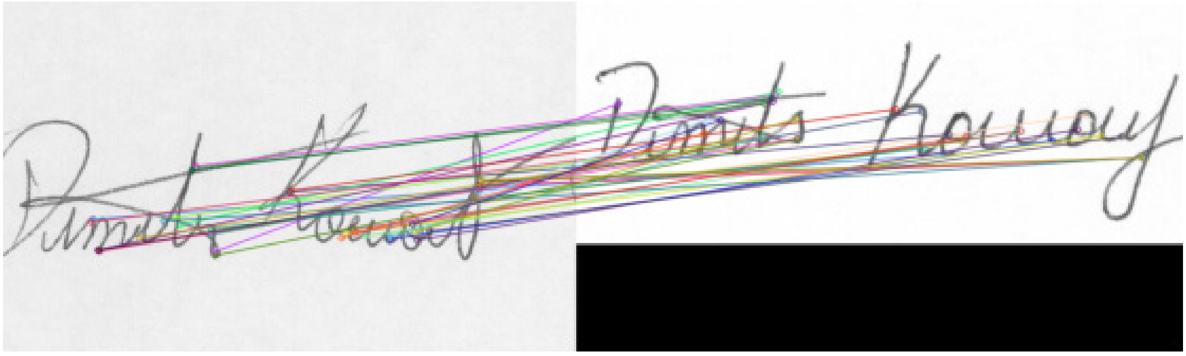


*Рис. 5. Общие особые точки, найденные с применением ORB и FLANN*

При фиксированном минимальном требуемом количестве общих точек 6541 результатов оказались ложноположительными и 151 результат ложноотрицательным. При медианном значении — 1480 и 2525 соответственно.

### *6.6. ORB и Brute-Force*

На рис. 6 изображен пример соответствия особых точек оригинальной и подделанной подписей для текущей исследуемой комбинации методов.

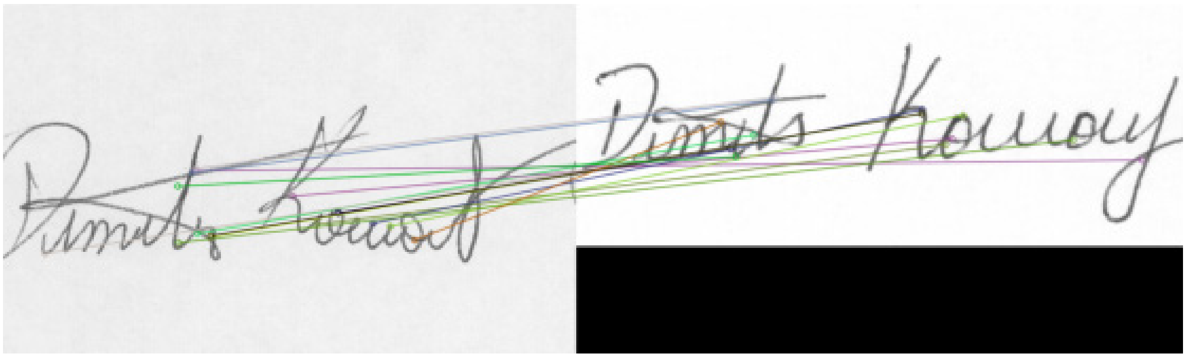


*Рис. 6. Общие особые точки, найденные с применением ORB и Brute-Force*

При фиксированном минимальном требуемом количестве общих точек 1634 результатов оказались ложноположительными и 3346 результата ложноотрицательными. При медианном значении — 2269 и 2649 соответственно.

### Заключение

В таблице представлены показатели алгоритмов SIFT, SURF и ORB, полученные в рамках проведенного исследования их применимости для решения задачи проверки авторства подписи.

Проведенные исследования показали, что выбранные алгоритмы не являются эффективными в решении поставленной задачи. Это происходит вследствие того, что подписи одного и того же человека обладают высокой степенью уникальности, а, значит, имеются незначительные для человеческого глаза, но значительные для алгоритмов различия. Исследованные методы более эффективны в тех задачах, где визуальное представление объектов более статичное. Подписи человека к таким объектам не относятся.

Данная задача требует иных методов, которые учитывали бы допустимые отклонения между двумя подписями одного человека, при этом обладая высокой точностью в обнаружении подделок.

Таблица

*Показатели исследуемых алгоритмов*

| Алгоритм и матчер | Минимальное требуемое количество общих точек | Количество ложноположительных результатов | Количество ложноотрицательных результатов |
|---|---|---|---|
| SIFT и FLANN | Фиксированное | 7588 | 31 |
| | Медианное | 2552 | 3097 |
| SIFT и Brute-Force | Фиксированное | 7536 | 34 |
| | Медианное | 2487 | 3040 |
| SURF и FLANN | Фиксированное | 7544 | 45 |
| | Медианное | 2491 | 3003 |
| SURF и Brute-Force | Фиксированное | 7527 | 45 |
| | Медианное | 2483 | 2985 |
| ORB и FLANN | Фиксированное | 6541 | 151 |
| | Медианное | 1480 | 2525 |
| ORB и Brute-Force | Фиксированное | 1634 | 3346 |
| | | 2269 | 2649 |

**Литература**


1. *Джгаркава, Г. М.* Использование метода SURF для обнаружения устойчивых признаков изображения при создании сферических панорамных снимков / Г. М. Джгаркава, Д. Н. Лавров // Математические структуры и моделирование. – 2011. – №22. – С. 96–99.

2. *Лактионова, М. А.* Алгоритм поворота изображений для анализа подписей человека / М. А. Лактионова, И. Е. Воронина, В. А. Мещеряков // Информатика: проблемы, методы, технологии: сборник материалов XX международной научно-методической конференции / под редакцией А. А. Зацаринного, Д. Н. Борисова; Воронеж, Воронежский государственный университет, 13–14 февраля 2020 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2020. – С. 1089–1093.

3. Применение метода SURF в системах контроля и управления доступом на основе биометрических технологий // Хабр : [сайт]. – 2012. – URL: https://habr.com/ru/post/152679/ (дата обращения: 22.09.2020).

4. *Bauer, J.* Comparing several implementations of two recently published feature detectors / J. Bauer, N. Sünderhauf, P. Protzel // Proc. of the 6th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles. – Toulouse, France 3–5 September 2007. Vol. 40, №15. – P. 143–148.

5. *Lindeberg, T.* Image Matching Using Generalized Scale-Space Interest Points / T. Lindeberg // Journal of Mathematical Imaging and Vision. – 2015. – Vol. 52. – P. 3–36.

6. *Lowe, D. G.* Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints / D. G. Lowe // International Journal of Computer Vision. – 2004. – Vol. 60. P. 91–110.

7. ORB: An efficient alternative to SIFT or SURF / E. Rublee, V. Rabaud, K. Konolige, G. Bradski // Proc. of the International Conference on Computer Vision (ICCV 2011). – Barcelona, Spain, 2011. – P. 2564–2571.

8. Speeded-Up Robust Features (SURF) / H. Bay, A. Ess, T. Tuytelaars, L.Van Gool // Computer Vision and Image Understanding. – 2008. – Vol. 110, №3. – P. 346–359.

УДК 004.852

# ОРГАНИЗАЦИЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИЧНОСТИ ПРИ ПОМОЩИ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**А. С. Исмагилова, Н. Д. Лушников**

*Башкирский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе описаны возможности защиты информационных ресурсов на персональных компьютерах, системах контроля и управления доступом с помощью нейронных сетей. Были рассмотрены и изучены теоретические основы биометрических процессов, описаны основные этапы разработки программного обеспечения на основе нейронной сети. Для обеспечения необходимого уровня защиты были проведены эксперименты с созданным программным обеспечением. Применение биометрических систем для обеспечения безопасности очень удобно и необходимо в современном мире. Данные системы позволяют предоставлять полную и достоверную информацию клиентам вовремя и без лишних (что довольно актуально на сегодня) затрат.
**Ключевые слова:** распознавание образов, нейронные сети, биометрические системы, информационная безопасность, аутентификация, многофакторная идентификация.

## Введение

В наши дни на помощь многим сферам деятельности биометрические технологии, которые являются уникальным и неотчуждаемым идентификатором каждого человека.

Биометрические системы применяются в самых разных сферах деятельности — от контрольно-пропускных систем, до множества онлайн-сервисов и др. Распознавание лиц необходимо для определения конкретной личности на изображении или в видеокадре из огромного массива данных идентифицированных субъектов. В особенности, если это касается владельца определенного устройства и его информации на этом устройстве. Это одна из актуальных задач информационной безопасности.

Биометрические технологии в особенности используются в банках для обеспечения безопасности счетов в депозитарных ячейках, контроля доступа и учёта рабочего времени сотрудников для удаленных объектов. В России широкое применение получили такие производители биометрических систем, как Bio Link и Bio Smart.

Лучшие показатели решения данной проблемы продемонстрировали нейронные сети. Основным достоинством нейронных сетей в задачах распознавания является то, что нейронные сети функционируют подобно человеческому мозгу, являясь искусственным интеллектом. Данная технология помогает адаптировать устройства под определенный алгоритм действий, заданный программным кодом. Были проанализированы нейросетевые методы распознавания человека по изображению лица, используемые в биометрических системах [1].

## 1. Процесс создания программного обеспечения

### *1.1. Обработка основного и сверяемого изображений*

Биометрические системы применяются в самых разных сферах деятельности: от контрольно-пропускных систем, до сервисов онлайн-знакомств и др. Распознавание лиц необходимо для определения конкретной личности на изображении или в видеокадре из огромного массива данных идентифицированных субъектов. Это одна из актуальных задач информационной безопасности. Лучшие показатели решения данной проблемы продемонстрировали нейронные сети (НС). Ранее проанализированы нейросетевые методы распознавания человека по изображению лица, используемые в биометрических системах идентификации [1]. Разработан метод синтеза параметров математической модели сверточной нейронной сети (СНС), в которой обучающая выборка генерируется путем добавления искаженных образов посредством изменения рецептивных полей СНС [2]. В [3] предлагается метод для распознавания лиц с помощью выделения признаков на основе кратномасштабного вейвлет преобразования.

Для защиты информации в операционной системе было разработано и протестировано программное обеспечение с применением биометрических технологий. Понятно, что необходимо подписать соглашение на обработку персональных данных пользователя системы биометрической идентификации. После чего производится регистрация идентификационных элементов. Все полученные таким способом данные вносятся в электронную базу данных.

Основной целью данной работы является описание работы программного кода, позволяющего проводить идентификацию личности при помощи нейронных сетей.

Для тестирования идентификации в нейронных сетях было создано программное обеспечение в Python 3.8.3, с использованием установленных пакетов и библиотек (содержание в библиотеке dlib таких элементов, как face_recognition, win, detector, face_descriptor, cv2. VideoCapture, работа с формами class Form(wx.Frame) и окнами class window(wx.Dialog)). Выбор данного языка программирования был обусловлен наличием множества необходимых компонентов, перечисленных ранее.

На начальном этапе создания программы определен выбор элементов Python 3.8.3, загружена библиотека с ранее установленной и апробированной нейросетью.

Назначены переменные и описана работа детектора первой фотографии. Одним из ключевых элементов работы детектора является формирование массива данных лица, состоящего из 128 точек [4]:

```
sp = dlib.shape.predictor('shape_predictor_68_face.landmarks.dat')
facerec = dlib.face_recognition_model_vl('dlib_face_recognition_resnet _model_vl.dat')
detector = dlib.get_frontal_face_detector()

img = io.imread('lushnikov_passport.jpg')

win1 = dlib.image_window()
win1.clear.overlay()
win1.set_image(img)

dets = detector(img, 1)

for k, d in enumerate(dets):
   print("Detection {}: Left: {} Top: {} Right: {} Bottom: {}".format(
       k, d.left(), d.top(), d.right(), d.bottom()))
   shape = sp(img, d)
   win1.clear_overlay()
   win1.add_overlay(d)
   win1.add.overlay(shape)
```

*Рис. 1. Обработка основного изображения*

После обработки основного изображения данное окно удаляется. Результаты массива данных выводятся в командную строку.

```
   del win1
face_descriptor1 = facerec.compute_face_descriptor(img, shape)
print(face_descriptorl)
```

*Рис. 2. Удаление окна основного изображения и вывод дескриптора*

Переход к сверяемому изображению организован следующим образом. Сразу же после вывода в командную строку массива данных основного изображения мы получаем выход на веб-камеру, которая в течение 22 секунд создаст снимок второго изображения. Стоит обратить внимание, что снимки не сохраняются и в контейнере «cam.jpg» остается только актуальный снимок. Соответственно, со сверяемой фотографией воспроизводятся все те действия, которые были перечислены ранее.

### *1.2. Формула по расчету Евклидова расстояния*

После всех выполненных действий производится расчет Евклидова расстояния. Евклидово расстояние — геометрическое расстояние в многомерном пространстве. В данном случае Евклидово расстояние вычисляется по исходным, а не по стандартизованным данным [5]. В библиотеке dlib рекомендуется использовать граничное значение Евклидова расстояния между дескрипторами лиц, равное 0,6. Если Евклидово расстояние меньше 0,6, то фотографии принадлежат одному человеку. Также данное значение можно рассчитать по следующей формуле (1), [6]:

$$p(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}. \quad (1)$$

### *1.3. Создание форм с учетом условия if*

После расчета Евклидова расстояния создаются формы двухфакторной аутентификации для разграничения доступа. В коде прописываются два условия (функция if): действия при значениях, которые больше или равны 0,6 и при значениях, которые меньше 0,6 [7].

```
if a >= 0.6:
   class MyForm(wx.Frame):
      def __init__(self):
        no_caption = (wx.MAXIMIZE_BOX | wx.RESIZE_BORDER | wx.SYSTEM_MENU | wx.CLOSE.BOX
                     | wx.CLIP.CHILDREN)
        wx.Frame.__init__(self, None, title='Безопасность входа', style=no_caption)
        self.panel = wx.Panel(self, -1)
        self.Maximize(True)
        wx.StaticText(self.panel, -1, "ВЫ НЕ ПРОШЛИ АУТЕНТИФИКАЦИЮ!",(650, 280))
        self.button2=wx.Button(self.panel, -1, "Выйти из системы",(610, 430))
        self.Bind(wx.EVT_BUTTON, self.OnClose, self.button2)
        self.button2.SetDefault()

        button=wx.Button(self.panel, -1, "Ввести пароль",(800, 430))
        self.Bind(wx.EVT_BUTTON, self.newwindow, button)

        loc = wx.IconLocation(r'C:\Windows\System32\credwiz.exe', 0)
        self.SetIcon(wx.Icon(loc))

      def OnClose(self, event):
        sys.exit(O)

      def newwindow(self,event):
        secondWindow = window2()
        secondWindow.Show()

   class window2(wx.Dialog):
      def __init__(self):
```

```
        wx.Dialog.__init__(self, None, title="Логин")
        self.logged_in = False

        user_sizer = wx.BoxSizer(wx.HORIZONTAL)
        user_lbl = wx.StaticText(self, label="Имя пользователя:")
        user_sizer.Add(user_lbl, 0, wx.ALL|wx.CENTER, 9)
        self.user = wx.TextCtrl(self, style=wx.TE_PROCESS_ENTER)
        self.user.Bind(wx.EVT_TEXT_ENTER, self.onLogin)
        user_sizer.Add(self.user, 0, wx.ALL, 9)

        p_sizer = wx.BoxSizer(wx.HORIZONTAL)

        p_lbl = wx.StaticText(self, label="Пароль:")
        p_sizer.Add(p_lbl, 0, wx.ALL|wx.CENTER, 9)
        self.password = wx.TextCtrl(self, style = wx.TE_PASSWORD | wx.TE_PROCESS_ENTER)
        self.password.Bind(wx.EVT_TEXT_ENTER, self.onLogin)
        p_sizer.Add(self.password, 0, wx.ALL, 9)

        main_sizer = wx.BoxSizer(wx.VERTICAL)
        main_sizer.Add(user_sizer, 0, wx.ALL, 9)
        main_sizer.Add(p_sizer, 0, wx.ALL, 9)

        btn = wx.Button(self, label="Подтвердить")
        btn.Bind(wx.EVT_BUTTON, self.onLogin)
        main_sizer.Add(btn, 0, wx.ALL|wx.CENTER, 9)

        self.SetSizer(main_sizer)

      def onLogin(self, event):
        nikita_name = "NikDL"
        user_name = self.user.GetValue()
        nikita_password = "NikOO"
        user_password = self.password.GetValue()
        if (user_name == nikita.name and user_password == nikita.password):
            print("Вы вошли в систему!")
            self.logged_in = True
        else:
            print("Некорректные имя пользователя или пароль!")
            root = Tk()
            root.title("Вход в систему")
            root.geometry('500x300')
            root.iconbitmap(r'C:\Windows\System32\credwiz.exe')
            text = Label(text = "ВЫ НЕПРАВИЛЬНО ВВЕЛИ ИМЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ИЛИ ПАРОЛЬ!",
                 fg = "#ffOOOO").place(x=70, y=36)

            root.mainloop()
        if (user_name = nikita.name and user_password == nikita.password):
            root = Tk()
            root.title("Вход в систему")
            root.geometry('500x300')
            root.iconbitmap(r 'C:\Windows\System32\credwiz.exe')
            text = Label(text = "ВЫ ПРАВИЛЬНО ВВЕЛИ ПАРОЛЬ!").place(x=l50, y=36)

            root.mainloop()
if __name__ = '__main__':
    app = wx.App(False)
    frame = MyForm().Show()
```

```
        app.MainLoop()

if a < 0.6:
    root = Tk()
    root.title("Вход в систему")
    root.geometry('500x300')
    root.overrideredirect(1)
    root.state('zoomed')
    root.iconbitmap(r'C:\Windows\System32\credwiz.exe')
    text = Labeltext = "ВЫ ЯВЛЯЕТЕСЬ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕМ СИСТЕМЫ!", font = 68,
         fg = "#7d00ff").place(x=560, y=400)

     root.mainloop()
```

*Рис. 3. Создание форм двухфакторной аутентификации*

В случае, когда значение меньше 0,6 пользователь идентифицирован. Если же пользователь не идентифицирован (рис. 4), то производятся следующие действия: рассчитывается Евклидово расстояние, затем на результат программа будет реагировать выводом баннера с соответствующим оповещением в полноэкранном режиме (рис. 5), который будет подразумевать несколько вариантов развития событий: выйти из системы или ввести пароль (рис. 6). При верном заполнении соответствующих форм будет предоставлен доступ в систему (рис. 7). В случае некорректно заполненных данных доступ в систему будет закрыт в сопровождении соответствующего уведомления (рис. 8).

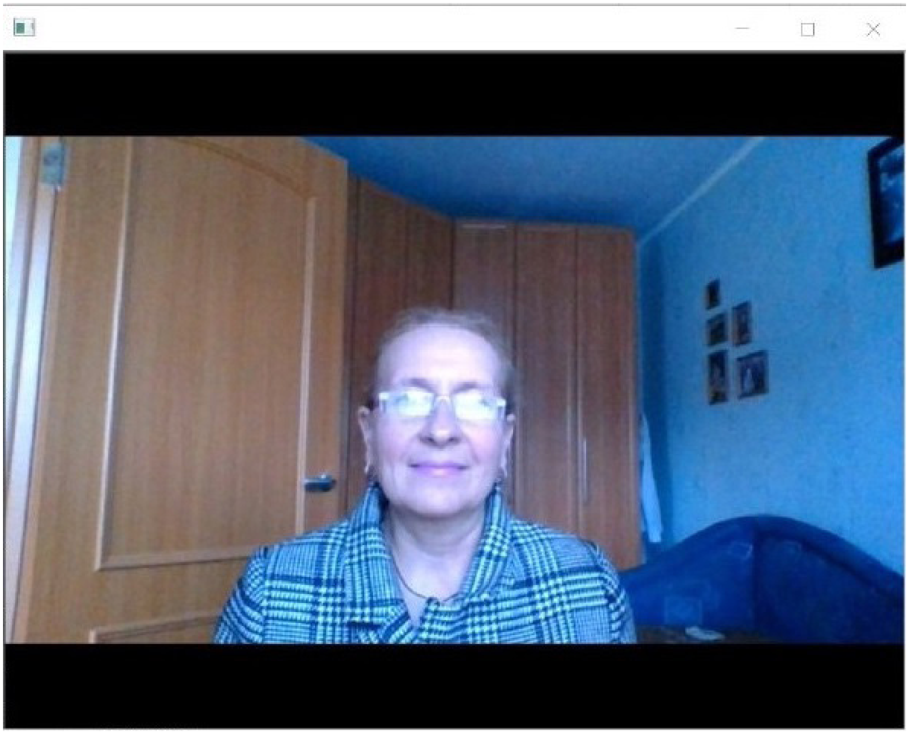


*Рис. 4. Фиксация неидентифицированного пользователя*

*Рис. 5. Реагирование на пользование системой неидентифицированным пользователем*

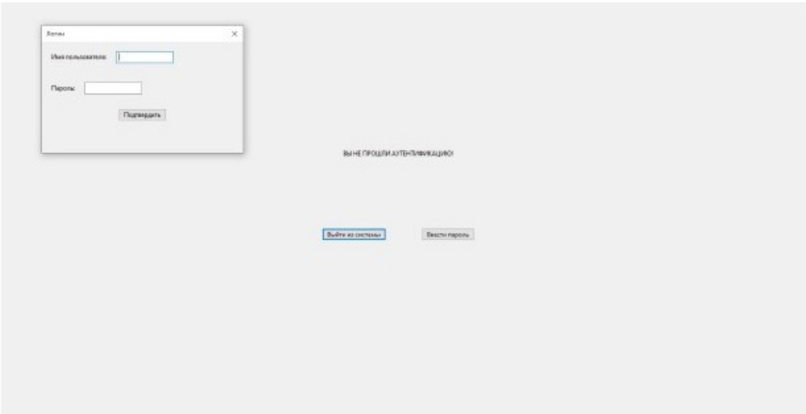


*Рис. 6. Окно двухфакторной аутентификации*

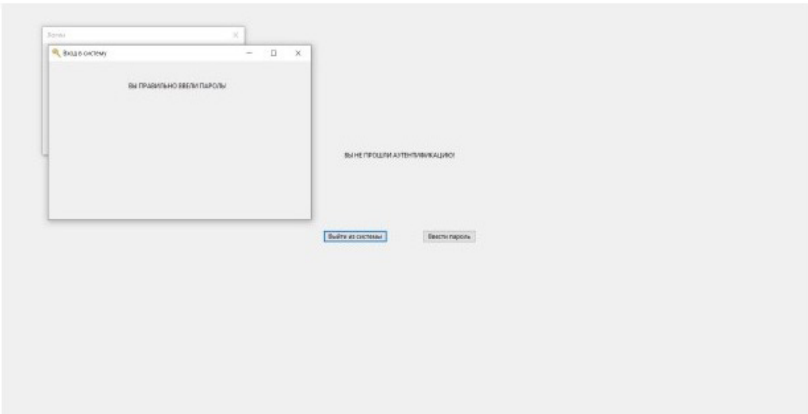


*Рис. 7. Оповещение о прохождении двухфакторной аутентификации*

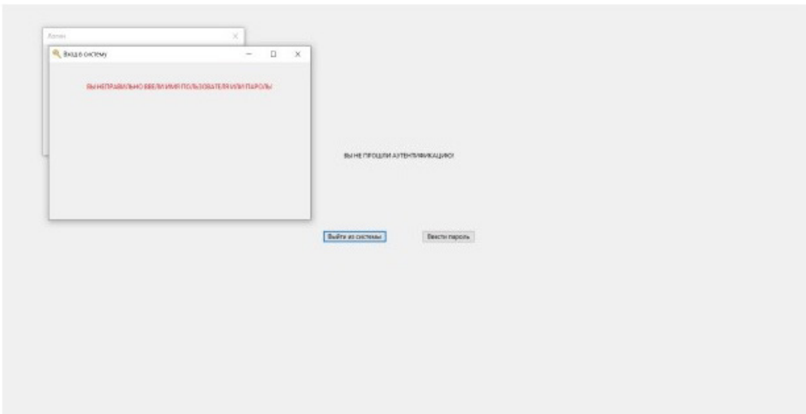


*Рис. 8. Оповещение о некорректно введенных данных*

## Заключение

Предложенное авторами приложение может применяться на персональных компьютерах, в системах управления и контроля доступом автоматизированных систем организации. Подобного рода биометрические системы позволяют быстро и без лишних затрат организовать персональную идентификацию пользователей. Разработанное программное обеспечение позволяет пользователю защитить свои информационные ресурсы на своем девайсе с помощью идентификации и двухфакторной аутентификации. Стоит обратить внимание на действие окна двухфакторной аутентификации: если пользователь не прошел идентификацию личности, неправильно ввел логин или пароль, то вход в систему будет автоматически запрещен и пользоваться устройством будет невозможно до тех пор, пока не будет пройдена данная процедура.

## Литература

1. *Ван Ляпэн, Петросян О. Г.* Распознавание лиц на основе классификации вейвлет признаков путем вейвлет нейронных сетей // Информатизация образования и науки. – 2018. – № 4 (40). – С. 129–139.

2. *Немков Р. М.* Исследование сверточной нейронной сети, обученной с помощью метода применения нестандартных рецептивных полей при распознавании изображений // Известия Южного федерального университета. – 2015. – № 7 (168). – С. 79–90.

3. *Осовский, С.* Нейронные сети для обработки информации: учебное пособие / С. Осовский. – М. : Телеком, 2017. – 448 с.

4. *Семкин, С. Н, Семкин, А. Н.* Основы правового обеспечения защиты информации: учебник / С. Н. Семкин, А. Н. Семкин – М. : Телеком, 2017. – 238 с.

5. *Смит, Ричард Э.* Аутентификация: от паролей до закрытых ключей: учебное пособие / Ричард Э. Смит. – М. : Вильямс, 2015. – 432 с.

6. *Суомалайнен, А.* Биометрическая защита: обзор технологии: учебное пособие / А. Суомалайнен – М. : ДМК, 2016. – 104 с.

7. *Тропченко А. А., Тропченко А. Ю.* Нейросетевые методы идентификации человека по изображению лица // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2012. – Т. 55, № 10. – С. 31–36.

УДК 004.42

# АЛГОРИТМ АРТИСТИЧЕСКОГО СТИЛЯ НА НЕСКОЛЬКИХ ТЕКСТУР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРТОЧНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

**В. И. Минаков, С. В. Золотарёв**

*Воронежский государственный университет*

## Введение

Данная работа посвящена рассмотрению процесса передачи нескольких артистических стилей путем разделения и рекомбинации содержимого изображения и текстуры при использовании алгоритма синтеза изображений Гатиса.

В других ключевых областях визуального восприятия близких к человеческим возможностям, таких как распознавание объектов и лиц, недавно высокую эффективность продемонстрировал класс биологически вдохновленных моделей зрения, называемых глубокими нейронными сетями. В данной работе рассматривается искусственная система, основанная на глубокой нейронной сети, которая создает художественные образы высокого качества восприятия. Система использует нейронные представления для разделения и объединения содержимого и стиля произвольных изображений. Более того, в свете поразительного сходства между оптимизированными по производительности искусственными нейронными сетями и биологическим зрением, работа предлагает путь к алгоритмическому пониманию того, как люди создают и воспринимают художественные образы.

## Архитектура сверточной сети

Класс глубоких нейронных сетей, которые наиболее эффективны в задачах обработки изображений, называются сверточными нейронными сетями. Сверточные нейронные сети состоят из слоев небольших вычислительных блоков, которые иерархически обрабатывают визуальную информацию с прямой связью. Каждый уровень можно понимать как набор фильтров изображения, каждый из которых извлекает определенную функцию из входного изображения. Таким образом, выход данного слоя состоит из так называемых карт характеристик — различных отфильтрованных версий входного изображения. Следует отметить, что каждый скрытый слой используется функцию активации ReLU, чтобы определить выходное значение нейрона в зависимости от результата взвешенной суммы входов и порогового значения. Для генерации результирующего изображения решено использовать алгоритм Леона Гатиса. Экспериментальные результаты данного алгоритма показали, что CNN способна извлекать информацию о содержании из произвольной фотографии и информацию о стиле известного произведения искусства.

В качестве модели сверточной сети для выделения признаков изображений выбрана VGG16. В ней заменены большие фильтры на несколько фильтров меньшего размера, что является допустимым для решения данной задачи. Для обучения модели используется датасет ImageNet. Таким образом, с помощью *VGG16* можно реализовать оптимальную сеть для набора данных, анализируя корреляции нейронов предыдущего слоя и объединяя их в группы.

На рис. 1 показана подробная схема модели *VGG16*.

На вход слоя conv1 подаются RGB изображения произвольного размера и расширения. Далее изображения проходят через стек сверточных слоев с фильтрами. Сверточный шаг (одна итерация) фиксируется в значении одного пикселя. Дополнение выбирается таким образом,

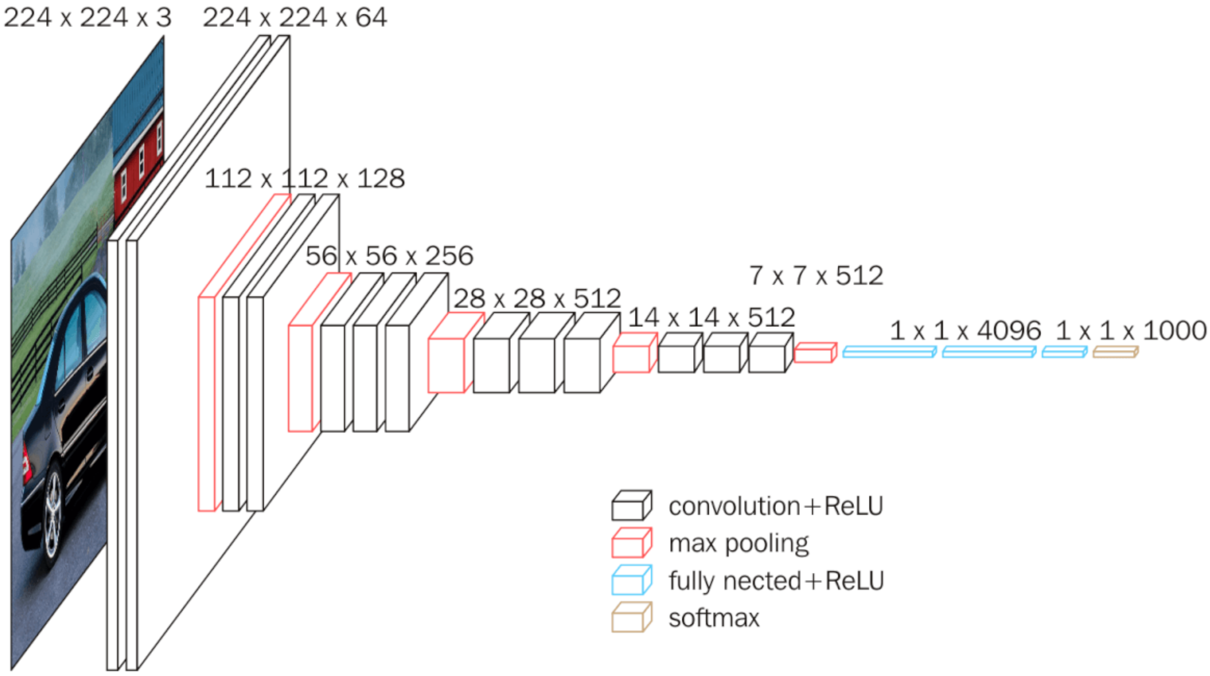



*Рис. 1. Подробная схема модели сверточной сети*

чтобы разрешение сохранялось после свертки для сохранения исходного размера изображения. Фильтры в первых слоях являются низкоуровневыми объектами. Такие объекты сохраняют более высокое разрешение для точной локализации с визуальной информацией.

После стека сверточных слоев вектор проходит через три полносвязных слоя со множеством каналов, где классу соответствует один канал. Данная реализация используется для классификации изображения, но также ее можно применить для обнаружения признаков артистического стиля и контент изображения.

Целесообразно разделить три изображения на слои: *content layer* и *style layers*. Данное входное изображение представлено как набор отфильтрованных изображений на каждом этапе обработки в CNN. Пока количество разных фильтров увеличивается по иерархии обработки, размер отфильтрованных изображений уменьшается с помощью некоторого механизма понижающей дискретизации, что приводит к уменьшению общего количества единиц на уровень сети. Существует возможность визуализировать информацию на разных этапах обработки в CNN, реконструируя входное изображение, зная только ответы сети на определенном уровне. Реконструируем входное изображение из слоев «conv1 1», «conv2 1», «conv3 1», «conv4 1» и «conv5 1» исходной сети VGG. Реконструкция нижних слоев почти идеальна. На более высоких уровнях сети подробная информация о пикселях теряется, а высокоуровневое содержимое изображения сохраняется. Поверх оригинальных представлений CNN создается новое пространство функций, которое фиксирует стиль входного изображения. Представление стиля вычисляет корреляции между различными функциями на разных уровнях CNN. Реконструируем стиль входного изображения из представлений стилей, построенных на различных подмножествах слоев CNN («conv1 1», «conv1 1» и «conv2 1», «conv1 1», «conv2 1» и «conv3 1», «conv4 1» и «conv5 1»). Это создает изображения, которые соответствуют стилю данного изображения в увеличивающемся масштабе, при этом отбрасывая информацию о глобальных признаках.

Модель передачи стилей в CNN показана на рис. 2. В качестве единственного изменяемого параметра возьмем инициализированное исходное изображение. Данный параметр будет обновляться в процессе передачи стилей. На рисунке показано, что обученная нейронная сеть в целом содержит три слоя. Второй уровень выводит элементы содержимого изображения, в то время как выходные данные первого и третьего уровней используются в качестве слоев стилей. В направлении сплошных линей показано прямое распространения для вычисления функций потери переноса стилей и обратное распространение (в направлении пунктирных линий) для обновления параметра модели, постоянно обновляя сгенерированное изображение. Затем, после завершения обучения будут выводится параметры модели передачи стиля для получения окончательного составного изображения.

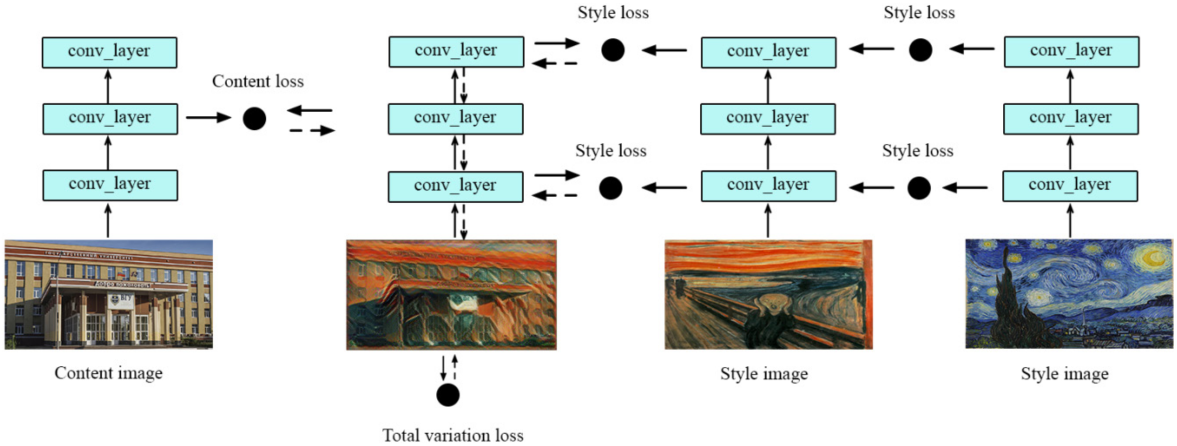



*Рис. 2. Процесс передачи художественных стилей*

### Процесс синтеза изображений

Целью передачи стиля является создание стилизованного изображения $x^*$ на основе контент-изображения $x^c$ и изображений стиля $x^{s^1}$ и $x^{s^2}$ (общий случай — $x^s$). Соответственно, feature maps (представление входных данных) для $x^*$, $x^c$ и $x^s$ на слое $l$ в сверточной сети обозначено как $F^l \in R^{N_l x M_l}$, $P^l \in R^{N_l x M_l}$ и $S^l \in R^{N_l x M_l}$, где $N_l$ — количество карт признаков на слое $l$ и $M_l$ — высота, умноженная на ширину карты признаков [3, 3].

Согласно исследованию [2, 10–12], передача нейронного стиля итеративно генерирует $x^*$, путем оптимизации потери контента и потери стиля:

$$\mathcal{L} = \alpha \mathcal{L}_{content} + \beta \mathcal{L}_{style}, \tag{1}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — веса для потери контента потери стиля (гиперпараметры), $\mathcal{L}_{content}$ определяется квадратом ошибки между картами признаков определенного слоя $l$ для $x^*$ и $x^c$. Потеря контента является среднеквадратичной ошибкой активаций функции в данных слоях контента в модели между смешанным изображением контента и исходным изображением:

$$\mathcal{L}_{content} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{M_l} (F_{ij}^l - P_{ij}^l)^2. \tag{2}$$

И $\mathcal{L}_{style}$ — сумма функций потерь стиля $\mathcal{L}^l{}_{style}$ на различных слоях:

$$\mathcal{L}_{style} = \sum_l w_l \mathcal{L}_{style}^l. \tag{3}$$

В отличии от функции потери контента, потеря стиля рассчитывается путем нахождения корреляции между значениями функции активации по разным каналам слоя $l$. Для этого, согласно алгоритму Гатиса, используется матрица Грама, где $w_l$ в функции потери стиля — вес потери в слое $l$ и $\mathcal{L}^l{}_{style}$, определенный квадратом ошибки между признаками корреляции, выраженной матрицей Грама $x^*$ и $x^s$::

$$\mathcal{L}^l{}_{style} = \frac{1}{4N_l^2 M_l^2} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{M_l} (G_{ij}^l - A_{ij}^l)^2, \tag{4}$$

где матрица Грама $G^l \in R^{N_l \times N_l}$ — квадратная матрица, состоящая из всевозможных скалярных произведений $x^*$ и слоя $l$:

$$G_{ij}^l = \sum_{k=1}^{M_l} F_{ik}^l F_{jk}^l. \qquad (5)$$

Аналогично, $A_{ij}^l$ является матрицей Грама, соответствующей $S^l$. В NST матрица Грама вычисляется как произведение матрицы активаций с самой собой транспонированной.

В результате имеется матрица размера $(n_c, n_c)$, где $n_c$ — количество фильтров. Элемент $G_{ij}^l$ показывает насколько похожи активации фильтра $i$ на активации фильтра $j$. Диагональные элементы $G_{ij}^l$ показывают, насколько сильно фильтр активировался. Например, если $i$-й фильтр отвечает за распознавание вертикальных линий, то $G_{ij}^l$ показывает их частоту.

Таким образом, вычислив среднеквадратическую ошибку между граммовой матрицей ввода и изображением стиля, возможно сгенерировать входное изображение с требуемым стилем. Следует отметить, что стиль изображения может быть представлен распределением объектов в разных слоях CNN. Передача стиля может рассматриваться как процесс выравнивания распределения от изображения контента к изображению стиля. В случае с несколькими стилями, функция потерь стилей — это взвешенное среднее значение всех потерь входного стиля для смешивания различных стилей.

## Результаты работы

В соответствии с использованием рекомендованных параметров сверточной сети были получены следующие результаты сгенерированных изображений (рис. 3). В качестве контент-изображения была взята фотография главного корпуса Воронежского государственного университета, а в качестве изображений стиля были выбраны картины «Звездная ночь» Ван Гога и «Крик» Эдварда Мунка.


*Рис. 3. Изменение параметров сверточных слоев*

Использование карт признаков ранних слоев conv намного лучше отображает контент, так как они ближе к входным данным. Следует учитывать, что количество и расположение признаков влияет на правильное распределение признаков артистистического стиля. На рисунке видно, порядок артистического блока влияет на результирующее изображения.

Результаты показали, что потеря стиля создает изображение с четкой текстурой артистического стиля, но нередко отсутствует взаимосвязь между компонентами текстуры при определенных параметрах сверточной сети.

## Заключение

Предложенное решение задачи позволяет заполнять текстуры произвольными стилями при реализации 3D моделей и ускорить процесс разработки игр. Кроме того, данное решение показывает, что классифицировать изображения можно не только по конкретным существующим признакам, но и для таких абстрактных признаков, как стиль.

## Литература

1. Demystifying Neural Style Transfer / Li Y. [et al.] // arXiv:1701.01036v2 [cs]. – 7 p. – URL: https://arxiv.org/pdf/1701.01036 (дата обращения: 12.05. 2020).
2. Gatys, L. A. A Neural Algorithm of Artistic Style / L. A. Gatys, A. S. Ecker, M. Bethge // arXiv:1508.06576v2 [cs]. – 2015. – 16 p.– URL: https://arxiv.org/pdf/1508.06576 (дата обращения: 06.05. 2020).
3. *Karimilla, Bi N.* Gram matrices and stirling numbers of a class of diagram algebras / N. Karimilla Bi, M. Parvathi // arXiv:1504.01241v2 [math]. – 54 p. – URL: https://arxiv.org/pdf/1504.01241 (дата обращения: 13.05. 2020).

УДК 004.912

# РАЗРАБОТКА ПО «SCILEXIC» ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛЕКСИЧЕСКОГО ОФОРМЛЕНИЯ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЧАСТОТНЫХ СЛОВАРЕЙ

**Е. А. Момот**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Написание научных текстов представляет трудность для студентов и аспирантов. Рассматривается математическая модель научного стиля речи, обучаемая на корпусе текстов по специфичной тематике исследования и основанная на частотных словарях. Разработано и опубликовано ПО, реализующее построенную модель.
**Ключевые слова:** статистические методы в лингвистике, разработка ПО, javascript, частотные словари, условные вероятности, научный стиль речи, написание текста на иностранном языке.

## Постановка проблемы

Чтобы иметь возможность публиковаться в зарубежных научных изданиях (в частности, на arXiv.org), студентам приходится писать статьи на английском языке, зачастую не очень хорошо им знакомом. В процессе этого возникает множество проблем, и одна из них заключается в определении приемлемости употребления некоторых слов и выражений как в конкретных областях науки, так и в научных статьях вообще. В качестве решения студенты могут обратиться за помощью к более опытным товарищам или преподавателям, или же самостоятельно искать статьи со схожей тематикой и смотреть, что там употребляется, а что нет. Но это, как известно, долго, не всегда доступно, а также не всегда даёт результат. Всё вышеизложенное обуславливает актуальность проблемы.

В проекте представлен вариант автоматизации поиска ненаучной или не соответствующей конкретной области науки лексики путём «разборки» более качественных статей (найденных и загруженных пользователем) на слова, и, после такой же «разборки», сравнения лексики, примененной в статье пользователя, с лексикой всех более качественных статей. Таким образом, новизной данной работы является автоматизация построения математической модели.

Данная программа не предназначена для жёсткой оценки качества текста статьи, но она может указать места в тексте, на которые автору следует обратить внимание, и таким образом помочь ему сделать статью более грамотной.

Набор статей, по которому будет проводиться анализ текста, далее будем называть корпусом, как и принято говорить в математической лингвистике [1], а процесс «разборки» текста — созданием обученной модели.

## Обзор аналогов

Чтобы избежать орфографических ошибок, многие студенты пишут свои статьи в известных текстовых редакторах, таких как LibreOffice Writer или Microsoft Office Word. Однако такие редакторы зачастую не могут указать на ошибки в математических терминах и на правильность их употребления в случае конкретной научной области.

Например, некоторые термины, как «line segment» в геометрии и «interval» в функциональном анализе, на русском языке мы назовём одинаково — «отрезок». Из-за этого неопытный человек может запутаться и применить, например, термин «line segment» в статье по функциональному анализу. Далее, собрав корпус из статей по функциональному анализу, написанных более опытными людьми и сравнив с ним свою статью, он получит список слов, которые есть в его статье, но отсутствуют в корпусе и увидит там что-то из «line» или «segment». Так станет ясно, что такие слова скорее всего не применяются в данной области науки.

Одним из распространенных форматов написания статей является .TeX, текст которого, кроме слов, содержит множество командных последовательностей, которые сильно усложняют проверку такого текста на грамотность в обычном редакторе. Но этот формат легко преобразовывается в pdf и таким образом может быть проанализирован данной программой.

Также эти редакторы часто определяют как ошибки большинство математических и прочих научных обозначений, которые пишутся латинскими буквами, но не представляют собой самостоятельное слово в каком-либо языке.

Тем же способом проводится профилактика ненаучной лексики, которая, напротив, никак не смущает распространенные текстовые редакторы. Например, для слова «исключить» и «throw out», и «exclude» будет правильно, но первое — ненаучно.

### Извлечение текста из файлов

В качестве основного формата для анализируемых текстов был выбран PDF, так как большинство других форматов легко в него преобразовать. В дальнейшем планируется сделать возможным загрузку и других распространенных форматов: .TeX, .odt, .rtf, .djvu.

Для извлечения текста из pdf-файлов было решено использовать уже существующие библиотеки для работы с данным форматом. При выборе библиотеки возникало множество трудностей в связи с тем, что большинство их работает либо только в командной строке, либо только в браузере. При этом разные библиотеки получают разный результат при извлечении текста из файлов, из-за чего использование различных библиотек в браузере и командной строке приводит к несоответствиям в результатах работы программы с одним и тем же файлом.

В процессе решения этих проблем были произведены попытки модификации некоторых библиотек для командной строки, чтобы заставить их работать в браузере.

Одной из первых была испробована библиотека `pdf-to-text` [2]. Она была выбрана из нескольких вариантов, которые есть в реестре пакетов NPM, за наиболее точное соответствие извлеченного текста оригинальному тексту документа. На её основе были созданы первые версии функций создания моделей и анализа текстов. Однако, в процессе сборки веб-интерфейса выяснилось, что функция этой библиотеки, отвечающая за извлечение текста из файла, запускала дочерний процесс (`child_process`), что не поддерживается в браузере.

Следующей была библиотека `pdf-parse` [3]. Она не запускала дочерних процессов, а используемый в одном из основных файлов `fs.readFileSync(path_to_pdf)` можно было легко заменить на `FileReader().readAsArrayBuffer()`, после чего, по идее, проект должен был собраться с помощью browserify. Но browserify с задачей не справился, предположительно из-за нестандартного вызова функции `require()` (аргумент был не константным строковым выражением, а суммой некоторых переменных). Тем не менее, в коде этой библиотеки нашлось более надежное решение, которое и стало окончательным.

Этим решением стала библиотека `PDFjs` [4] (от разработчиков FireFox), которая без проблем запустилась в браузере, а затем и в командной строке.

После того, как текст файла получен, для обучения модели нужно разделить его на слова. При этом существует несколько проблем, из-за которых тексту требуется предварительная обработка.

1. Переносы. После извлечения текста из файла слово с переносом в строке JavaScript выглядит примерно следующим образом: `"сло-\nво"`. То есть такие слова нельзя выделять так же, как целые, в них есть лишние символы. Чтобы «склеить» переносы, производится первая

обработка текста с помощью функции `.replace(/-\s+/g,'')`. Эта функция заменяет символьные последовательности, соответствующие регулярному выражению, переданному в качестве первого аргумента, на строку, переданную в качестве второго аргумента. Так перенос заменяется пустой строкой — «склеивается».

2. Лигатуры и диакритические знаки. Диакритические знаки в типографике — элементы письменности, модифицирующие начертание знаков и обычно набираемые отдельно. Лигатура — знак любой системы письма или фонетической транскрипции, образованный путём соединения двух и более графем (напр. ﬃ). Из этого следует, что в разных языках в текстах могут использоваться символы, состоящие на самом деле из нескольких символов. При этом могут встречаться различные варианты написания одного и того же текста. Например, если в одном тексте использовались лигатуры, а в другом — нет, одно и то же слово будет записано разными символами и эти слова будут распознаны программой как разные. Примерно та же ситуация с диакритическими знаками: в одних случаях они могут быть написаны отдельно от модифицируемых ими букв, но у некоторых символов в связке с диакритическими знаками существуют «цельные» версии (напр. «ё»). Соответственно, слова с «цельными» и «раздельными» символами также будут считаться разными. Отсюда появляется ещё один этап обработки — нормализация, то есть приведение символов к одинаковому формату, метод `.normalize('NFKC')` (описан в спецификации Юникода [5]). Он выполняет каноническую декомпозицию, т. е. заменяет лигатуры соответствующими им последовательностями символов, а диакритические знаки компонует с соответствующими им буквами, приводя таким образом все символы в текстах к единому формату.

Теперь, когда текст состоит из цельных слов и символов одного формата, можно разделить его на слова. Проблема этого процесса в том, что текст, как известно, состоит не только из собственно слов: научные статьи часто включают в себя множество формул и расчётов, а также общие для всех текстов знаки препинания. Так как встроенными методами можно было выбрать из текста только слова из латинских символов, нужно было создать то, что сможет отделить все буквенные символы от формул, знаков препинания и прочего. Для этого было сконструировано регулярное выражение, состоящее по большей части из диапазонов Юникода, в которых находились символы, используемые в формулах. Также оно отдельно содержит некоторые распространенные символы, не попавшие ни в один из существующих диапазонов и не формирующих в совокупности новый диапазон.

**Структура проекта**

Изначально проект был задуман как консольное приложение, но так как пользователям всё же проще обращаться с графическим интерфейсом, он был «продлён» в браузер.

На данный момент проект состоит из двух разделов, предназначенных для пользователей и раздела математической модели, а так же ряда файлов и директорий, интересных лишь разработчикам, таких как юнит-тесты, библиотеки, и файлы сборки проекта:

- `webui` — графический вебинтерфейс;
- `cli` — интерфейс командной строки;
- `common` — набор функций для предварительной обработки и анализа текста
- `test` — юнит-тесты некоторых функций из common
- `Gruntfile.js` — сборка проекта
- `package.json` — для NPM

Директории, заполняемые автоматически:

- `dist` — файлы сборки
- `node_modules` — зависимости.

Для сборки используется система grunt; использование основного кода и в браузере, и в командной строке обеспечивает browserify.

Веб-версия проекта доступна по адресу https://scilexic.github.io/ [6].

Исходный код: https://github.com/Aisse-258/scilexic [7].

Проект опубликован на github под открытой лицензией gpl-3.0 [8].

### Математическая модель

Данная программа сверяет текст статьи с множеством других, в которых эти термины скорее всего использованы правильно и написаны без ошибок (или, возможно, с другой ошибкой, если это просто опечатка). Таким образом, если в анализируемом тексте термин будет написан неправильно, или будет использован тот, который обычно не используется в данной области исследований, он не встретится в корпусе и будет выведен в соответствующий список. Если в корпусе есть ошибки, они скорее всего будут встречаться в нем 1–2 раза. Из этого получается возможность выявить ошибки в тексте, которые совпадают с ошибками в корпусе — список слов из текста, встречающихся в корпусе менее заданного $n$ раз.

Таким образом, результат сравнения выводится в виде двух списков «потенциально опасных слов», один из которых содержит все слова пользовательской статьи, не встречающихся в корпусе, а другой — слова, редко встречающиеся в корпусе (1, 2, или любое заданное число раз), которые были найдены и в анализируемом тексте (возможно опечатки).

Существует и инструмент проверки правильности порядка слов в тексте: если пара слов $(A, B)$ из анализируемого текста встречается в корпусе существенно реже, чем пара $(B, A)$, то возможно, что слова стоят в неправильном порядке.

Программа также анализирует сочетаемость слов в тексте и указывает пользователю на возможную несочетаемость слов. Анализ проводится следующим образом: если частота в корпусе пары $(A, B)$ существенно ниже, чем произведение частот $A$ и $B$ (или даже ноль при ненулевых частотах $A$ и $B$ по отдельности), то на употребление словосочетания $(A, B)$ в анализируемом тексте стоит обратить внимание (слова потенциально несочетаемы).

### Альтернативная применимость

В работе систем проверки на плагиат существует и широко известна проблема того, что использование общеупотребительных выражений, таких как «тогда и только тогда, когда» в математике, названия статей законодательства в юриспруденции и т. п. принимается системой за неоригинальный текст, из-за чего снижается показатель оригинальности статей.

Подход, похожий на вышеописанный, может быть использован для уменьшения ложных срабатываний систем проверки на плагиат. Для этого в качестве корпуса можно взять список цитируемой литературы, а часто встречающиеся (общеупотребительные) словосочетания (напр. «тогда и только тогда, когда» в математике) рассматривать как неделимые лексические единицы (принимать за одно слово при подсчёте оригинальности).

На данный момент реализована математическая модель, которая может получить список часто встречающихся словосочетаний из корпуса. Она фильтрует сочетания из $n$ слов по нескольким критериям:

1. Если $k \geq \ln^2(K)$ [1], где $k$ — количество повторений словосочетания в корпусе, а $K$ — мощность корпуса, словосочетание считается общеупотребительным.

[1]В ходе исследований выяснилось, что сравнение с натуральным логарифмом от мощности корпуса даёт результаты, которые наилучшим образом согласуются с интуитивным представлением о том, какие словосочетания должны проходить такую проверку.

2. Если $\ln(K) < k < \ln^2(K)$ и $\frac{k}{K} > P,$ где $P$ — произведение частот подсочетаний, на которые может быть разбито словосочетание, и $\ln(K),$ словосочетание считается общеупотребительным.

Рассмотрим на примере общеупотребительного словосочетания «тогда и только тогда»:

Частота словосочетания $p = \frac{k}{K}$

Далее программа разбивает словосочетание на подсочетания:

«тогда» + «и только тогда»

«тогда и» + «только тогда»

«тогда и только» + «тогда»

«тогда» + «и» + «только тогда»

«тогда и» + «только» + «тогда»

«тогда» + «и только» + «тогда»

«тогда» + «и» + «только» + «тогда»

Для каждого такого разбиения вычисляется произведение частот подсочетаний

$$P = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n}{K^n} \cdot \ln(K),$$

где $n$ — количество подсочетаний, на которые может быть разбито словосочетание, $k_i$ — количество повторений $i$-го подсочетания ($i = 1, 2, \ldots, n$), $K$ — мощность корпуса.

Критерий признания словосочетания общеупотребительным — частота словосочетания больше каждого такого произведения.

Словосочетание «тогда и только тогда, когда» проходит по этому критерию для исследуемого корпуса, а «тогда и только тогда, когда для» — нет.

3. Если $k < \ln(K),$ словосочетание не попадает в список.

Такой анализ имеет смысл только для сочетаний четырёх и более слов, так как повторение сочетаний меньшего количества слов не считается плагиатом.

Для проверки этого подхода был взят корпус мощностью примерно 8 млн. слов на основе архивов научных журналов «Вестник ВГУ» (серия Физика. Математика 2006–2019 гг.) и «Чебышевский сборник». Работа со статьями «Вестника ВГУ» затрудняется тем, что более ранние статьи (2006–2012 гг.) имеют специфическое оформление: их текст написан в два столбца. Имеющаяся библиотека для извлечения текста не может это определить и склеивает строки двух столбцов в одну. Для того чтобы извлечь из них текст хотя бы большей частью правильно (оглавление при этом написано стандартно), было решено разрезать эти файлы по вертикали, так чтобы каждая колонка текста была отдельной страницей и эти колонки шли в файле по порядку. Для этого было использовано консольное приложение mupdf.

Вот примеры некоторых полученных общеупотребительных выражений:

«можно записать в виде»

«несмотря на то, что»

«тогда и только тогда»

«пусть выполнены условия теоремы»

«может быть представлен в виде»

«без ограничения общности можно считать»

«тогда и только тогда, когда»

«имеет хотя бы одно решение»

«в том и только том случае»

«выполняется тогда и только тогда, когда»

«с центром в начале координат»

«так как в противном случае»

«не имеет неподвижных точек на»
«сделать вывод о том, что»
«для него имеет место оценка»
«или, что то же самое»
«в силу условий теоремы»
«заключается в том, что»
«что и требовалось доказать»
«имеет место следующее утверждение»
«с центром в нуле»
«то будем говорить, что»
«без ограничения общности можно считать, что»
«при выполнении условий теоремы»
«следует, что для любого»
«работа выполнена при финансовой поддержке рффи»
«тогда и только тогда, когда существует»
«исследование выполнено при финансовой поддержке рффи в рамках научного проекта»
«доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов»

**Ограничения применимости**

1. Программа может работать только с языками, слова в которых разделены пробелами. То есть, если статья написана, к примеру, на японском языке, программа примет за слова целые предложения или их части. Это связано с тем, что функция `match(reg_word)` ищет совпадения с последовательностями буквенных символов. В языках с пробелами такие последовательности прерываются знаками препинания, и, собственно, пробелами. В случае же отсутствия разделителей между словами, несколько слов будут сочтены одной и той же последовательностью, т.е. приняты за одно слово.
2. Языки с большим количеством падежей труднее поддаются анализу. Причина этого, очевидно, в большом количестве вариантов записи одного и того же слова. Это можно преодолеть, составив корпус из как можно большего количества статей, и проблемы наверняка будут у авторов статей, которые работают с малоизученными областями науки (им просто негде взять достаточное количество материала).
3. Греческий язык. Символы этого языка нередко являются частями математических формул, и если при написании статьи на русском или английском понятно, что это формульные символы, то они будут причинять очевидный дискомфорт в случае, если греческий — основной язык статьи.
4. Необходимость создания корпуса. Пользователю предлагается самостоятельно создать корпус, по которому будет происходить анализ статьи. Если пользователь уже какое-то время работал по своей тематике, скорее всего, у него уже будут в наличии некоторые статьи, которые можно использовать в качестве материала для корпуса, а вот кому-то, только начинающему разбираться в теме, придется специально искать надежные статьи.

**Перспективы развития проекта**

Планируется поддержка большего количества форматов для обеспечения более быстрого и удобного пользования программой. Важность этого обусловлена тем, что статьи в архивах хранятся в разных форматах, а потребность преобразовывать их все к одному формату может стать отталкивающим фактором, особенно если статей много.

Локализация — перевод веб-интерфейса на английский.

Указание контекста слов, редко встречающихся в корпусе и присутствующих в статье, для упрощения работы с результатом анализа текста и ускорения поиска слов, употребление которых потенциально ошибочно.

Более полное покрытие тестами CLI и WEB UI.

Создание набора встроенных моделей на основе того, что есть в открытом доступе, для упрощения задачи написания статьи тем, кто только начинает разбираться в своей теме.

**Литература**

1. *Маслов В. П., Маслова Т. В.* О законе Ципфа и ранговых распределениях в лингвистике и семиотике // Математические заметки. – 2006. – Т. 80. – №. 5. – С. 718–732.

2. pdf-to-text — npm. – URL: https://www.npmjs.com/package/pdf-to-text (дата обращения: 25.09.2020)

3. pdf-parse — npm. – URL: https://www.npmjs.com/package/pdf-parse (дата обращения: 25.09.2020)

4. mozilla/pdf.js: PDF Reader in JavaScript. – URL: https://github.com/mozilla/pdf.js (дата обращения: 25.09.2020)

5. Таблица символов Юникода. – URL: https://unicode-table.com/ru/ (дата обращения: 25.09.2020)

6. Scilexic. – URL: https://scilexic.github.io/ (дата обращения: 25.09.2020)

7. Aisse-258/scilexic. – URL: https://github.com/Aisse-258/scilexic (дата обращения: 25.09.2020)

8. GNU general public license. Version 3, 29 June 2007 (Стандартная общественная лицензия GNU. Версия 3, от 29 июня 2007 г.)

УДК 519.688 + 372.851 + 004.428.4

# РАЗРАБОТКА И ВНЕДРЕНИЕ ПО ДЛЯ СБОРА СТАТИСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

**Е. А. Момот, Н. Д. Арахов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Ведется сбор статистики результатов подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня с использованием открытого образовательного проекта «Час ЕГЭ» и платформы «Яндекс.Метрика». Собраны данные за полный учебный год (июнь 2019 — май 2020). На основании полученых данных уже можно делать некоторые выводы о трудности и усваиваемости материала. Авторы планируют работать над расширением базы пользователей и продолжить сбор статистики в следующем году.
**Ключевые слова:** ЕГЭ, профильный ЕГЭ по математике, статистика успеваемости, подготовка к ЕГЭ, самостоятельная подготовка к ЕГЭ, разработка ПО, «Час ЕГЭ».

## 1. Введение

«Час ЕГЭ» — компьютерный образовательный проект, разрабатываемый при математическом факультете ВГУ в рамках «OpenSource кластера» и предназначенный для того, чтобы помочь учащимся старших классов подготовиться к тестовой части единого государственного экзамена. Задания в «Час ЕГЭ» генерируются случайным образом по специализированным алгоритмам, называемым шаблонами, что приводит к существенному увеличению количества различных вариантов текстово-графических формулировок задач. Для пользователей предназначены четыре оболочки (режима работы): «Случайное задание», «Тесты на печать», «Полный тест» и «Мини-интеграция» [2].

«Час ЕГЭ» является полностью открытым (код находится под лицензией GNU GPLv3 [7]) и бесплатным. В настоящее время в проекте полностью реализованы тесты по математике с кратким ответом (бывшая «часть B»). Планируется с течением времени включить в проект тесты по другим предметам школьной программы [3].

«Мини-интеграция» — это форма сотрудничества с образовательными интернет-ресурсами, при которой учебно-методический материал на странице ресурса дополняется виджетами тренажера с заданиями, соответствующими теме статьи, для возможности практического применения полученных знаний. В настоящее время достигнуто сотрудничество с двумя образовательными ресурсами: ege-ok.ru и matematikalegko.ru .

Целью настоящего исследования является использование тренажера «Час ЕГЭ» для сбора статистики результатов подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня. Для этого было разработано ПО, которое обрабатывает данные о работе тренажера, а именно: сколько раз дан ответ на задание определенного типа, сколько из них были правильными, сколько были неправильными и сколько пустыми (т.е. школьник запросил правильный ответ, не дав своего).

Ранее по итогам работы с этим ПО были опубликованы тезисы [8], в которых была проанализирована статистика за июнь — октябрь 2019 г. и была анонсирована статистика за полный учебный год. В настоящей работе представлены обновленные данные, которые демонстрируют помесячную динамику процента правильных ответов на задания каждого типа за период с июня 2019 г. по май 2020 г.

Такое исследование стало возможным благодаря тому, что сотрудничество с «Час ЕГЭ» приносит определенную выгоду и владельцам образовательных ресурсов. Во-первых, они расширяют базу пользователей: если посетитель после прочтения статьи закрепил полученные знания на тренажере, он с большей вероятностью вернется на сайт или даже порекомендует своим знакомым посетить его. Во-вторых, благодаря тренажеру увеличивается время, которое пользователи проводят на странице, из-за чего сайт занимает более высокие позиции в поисковой выдаче и новым пользователям легче его найти.

По сравнению с другими исследованиями результатов ЕГЭ [4–6], настоящая работа представляет собой анализ данных об успешности решения заданий в процессе подготовки к экзамену, в динамике.

## 2. Сбор статистики

Для получения наиболее точных результатов в статистике, необходимо, чтобы как можно большее количество людей решало задачи в «Час ЕГЭ». Для расширения базы пользователей ранее была создана описанная выше система «Мини-интеграции». Для сбора и хранения этих данных оболочка использовала интернет-ресурс «Яндекс.Метрика». Стоит заметить, что «Час ЕГЭ» не собирает никакие персональные данные пользователей.

Как было написано выше, «Час ЕГЭ» сотрудничает с двумя образовательными ресурсами: ege-ok.ru и matematikalegko.ru. Это дало два пути увеличения количества решений задач: подключение подходящих уже существующих шаблонов на тех страницах сайтов, где их не хватает, и написание новых шаблонов для тех страниц, для которых подходящих шаблонов не нашлось.

В ходе настоящей работы были проанализированы страницы сайтов ege-ok.ru и matematikalegko.ru и подключен ряд существующих шаблонов. Это сделано с путем добавления соответствующей информации в файл lib/autointegr.js в следующем виде:

```
var adresa={
 ‘//matematikalegko.ru/koordinatnaya-ploskost/uglovoj-koefficient-pryamoj-i-ne
 -tolko.html’:
    [
       ‘../zdn/mat2014/B5/15.js’,
    ],
 ‘//matematikalegko.ru/dvigenie/zadachi-na-nahozhdenie-srednej-skorosti.html’:
    [
       ‘../zdn/mat2014/B14/11.js’,
    ],
...

   ‘//matematikalegko.ru/stereometria-schar/zadachi-s-sharami.html’:
    [
       ‘../zdn/mat2014/B13/11.js’,
       ‘../zdn/mat2014/B13/3.js’,
    ],
};
```

Также было написано и интегрировано более двадцати новых шаблонов, что в целом повысило количество решений.

В табл. 1 и 2 представлена информация о количестве решений заданий ЕГЭ каждого типа за период с 1 июня 2019 г. по 31 мая 2020 г., а также о проценте правильных решений этих заданий.

Таблица 1

*Количество решений заданий ЕГЭ за год*

| № | summ | Sep | Oct | Nov | Dec | Jan | Feb | Mar | Apr | May |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 72 | 56 | 74 | 18 | 35 | 55 | 26 | 22 | 46 | 109 |
| 2 | 59 | 23 | 44 | 21 | 29 | 42 | 20 | 18 | 42 | 83 |
| 3 | 118 | 90 | 109 | 99 | 150 | 116 | 102 | 146 | 171 | 131 |
| 4 | 49 | 30 | 78 | 38 | 88 | 175 | 51 | 34 | 139 | 88 |
| 5 | 107 | 109 | 99 | 43 | 116 | 30 | 35 | 57 | 81 | 97 |
| 6 | 68 | 31 | 49 | 38 | 35 | 52 | 22 | 41 | 86 | 142 |
| 7 | 76 | 62 | 120 | 114 | 57 | 102 | 62 | 83 | 150 | 111 |
| 8 | 31 | 25 | 39 | 31 | 16 | 43 | 76 | 101 | 167 | 89 |
| 9 | 321 | 82 | 167 | 72 | 141 | 138 | 56 | 79 | 83 | 138 |
| 10 | 25 | 20 | 28 | 3 | 20 | 31 | 10 | 36 | 38 | 73 |
| 11 | 70 | 39 | 55 | 69 | 127 | 43 | 47 | 38 | 51 | 69 |
| 12 | 34 | 54 | 39 | 34 | 42 | 33 | 26 | 57 | 43 | 109 |

Таблица 2

*Процент правильных решений заданий ЕГЭ за год*

| № | summ | Sep | Oct | Nov | Dec | Jan | Feb | Mar | Apr | May |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 56.9 % | 58.9 % | 41.9 % | 44.4 % | 48.6 % | 49.1 % | 23.1 % | 68.2 % | 45.6 % | 54.1 % |
| 2 | 40.7 % | 69.6 % | 54.6 % | 57.1 % | 65.5 % | 59.5 % | 45.0 % | 66.7 % | 52.4 % | 69.9 % |
| 3 | 36.4 % | 18.9 % | 25.7 % | 31.3 % | 28.0 % | 45.7 % | 46.1 % | 57.5 % | 34.5 % | 45.0 % |
| 4 | 61.2 % | 40.0 % | 51.3 % | 44.7 % | 48.9 % | 66.3 % | 51.0 % | 76.5 % | 57.6 % | 63.6 % |
| 5 | 52.3 % | 40.4 % | 49.5 % | 62.8 % | 23.3 % | 50.0 % | 68.6 % | 61.4 % | 53.1 % | 70.1 % |
| 6 | 50.0 % | 22.6 % | 32.7 % | 36.8 % | 31.4 % | 44.2 % | 45.5 % | 41.5 % | 48.8 % | 39.4 % |
| 7 | 27.6 % | 24.2 % | 30.8 % | 35.1 % | 29.8 % | 31.4 % | 24.2 % | 38.6 % | 17.3 % | 38.7 % |
| 8 | 29.0 % | 32.0 % | 46.2 % | 25.8 % | 37.5 % | 53.5 % | 65.8 % | 68.3 % | 7.8 % | 41.6 % |
| 9 | 62.9 % | 53.7 % | 46.7 % | 54.2 % | 41.8 % | 60.8 % | 53.6 % | 45.6 % | 61.5 % | 60.9 % |
| 10 | 28.0 % | 40.0 % | 25.0 % | 66.7 % | 10.0 % | 29.0 % | 10.0 % | 50.0 % | 13.2 % | 42.5 % |
| 11 | 51.4 % | 12.8 % | 38.2 % | 14.5 % | 20.5 % | 34.9 % | 31.9 % | 31.6 % | 45.1 % | 34.8 % |
| 12 | 26.5 % | 53.7 % | 30.8 % | 44.1 % | 31.0 % | 24.2 % | 15.4 % | 40.4 % | 18.6 % | 28.4 % |

## 3. Анализ статистики

Статистика решения задач выгружается из «Яндекс.Метрики» в файлы в формате CSV, содержащие информацию о том, на какой странице и задаче сработал счетчик и какой (правильный/неправильный/пустой) ответ был на нее дан. Для обработки этой информации была написана специальная программа.

Программа работает с переданным ей CSV-файлом из «Яндекс.Метрики» и выдает LaTeX-код таблицы, содержащей данные о том, сколько раз решалось задание каждого типа, сколько было дано правильных, неправильных или пустых ответов и их процентные соотношения в виде, представленном в табл. 3.

Такое представление статистики позволяет увидеть ситуацию в целом и выделить наиболее интересные для анализа результаты — данные заданий с наибольшим количеством решений.

Таблица 3

*Данные о решениях задач за январь 2020 г*

| № задания | Комментарий | $N_{tot}$ | $N_{right}$ | $N_{wrong}$ | $N_{no}$ | $p_{right}$ | $p_{wrong}$ | $p_{no}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Элементарные бытовые задачи. | 55 | 27 | 13 | 15 | 49.09 % | 23.64 % | 27.27 % |
| 2 | Графики. Диаграммы. | 42 | 25 | 8 | 9 | 59.52 % | 19.05 % | 21.43 % |
| 3 | Планиметрия. Длина. Площадь. | 116 | 53 | 50 | 13 | 45.69 % | 43.10 % | 11.21 % |
| 4 | Начала теории вероятностей. | 175 | 116 | 51 | 8 | 66.29 % | 29.14 % | 4.57 % |
| 5 | Элементарные уравнения. | 30 | 15 | 7 | 8 | 50.00 % | 23.33 % | 26.67 % |
| 6 | Планиметрия. Угол. Тригонометрия. | 52 | 23 | 24 | 5 | 44.23 % | 46.15 % | 9.62 % |
| 7 | Производная. Первообразная. | 102 | 32 | 57 | 13 | 31.37 % | 55.88 % | 12.75 % |
| 8 | Стереометрия. Многогранники. | 43 | 23 | 14 | 6 | 53.49 % | 32.56 % | 13.95 % |
| 9 | Вычисления и преобразования. | 138 | 84 | 25 | 29 | 60.87 % | 18.12 % | 21.01 % |
| 10 | Расчетные задачи. | 31 | 9 | 17 | 5 | 29.03 % | 54.84 % | 16.13 % |
| 11 | Текстовые задачи. | 43 | 15 | 22 | 6 | 34.88 % | 51.16 % | 13.95 % |
| 12 | Экстремум функции. Точки экстремума функции. | 33 | 8 | 14 | 11 | 24.24 % | 42.42 % | 33.33 % |

$N_{tot}$ — общее кол-во ответов, $N_{right}$ — кол-во правильных ответов,
$N_{wrong}$ — кол-во неправильных ответов, $N_{no}$ — кол-во «пустых» ответов,
$p_{right}$ — процент правильных ответов, $p_{wrong}$ — процент неправильных ответов,
$p_{no}$ — процент «пустых» ответов

Для таких заданий имеет смысл построение диаграмм с помесячной динамикой процента правильных ответов. Это делается с помощью двух программ. Первая извлекает из CSV-файлов из «Яндекс.Метрики» необходимые для диаграммы данные, а именно проценты правильных решений для каждой задачи, и записывает их в TXT-файл в формате «№ задания, % правильных решений».

Для файлов с диаграммами первоначально был создан шаблон такого файла в формате FODS: из кода готового файла с диаграммой (созданного вручную) были удалены строки с входными данными. Это возможно благодаря тому, что FODS-файлы имеют формат XML, т. е. они представимы в виде текстового кода с тегами. На месте этих строк был вставлен тег `<chase-ege-statistics>`. Далее вторая программа приводит данные из TXT-файлов в приемлемый для FODS-файла вид и подставляет их в этот шаблон вместо тега, создавая таким образом файлы с диаграммами для всех заданий. В перспективе для построения графиков планируется использовать Gnuplot [9].

## 4. Результаты анализа

Диаграмма, изображенная на рис. 1, является одним из результатов работы упомянутой выше программы. На ней представлена помесячная динамика процента правильных решений задания № 3 ЕГЭ (тема «Планиметрия. Длина. Площадь.»). В среднем задания такого типа набирают более 100 решений в месяц.

Месяцы обозначены на диаграммах номерами от 1 до 10. Под номером «1» приведены данные за все лето, а номерами 2–10 обозначены месяцы от сентября 2019 г. до мая 2020 г. Названия месяцев являются сокращениями их названий на английском языке, а «summ» означает лето. Видно, что процент правильных решений в среднем возрастает к концу учебного года.

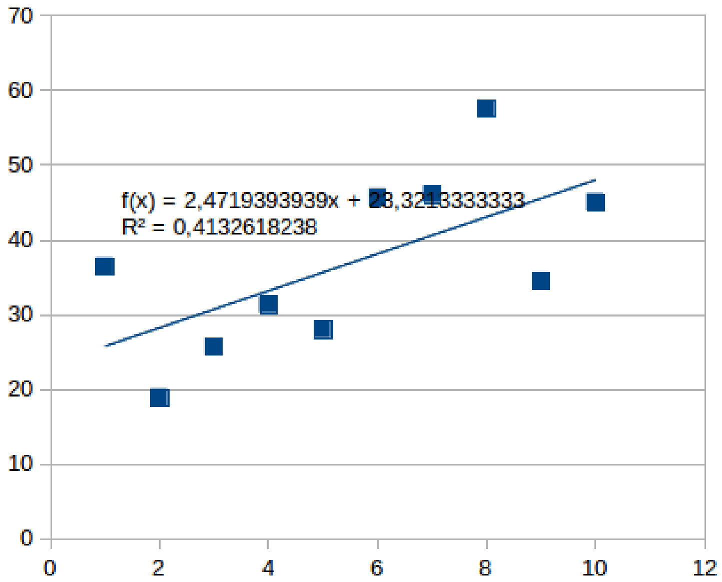
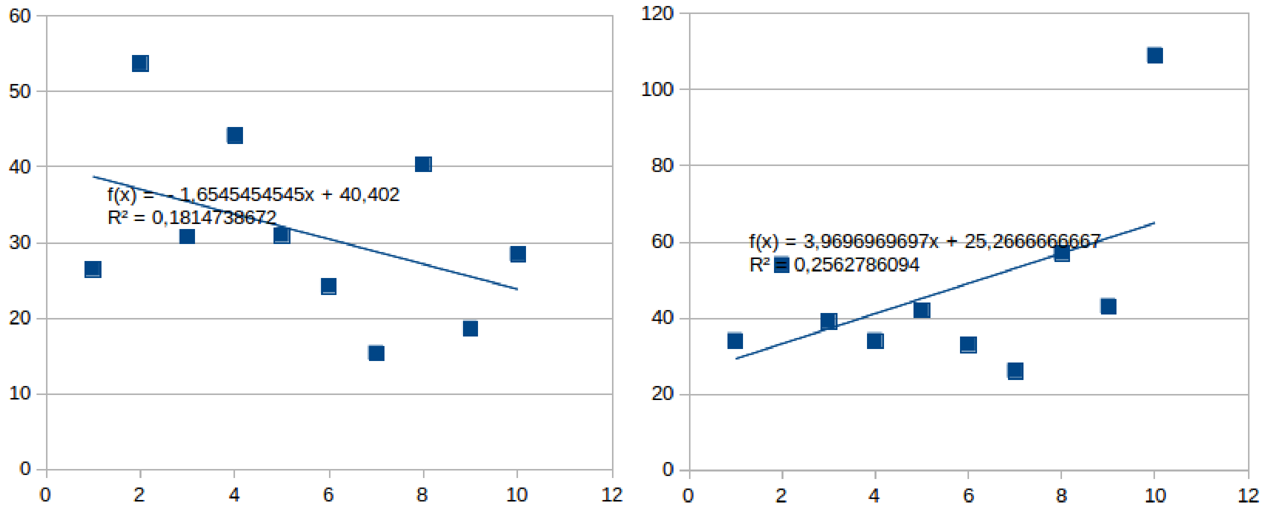



*Рис. 1. Помесячная динамика процента правильных решений задания № 3*

Показатели разных заданий ведут себя по-разному. Например, интересный результат показала статистика успешности решения заданий № 12 (тема «Экстремум функции. Точки экстремума функции.»).




*а)* *б)*

*Рис. 2. Помесячная динамика процента правильных решений (а) и суммарного количества решений (б) задания № 12*

Процент правильных решений этого задания убывает к концу учебного года (см. рис. 2(а)), и происходит это, как видно из соответствующей диаграммы (см. рис. 2(б)), на фоне увеличения количества его решений.

Такой эффект вызван, предположительно, началом активной подготовки к ЕГЭ тех, кто не освоил эту тему в течение года. Точнее можно было бы сказать при большем количестве решений (задание решается в среднем 40 раз в месяц).

«Час ЕГЭ» собирает статистику решений не только по заданиям ЕГЭ, но и на ряд сторонних математических тем. Среди них особенно интересной оказалась статистика заданий на тему «Формулы приведения». Интересна она самым большим количеством решений в месяц среди всех заданий на «Час ЕГЭ»: в среднем более 400 решений в месяц. Процент правильных решений при этом относительно стабильный (см. рис. 3).

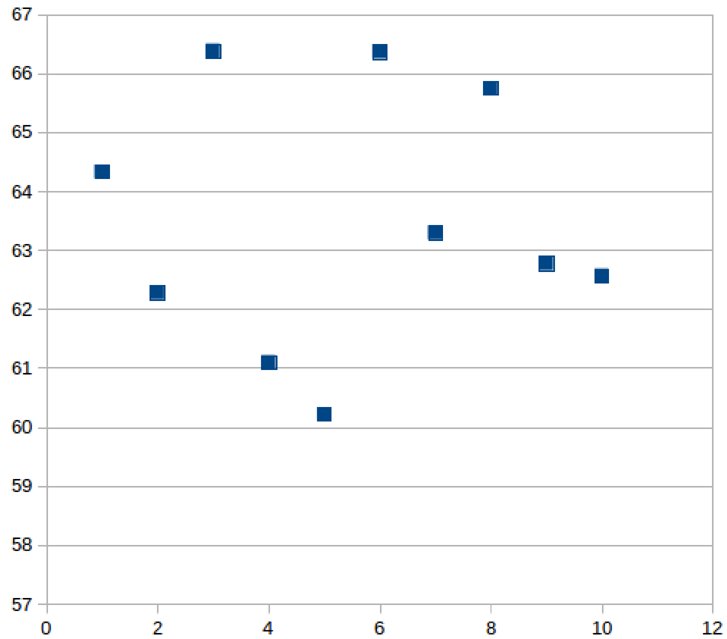



*Рис. 3. Помесячная динамика процента правильных решений задания на тему «Формулы приведения»*

Такие результаты предположительно вызваны тем, что тренажеров, позволяющих поупражняться в этой теме, немного, а сама она является промежуточной, из-за чего при первых же успехах пользователи не задерживаются на них долго.

## Заключение

В данной работе была проанализирована статистика результатов подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Для разных заданий наблюдаются разные тенденции. Из этого можно делать некоторые выводы о том, как наиболее эффективно организовать подготовку к ЕГЭ. Информация будет полезна преподавателям, репетиторам и руководителям курсов, которые нацелены на подготовку к ЕГЭ.

Планируются дальнейшие исследования и сбор статистики в следующем учебном году, а также соответствующая публикация по результатам годовой статистики. Также будет продолжаться работа по расширению базы пользователей, как, например, написание новых шаблонов. Рассматривается в том числе и возможность сотрудничества с другими образовательными ресурсами.

В качестве предмета дальнейших исследований также можно взять соотношение правильных и неправильных ответов (без учета сдавшихся), так как есть мнение, что некоторые «сдавшиеся» не сдаются на самом деле, а просто не указывают ответ в целях экономии времени.

## Литература

1. Тренажер «Час ЕГЭ». – URL: math.vsu.ru/chas-ege (дата обращения: 06.10.2020).

2. Пример страницы, на которой используется оболочка мини-интеграции. – URL: https://matematikalegko.ru/piramidi/pravilnye-piramidy-ploshhad-poverxnosti.html (дата обращения: 06.10.2020).

3. *Авдеев Н. Н., Червинская А. С.* Тренажер «Час ЕГЭ» // Современные методы теории краевых задач – 2014. – С. 3.

4. *Шашкина М. Б., Табинова О. А.* О качестве математической подготовки в школе и вузе // Математика в школе. – 2014. – №. 1. – С. 1.

5. *Жидова Л. А., Подстригич А. Г.* Особенности реализации непрерывного математического образования в процессе подготовки обучающихся к единому государственному экзамену // Вестник ТГПУ. – 2013. – №13 (141).

6. *Кисельников И. В.* Методический анализ результатов Единого государственного экзамена по математике профильного уровня в 2015 году в Алтайском крае // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – №. 5. – С. 406–406.

7. GNU general public license. Version 3, 29 June 2007 (Стандартная общественная лицензия GNU. Версия 3, от 29 июня 2007 г.)

8. *Момот Е. А.* Статистика результатов подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. – 2020. – С. 1701–1706.

9. *Балдин Е. М.* Gnuplot. Графики заказывали? // Системный администратор. – 2007. – №. 4. – С. 72–77.

УДК 004.415.53

# АНАЛИЗ ТЕХНИКИ ВЕДЕНИЯ РАЗРАБОТКИ ЧЕРЕЗ ТЕСТИРОВАНИЕ НА ЯЗЫКЕ JAVA

**А. С. Пахомов, И. М. Брусенцев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрение техники разработки программного обеспечения через тестирование, а также различных подходов реализации этой техники.
**Ключевые слова:** тестирование ПО, TDD, Test Driven Development, шаблоны проектирования, рефакторинг, ООП, Java, Java-Beans.

## Введение

Разработка через тестирование (Test Driven Development, TDD) — это техника разработки программного обеспечения, которая состоит из трех фаз [1]:

- красный тест;
- зеленый тест;
- рефакторинг.

Красный тест — это состояние программы, в котором автоматический тест неисправен, ввиду отсутствия тестируемого кода (тест написан до реализации).

Зеленый тест — наличие минимальной реализации тестируемой функциональности. Автоматический тест работает, но реализация нуждается в «рефакторинге».

Рефакторинг — процесс модернизации программного кода без изменения его функциональности.

Описанные 3 стадии образуют цикл разработки программного обеспечения. Сначала пишется автоматический тест, который показывает, что программа неисправна. Затем пишется минимально допустимая реализация. Единственная цель этой реализации — удовлетворение условию автоматического теста. После того, как работоспособность программного обеспечения гарантируется автоматическим тестом, можно приступать к модернизации кода.

## 1. TDD в промышленных программных комплексах

Обычный цикл разработки подразумевает написание тестов после того, как реализована требуемая функциональность программного обеспечения. Такой подход приводит к меньшему покрытию кода автоматическими тестами.

Разработка через тестирование эффективна при написании программ «с нуля». Такой вид разработки сложен во внедрении в уже существующие программные комплексы. Основная сложность — наличие больших «транспортных» объектов в кодовой базе. Такие объекты могут содержать десятки других полей. Это усложняет первичное написание автоматического теста.

## 2. Подходы к применению техники

Для облегчения применения разработки через тестирование предлагается рассмотреть ряд подходов, которые призваны упростить написание автоматических тестов для уже существующих программных комплексов.

### *2.1. Java-Beans подход*

Самым распространенным подходом к созданию объектов в языке *Java* является *Java-Beans* [2]. Его суть заключается в том, что объект имеет пустой конструктор и ряд методов, позволяющих инициализировать поля объекта после его создания. Недостатки такого подхода:

1. Объект является изменяемым. Другими словами, он не безопасен для использования в многопоточной среде;
2. Код инициализации объекта утяжеляет написание автоматических тестов.

### *2.2. Подход «телескоп»*

Решением описанной в п. 2.1 проблемы изменяемости объекта служит подход «телескоп» [2]. При этом способе создания экземпляра класса используется цепочка вызовов конструкторов. Для объекта с 10-ю полями будет 10 конструкторов, каждый из которых инициализирует одно поле объекта.

Описанный подход не позволяет изменять значения полей после инициализации экземпляра класса. Таким образом делая объект неизменяемым, а значит, безопасным для использования в многопоточной среде.

Недостатком такого подхода является наличие конструкторов для каждого поля, что так же осложняет написание автоматических тестов.

### *2.3. Подход «построитель»*

Третий подход — «построитель» (Builder) [2]. Он позволяет избежать проблемы «телескопа» и облегчает написание кода инициализации объекта.

При подходе «построитель» конструируемый объект имеет закрытый конструктор со всеми полями объекта. Закрытый конструктор не доступен пользователям модуля. Но внутри модуля или пакета он доступен.

Для того, что бы пользователи модуля могли создавать экземпляры класса, существует класс-компаньон. Классу-компаньону доступен закрытый конструктор. Класс-компаньон (*Builder*) содержит метод построения объекта (*build()*) и ряд методов-инициализаторов для каждого из полей класса. Таким образом, для создания объекта достаточно указать объекту-компаньону каждое из полей и вызвать метод создания объекта.

Такой подход не позволяет изменять состояние объекта после его инициализации, а также упрощает код инициализации. Недостатком подхода «построитель» является ухудшение читаемости кода, за счет добавления сущности.

### *2.4. Усовершенствованный подход «построитель»*

Читаемость кода важна при разработке через тестирование, поэтому предлагается модифицированная версия подхода «построитель» [3], которая позволяет сократить объем кода, требуемого для написания автоматических тестов и улучшить читаемость кода.

При этом подходе для каждого объекта-компаньона создается специальный класс с набором статических методов. Этот класс образует предметно-ориентированный язык инициализации объекта. Основными методами этого класса являются методы построения (*given(Builder)*) и методы создания объектов-компаньонов (*person()*, *organisation()*, *auto()*).

Использование предметно-ориентированного языка значительно облегчает написание автоматических тестов, а так же увеличивается читаемость кода.

## Заключение

Техника разработки через тестирования призвана увеличить покрытие кода тестами, позволяет писать более изолированный и слабо связанный код. Высокий уровень покрытия кода тестами позволяет команде избавиться от желания вручную проконтролировать любое изменение кодовой базы. Изменения кода становятся естественной частью рабочего процесса.

Разработка через тестирование способствует более модульному, гибкому и расширяемому коду. Это связано с тем, что при этой методологии разработчику необходимо думать о программе как о множестве небольших модулей, которые написаны и протестированы независимо и лишь потом соединены вместе. Это приводит к меньшим, более специализированным классам, уменьшению связанности и более чистым интерфейсам. Однако, не во всех случаях эта техника применима. Данная техника плохо подходит для разработки пользовательского интерфейса, работы с базами данных, реализации сетевого взаимодействия. Наиболее подходящими сферами применения являются разработка новой системы или новой функциональности в существующей системе.

## Литература

1. *Бек, К.* Экстремальное программирование: разработка через тестирование / К. Бек. – Санкт-Петербург : Изд-во Питер, 2017. – 205 с.

2. *Hajiyev, M.* Why builder pattern, not telescoping or JavaBeans? // Medium : [сайт]. – 2020. – URL: https://medium.com/@muradhajiyev/why-builder-pattern-not-telescoping-or-javabeans-6daa689f41 (дата обращения: 10.10.2020).

3. *Пахомов, А.* На пути к TDD. SmartBuilder паттерн // Блог Александра Пахомова : [сайт]. – 2020. – URL: https://pakhomovalexander.github.io/ru/posts/smart-builder/ (дата обращения: 10.10.2020).

УДК 004.912

# РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛИНГВИСТИКИ С ПОМОЩЬЮ ФРЕЙМВОРКА TAWT

**Е. В. Полицына, С. А. Полицын, А. С. Поречный**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** Во многих прикладных информационных системах возникает потребность в решении различных практических задач, связанных с автоматическим анализом естественно-языкового текста. Реализация алгоритмов компьютерной лингвистики является отдельный сложной задачей, которую в большинстве случаев не является приемлемым решать в процессе разработки промышленных программных систем, основным направлением которых не является анализ текста. Поэтому крайне важным является наличие специализированных инструментов, предоставляющих реализации алгоритмов основных этапов автоматического анализа текста и решения наиболее популярных практических задач компьютерной лингвистики. Разработанный авторами Java-фреймворк TAWT с открытым исходным кодом предоставляет готовые программные инструменты и структуры данных основных этапов анализа текста на русском языке, отвечающие современным требованиям к производительности, надежности, механизмам сборки проектов и т. д. Демонстрируется применения фреймворка для решения практических задач компьютерной лингвистики.
**Ключевые слова:** автоматизированный анализ текста, обработка естественного языка, компьютерная лингвистика, NLP, фреймворк для анализа текста, морфологический анализ, синтаксический анализ, семантико-синтаксический анализ, практические задачи компьютерной лингвистики, анализ текстовой документации.

## Введение

При разработке информационных систем в самых разных областях часто возникает потребность в решении практических задач анализа текста. Особенно это актуально в поисковых и новостных системах, системах документооборота и подготовки технической документации, архивных системах, системах электронной коммерции и др., которые часто кажутся далекими от лингвистического анализа текста, однако результаты автоматизированного анализа текста могут существенно упростить, сократить и ускорить работу человека.

Для этого необходима реализация различных алгоритмов обработки естественного языка (Natural Language Processing, NLP), что является сложной трудоемкой задачей, зачастую требующей долгих исследований. За десятилетия исследований в области NLP было создано множество разнообразных инструментов для анализа текста таких, как Lemmatizer [1], Greeb [2], Stemka [3], pymystem3 [4], TreeTagger [5], Text Summarization [30], Tools4noobs [32] и др., а также различных комплексов инструментов: AOT [6], GATE [7], LingPipe [8], UIMA [9], Texterra [10]; в коммерческом сегменте: Томита-парсер [11], SpeechKit [12] и др. компании Яндекс, ядро Google, ABBYY [13]. Такое разнообразие решений обусловлено сложностью и отсутствием однозначного решения задач NLP.

Таким образом, при решении практических задач анализа текста, особенно при разработки различных информационных систем, возникает проблема выбора из большого разнообразия программного обеспечения и библиотек, которые слабо связаны между собой, оперируют разными структурами данных и написаны на разных языках программирования, и их интеграции. Для решения проблемы применения программных средств лингвистического анализа текстов в прикладных промышленных системах необходимо наличие специализированных средств разработки, которые поддерживают популярные языки программирования для разработки промышленного ПО (Java, .Net и др.), которые ориентированы на решение прикладных задач, т.е. являются достаточно высокоуровневыми с точки зрения алгоритмов автоматического анализа текстов, реализуют этапы лингвистической обработки, в том числе с учетом требований к высоконагруженным многопользовательским системам.

## 2. Фреймворк TAWT

Разработанный фреймворк TAWT (Tools for Automated Work with Text) включает в себя набор программных инструментов [14, 15]. Все инструменты используют общую схему подключения, стандартную для платформы Java: используется глобальный репозиторий бинарных зависимостей, исходный код которых, примеры и ссылки на артефакты находятся в общем доступе на Github [18].

Инструмент Parser реализует графематический этап анализа текста, основан на наборе правил, реализованных средствами регулярных выражений. Итоговый набор опорных оборотов формируется инструментом GAMA после проведения морфологического анализа.

Инструмент JMorfSdk (Java Morphological Sdk) реализует морфологический этап анализа теста, основан на модификации машиноориентированного «Грамматического словаря русского языка А. А. Зализняка», разработанного и поддерживаемого проектом OpenCorpora [16, 25].

Инструмент MS (Morphological Structure) — инструмент загрузки, хранения, обработки и выдачи форм слова и его характеристик, содержит описание всех структур данных, конвертирует применяемые в JMorfSdk словари из исходного формата в формат, который используется во фреймворке.

Инструмент GAMA (Graphematic and Morphological Analysis) — агрегирует методы графематического и морфологического этапы анализа текста, поддерживает замену инструментов графематического и морфологического анализа.

Инструмент RFC (Rules for Compatibility) предоставляет набор реализованных правил сочетаемости слов [17].

Инструмент AWF (Ambiguity Words Filter) содержит фильтр устранения неоднозначности слов на основе правил из RFC, поддерживает замену инструмента RFC на другую модель, который подтверждает или отрицает сочетаемость пары входных слов.

Инструмент SP (Syntactic Parser) реализует семантико-синтаксический этап анализа, для его работы необходим предварительно обработанный текст, где каждое слово имеет свои морфологические характеристики.

Инструмент SPN (Search Possible Notions) — инструмент поиска потенциальных понятий и ключевых словосочетаний на основе анализа сетей зависимостей, полученных в результате работы инструмента SP.

Структуры данных фреймворка используют внутренние целочисленные представления многих характеристик, что дает возможность и дальнейшей оптимизации расхода памяти и сокращения времени при решении конкретных задач.

## 3. Решение практических задач с применением фреймворкаTAWT

Одна из областей, в которых крайне полезным является применение средств компьютерной лингвистики, — это системы документооборота и в целом подготовка разного рода документации: проектной, конструкторской и др. В большинстве случаев к документам предъявляются требования по структуре, оформлению, содержанию. Подготовка и обновление документации, составление пакетов документов при создании и развитии ПО, технических решений и т. д. является крайне трудоемкой задачей.

Применение инструментов фреймворка TAWT разных уровней позволяет существенно упростить многие задачи подготовки технической документации. В табл. 1 приведены некоторые решаемые прикладные задачи в области анализа текстовой документации и используемые инструменты фреймворка.

Таблица 1

*Используемые инструменты комплекса при решении прикладных задач*

| **Задача** | **Используемые инструменты фреймворка TAWT** |
|---|---|
| Валидация структуры документа на соответствие ГОСТу | Parser, JMorfSdk, MS |
| Валидация наличия в разделе «Термины и определения» всех употребляемых аббревиатур в тексте документа | Parser, JMorfSdk, MS |
| Поиск схожих технических решений на основе технических заданий (ТЗ) или описания эксплуатационных условий | Parser, JMorfSdk, GAMA, SP, AWF, RFC, MS, SPN |
| Построение краткого содержания документа | Parser, JMorfSdk, MS |

### *3.1. Валидация структуры документа*

Техническая документация имеет структуру, которая определяется одним из стандартов, например, для технического задания: ГОСТ 34.602-89, ГОСТ 19.201-78, IEEE STD 830-1998 и т. д. Возможность валидации структуры документа в соответствии со стандартами является актуальной как при обучении новых сотрудников, так и для упрощения работы опытных специалистов, т.к. это позволяет в автоматизированном режиме делать первичную проверку документа, а также повышает качество разработки технического документа.

Такая валидация была реализована в ПО «VSS» (Validation of the Structure by Standard) [18], которое использует инструмент Parser, а также Apache POI — библиотеку для работы с файлами формата «docx». Инструмент графематического анализа позволяет выделить разделы из цепочки символов для последующей проверки структуры документа.

В случае, если разделы и подразделы соответствуют ГОСТу, выводится сообщение в формате: <название файла с ТЗ> : верно, если раздел или подраздел не соответствует ГОСТу, то выводится только раздел или подраздел с ошибкой в формате: <название файла с ТЗ> : <[<уровень оглавления>:<Вывод текста с ошибкой>,…].

Для оценки возможности применения работы VSS были проанализированы на соответствие ГОСТ 34.602-89 «Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Техническое задание на создание автоматизированной системы» технические задания из открытой базы технических заданий на разработку и/или модернизацию ПО для Министерства экономического развития Российской Федерации [19].

VSS позволяет быстро получить ответ на вопрос о соответствии документа заданной структуре. В результате применения VSS были выделены наиболее распространенные отклонения структуры документов от ГОСТа: неверный уровень разделов и подразделов; изменение названий разделов, вместо использования подразделов.

### *3.2. Валидация сокращений в списке терминов и сокращений*

Техническая документация содержит большое количество различных специфичных терминов и сокращений, которые могут не являться общеупотребимыми или иметь неочевидную расшифровку, зависящую от предметной области. Для того, чтобы такие термины и сокращения определялись однозначно их выносят в отдельный раздел документа «Термины и сокращения».

Однако, техническая документация может создаваться продолжительное время, поэтому ее разработчик может забыть указать все сокращения в соответствующим разделом или наоборот внести лишние сокращения, которые в тексте не используются. Постоянная актуализация документов является трудоемкой и часто приводит к возникновению множества ошибок. Тогда возникает необходимость в автоматическом режиме получить список аббревиатур и сокращений, которые используются в тексте, а также проверять их на наличие в разделе «Термины и сокращения».

Реализация валидации с использованием графематического анализа без использования морфологического анализа текста дает неточный результат, ввиду того что невозможно на графематическом уровне отличить слово, написанное заглавными буквами, от аббревиатуры.

Результаты поиска аббревиатур несколькими способами показали, что:

1) Необходимо использовать графематический анализ, который учитывает все возможные конструкции приложений, в том числе все символы разделения и т.д. или применять дополнительную последующую обработку для объединения выделенных аббревиатур.

2) Критерий того, что аббревиатура пишется большими буквами является обязательным, но недостаточным, чтобы определить, что слово является аббревиатурой. Так, без использования морфологического анализа, слова: «ТЕХНОЛОГИЯ», «ПРИНЦИПЫ» и т. д. будут определены как аббревиатура. Для того чтобы уточнить, является ли данное слово аббревиатурой в рассматриваемом документе, необходимо проводить морфологический анализ слов и определять, что морфологически характеристики слова не содержат признак аббревиатуры, а также учитывать имеющийся список терминов и аббревиатур документы.

### *3.3. Поиск похожих документов*

Задача поиска схожих по смыслу документов является актуальной в случае, если имеется в наличии большая база технической документации и необходимо по исходному документу, например, ТЗ, найти уже разработанные технические решения, которые упростят разработку нового продукта или изделия.

Для оценки результатов поиска похожих документов средствами фреймворка TAWT было реализовано несколько методов поиска:

1. Статистический поиск по словам средствами инструмента Parser без применения морфологического анализа. Особенностью является то, что метод реализуется быстро, однако, имеет очевидные недостатки, слова в разных формах будут считаться уникальными, например, слова «системы» и «систему» будут являться уникальными.

2. Статистический поиск по словам с применением морфологической обработки включает в себя использование инструмента GAMA. Применение морфологического анализа позволяет приводить каждое слово у начальной формы, таким образом слова «системы» и «систему» будут приведены к «система» и такие слова будут считаться одним уникальным словом.

3. Статистический поиск по ключевым словам. Особенностью поиска, по ключевым словам, является то, что исключаются остальные слова, которые не несут смысловой нагрузки.

4. Статистический поиск по ключевым словосочетаниям. Особенностью поиска по ключевым словосочетаниям является то, что ключевым элементом считается словосочетание, которое несет более точную смысловую нагрузку, чем ключевое слов. Для этого используется инструмент SPN, который, устанавливает синтаксические связи между словами и выделяет ключевые словосочетания.

Статистический поиск представляет собой подсчет количества ключевых элементов (слов, ключевых слов, ключевых словосочетаний и т. д.) в тексте и последовательное получение пересечений ключевых элементов в исходном тексте и целевых текстах.

Для оценки подходов использовались ТЗ из области автоматизации ПО, разработки прикладного ПО, конструирования деталей, а также документы, которые не относятся к ТЗ, такие как отчеты, описания и рецензии.

Анализ результатов показал, что статистический поиск по словам без морфологической обработки, с морфологической обработкой и, по ключевым словам, дают примерно одинаковый результат, однако, применение поиска по ключевым словосочетаниям отсеивает документы, которые не подходят по содержанию, и точнее отделяет схожие документы от возможно схожих, тем самым уменьшая необходимое время на последующий ручной анализ. При анализе результатов было установлено, что среди найденных наиболее подходящих документов оказалось ТЗ на предыдущую версию автоматизированной системы в исходном ТЗ, а также ТЗ на разработку и развитие отдельных подсистем.

Выбранный критерий (соотношение количества найденных элементов к количеству элементов в исходном тексте) не является оптимальным, т.к. если документ будет по размеру многократно превышать исходный, то количество совпадающих элементов может быть большим, но не из-за схожести, а из-за разницы в объеме. Поэтому данный критерий подходит для обработки примерно равных по объему документов, в других случаях необходимо использовать «веса» в зависимости от особенностей анализируемых документов.

### *3.4. Получение краткого содержания документа*

Помимо автоматической фильтрации неподходящих для решаемой задачи документов еще одним способом ускорения поиска и анализа нужной технической документации является сокращение объема текста документа без существенной потери смысла. С применением инструмента JMorfSdk фреймворка для морфологического анализа текста была разработана библиотека, содержащая ряд различных методов реферирования, наиболее оптимальным является интегральный метод, и «Сервис автоматического реферирования текста» [20] на ее основе.

Для упрощения поиска документов, схожих с ТЗ на разработку новых модулей ИС, были получены рефераты по автоматически отобранным документам. Например, ТЗ, изложенное на 90 страницах, содержит общие сведения, цели доработки, характеристики объекта автоматизации, требования к системе и к вводу доработок в эксплуатацию. Все перечисленные пункты имеют отображение в полученном реферате объемом семь страниц, что дает возможность человеку гораздо быстрее определить, подходит ли он для дальнейшей работы, в какие разделы нужно внести изменения, сравнить и проверить данные и т. д.

Таким образом, разработанные с применением фреймворка TAWT средства автоматизации подготовки технической документации демонстрируют возможности упрощения и ускорения работы технических писателей, аналитиков и других специалистов.

## 4. Применение инструментов фреймворка TAWT в прикладных системах

Основными направлениями применения фреймворка TAWT для автоматизации обработки текстовых технических документов являются автоматизация решения отдельных практических задач с применением инструментов компьютерной лингвистики и учетом особенностей документов в определенной области, компании и т. д. и разработка комплексных решений на основе применения отдельных инструментов анализа текстовой документации.

Применение лингвистического анализа не только открывает новые возможности для автоматизации обработки текстовых технических документов, но и определяет новые направления исследований и задачи компьютерной лингвистики.

Отдельные инструменты разработанного фреймворка TAWT успешно применялись при создании исследовательских программных средств разметки корпусов текстов, выделения именованных сущностей, развертывания сокращений, построения семантической сети по толковым словарям, библиотеки выделения ключевых слов, библиотеки реферирования текстов и др. Все разработанные инструменты показали хорошее качество распознавания именованных сущностей (более 90 %), правильную генерацию слов при расшифровке сокращений более, чем в 70 % случаев, и возможность дальнейшего совершенствования алгоритмов расшифровки сокращений, улучшение качества выделения ключевых слов на 8 % относительно известных методов [14, 21], реализация интегрального метода реферирования с улучшением качества построения реферата в среднем на 15 % [20]. Все разработанные инструменты и библиотеки доступны на портале «Автоматизированный анализ текста» [30].

Линейная зависимость времени обработки от количества слов позволяет использовать ее для анализа больших объемов текстовых данных. Инструменты MS и JMorfSdk применяются для предобработки текстов в ансамбле классификаторов на основе машинного обучения и нейронных сетей [23], для получения морфологической разметки корпуса текстов [24], для вторичной обработки сообщений социальных сетей в плагине браузера Google Chrome для обнаружения мошеннических сообщений с точностью распознавания 97.5 % [25].

С использованием инструментов фреймворка TAWT разработан ряд прикладных систем и приложений:

– Сервис автоматического реферирования текстов на русском языке [20]: предоставляет возможность выбора метода построения реферата, указания желаемого объема реферата в процентах от объема исходного текста, получения ключевых слов.

– Плагин для мониторинга и распознавания мошеннических сообщений в социальной сети ВКонтакте [25] позволяет получать уведомления о получении подозрительных сообщений до их прочтения пользователем и принимать решение об открытии ссылок или выполнении просьб и действий в сообщении на основании полученного предупреждения.

– Сервис подбора синонимов с учетом тематики [26] предоставляет возможность получения списков синонимов к введенном слову на русском языке по каждой выбранной пользователем тематике.

– Приложение FriendFinder [27] предоставляет возможность поиска людей по интересам по графу друзей в социальных сетях ВКонтакте и Facebook и построения цепочки друзей до найденного человека.

– Приложение TouristHelper 2.0 [28] позволяет извлекать текст, находящийся в QR-коде или расположенный на веб-странице, ссылка на которую заключена в QR-коде, и упрощать форму его представления (сокращение объема текста и выделение в нем цветом ключевых слов) для быстрого понимания пользователем полезности для него этой информации.

## Заключение

Разработанный фреймворк является средством для реализации алгоритмов лингвистического анализа текста разных уровней, решения прикладных задач и быстрой проверки различных гипотез в компьютерной лингвистике [15]. TAWT является кроссплатформенным решением с открытым исходным кодом, ориентированным на быстрое внедрение и использование.

Применение лингвистического анализа позволяет повысить качество обработки текстовых данных во многих областях и открывает новые возможности для автоматизации обработки текстовых документов, используя накопленный опыт в области компьютерной лингвистики и особенности решаемых задач. На примере решение некоторых задач обработки технической документации продемонстрировано преимущество применения средств графематического и морфологического анализа, кроме того даже частичная автоматизация их решения позволяет сократить объем текстов для изучения специалистами и существенно ускоряет процесс их анализа и упрощает работу с большим набором документов.

Фреймворк TAWT был использован при создании других приложений автоматического анализа текста и прикладных систем: сервиса реферирования текстов, сервиса поиска людей по интересам в социальных сетях, сервиса подбора тематических синонимов и др. Все сервисы доступны для использования [30].

Разработанный кроссплатформенный фреймворк полезен для разработчиков инструментов анализа текста в рамках научных исследований, разработчиков прикладного ПО на языке Java для реализации новых функций или улучшения качества обработки текстов путем применения методов лингвистического анализа, а также разработчикам автоматизированных средств для сокращения рутинных действий при работе с разного вида документацией и любыми текстовыми данными на русском языке.

**Литература**


1. Официальный сайт Lemmatizer – URL: https://wiki.de.dariah.eu/ display/TextGrid/ Lemmatizer (дата обращения 21.09.2020)

2. Официальный сайт Greeb – URL: https://github.com/ dustalov/greeb (дата обращения 31.07.2019)

3. *Korobov, M.* Morphological Analyzer and Generator for Russian and Ukrainian Languages / M. Korobov // Analysis of Images, Social Networks and Texts. – 2015. – P. 320–332.

4. Официальный сайт pyMyStem3 – URL: https://pypi.python.org/ pypi/pymystem3 (дата обращения 21.09.2020)

5. Официальный сайт TreeTagger. Ludwig-Maximilians-Universität München (LMU). – URL: http://www.cis.uni-muenchen.de/~schmid/tools/TreeTagger (дата обращения 21.09.2020)

6. Официальный сайт AOT. – URL: http://aot.ru (дата обращения 21.09.2020)

7. Официальный сайт GATE – General architecture for text engineering, The University of Sheffield, 1995-2019. – URL: https://gate.ac.uk (дата обращения 21.09.2020)

8. Официальный сайт LingPipe, 2003–2019. – URL: http://alias-i.com (дата обращения 21.09.2020)

9. Официальный сайт UIMA, Apache UIMA Project, 2006–2019 – URL: http://uima.apache.org (дата обращения 21.09.2020)

10. *Turdakov, D. Y.* Texterra: A framework for text analysis / D. Y. Turdakov, N. A. Astrakhantsev, Y. R. Nedumov, et al. // Program Comput Soft 40, 2014 pp. 288–295

11. Официальный сайт Yandex. – URL: https://tech.yandex.ru/tomita/ (дата обращения 21.09.2020)

12. Официальный сайт RCO. – URL: http://www.rco.ru/ (дата обращения 21.09.2020)

13. Официальный сайт ABBYY. – URL: https://www.abbyy.com/ru-ru/isearch/compreno/ (дата обращения 21.09.2020)

14. *Politsyna, E. V.* Development of the Cross-platform Library of Morphological Analysis of the Russian Language Text for Industrial Software / E. V. Politsyna, S. A. Politsyn, A. S. Porechny // CEE-SECR ‘18 Central and Eastern European Software Engineering Conference Russia Moscow. – ACM New York, NY, USA, 2018

15. *Politsyna, E. V.* The Framework for Hypothesis Verification and Analysis of Natural Language Processing for the Russian Language / E. V. Politsyna, S. A. Politsyn, A. S. Porechny // Supplementary Proceedings of the Seventh International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST-SUP 2018), Moscow, Russia, July 5–7, 2018. – CEUR WorkShop Proceedings, ISSN 1613-0073 Aachen, Germany, 2018. – V. 2268. – P. 25–33.

16. Официальный сайт OpenCorpora. – URL: http://opencorpora.org (дата обращения 21.09.2020).

17. *Поречный, А. С.* Реализация поиска понятий с помощью выделение словосочетаний из текста / А. С. Поречный // Сборник научных трудов под ред. А. А. Кретова. – Вып. 6. – Проблемы компьютерной лингвистики и типологии, 2017 С. 108-118.

18. TAWT framework and tools sources. – URL: https://github.com/jalexpr (дата обращения 21.09.2020).

19. Официальный сайт Министерства экономического развития РФ – URL: http://aisup.economy.gov.ru/pubportal (дата обращения 21.09.2020).

20. *Касаткина, А. О.* Разработка интегрального метода автоматического реферирования текста / А. О. Касаткина // «Гагаринские чтения – 2019»: Сборник тезисов докладов. – М.: МАИ, 2019. – С. 355-356.

21. Сервис тематических синонимов – URL: Режим доступа: http://abstracts.textanalysis.ru (дата обращения: 21.09.2020)

22. *Иващенко М. В.* Анализ методов автоматизированного выделения ключевых слов из текстов на естественном языке / М. В. Иващенко // Материалы XVIII Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии». Т. 6, Воронеж. – 2018. – С. 19–24.

23. *Самохин, А. А.* Анализ алгоритмов и расширение функциональности инструментов устранения сокращений в текстах на русском языке / А. А. Самохин // Материалы XIX Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии». Россия, Воронеж. – 2019. – Т. 1. – С. 1627–1632.

24. *Полицына, Е. В.* Разработка комплекса инструментов для управления корпусами текстов / Е. В. Полицына, С. А. Полицын, С. С. Попов // Материалы XIX Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии». Россия, Воронеж. – 2019. – С. 1621–1626.

25. *Петраш, Я. П.* Разработка инструмента для выявления мошеннических сообщений социальной сети «ВКонтакте» / Я. П. Петраш, Д. А. Тихонова // Материалы XIX Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии». Россия, Воронеж, 2019, С. 1513-1518.

26. Сервис тематических синонимов – URL: http://synonyms.textanalysis.ru (дата обращения 21.09.2020).

27. Сервис поиска друзей по интересам FriendFinder. – URL: http://friendsfinder.textanalysis.ru (дата обращения 21.09.2020).

28. Приложение «Помощник туриста 2.0. – URL: https://play.google.com/store/apps/details?id=ru.textanalysis.touristhelper (дата обращения 31.07.2019)

29. Сервис реферирования – URL: http://textsummarization.net/text-summarizer (дата обращения 21.09.2020)

30. Портал «Автоматизированный анализ текста» – URL: http://textanalysis.ru/ (дата обращения 21.09.2020)

УДК 004.8

# ОРГАНИЗАЦИЯ MACHINE LEARNING ПРОЕКТА

**М. С. Поляков, П. С. Науменко, Е. А. Харченко**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье приводится обзор существующих подходов к организации проектов по машинному обучению, а также рекомендации, как организовать проект, в случае если все существующие подходы признаны неудовлетворительными.
**Ключевые слова:** машинное обучения, проект, data science, проектный менеджмент.

## Введение

С наращиванием вычислительных мощностей Data Science (DS) и Machine Learning (ML) проекты становятся доступны для реализации практически любому пользователю. Крупные компании все чаще ищут бизнес-процессы, которые можно улучшить с использованием технологий искусственного интеллекта. Как правило, чем крупнее заказчик, тем больше данных он готов предоставить для реализации модели, рассчитывая на высокие точности. Для достижения требований нужно провести множество экспериментов, перебрать практически все подходы к реализации. Над проектом обычно работает несколько Data Science специалистов, а также другие члены команды. При бессистемном подходе: результаты экспериментов, метрики моделей, выводы специалистов — теряются. Чтобы избежать такой практики необходимо изначально правильно построить работу над проектом, такая организация будет иметь некоторые особенности, по сравнению с классическими проектами по разработки программного обеспечения.

## 1. Обзор подходов

Библиотеки для ML проектов существуют по многих языках программирования: Python, C++, R, Java, JavaScript, MATLAB. Однако некоторым эталоном и самым популярным среди ML инженеров языком является Python. Именно реализация на нем будет рассмотрено подробно. Стоит отметить, что подходы, которые будут описаны в статье, без особых усилий переносятся на любой язык программирования.

В большинстве курсов по DS рекомендуется использовать Jupyter Notebook, который чаще всего устанавливается вместе с пакетом Anaconda [1]. Он так же популярен как подход к ML соревнованиям, например на Kaggle [2]. Это обусловлено легкой интеграцией на сайты, потому что Jupyter Notebook по своей сути является веб интерфейсом, использующим IPython в качестве интерпретатора [1]. И действительно это удобный инструмент для просмотра и визуализации, а также построения моделей, когда это нужно сделать в сжатые сроки. Однако для проектов, над которыми работает команды или длительность которых больше, чем один месяц, такой подход имеет ряд серьезных недостатков [3]:

1. Невозможность отслеживания изменений в репозиториях (GitHub, GitLab);
2. Трудности при работе нескольких людей с одним и тем же Jupyter Notebook;
3. Сложность воспроизведения экспериментов;
4. Отсутствие возможности загрузить код, как исполняемый на сервер.

Это делает невозможным использование Jupyter Notebook, как единственного инструмента для разработки масштабного ML проекта.

Так же в связи с поместным переходом на облачные технологии, существует достаточно много сервисов, позволяющих обучать модели машинного обучения в облаке. Такие сервисы предоставляют следующие компании:

1. Microsoft (Microsoft Azure);
2. Amazon (Amazon Web Services);
3. Google (Google Cloud Platform);
4. Yandex (Yandex Cloud).

Главным недостатком использования облачных технологий является стоимость. Причем как правило, при использовании инструментов для машинного обучения в облаках, намного удобнее использовать и другие облачные сервисы компании, иногда это даже обязательно [3]. Не каждый заказчик программного обеспечения или компания готовы тратить средства, для удобства разработчиков, когда существуют бесплатные альтернативы. Так же, для работы с ними, требуются специалисты, знающие как именно организовать работу с облаком и его архитектурой, что сделает команду еще больше и медленнее.

## 2. Рекомендации

Предположим, что проект не обладает достаточными ресурсами, для использования облачных архитектур, либо в силу конфиденциальных данных, не имеет права их использовать. В таком случае существует ряд библиотек, позволяющих построить ML проект автоматизировано:

1. Ocean [4];
2. Cookiecutter Data Science [5];
3. Catalyst [6].

```
project folder
|  scr
|  |  train.py
|  |  predict.py
|  |  preprocess.py
|  notebooks
|  data
|  experiments
|    |  exp_1
|    |    config.yaml
|    |    trained_model
|    |    metrics.yaml
|    |    logs.md
|  requirements.txt
|  example_config.yaml
|  makefile
|  readme.md
```

*Рис. 1. Структура проекта*

У них есть свои недостатки, например, Catalyst работает только с библиотекой PyTorch [6], а другие более универсальны, но работают с кодом только для Python [4, 5]. При использовании других языков программирования, структуру необходимо выстраивать самостоятельно. Требуется учесть все особенности цикла разработки DS или ML разработки, а именно: возможность воспроизвести результаты разработки, сохранение метрик экспериментов, логирование обучения модели.

Исходя из написанного выше, корневая папка проекта может выглядеть следующим образом (рис. 1).

Папка scr — будет содержать весь исходный код для работы с проектом. Она включает в себя такие файлы как:

- train.py — код для чтения параметров и путей из конфигурационного файла, обучение модели с последующей ее сериализацией, а так же сохранением логов,
- predict.py — код для загрузки модели, расчета метрик на данных и их сохранение,
- preprocess.py — код для препроцессинга, а так разбиения датасета, если этого требует задача.

По необходимости в папку добавляются и другие файлы с исходным кодом. Важно организовать код таким образом, чтобы для проведения новых экспериментов требовалось лишь поменять параметры в конфигурационном файле, без изменения кода.

Директория notebooks — хранит в себе Jupyter Notebook для удобной визуализации данных или других манипуляций с данными, которые удобнее делать в интерактивном режиме.

В папке data будут находится все данные для экспериментов, исходные, обработанные, с добавлением новых признаков и так далее. Иногда для удобства в ней создаются подпапки, например с датами получения данных, либо исходные данные помещаются в папку source, а подготовленные для входа в модель — processed.

Experiments — директория с экспериментами. Для любого изменения в модели, даже одного гиперпараметра, необходимо создавать новую подпапку эксперимента. Каждая подпапка с экспериментом содержит:

• config.yaml — конфигурационный файл, может быть так же в любом структурированном формате, например json или xml, содержит в себе все данные для запуска эксперимента : путь до использованного датасета, гиперпараметры модели, тип обучаемой модели, название и путь для сохранения обученной модели и логов, любые другие параметры для запуска кода,

• trained_model — обученная модель машинного обучения,

• metrics.yaml — так же, как и конфигурационный файл может быть в любом структурированном виде, удобном для команды проекта, хранит в себе метрики модели на путь до датасетов на которых они были получены, а так же путь до модели с помощью которой выполнялись предсказания.

• logs.md — логи, которые были записаны в процессе обучения модели.

Requirements.txt — список библиотек и фреймворков которые необходимо установить для запуска проекта.

Example_config.yaml — пример конфигурационного файла для запуска проекта, нужен для понимания командой, какие поля, типы данных в них и какую структуру должен иметь файл для успешного запуска проекта.

Makefile — нужен для запуска очередного эксперимента, может быть заменен на main.py файл, но важно чтобы была возможность запустить проект из консоли, просто указав путь до папки с экспериментом, так как, очень часто обучением моделей приходится заниматься на серверах с терминальными операционными системами.

Readme.md — описание структуры проекта, используемого окружения, а так же информации о том, как запустить код и увидеть результаты.

К проекту в так же могут быть добавлены файлы: gitignore для исключения добавления в репозиторий всех данных, makefile для проверки кодстайла и так далее.

## Заключение

Были рассмотрены все актуальные подходы по организации структуры ML проекта, подробно разобраны их преимущества и недостатки. Представлены гибкие рекомендации по созданию своей удобной для команды проекта структуры.

## Литература

1. Дистрибутив Anaconda. – URL: https://www.anaconda.com/ (дата обращения 05.06.2020)

2. Соревновательная платформа по машинному обучению Kaggle. – URL: https://www.kaggle.com/ (дата обращения 07.06.2020)

3. *Паттерсон, Дж.* Глубокое обучение с точки зрения практика / Паттерсон Дж, Гибсон А. / пер. с анг. А. А. Слинкина. – М. :ДМК Пресс, 2018. – 418 с.

4. Репозиторий библиотеки Ocean. – URL: https://github.com/surfstudio/ocean (дата обращения 20.06.2020)

5. Репозиторий библиотеки Cookiecutter Data Science. – URL: https://github.com/drivendata/cookiecutter-data-science (дата обращения 01.07.2020)

6. Репозиторий библиотеки Catalyst. – URL: https://github.com/catalyst-team/catalyst (дата обращения 04.07.2020)

УДК 004.42

# РАЗРАБОТКА ПО ДЛЯ НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

**А. А. Поминова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается задача построения оптимального маршрута с использованием генетического алгоритма. Маршрут внутри города с промежуточными точками посещения представлен в виде графа. Задачу можно представить в виде задачи коммивояжера и применить генетический алгоритм для нахождения оптимального маршрута.

**Ключевые слова:** генетический алгоритм, оптимальный маршрут, задача оптимизации, задача коммивояжера, эвристика, кратчайший путь, мутация, скрещивание, клиент-серверное приложение, программное обеспечение.

## Введение

В повседневной жизни многие из нас часто составляют себе план задач и дел на день, точно так же можно составлять себе план поездки в виде списка мест, которые нам надо посетить в течение дня. Например, профессия человека подразумевает частые перемещения по городу, или просто выдался загруженный день, и необходимо посетить несколько мест в течение дня. При этом каждому человеку важно завершить все свои дела за как можно более короткое время. Таким образом, человеку необходимо составить оптимальный маршрут для его перемещений по городу.

Очевидно, такую задачу можно формализовать и представить маршрут в виде графа, где конкретные места посещения являются вершинами графа, а дороги между ними — его ребрами. Далее мы можем находить оптимальный маршрут в графе любыми существующими на данный момент времени алгоритмами. Сейчас их существует большое количество. У каждого алгоритма есть свои преимущества и недостатки. В данной статье решение задачи о нахождении оптимального маршрута рассматривается с точки зрения применения генетического алгоритма. Результат решения такой задачи можно представить в виде клиент-серверного приложения, которое позволит пользователю найти кратчайший маршрут посещения всех заданных точек города.

На данный момент существуют различные приложения и сервисы, с помощью которых вы можете проложить маршрут, даже добавить в него промежуточные точки. Самые масштабные и известные сервисы — это Яндекс карты и Google карты. Но у них есть один недостаток, который важен в рамках рассматриваемой задачи. К примеру, в Яндекс картах имеется возможность построить сложный маршрут, состоящий из нескольких точек на карте. Сервис составит путь, по которому можно обойти все указанные точки. Но Яндекс карты не отвечают за оптимальность такого маршрута, так как он был построен из указанных пользователем точек в том порядке, в котором их вводили в систему. Таким образом, если пользователь сам не позаботился об оптимальном порядке ввода точек маршрута, то проложенный на карте путь может быть далеко не самым коротким. Поэтому идея поставленной задачи заключается в разработке такого программного продукта, который сможет предложить своим пользователям оптимальный маршрут для посещения всех запланированных мест в городе, порядок посещения точек не важен.

## 1. Постановка задачи

Требуется разработать проект программной системы, которая позволит построить оптимальный маршрут с указанными промежуточными точкам, учитывая значения критериев оптимальности и их важности, указанных пользователем системы. Конечный результат будет представлен в виде клиент-серверного приложения, разработанного на языке программирования java.

## 2. Разработка системы

Генетический алгоритм — это эвристический алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомых параметров с использованием механизмов, аналогичных естественному отбору в природе. Является разновидностью эволюционных вычислений, с помощью которых решаются оптимизационные задачи с использованием методов естественной эволюции, таких как наследование, мутации, отбор и кроссинговер [1].

Генетический алгоритм состоит из следующих основных этапов, представленных в виде блок-схемы на рис. 1. В качестве начальной популяции можно взять маршрут, в котором точки расставлены в порядке указанном пользователем. Строка, содержащая идентификаторы мест города в определенном порядке, является генотипом особи. Основной характеристикой особи является степень ее приспособленности. Данная характеристика позволяет сравнивать две особи между собой и выбирать более предпочтительную из них. В контексте поставленной задачи в качестве характеристики приспособленности можно взять длину маршрута, определяемую генотипом особи. Чем меньшее значение характеристики имеет особь, тем больше она приспособлена к выживанию. Те особи, которые обладают более высокой степенью выживаемости, способны «производить потомков», передавая им свои лучшие признаки. В то время как менее жизнеспособные экземпляры имеют меньше шансов передать свою генетическую информацию, что представляет собой процесс естественного отбора. В результате воспроизводства новых поколений получаются новые особи, содержащие генетическую информацию двух своих родителей. Благодаря процессу мутации в популяции появляется новая генетическая информация, ранее в ней не содержавшаяся, но не обязательно улучшающая результат. Таким образом, полезные генетические признаки, улучшающие результат, будут аккумулироваться и передаваться в последующие поколения. Данный процесс, в конечном счете, приведет к нахождению оптимального или близкого к нему результата.

В дальнейшем предстоит разработать программное обеспечение, которое позволит пользователям указать точки маршрута в произвольном порядке, и в качестве результата предложит оптимальный маршрут на основе использования генетического алгоритма. Приложение может иметь архитектуру клиент-сервер, где серверная часть будет отвечать за выполнение генетического алгоритма, а клиентская часть за взаимодействие с пользователем, и может быть представлена в виде веб- приложения или мобильного приложения.

## Заключение

В данной статье описан подход для решения задачи составления оптимального маршрута с множеством критериев с помощью эвристического алгоритма поиска. Проблема нахождения оптимального маршрута представлена в виде задачи коммивояжера, что позволило применить генетический алгоритм для ее решения. Данный алгоритм был выбран как самый подходящий для поставленной задачи по производительности и оптимальности выдаваемого результата.

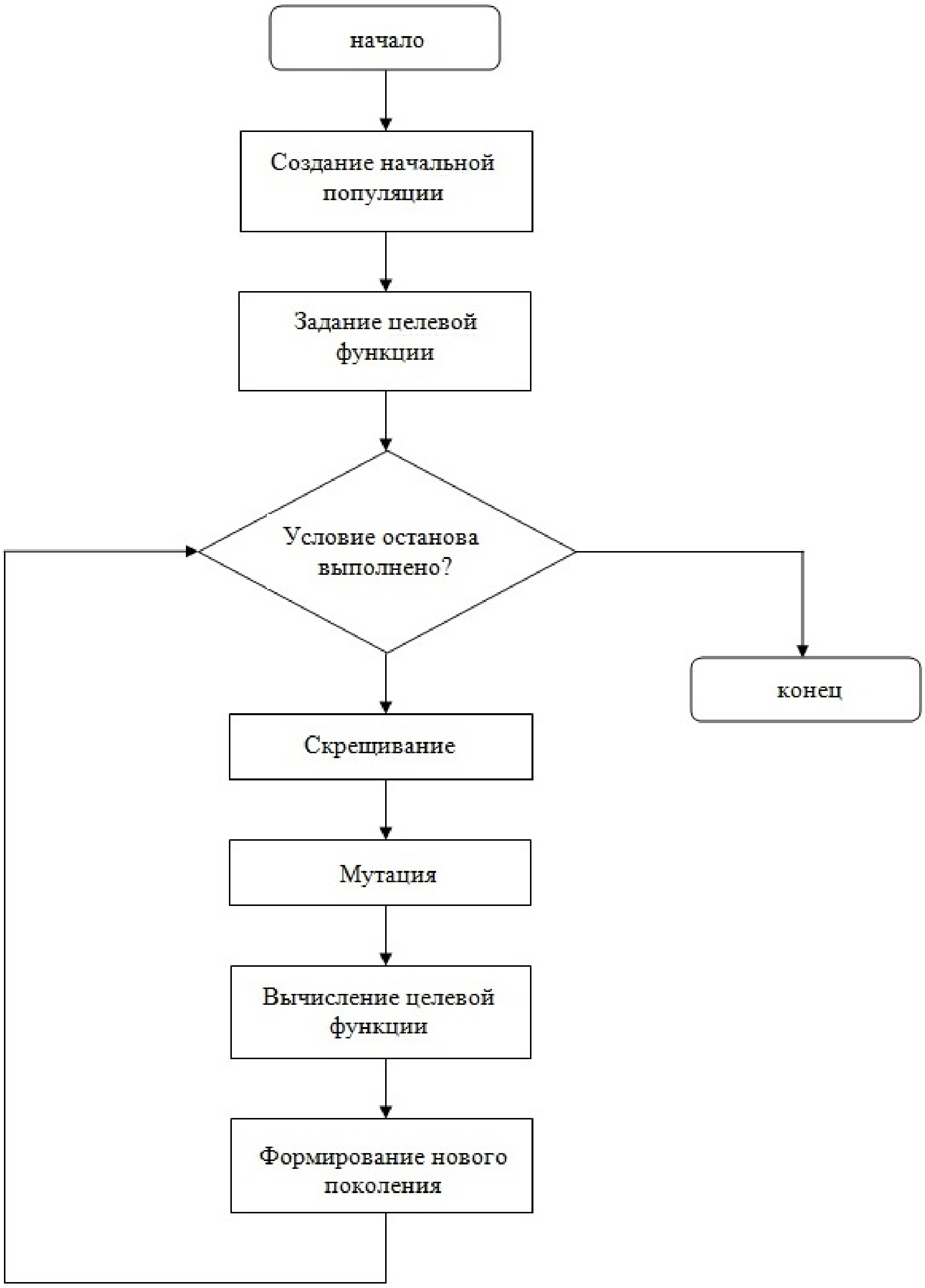



*Рис. 1. Блок-схема генетического алгоритма*

Решение, разработанное на основе поставленной задачи, может применяться людьми, которые в течение рабочего дня вынуждены много ездить по разным точкам города, например, экскурсоводами, гидами, проверяющими, туристами и т. д.

**Литература**


1. Генетический алгоритм : [сайт]. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Генетический_алгоритм (дата обращения: 30.09.2020).

2. *Батищев, Д. И.* Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации / Д. И. Батищев, Е. А. Неймарк, Н. В. Сатростин. – Нижний Новгород. – 2007. – 85 с.

3. Задача коммивояжера : [сайт]. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_коммивояжёра (дата обращения: 30.09.202).

4. *Шилдт, Г.* Java 8. Полное руководство: научно-популярное издание / Г. Шилдт. – Москва : ООО «И.Д. Вильямс», 2015. – 1376 с.

5. Генетические алгоритмы. От теории к практике : [сайт]. – URL: https://habr.com/ru/post/138091/ (дата обращения: 05.10.2020).

6. Руководство по java : [сайт]. – URL: https://www.mkyong.com/ (дата обращения: 10.10.2020).

7. Руководство по Java Script API сервиса Яндекс карт : [сайт]. – URL: https://tech.yandex.ru/maps/doc/jsapi/2.1 (дата обращения: 10.10.2020).

8. *Булгаков, И. В.* Решение задачи коммивояжера с помощью генетических алгоритмов / И. В. Булгаков, Е. А. Неймарк. – Нижний Новгород. – 1998. – 7 с.

УДК 004

# О РАЗРАБОТКЕ WEB-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ БОЛЬНОГО И ОЦЕНКА РИСКА СМЕРТНОСТИ

**Е. Д. Попов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Данная работа посвящена проектированию и реализации web-приложения оценки состояния больного и оценки риска смертности в отделении реанимации, составление статистики по имеющимся данным.
**Ключевые слова:** оценка состояния пациента, Spring boot.

## Введение

В последнее время все больше происходит модернизация и автоматизации процессов практически во всех отраслях деятельности человека, отрасль медицины не является исключением.

Многие способы и методы по оценки и анализу состояния были придуманы десятки лет назад, но до сих пор они являются эффективными и очень хорошо себя зарекомендовали.

Медицинские учреждения нуждаются в современном программном обеспечении, которое позволит проводить по имеющимся анализам и внешнему осмотру пациента анализ его состояния и затем систематизировать данные пациента и получить вероятность летального исхода, и по полученным результатам принять наиболее рациональное действие, которое может улучшить ход лечения.

Имея возможность вести статистические данные по различным параметрам заведующий отделением может оценить эффективность деятельности своего отделения и принять соответствующие меры по увеличению его работы. Имея графики и статистические данные врачу удобно будет представлять и оформлять отчетные данные и вести документооборот. Наличие базы данных обеспечит персоналу доступ к информации каждого клиента и статистики по каждому конкретному методу оценки состояния больного.

Эффективность работы медицинского персонала зависит не только от опыта или имеющегося оборудования, а также и от имеющегося программного обеспечения, которое предоставит наиболее точное и быстрое получение необходимой информации.

В связи с вышеперечисленным, цель данной работы создать приложение, которое позволит провести ряд расчетов по медицинским параметрам клиентов больницы.

## 1. Анализ задачи

Существует несколько способов для оценки состояния пациента: физиологический и терапевтический. Суть физиологического подхода основана на связи количества и степени физиологической дисфункции с риском летального исхода пациента. Чем больше данных будет собрано о пациенте, тем более полными будут данные о состоянии пациента и, тем большее влияние окажет лечение пациента. Оценка тяжести состояния больного по методам, направлена не только на возникновение риска летального исхода пациента, но и на возможные осложнения, которые могут возникнуть сразу после оценки.

Оценка тяжести пациента, производимая по шкалам, позволяет также спрогнозировать риск смерти пациента. Слово «риск» выражает возможность неблагоприятного события, такого, например, как преждевременная смерть.

Факторами риска являются особенности организма или любые внешние воздействия (включая диагностические и терапевтические процедуры), приводящие к увеличению вероятности возникновения плохого исхода.

Исходы, имеющие значение для медицинского персонала и больных представлены ниже (табл. 1) [1].

Таблица 1

*Исходы заболевания*

| | |
|---|---|
| Смерть | Плохой исход, если смерть преждевременна |
| Заболевание | Набор симптомов, физикальных и лабораторных данных, отклоняющихся от нормы |
| Дискомфорт | Такие симптомы как боль, тошнота, отдышка, зуд, шум в ушах |
| Инвалидизация | Неспособность к обычной деятельности дома, на работе, во время отдыха |
| Неудвлетворенность | Эмоциональная реакция на болезнь и проводимое лечение, например, тоска или гнев |

Таким образом, оценка риска — это процесс упорядочивания пациентов каждой наблюдаемой группы в соответствии с уровнем риска и проведенным сравнительным анализом между пациентами с похожими оценками или вероятным риском. Главная цель такого подхода заключается в стандартизации оценки тяжести состояния пациентов и в правильном выборе групп для сравнения. Оценка риска – метод сравнения только между группами схожего риска.

Высокая летальность не предполагает, что умрет данный пациент, а говорит о том, что в его случае вероятность смерти достаточно высока. Из этого следует, что моральные решения, связанные с ограничением ухода или уровня врачебного вмешательства, не должны основываться только на оценочных шкалах. Таким образом, особое внимание должно быть уделено точному определению наблюдаемых исходов.

Летальность пациента будет вычисляться по предложенным ранее шкалам в виде процента риска смертности по каждой шкале, так и средняя по методам.

Оценка по шкале представляет собой количество набранных балов, характеризующих общее состояние пациента. Для интерпретации балов в проценты к каждой шкале имеется таблица для сопоставления или математическая функция для расчета. В шкалах могут оцениваться собранные анализы на концентрацию каких-либо веществ в организме либо внешние признаки пациента.

## 2. Методы оценки состояния пациента

### *2.1. Перинатальная шкала острого состояния новорожденного (SNAPPE)*

По шкале SNAPPE состояние новорожденного оценивается следующим параметрам: вес при рождении, гестационный возраст, оценка по Апгар после 5 минут, экскреция мочевины, наименьшее и наивысшее артериальное давление, наихудшее соотношение PaO2/FiO2; наименьшее значение pH; наличие повреждений, наименьшая температура. Данные собираются в течение 12 часов после поступления в отделение интенсивной терапии. Риск смертности рассчитывается следующим образом. Максимальное количество баллов принимается за 100 %, таким образом путем составления простой пропорции вычисляется риск смертности при меньшем количестве баллов.

### *2.2. Оценка риска физиологической стабильности новорожденного (TRIPS)*

Транспортный индекс риска физиологической стабильности, позволяет оценить тяжесть состояния новорожденных, требующих экстренной транспортировки. С помощью шкалы можно выявить новорожденных с высоким риском смертности. Шкала включает оценку температуры, состояние дыхательной системы, систолического артериального давления, ответ на вредные стимулы.

Общая оценка по TRIPS это сумма баллов по всем 4 параметрам, чем выше оценка по TRIPS, тем выше вероятность смерти.

### *2.3. Динамическая оценка органной недостаточности (SOFA)*

Шкала оценки органной дисфункции (SOFA) это шкала для оценки мултиорганной недостаточности у ПИТ пациентов с сепсисом. Она создана для лёгкой оценки и описания последовательности осложнений у критически больных пациентов.

В основу шкалы SOFA положена оценка дисфункции шести органных систем: дыхательной, сердечно-сосудистой, печеночной, коагуляционной, почечной и неврологической от легкой дисфункции (0 баллов) до тяжелой недостаточности (4 балла).

Максимальный общий балл по шкале 24, чем выше балл, тем больше дисфункция органа, чем больше общий бал, тем сильнее мультиорганная дисфункция.

### 2.4. Педиатрическая шкала комы (PCS)

Шкала представляет из себя количественную оценку пяти рефлексов ствола головного мозга. Данный метод оценки был создан для оценки детей, которые еще слишком малы, чтобы разговаривать.

Суть данного метода оценки является проверка реакции на какие-либо раздражители. Максимальная оценка по данной 14 баллов, чем больше пациент набрал баллов тем лучше его состояние.

### *2.5. Неонатальная шкала эффективности лечения (NTISS)*

Для оценки тяжести заболевания у новорожденного, находящегося в неонатальном отделении реанимации и интенсивной терапии используют шкалу NTISS (The Neonatal Therapeutic Intervention Scoring System). Значение оценки по NTISS на момент поступления коррелирует с длительностью нахождения в отделении, стоимостью лечения пациента и величиной затрат госпитальных ресурсов.

## 3. Средства реализации

Для реализации серверной части были использованы следующие технологии и программные средства:

- фреймворк Spring
- СУБД PostgreSQL 13
- Веб-сервер nginx.

Для реализации клиентской части были использованы следующие технологии и программные средства:

- стандартные средства разметки веб-страниц — HTML5
- язык программирования JavaScript;
- библиотека Bootstrap.

Выбранные технологии обеспечат высокую скорость работы приложения и высокую скорость разработки приложения.

## Заключение

В ходе выполнения выпускной работы было разработано клиент-серверное приложение, в котором реализованы функциональные возможности:

1. Разделение прав пользователя и администратора с разработанными для них графическими интерфейсами.
2. База данных приложения с учетом специфики структуры медицинских отделений.
3. Система формы для расчета оценки состояния пациента.
4. Выведение статистики пациентов и отделений по различным параметрам.

Разработанный проект был внедрен в отделении реанимации интенсивной терапии ВО ВОКБ №1 города Воронеж.

## Литература

1. Оценочные и прогностические шкалы в медицине критических состояний / Александрович Ю. С., Гордеев В. И. – СПб. : Питер, 2010. – 248 с.
2. Spring boot. – URL: https://spring.io (дата обращения 19.05.2019)
3. *Уоллс К.* Spring в действии. – М. : ДМК Пресс, 2013. – 752 с.

УДК 512.643+519.83

# ИГРЫ НА ЧЕРНО-БЕЛЫХ ПОЛЯХ: РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ RCD

**И. Н. Попов**

*Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова*

## Введение

Пусть $G$ — аддитивная абелева группа с нулем $\theta$, $M$ — непустое подмножество группы $G$. Подгруппу группы $G$, являющуюся пересечением всех ее подгрупп, содержащих множество $M$, называют подгруппой, порожденной множеством $M$, и обозначают $\langle M\rangle$. Справедливо:

$$\langle M\rangle = \{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_sa_s \mid a_1, a_2, \ldots, a_s \in M, k_1, k_2, \ldots, k_s \in Z, s = 0,1,2,\ldots\},$$

где $1a = a$, $0a = \theta$ и $(-1)a = -a$ — противоположный для элемента $a \in G$. Множество $M$ называют порождающим множеством группы $\langle M\rangle$, его элементы — порождающими (образующими) элементами. Представление элемента из группы $\langle M\rangle$ в виде указанной суммы называется разложением элемента через образующие $a_1, a_2, \ldots, a_s$ [1].

Сформулируем алгоритмические проблемы для групп $G$ и $\langle M\rangle$.

1. Проблема вычисления: определить алгоритм, используя который вычисляется элемент группы $\langle M\rangle$ по его разложению.

2. Проблема вхождения: определить алгоритм, используя который можно выяснить, принадлежит ли элемент из группы $G$ группе $\langle M\rangle$.

3. Проблема разложения: определить алгоритм, используя который находится разложение элемента группы $\langle M\rangle$.

4. Проблема минимизации: определить алгоритм, используя который находится разложение элемента группы $\langle M\rangle$ с наименьшим числом образующих по сравнению со всеми другими разложениями данного элемента.

Естественно сформулировать проблему об определении порядка $|\langle M\rangle|$ группы $\langle M\rangle$ (то есть определения числа элементов в группе $\langle M\rangle$) при известном порядке $|G|$ конечной группы $G$.

Универсальным решением алгоритмических проблем для конечных групп является метод перебора. Но данный метод не всегда является эффективным (например, является затратным по времени). Следовательно, для конкретных групп необходимо находить алгоритмы, отличные от метода перебора.

Решение проблемы вычисления может быть сведено к получению результата, не прибегая к непосредственному вычислению из-за возможного большого объема действий с элементами группы (например, к записи матриц большой размерности и реализации действий с ними).

Решение поставленных алгоритмических проблем носит практический характер. В частности, возможен перенос результатов исследований в теории групп на теорию игр. Переход от одной ситуации в игре к другой можно интерпретировать как некое преобразование. Множество преобразований и действия над преобразованиями — составляющие алгебраических структур.

Как известно, игра определяется правилами и целью. Цель игры — достижение определенного результата игроком или игроками, в результате которого происходит окончание игры, объявление победивших и проигравших. Если, исходя из правил игры, можно достичь цели игры, то игра называется разрешимой, в противном случае — неразрешимой. С точки зрения теории групп разрешимость игры тесно связана с алгоритмической проблемой вхождения.

Для примера рассмотрим следующую игру. На рис. 1 изображены две картинки. Считаем, что картинки сложены из одинаковых квадратов, одна сторона каждого из которых белая, вторая — черная. В подобных случаях, будем говорить, что задано черно-белое поле $\Pi$. Поле, на котором все квадраты расположены белой стороной вверх, назовем пустым (белым или нулевым) и обозначим $\Pi_0$.

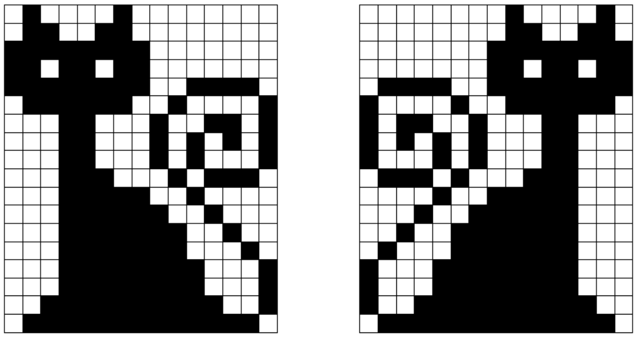


*Рис. 1. Симметрические картинки: поля* $\Pi_1$ *и* $\Pi_2$

Зададим правило преобразования квадратов на картинке, которое рассматривается как правило игры, следующим образом: все квадраты, расположенные в одной из выбранных строк (столбцов), переворачиваются на обратную сторону. Цель: за конечное число преобразований из левой картинки получить правую (преобразовать поле $\Pi_1$ в поле $\Pi_2$).

Данная игра тесно связана с аддитивной конечной группой матриц $M_{18\times15}(Z_2)$ с нулевой матрицей $\Theta$. Здесь $Z_2=\{0;1\}$ со сложение, что $0+0=1+1=0,$ $0+1=1+0=1,$ и $xA=A,$ если $x=1,$ и $xA=\Theta,$ если $x=0,$ для любой матрицы $A$ с элементами из множества $Z_2$.

Каждому преобразованию в предложенной игре сопоставляется «элементарная» матрица (матрица, в которой только элементы одной строки или одного столбца равны 1), композиции преобразований картинок — сумма соответствующих «элементарных» матриц. «Элементарные» матрицы образуют множество $M$, являющееся порождающим множеством подгруппы $\langle M\rangle$ в рассматриваемой группе матриц $M_{18\times15}(Z_2)$. Ясно, что хаотически, непродуманно переворачивая квадраты картинок, добиться цели будет затруднительно. Решив же алгоритмическую проблему разложения для групп $M_{18\times15}(Z_2)$ и $\langle M\rangle$, получаем целенаправленный план действий для получения результата.

Очевидно, что поле $\Pi_1$ может быть переведено в поле $\Pi_2$ с помощью правил преобразований полей, заложенных в правила игры, если для матриц $A_1$ и $A_2$, соответствующие данным полям, выполняется свойство: $A_1+A_2\in M_{18\times15}(Z_2)$. Очевидно, что если поле $\Pi$ приводится к пустому полю, то выполняется свойство: $A\in M_{18\times15}(Z_2)$, так как пустому полю соответствует нулевая матрица $\Theta$. Все сказанное справедливо и для произвольных полей и связанных с ними матрицами из группы $M_{m\times n}(Z_2)$.

Составляя аналогичные игры с преобразованиями картинок, меняя лишь правила игры, необходимо рассматривать новую подгруппу в группе матриц, для которой следует решить поставленные алгоритмические проблемы [2–8].

Целью статьи является изложить решения алгоритмической проблемы разложения для матричной группы $RCD_n$ и продемонстрировать использования полученных результатов в преобразовании черно-белых полей.

**Основная часть**

Введем в рассмотрение матрицы размерности $n\times n$, где $n\geq 2$, с элементами из множества $Z_2$:

- $E_i$ — матрица-строка, в которой только элементы $i$-й строки равны 1, $1\leq i\leq n$;
- $E^j$ — матрица-столбец, в которой только элементы $j$-го столбца равны 1, $1\leq i\leq n$;

• $E_d$ — матрица, в которой только элементы главной диагонали равны 1;
• $E^d$ — матрица, в которой только элементы побочной диагонали равны 1.
Определим подгруппы $RC_n$ и $RCD_n$ группы $M_n(Z_2)$:
• матрица $A \in M_n(Z_2)$ принадлежит группе $RC_n$, если

$$A = x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots + x_nE_n + y_1E^1 + y_2E^2 + \ldots + y_nE^n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in Z_2$;
• матрица $A \in M_n(Z_2)$ принадлежит группе $RCD_n$, если

$$A = x_1E_1 + x_2E_2 + \ldots + x_nE_n + y_1E^1 + y_2E^2 + \ldots + y_nE^n + z_1E_d + z_2E^d,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2 \in Z_2$.

Так как $E_1 = E_2 + \ldots + E_n + E^1 + E^2 + \ldots + E^n$, то первоначально будем рассматривать разложения матриц из групп $RC_n$ и $RCD_n$, которые не содержат матрицу $E_1$.

Справедливо:
• если $n \geq 3$, то $E_d, E^d \notin RC_n$;
• если $n \geq 5$, то $E_d + E^d \notin RC_n$;
• если $n = 4$, то $E_d + E^d \in RC_4$ (поэтому первоначально в разложениях матрицу $E_d$ можно не использовать).

Сведения о группе $RCD_n$ для различных значений $n$:
• $n = 2$:
* $\left|RCD_2\right| = 8$;
* $RCD_2 = RC_2$;
• $n = 3$ или $n \geq 5$:
* $|RCD_n| = 2^{2n+1}$;
* каждая матрица в группе $RCD_n$ имеет два различных разложения;
* хотя бы одно разложение матрицы из группы $RCD_n$ содержит не более $n+2$ матрицы-образующие;
• $n = 4$:
* $|RCD_4| = 256$;
* каждая матрица в группе $RCD_4$ имеет 4 различных разложения;
* хотя бы одно из разложений матрицы из группы $RCD_4$ содержит не более 5 матриц-образующих.

Рассмотрим алгоритм разложения матрицы из группы $RCD_n$, исходя из представленных свойств группы $RCD_n$ для различных значений $n$.

Пусть $A \in RCD_n$. Из равенства

$$A = x_2E_2 + x_3E_3 + \ldots + x_nE_n + y_1E^1 + y_2E^2 + \ldots + y_nE^n + z_1E_d + z_2E^d,$$

где $x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2 \in Z_2$, следует:

$$A + z_1E_d + z_2E^d = x_2E_2 + x_3E_3 + \ldots + x_nE_n + y_1E^1 + y_2E^2 + \ldots + y_nE^n.$$

Отсюда $A + z_1E_d + z_2E^d \in RC_n$.

Для нахождения разложения матрицы $A \in RCD_n$ поступаем следующим образом.

1. Находим коэффициенты $z_1$ и $z_2$ (выражаем через элементы матрицы $A$).

2. Находим коэффициенты $x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2$ (выражаем через элементы матрицы $A + z_1E_d + z_2E^d$).

Рассмотрим случаи.
• $n = 3$:
* $A = x_2E_2 + x_3E_3 + y_1E^1 + y_2E^2 + y_3E^3 + z_1E_d + z_2E^d$;
* формулы для определения коэффициентов $z_1$ и $z_2$:

$$z_1 = a_{12} + a_{13} + a_{22} + a_{23}, \quad z_2 = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22};$$

* $B = A + z_1 E_d + z_2 E^d$.
• $n = 4$:
* $A = x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4 + y_1 E^1 + y_2 E^2 + y_3 E^3 + y_4 E^4 + z E_d$;
* формула для определения коэффициента $z$:

$$z = a_{12} + a_{13} + a_{22} + a_{23};$$

* $B = A + z E_d$.
• $n \ge 5$:
* $A = x_2 E_2 + x_3 E_3 + \ldots + x_n E_n + y_1 E^1 + y_2 E^2 + \ldots + y_n E^n + z_1 E_d + z_2 E^d$;
* формулы для определения коэффициентов $z_1$ и $z_2$:

$$z_1 = a_{11} + a_{13} + a_{21} + a_{23}, \quad z_2 = a_{13} + a_{1n} + a_{23} + a_{2n};$$

* $B = A + z_1 E_d + z_2 E^d$.

В общем случае: $B = x_2 E_2 + x_3 E_3 + \ldots + x_n E_n + y_1 E^1 + y_2 E^2 + \ldots + y_n E^n$ и формулы для определения коэффициентов $x_2, x_3, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$x_2 = b_{21} + b_{11},\ x_3 = b_{31} + b_{11},\ \ldots,\ x_n = b_{n1} + b_{11},\ y_1 = b_{11},\ y_2 = b_{12},\ \ldots,\ y_n = b_{1n}.$$

**Пример.** Найдем разложения матрицы $A$ в группе $RCD_4$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложение матрицы $A$ находим в виде:

$$A = x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4 + y_1 E^1 + y_2 E^2 + y_3 E^3 + y_4 E^4 + z E_d.$$

• Находим коэффициент $z$ по элементам матрицы $A$:

$$z = a_{12} + a_{13} + a_{22} + a_{23} = 1 + 0 + 1 + 1 = 1.$$

• Определяем матрицу $B$:

$$B = A + E_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Находим коэффициенты $x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ по элементам матрицы $B$:

$$x_2 = b_{21} + b_{11} = 1,\ x_3 = b_{31} + b_{11} = 0,\ x_4 = b_{41} + b_{11} = 0,$$
$$y_1 = b_{11} = 0,\ y_2 = b_{12} = 1,\ y_3 = b_{13} = 0,\ y_4 = b_{14} = 1.$$

Получаем разложение матрицы $A$:

$$A = E_2 + E^2 + E^4 + E_d.$$

В группе $RCD_4$ нулевая матрица $\Theta$ имеет четыре различных разложения:
$\Theta = \Theta$,
$\Theta = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E^1 + E^2 + E^3 + E^4$,
$\Theta = E_1 + E_4 + E^2 + E^3 + E_d + E^d$,
$\Theta = E_2 + E_3 + E^1 + E^4 + E_d + E^d$.

Прибавляя к полученному разложению матрицы $A$ каждое из четырех разложений матрицы $\Theta$, получаем все разложения матрицы $A$ в группе $RCD_4$:
$A = E_2 + E^2 + E^4 + E_d$,
$A = E_1 + E_3 + E_4 + E^1 + E^3 + E_d$,

$A = E_1 + E_2 + E_4 + E^3 + E^4 + E^d$,

$A = E_3 + E^1 + E^2 + E^d$.

Среди этих четырех разложений матрицы $A$, как видим, есть два минимальных разложения, каждое из которых содержит по 4 матрицы. □

Относительно введенной группы $RCD_n$ на полях размерности $n \times n$ можно перевертывать все квадраты, составляющие поле, на обратную сторону, которые расположены на главной или побочной диагонали или в одной строке или в одном столбце поля.

Для указания, какие квадраты на поле переворачиваются, в квадратах пишется стилизованная буква «Т».

**Пример.** Преобразуем поле $\Pi$ к пустому полю $\Pi_0$, представленные на рис. 2.

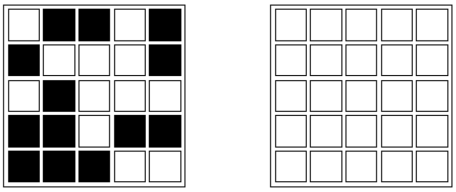


*Рис. 2. Поля* $\Pi$ *и* $\Pi_0$

В группе $M_{5\times 5}(Z_2)$ полю $\Pi$ соответствует матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем разложения матрицы $A$ в группе $RCD_5$.

• Матрицу $A$ представляем в виде:

$$A = x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4 + x_5E_5 + y_1E^1 + y_2E^2 + y_3E^3 + y_4E^4 + y_5E^5 + z_1E_d + z_2E^d,$$

где $x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, z_1, z_2 \in Z_2$.

• Находим коэффициенты $z_1, z_2$ по элементам матрицы $A$:

$z_1 = a_{11} + a_{13} + a_{21} + a_{23} = 0 + 1 + 1 + 0 = 0$,

$z_2 = a_{13} + a_{15} + a_{23} + a_{25} = 1 + 1 + 0 + 1 = 1$.

• Находим матрицу $B = A + z_1E_d + z_2E^d = A + E^d$:

$$A + E^d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Находим коэффициенты $x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ по элементам матрицы $B$:

$y_1 = b_{11} = 0,\ y_2 = b_{12} = 1,\ y_3 = b_{13} = 1,\ y_4 = b_{14} = 0,\ y_5 = b_{15} = 0,$

$x_2 = b_{21} + b_{11} = 1,\ x_3 = b_{31} + b_{11} = 0,\ x_4 = b_{41} + b_{11} = 1,\ x_5 = b_{51} + b_{11} = 0.$

• Разложения матрицы $A$ в группе $RCD_5$:

$$A = E_2 + E_4 + E^2 + E^3 + E^d, \qquad A = E_1 + E_3 + E_5 + E^1 + E^4 + E^5 + E^d.$$

На рис. 3 представлено преобразование поля $\Pi$ по 1-му разложению матрицы $A$.

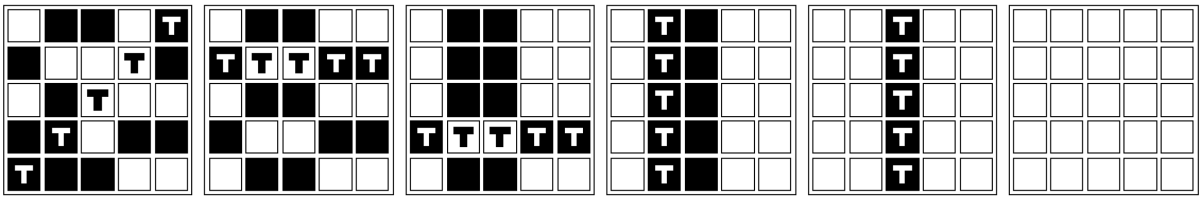


*Рис. 3. Преобразования поля* $\Pi$

На рис. 4 представлено преобразование поля $\Pi$ по 2-му разложению матрицы $A$.

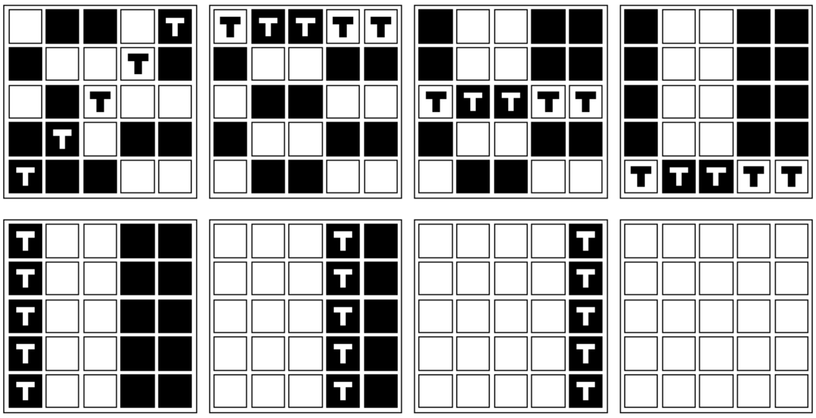


*Рис. 4. Преобразования поля* $\Pi$

В первом случае используется 5 преобразований, во втором — 7 (по количеству матриц-образующих в разложениях). ☐

## Заключение

Игры на черно-белых полях выступают в роли задач для программирования [9–12]. Одним из моментов программирования является возможность использовать подсказки для игрока. Здесь возникает задача о решении алгоритмической проблемы минимизации. В группе $RCD_n$ эта проблема решается тем способом, что, зная одно разложение, можно найти все остальные разложения (общее количество которых равно 2 или 4), из которых можно выбрать минимальное разложение. В других же подгруппах группы $M_{m\times n}(Z_2)$ может возникнуть затруднение не только с определением минимального разложения, но и с определением их общего количества. Можно только утверждать, что число минимальных разложений равно степени числа 2, так как $|M_{m\times n}| = 2^{mn}$.

## Литература


1. *Каргаполов, М. И.* Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – М. : Наука, 1972. – 240 с.

2. *Попов, И. Н.* Группы RC и RCD: монография / И. Н. Попов. – Архангельск : КИРА, 2014. – 192 с.

3. *Попов, И. Н.* Решение проблемы разложения для 0,1-матричных групп со структурно подобными образующими / И. Н. Попов // Научный взгляд в будущее. – 2017. – Т. 2, № 5. – С. 100–104.

4. *Попов, И. Н.* Оптимизация решения алгоритмических проблем разложения и вхождения для группы матриц-квадратов. / И. Н. Попов // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. – 2016. – С. 22–30.

5. *Попов, И. Н.* Оптимизация решения алгоритмических проблем разложения и вхождения для группы матриц-строк. / И. Н. Попов // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. – 2016. – С. 30–37.

6. *Попов, И. Н.* Алгоритмизация определения принадлежности элемента ее группе (на примере группы RC). / И. Н. Попов // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. – 2014. – Т. 1, № 2. – С. 82–94.

7. *Попов, И. Н.* Решение задач с использованием теории групп / И. Н. Попов // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Материалы XV Международной научно-практической конференции. Посвящается 80-летию Педагогического института им. В. Г. Белинского. – 2019. – С. 135–138.

8. *Безумова, О. Л.* Игры на черно-белых полях / О. Л. Безумова, С. Н. Котова, И. Н. Попов // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Восьмой региональной научно-практической конференции. – 2016. – С. 78–96.

9. *Попов, И. Н.* Программирование игр на черно-белых полях в Excel / И. Н. Попов // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Сборник статей XIV Международной научно-практической конференции. – 2018. – С. 249–253.

10. *Попов, И. Н.* Реализация игры на черно-белом поле «4×4» в Excel / И. Н. Попов // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Сборник статей XIV Международной научно-практической конференции. – 2018. – С. 253–257.

11. *Попов, И. Н.* Разработка игр на черно-белых полях с двумя схемами преобразований с использованием VBA Excel / И. Н. Попов // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» — GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики — «KAZCAS-2017». Международная научно-практическая конференция — «ИТОН-2017». Материалы семинара, школы и конференции. – 2017. – С. 207–215.

12. *Попов, И. Н.* Разработка игр на черно-белых полях с использованием VBA Excel / И. Н. Попов // Преподавание информационных технологий в Российской Федерации. Материалы Пятнадцатой открытой всероссийской конференции. – 2017. – С. 335–336.

УДК 004.42

# РЕАЛИЗАЦИЯ ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА И АДАПТАЦИИ ТЕКСТА НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

**С. С. Попов, С. А. Никитина**

*Челябинский государственный университет*

**Аннотация.** Речь в статье пойдет о реализации веб-приложения для анализа и адаптации текстов на русском языке. Делается это для того что бы облегчить работу для преподавателей русского языка как иностранного. В реализации использовался язык программирования Python с библиотеками для морфологического анализа слов mystem и pymorphy2. Пользователю достаточно ввести текст в текстовое окно, после чего отправляется запрос на сервер, где с помощью языковых моделей анализируется и обрабатывается текст.
**Ключевые слова:** естественная обработка языка, NLP, веб-разработка, программирование, python.

## Введение

При преподавании иностранцам русского языка возникает множество нюансов и трудностей, поскольку русский язык объективно можно назвать одним из самых сложных в обучении языков. Для полноценного усвоения материала и погружения в предмет необходимо по-максимуму помочь студенту адаптироваться.

Среди важных факторов следует отметить: уровни лексической и грамматической сложности текста, тематика текстов и ее соответствие интересам учащихся и др. Для иностранцев особую сложность представляет определение частей речи и морфологии слов, падежей и контекста слова. При процессе обучения и составлении тестов для улучшения качества знаний обучающихся преподавателю приходится работать с огромным количеством материала: изучать нормативную литературу (лексический минимум, государственный стандарт) и различные учебные пособия. Причем, дополнительно учитывать объем текста, норматив допустимого объема незнакомой лексики и цели его прочтения.

Для того, чтобы облегчить этот процесс, было принято решение разработать приложение, выполняющее поиск незнакомой лексики, неизученных грамматических конструкций в тексте, а также подбирающее синонимическую замену и выполняющее множество полезных, увеличивающих пользу от обучения и уменьшающих затрачиваемое время функций.

## 1. Реализация веб-приложения

В ходе работы было сделано веб-приложение, которое обрабатывает слова вне контекста и выдаёт предсказание их тегов, а также выделяет часть слов, которые студенты знают на уровне A1. *Гремемы* — значение какой-либо грамматической характеристики слова. Например, «множественное число» или «деепричастие». Множество всех граммем, характеризующих данное слово, образует тег.

В качестве инструментов использовались следующие инструменты:

• Язык программирования Python, с библиотеками mystem и pymorphy2 для морфологического анализа слов(выделение тегов)

• Микрофреймворк Flask через который написан REST API сервер

Алгоритм работы программы:

• Пользователь вводит в текстовый поле предложение

• По нажатию на кнопку через REST API происходит запрос на сервер

• На сервере происходит препроцессинг текста (удаление знаков препинания, разделение предложений по словам) и присвоение каждому слову тега. Сервер возвращает json в котором каждому слову сопоставлены гармемы и теги.

• Отрисовка текста с присвоением каждому слова подсказки с тегом.

## 2. Извлечение значения падежей существительных

Для корректного разделения фраз и слов по уровням сложности необходимо извлекать значения падежей.

*Значение падежа* — законченный отрывок письменной или устной речи (текста), общий смысл которого позволяет уточнить значение входящих в него отдельных слов, предложений, и т. п.

Алгоритм определения контекста:

• Разметить морфологию всех соседних слов с помощью mystem

• Опираясь на падежи, части речи и специальные схемы определить у существительного значение падежа.

Была создана функция описывающая алгоритм определения значения падежа. Метод справляется со своей задачей, хотя и требует доработок. Для демонстрации текущего уровня работы программы, следует обратиться к примерам.

Пример: Подадим на вход программы предложение «Я рисую картины» и получим результат показанный на рис. 1.

```
0   WordMorphology(text='Я', lex='я', gr=['SPRO', 'ед', '1-л', 'им', 'лицо активного действи
я'])
1   WordMorphology(text='рисую', lex='рисовать', gr=['V', 'несов', 'пе', 'непрош', 'ед', 'из
ъяв', '1-л'])
2   WordMorphology(text='картины', lex='картина', gr=['S', 'жен', 'неод', 'вин', 'мн', 'лицо
(предмет) как объект действия'])
```

*Рис. 1*

## Заключение

Программа на данный момент успешно определяет контекст существительных, что является новшеством в подобных разработках. Также, выполняет указанные ранее функции, упрощающие работу с текстом.

В дальнейшем планируется обучить программу определять контекст других частей речи и сделать возможным работу с более высоким уровнем сложности текста.

## Литература

1. Усталов Д. NLPub: каталог и сообщество русских лингвистических ресурсов // Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции: XVI Всероссийская научная конференция RCDL-2014 (Дубна, 13–16 октября 2014 г.): труды конференции / сост. Л. А. Калмыкова, М. Р. Когаловский. – Дубна : ОИЯИ, 2014. – С. 83–87.

2. Korobov M. Morphological Analyzer and Generator for Russian and Ukrainian Languages // Analysis of Images, Social Networks and Texts. – 2015. – P. 320–332.

3. Segalovich I. A fast morphological algorithm with unknown word guessing induced by a dictionary for a web search. – URL: https://cache-mskm910.cdn.yandex.net/download.yandex.ru/company/iseg-las-vegas.pdf

УДК 004

# РАЗРАБОТКА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ИНТЕГРАЦИИ МИКРОСЕРВИСОВ НА ПЛАТФОРМЕ КОНТЕЙНИРИЗАЦИИ DOCKER

**И. А. Тарасов, Д. В. Борисенков**

*Воронежский государственный университет*

## Введение

Современные бизнес-решения требуют от информационных систем автоматизации бизнес-процессов, адаптации к изменяющимся требованиям и стойкости к высоким нагрузкам. Архитектура конечных систем должна обладать модульной структурой, в которой бизнес-задачи разделяются на независимые интеграционные компоненты и выполняются распределённые вычисления. Для обеспечения масштабирования таких систем рассмотрим вариант веб-приложения для непрерывной интеграции программных модулей в виде Docker-контейнеров с возможностью адаптации к модели работы разных платформ запуска.

Одним из популярных подходов к построению информационных систем является сервис-ориентированная архитектура. Это модульный подход к разработке программного обеспечения, когда распределённые слабо связанные компоненты со стандартизированными интерфейсами взаимодействуют через протоколы передачи данных, такие как REST, SOAP, JINI, COBRA. Данные компоненты выполняют только определённую бизнес-задачу, состоящую из относительно простых операций, и совершают сетевое взаимодействие с использованием коммуникационных протоколов и интерфейсов, таких как Protocol Buffers, Apache Thrift, HTTP/HTTPS и REST. То есть для определённой высокоуровневой операции, например, проведения кредитного скоринга или составления выписки счётов клиента за расчётный период, можно составить и определить цепочку компонентов-микросервисов.

В связи с этим возникает необходимость в непрерывной интеграции приложений с наименьшими затратами по времени подготовки к началу работы. Одним из наиболее популярных решений данной проблемы является использование технологий контейнеризации Docker. Его ключевая идея заключается в том, что запущенное приложение функционирует в изолированной среде выполнения: операционная система, библиотеки и другие зависимости оформлены в виде Docker-контейнера, который и являются микросервисом. Это гарантирует независимость от платформы запуска и внешних систем. Стоит отметить тот факт, что конфигурация каждого Docker-контейнера заранее известна, поэтому время развёртывания микросервиса будет зависеть от аппаратно-программных и сетевых возможностей платформы запуска.

Для автоматизации развёртывания, масштабирования контейнеризированных приложений и управления ими существует такое программное обеспечение, как Kubernetes. Он группирует Docker-контейнеры, составляющие приложение, в логические единицы для более простого управления и доступа к ним, работая как отдельно, так и в составе одной из облачных платформ: OpenShift, OKD, AWS, GCP.

С практической точки зрения для настройки работы микросервисов удобно подключаться к Kubernetes через графический интерфейс или терминал. Однако, это чревато проблемами с предварительной подготовкой рабочего процесса, поскольку требует выдачи прав доступа на создание и получение каких-либо ресурсов отдельного окружения.

## 1. Требования к платформам контейнеризации

Одним из ключевых пунктов подключения к платформе запуска Docker-контейнеров является обеспечение сетевой безопасности, так как на рабочие процессы коммерческой системы возможны сетевые атаки. Используя поставщика удостоверений на основе протоколов SAML 2.0 и OpenID Connect, этого можно избежать. Таким поставщиком является Keycloak, который следит за правомерностью доступа к указанной группе микросервисов.

Из-за необходимости подключения к разным платформам запуска требуется обеспечить также структурную универсальность сущности запускаемого программного окружения в виде Docker-контейнера. При этом управление жизненным циклом должно быть расширяемым и гибким.

Немаловажной функциональной частью является механизм сетевого подключения к микросервисам. Он предоставляет управление ими посредством отправки терминальных команд через сетевые протоколы передачи данных с использованием балансировки распределения запросов.

Каждому клиенту веб-приложения должно выделяться изолированное рабочее пространство, чтобы создавать отдельные наборы запущенных микросервисов в виде программного окружения с гибким выбором параметров конфигурации. Основные доступные действия с ними включают:

1) создание конфигурации программного окружения;
2) запуск программного окружения;
3) выполнение терминальных команд в микросервисах;
4) остановка запущенного программного окружения;
5) изменение параметров конфигурации программного окружения;
6) удаление программного окружения.

## 2. Архитектура веб-приложения

В основе организации веб-приложения лежит подход микросервисной архитектуры, поэтому программные модули независимы друг от друга. Отметим тот факт, что изменение одного из них не влечёт изменения работы всей системы. На рис. 1 представлены основные компоненты архитектуры, в которой отображены следующие модули:

1. Angular-приложение для вспомогательной работы с программными окружениями;
2. EnvironmentProvider для управления жизненным циклом программных окружений;
3. EnvironmentConnectionGateway для удалённого выполнения команд в запущенных программных окружениях;
4. Авторизационный сервис Keycloak.

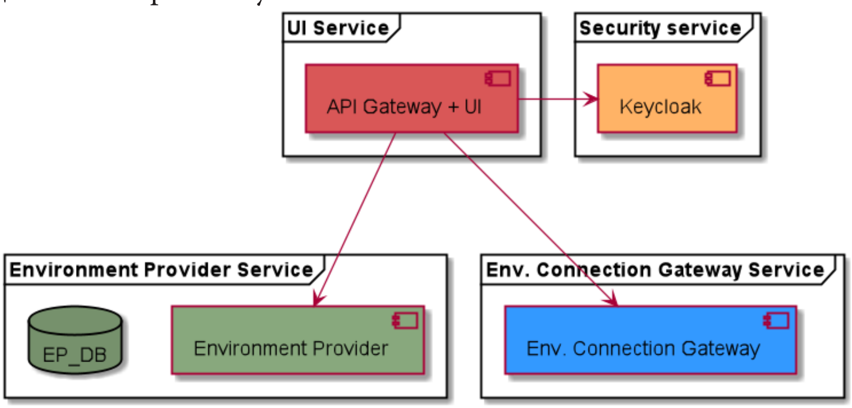



*Рис. 1. Высокоуровневая архитектура веб-приложения*

Взаимодействие с различными микросервисами требует такой расширяемой структуры данных, которая может объединять их в отдельные программные окружения. Возможный вариант этой структуры, представленный на рис. 2, содержит такой набор сущностей:

1. Environment — ключевая сущность, объединяющая информацию о платформе запуска, количестве Docker-контейнеров и других системных параметрах;
2. Provider представляет платформу запуска с информацией о подключении;
3. Host представляет Docker-контейнер;
4. Image — Docker-образ, содержащий имя, тег и путь к репозиторию;
5. Flavor — дисковое пространство, указание которого необязательно;
6. Environment_instances — информация о запущенных программных окружениях;
7. Host_instances — информация о запущенных Docker-контейнерах, принадлежащих определённым environment_instances.

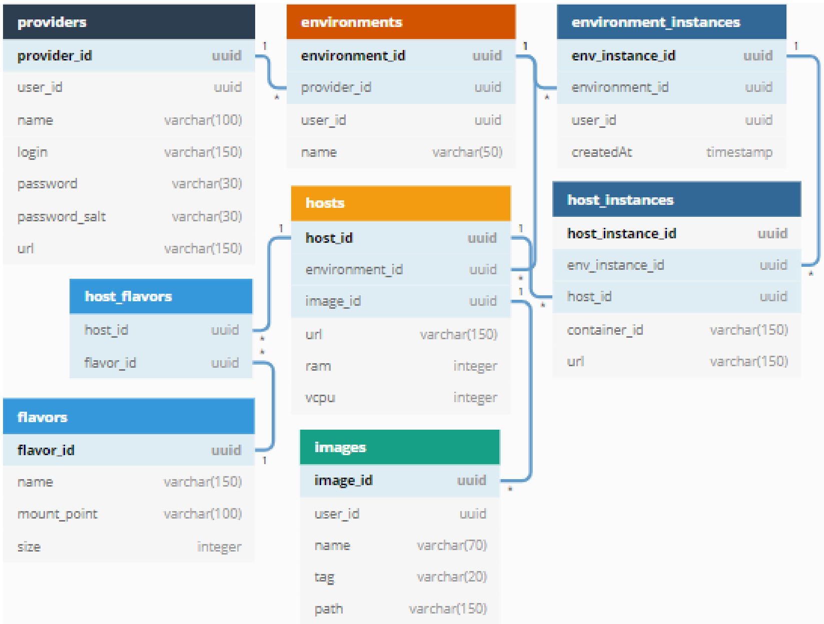



*Рис. 2. Схема базы данных предметной области*

Каждое программное окружение имеет следующие жизненные этапы:

1. Создание конфигурации, параметры которой задаются через пользовательский интерфейс или через вызовы REST API сервиса EnvironmentProvider и сохраняются в СУБД.
2. Инициализация программного окружения с использованием выбранной платформы.
3. Выполнение команд: приостановка работы, возобновление работы, завершение работы, набор терминальных команды.

### 3. Организация модулей

Основной бизнес-процесс веб-приложения заключается в развёртывании программного окружения и установлении сетевого соединения с ним. Этим определяется необходимость выделения отдельных программных модулей для уменьшения созависимости и увеличения гибкости при внесении изменений. Главными модулями являются RESTful веб-сервисы EnvironmentProvider и EnvironmentConnectionGateway. В качестве встроенного клиентского приложения выступает одностраничное Angular-приложение.

На рис. 3 представлена архитектура веб-сервиса EnvironmentProvider, основной задачей которого является управление жизненным циклом программного окружения, представленного в виде совокупностей Docker-контейнеров.

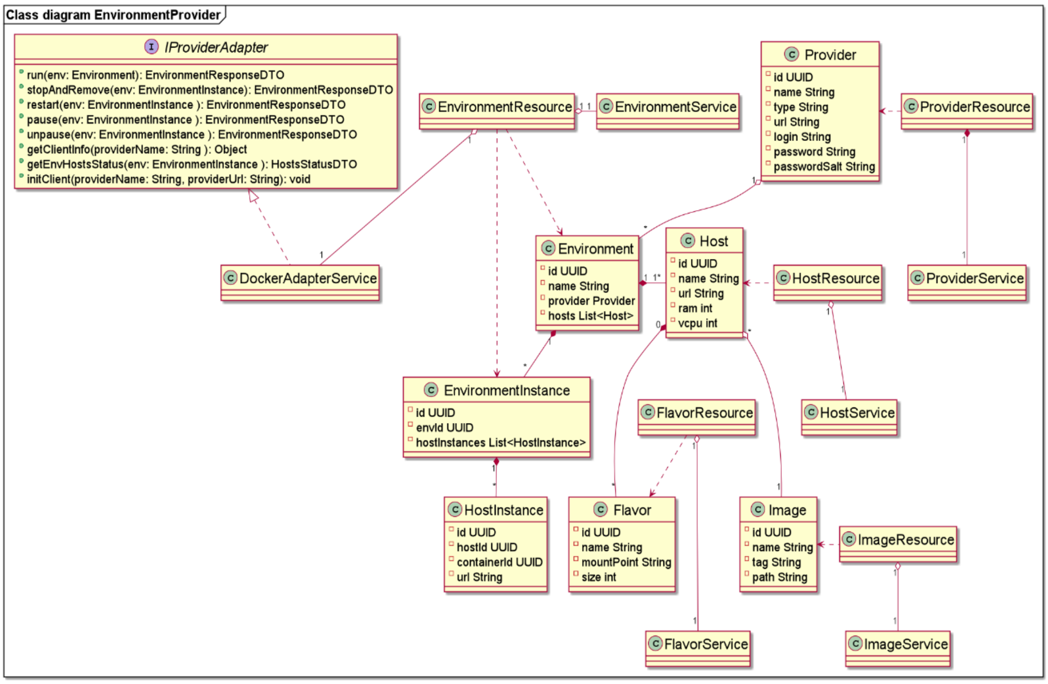



*Рис. 3. Архитектура сервиса EnvironmentProvider*

Ключевой особенностью этого сервиса является поддержка платформ запуска Docker-контейнеров в виде программных окружений. Это осуществляется путём реализации интерфейса IProviderAdapter, в котором указаны основные методы для управления их жизненным циклом, отображённые на рис. 4.

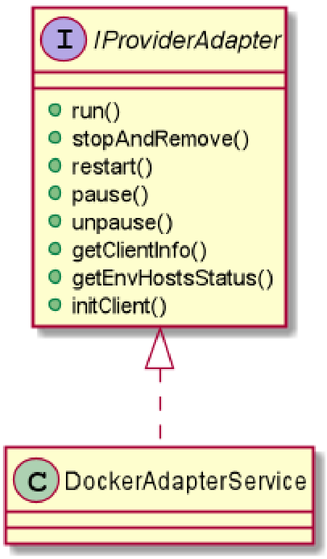



*Рис. 4. Интерфейс жизненного цикла программных окружений*

На рис. 5 представлена архитектура сервиса EnvironmentConnectionGateway, который управляет сетевыми подключениями к программным окружениям. При реализации этого сервиса большое внимание было уделено поддержке работы с разными сетевыми протоколами, такими как Secure Shell, Telnet и другие. Такая универсальность была обеспечена структурой интерфейсов, ключевыми из которых являются:

1. Интерфейс SessionService определяет набор методов для управления жизненным циклом сетевого соединения: создание, подключение к программному окружению, выполнение команд, закрытие сессии.

2. Интерфейс SessionCreator определяет вспомогательные методы для создания новых сетевых подключений к запущенным программным окружениям.

3. Интерфейс SessionConnectionHandler определяет методы для управления ранее созданным сетевым подключением.

В текущей реализации сервиса данные интерфейсы реализованы для работы с сетевым протоколом Secure Shell.

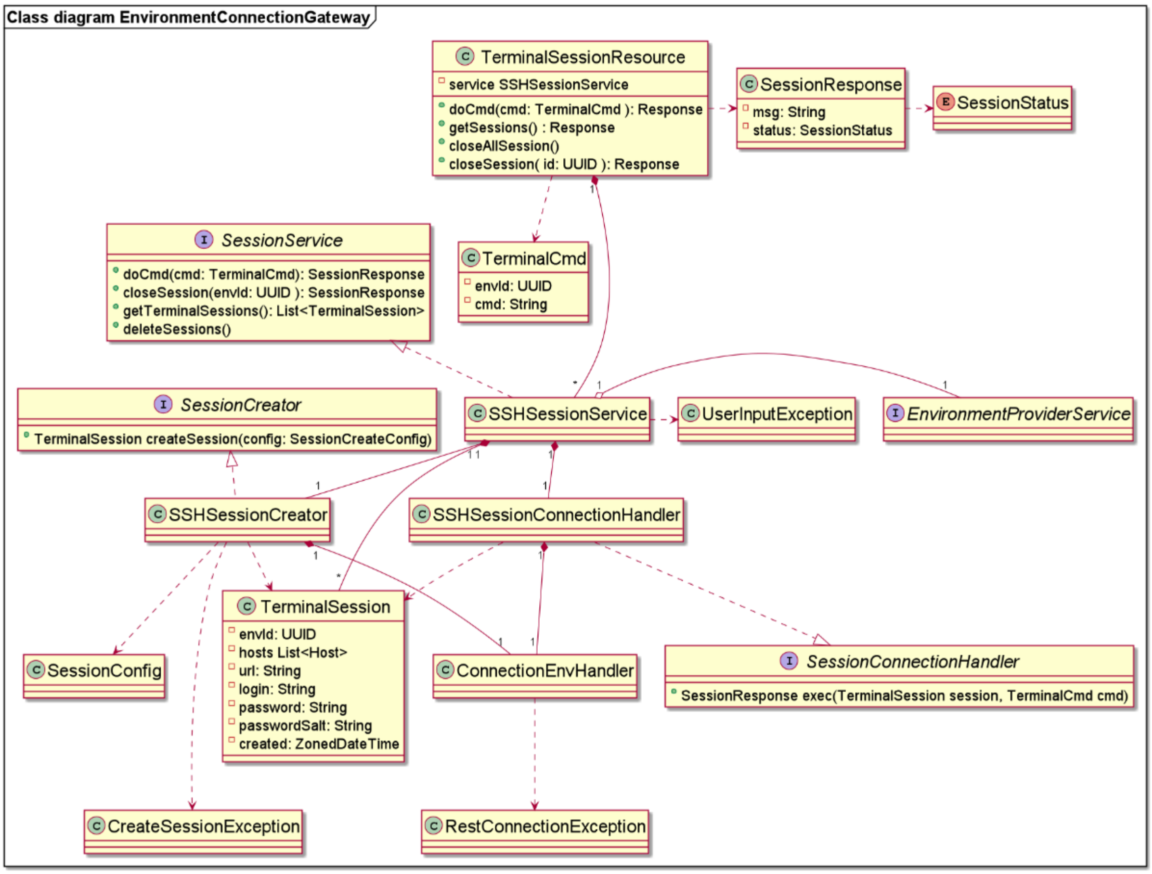



*Рис. 5. Архитектура сервиса EnvironmentConnectionGateway*

## 4. Демонстрация работы веб-приложения

Для демонстрации работы веб-приложения рассмотрим сценарий использования встроенной клиентской части.

Перед началом работы с программным окружением необходимо задать его конфигурацию, что отображено на рис. 6.

При создании программного окружения некоторое время уходит на поиск определённого Docker-образа в локальном репозитории и его загрузку, что и определяет время всей подготовки программного окружения.

На рис. 7 представлен список программных окружений, доступных конкретному пользователю. С ранее сформированными программными окружениями пользователь может совершать следующие действия: запустить, остановить, изменить конфигурацию.

На рис. 8 представлено модальное окно со статусом запущенного программного окружения, которому присваивается универсальный уникальный идентификатор (UUID).

На рис. 9 представлен веб-терминал, который становится доступным после успешного запуска выбранного программного окружения.

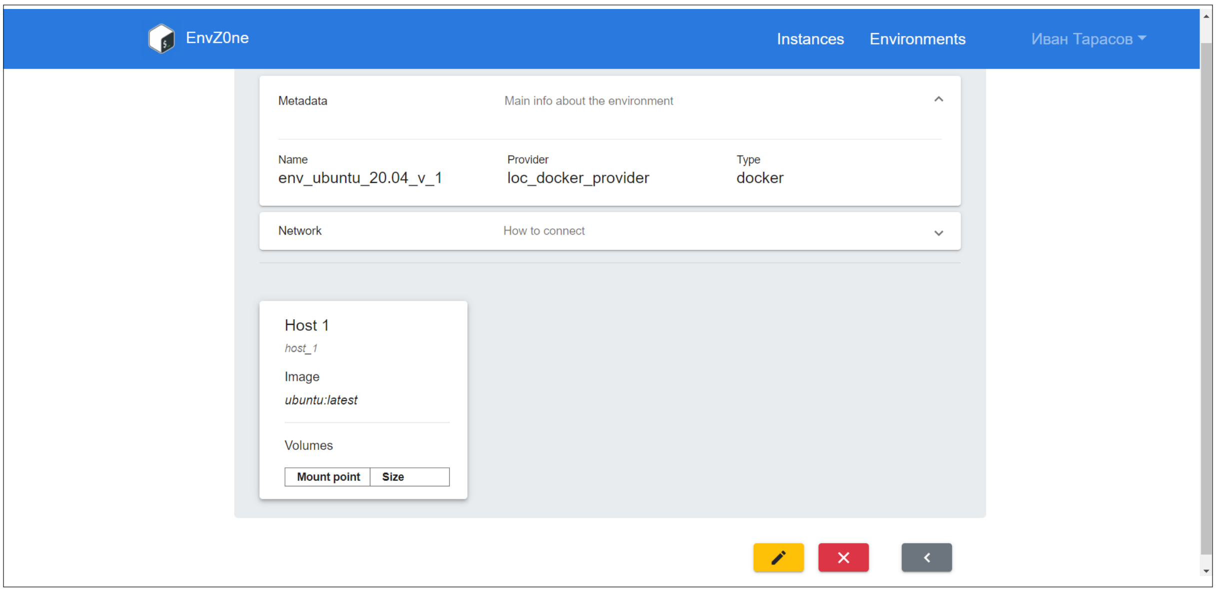



*Рис. 6. Создание программного окружения*

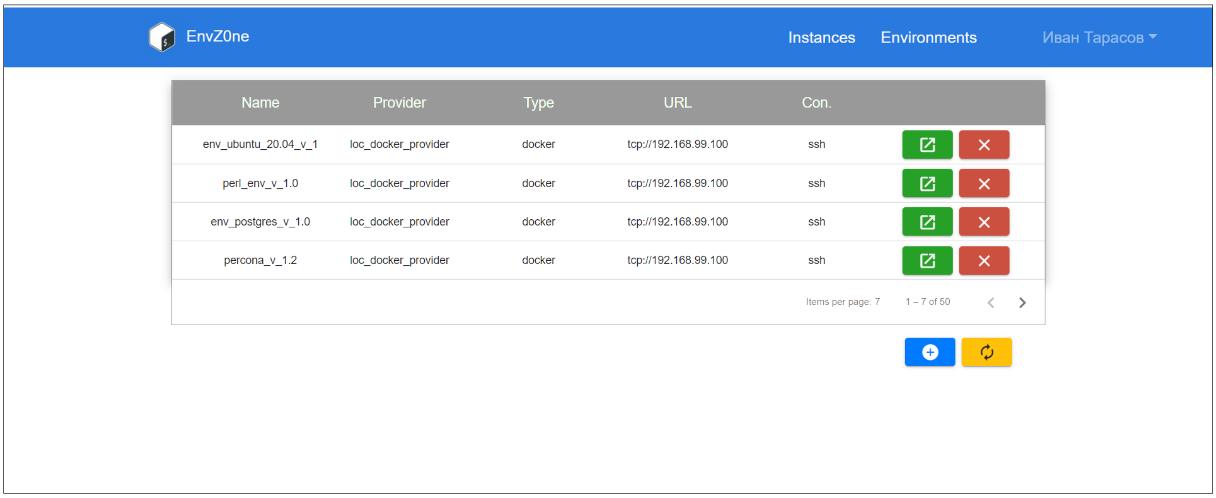



*Рис. 7. Список программных окружений пользователя*

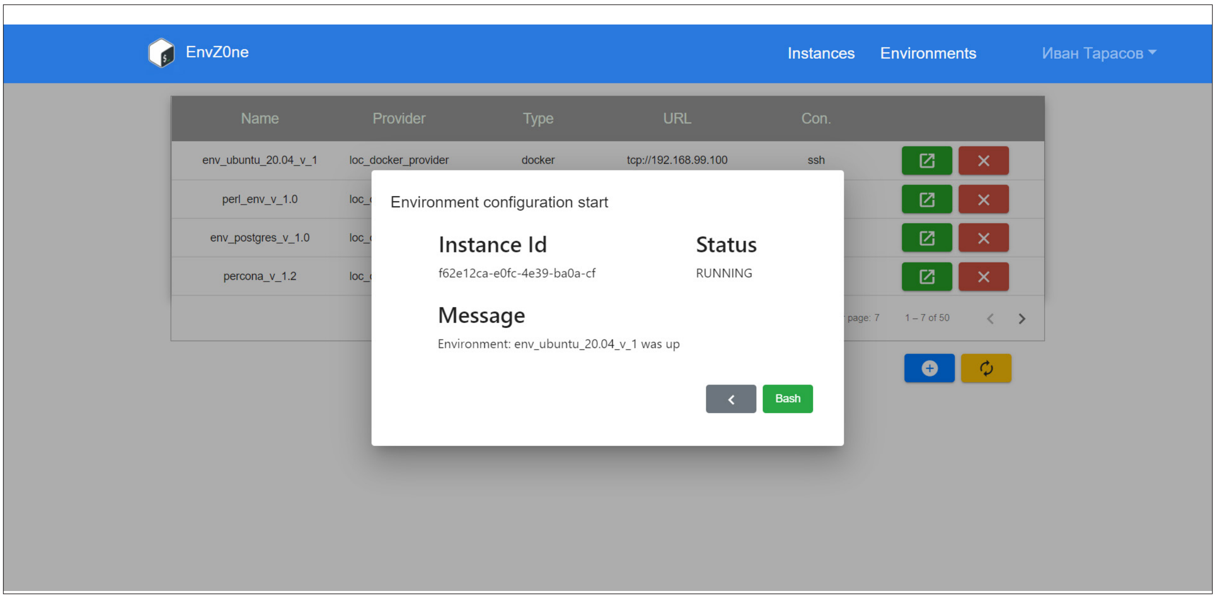



*Рис. 8. Результат запуска программного окружения*

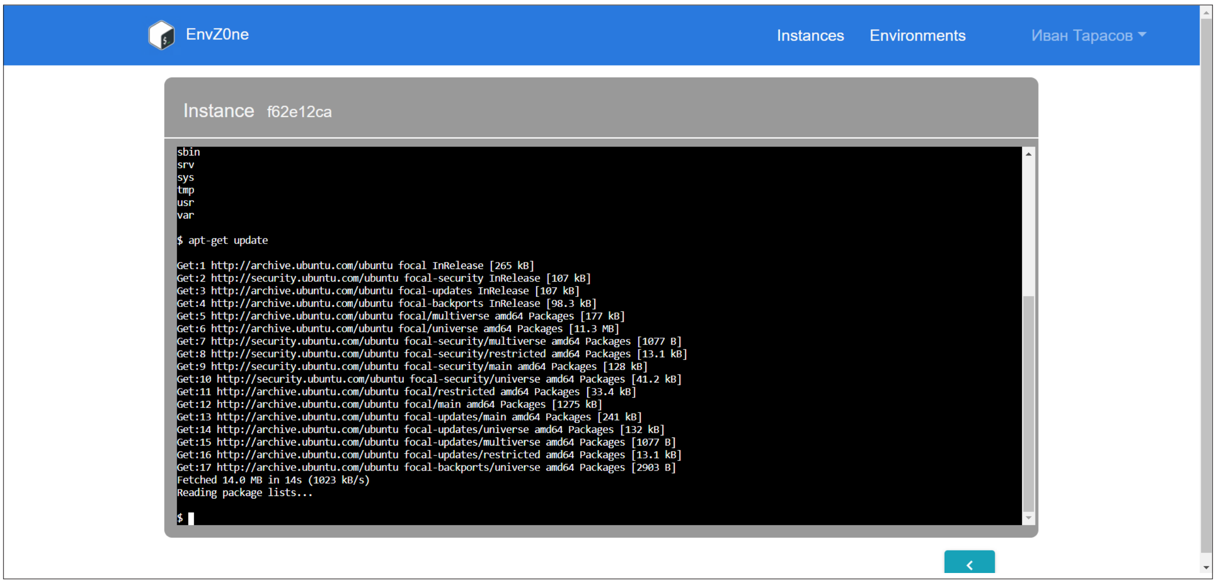



*Рис. 9. Выполнение команд в веб-терминале*

## Заключение

В результате проделанной работы по созданию веб-приложения были выявлены и использованы ключевые особенности автоматизации непрерывной интеграции контейнеризированных приложений и управления ими в виде абстрактной структуры — программных окружений:

1. поддержка разных платформ, работающих с контейнеризацией;
2. расширяемость управления жизненным циклом запускаемых программных окружений;
3. структурная универсальность сущности запускаемого программного окружения;
4. механизм распределения запросов к программным окружениям;
5. поддержка работы разных сетевых протоколов;
6. обеспечение защиты жизненного цикла запускаемых программных окружений.

Приложение продолжает дорабатываться и улучшаться в соответствии с требованиями пользователей.

## Литература


1. Quarkus Documentation. – URL: https://quarkus.io. (дата обращения: 07.05.2020)
2. *Лафоре, Р.* Структура данных и алгоритмы в Java / Р. Лафоре. – Санкт-Петербург : Питер, 2018. – 704 с.
3. *Бауэр, К.* Java Persistence API и Hibernate / Бауэр К., Кинг Г., Грегори Г. – Москва : ДМК Пресс, 2018. – 632 с.
4. PostgreSQL Documentation. – URL: https://www.postgresql.org/docs/ (дата обращения: 08.05.2020)
5. *Шилдт, Г.* Java 8. Полное руководство / Г. Шилдт; пер. с англ. И. В. Берштейна; под ред. И. В. Берштейна – 9-е изд. – М. : ООО «И. Д. Вильямс», 2015. – 1376 с.
6. Keycloak Documentation. – URL: https://www.keycloak.org/documentation (дата обращения: 12.05.2020)
7. Docker Documentation. – URL: https://docs.docker.com/ (дата обращения: 11.05.2020)
8. JSch Documentation. – URL: http://www.jcraft.com/jsch/ (дата обращения: 21.05.2020)
9. Angular Documentation. – URL: https://angular.io/docs (дата обращения: 18.05.2020)
10. Xterm.js. – URL: https://xtermjs.org/ (дата обращения: 21.05.2020)
11. *Яков, Ф.* Angular и TypeScript. Сайтостроение для профессионалов / Ф. Яков, А. Моисеев. – Санкт-Петербург : Питер, 2018. – 464 с.

УДК 004.42

# РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ТРАНСФОРМАЦИИ СООБЩЕНИЙ ИЗ ФОРМАТА JSON В ФОРМАТ AVRO

**О. А. Текучев**

*Воронежский государственный университет*

## Введение

Современные программные продукты, предлагаемые крупными компаниями для сегмента B2B, представляют собой набор связанных между собой приложений или систем. Эти системы должны эффективно обмениваться данными не только между собой, но и с уже существующими решениями заказчика. Основной межсистемной интеграции является обеспечение трансформации данных между различными форматами.

В зависимости от изначальных требований системы могут использовать различные форматы данных. Так, JSON является одним из популярных текстовых форматов, широко используемых в web. При всех очевидных плюсах текстовых форматов, бинарные данные обрабатываются быстрее, за счет отсутствия синтаксического разбора, и являются более компактными. Apache Avro — один из бинарных форматов, широко используемый в технологиях Apache.

Avro независим от языка, имеет большое количество различных типов данных и поддерживает валидацию при сериализации. Для описания структуры сообщения используется Avro схема, которая имеет формат JSON. Схема используется для сериализации и десериализации сообщений и обычно хранится в специальном обособленном приложении *schema-registry*.

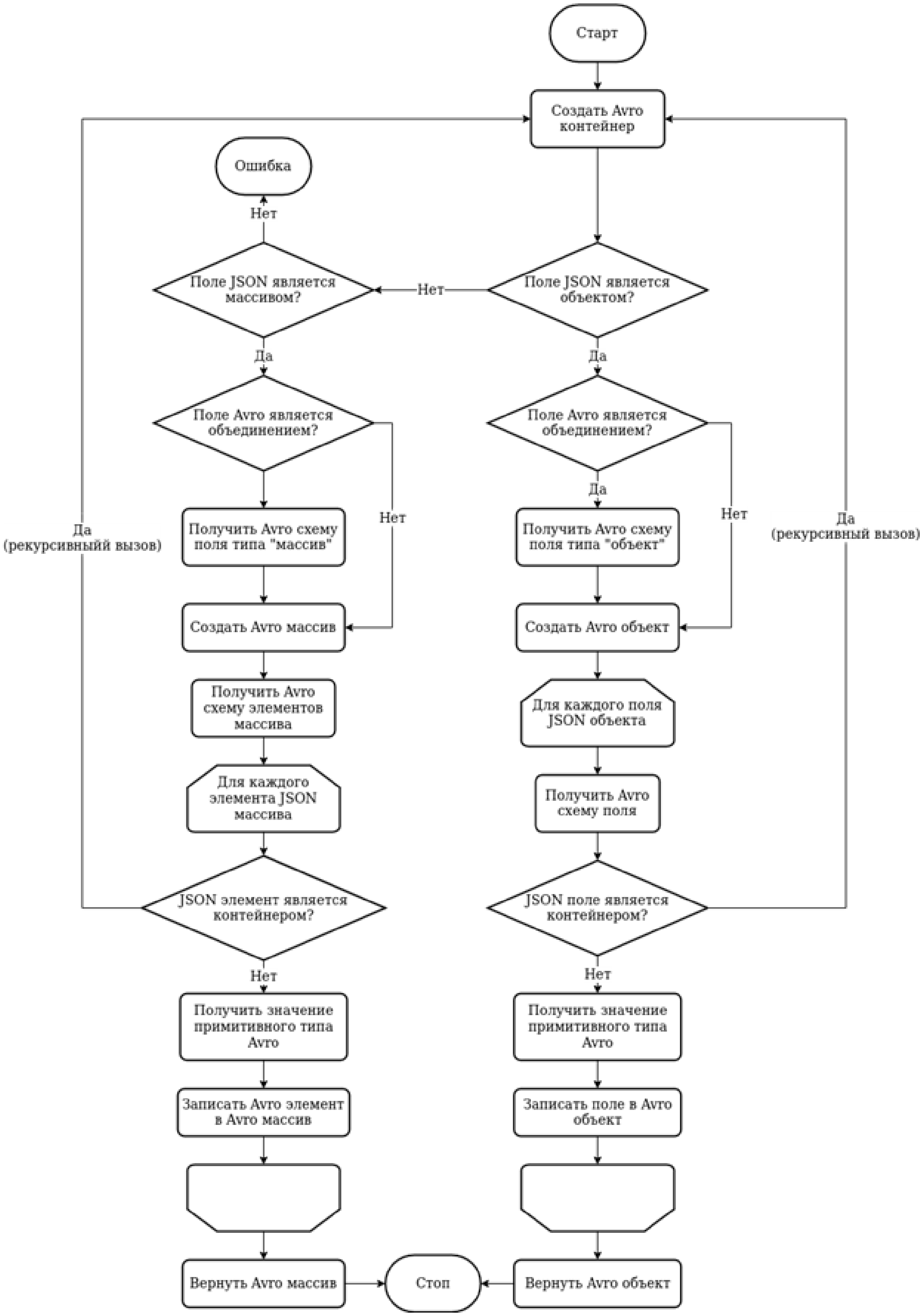
## 1. Описание алгоритма

*Таблица соответствия типов*

| Apache Avro тип | JSON тип |
|---|---|
| null | null |
| boolean | boolean |
| int | number |
| long | number |
| float | number |
| double | number |
| string | string |
| bytes | string |
| record | object |
| enum | string |
| array | array |
| map | object |
| fixed | string |
| union | — |

Входящие JSON данные не имеют четко заданной структуры, следовательно необходимо динамически формировать Avro сообщение, опираясь на схему. Формат Avro имеет большее количество типов данных чем JSON, следовательно необходимо производить дополнительную валидацию на допустимость преобразования (соответствия типов указаны в таблице).

На вход алгоритма поступает сообщение в формате JSON и Avro схема. Так как корневым элементом JSON сообщения должен быть либо объект, либо массив, т. е. контейнер, следовательно формирование Avro сообщения начинается с создания контейнера. Далее, в зависимости от типа исходных данных, идет перебор либо по полям JSON объекта (имя поля и значение), либо по элементам массива. Для каждого значения получается его Avro схема из исходной. Если значение JSON является контейнером, то рекурсивно вызывается функция создания Avro контейнера, иначе выделяется примитивный тип в соответствии со схемой. Схема алгоритма представлена на рисунке.




*Алгоритм трансформации JSON сообщения в Avro*

## 2. Проблемы и ограничения трансформации

При формировании Avro сообщения требуется получить схему, соответствующую входным данным. Одним из вариантов является соглашение о добавлении метаданных, которые будут содержать идентификатор, по которому можно запросить схему из *schema-registry*. В зависимости от транспортного протокола метаданные можно передавать по-разному, например, в HTTP они передаются в заголовке запроса. Если метаданные добавить невозможно, то схему придется определять по бизнес-полям, для этого необходимо будет определить поле с детерминированными значениями и составить таблицу соответствия со схемой.

Поля в Avro сообщении могут иметь сразу несколько типов, в схеме это описывается специальной структурой *union*. Это накладывает некоторые ограничения на трансформацию, так, если в *union* указаны несколько объектов различных структур, то при обработке этого поля JSON невозможно определить по какой структуре производить трансформацию. Эту проблему можно решить соглашением об указании единственной структуры в объединении или добавлением метаданных (например идентификатор структуры) непосредственно в бизнес-объект, при этом этот вариант будет сложнее в реализации чем метаданные о схеме в целом, т. к. затрагивает каждый объект в JSON и подразумевает смешение бизнес-данных и метаданных, что является плохой практикой.

Подобная проблема возникает и при получении примитивного типа, так как в JSON формат числа не разделяется на *integer*, *long*, *float* и т. д., то, при указании в *union* нескольких числовых типов, невозможно определить к какому конкретно приводить значение из JSON. Решением может быть либо соглашение об указании единственного примитивного типа в Avro схеме, либо указанием в JSON значении постфикса F, L, I и т. д., но при этом поле JSON будет строковым, что потребует дополнительной логики обработки числовых значений, заключенных в строковые.

## Заключение

Так как формат Avro жестко привязан к схеме данных, то произвести полноценную трансформацию без дополнительного согласования со стороной отправителя данных будет проблематично.

## Литература

1. Документация Apache Avro. – URL: https://avro.apache.org/docs/current/index.html (дата обращения 15.09.2020).

2. Документация JSON. – URL: https://www.json.org/json-ru.html (дата обращения 17.09.2020).

УДК 004.82

# О ПОДХОДЕ К РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕДУРЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НАЗНАЧЕНИИ НАКАЗАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОДУКЦИОННОЙ МОДЕЛИ

**О. А. Тихомирова, И. Е. Воронина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается подход к реализации процедуры поддержки принятия решений на этапе вынесения приговора в уголовном судопроизводстве. В качестве способа представления знаний выбрана продукционная модель. Правила, составляющие ядро системы, предлагается условно поделить на правила для наказаний количественных и для наказаний комбинированных. Обход правил осуществляется на основании прямого вывода. Предложенный подход к реализации процедуры поддержки принятия решений рассмотрен на примерах обвинительных приговоров районных судов.
**Ключевые слова:** интеллектуальная система, продукционные правила, база знаний.

## Введение

Правовая сфера представляет собой предметную область, в которой не так много очевидных взаимосвязей между правовыми предписаниями, носящих сложный многокомпонентный характер. Тем не менее, с каждым годом растет практическая потребность в формализации правовых знаний с целью создания интеллектуальных систем, частично или полностью выполняющих рутинные операции без участия человека, способствующих снижению влияния человеческого фактора на принятие решений в данной предметной области.

При анализе уголовных дел, рассматриваемых районными и областными судами, была выявлена субъективная составляющая. Данный элемент выражается в разнице видов и размеров итоговых наказаний, назначенных в результате рассмотрения уголовных дел по обвинению в совершении преступлений, квалифицируемых по одной и той же части статьи УК РФ [1], где имели место схожие наборы отягчающих и смягчающих обстоятельств. Создание систем автоматизации принятия решений в процессе производства по уголовным делам является в настоящее время актуальным. Наличие подобных программ позволит сделать процедуру принятия судебных решений более прозрачной.

В качестве таких программных средств могут выступать системы, основанные на знаниях, аккумулирующие опыт специалистов в предметной области.

В [2] было представлено программное обеспечение для реализации процедуры поддержки принятия решений при назначении наказания за совершенное преступление. Данная статья посвящена выбранному способу представления знаний в системе с базой знаний. Приведен анализ работы программного обеспечения с использованием экспертных задач.

## Формализация знаний

Способом организации знаний является продукционная система. Основой формализации знаний в виде набора продукционных правил послужила предложенная математическая модель, описанная в [3, 4]. База знаний представлена набором продукционных правил, составляющих ядро продукционной системы.

На основании следующей информации сформулированы продукционные правила:
– Сведения о квалификациях преступлений.
– Наличие отягчающих обстоятельств и их виды.

– Наличие смягчающих обстоятельств и их виды.
– Вес тяжести обстоятельств.
– Размер минимального наказания по каждому преступлению.
– Размер максимального наказания по каждому преступлению.
Такие знания составляют рабочую область продукционной системы и имеют вид:
– $\{a_i\}_{(i=\overline{1,n})}$ — квалификация преступления;
– $\{b_i\}_{(i=\overline{1,m})}$ — смягчающие обстоятельства;
– $\{c_i\}_{(i=\overline{1,l})}$ — отягчающие обстоятельства;
– $\min$ — минимальный размер наказания;
– $\max$ — максимальный размер наказания;
– $\{k_j\}_{(j=\overline{1,m})}$ — вес обстоятельств (смягчающих), каждому элементу множества $\{b_i\}$ ставится в соответствие элемент множества $\{k_j\}$;
– $\{t_j\}_{(j=\overline{1,m})}$ — вес обстоятельств (отягчающих), каждому элементу множества $\{c_i\}$ ставится в соответствие элемент множества $\{t_j\}$.

Правила, составляющие продукционную систему, можно условно поделить на правила для наказаний количественных и для наказаний комбинированных — количественные с качественными.

Для наказаний количественных набор правил будет иметь следующую схожую структуру:

$$If\left(a_i\right) and \left(c_1 \; or \; c_2 \; or \ldots or \; c_l\right) then \left(\max\right).$$

$$If\left(a_i\right) and \left(b_1 \; or \; b_2 \; or \ldots or \; b_m\right) then \left(\max-(\max-\min)\cdot\left(k_1+\ldots+k_n\right)\right).$$

$$If\left(a_i\right) and \left(c_1 \; or \; c_2 \; or \ldots or \; c_l\right) and \left(b_1 \; or \; b_2 \; or \ldots or \; b_m\right) then$$

$$\left(\max-(\max-\min)\cdot\left(k_1+k_2+\ldots+k_n\right)+(\max-\min)\cdot\left(t_1+t_2+\ldots+t_m\right)\right).$$

При комбинированном подходе будет присутствовать еще один элемент: *quality* – качественное наказание.

$$If\left(a_i\right) and \left(c_1 \; or \; c_2 \; or \ldots or \; c_l\right) then (\max) \; and \; \text{quality}.$$

$$If\left(a_i\right) and \left(b_1 \; or \; b_2 \; or \ldots or \; b_m\right) then \left(\max-(\max-\min)\cdot\left(k_1+\ldots+k_n\right)\right) and \; \text{quality}.$$

$$If\left(a_i\right) and \left(c_1 \; or \; c_2 \; or \ldots or \; c_l\right) and \left(b_1 \; or \; b_2 \; or \ldots or \; b_m\right) then$$

$$\left(\max-(\max-\min)\cdot\left(k_1+k_2+\ldots+k_n\right)+(\max-\min)\cdot\left(t_1+t_2+\ldots+t_m\right)\right) and \; \text{quality}.$$

На рис. 1 представлен алгоритм работы интерпретатора правил (машины вывода). Интерпретатор просматривает имеющиеся в базе знаний правила на основании прямого вывода (от данных к поиску цели), сопоставляет условия их выполнимости с содержащимися в рабочей области сведениями (фактами). В случае выполнимости более одной продукции нужное правило выбирается по принципу наиболее длинного условия. Из фронта готовых продукций выбирается и активизируется та, у которой наиболее длинное условие выполнимости ядра.

**Пример работы программного обеспечения**

Для оценки применимости программного обеспечения при определении наказания за совершенное преступление сравним результаты его работы на примерах вынесенных решений районными судами города Воронежа.

Пример 1 — Приговор № 1-79/2018 от 27 июля 2018 г. по делу № 1-79/2018 [4].

Железнодорожный районный суд г. Воронежа в составе:

председательствующего судьи Морозовой Д. Н.;

при ведении протокола судебного заседания Украинской М. А., Каширской Е. Г.;

с участием государственного обвинителя – помощника прокурора Железнодорожного района г. Воронежа Маликова С. В.;

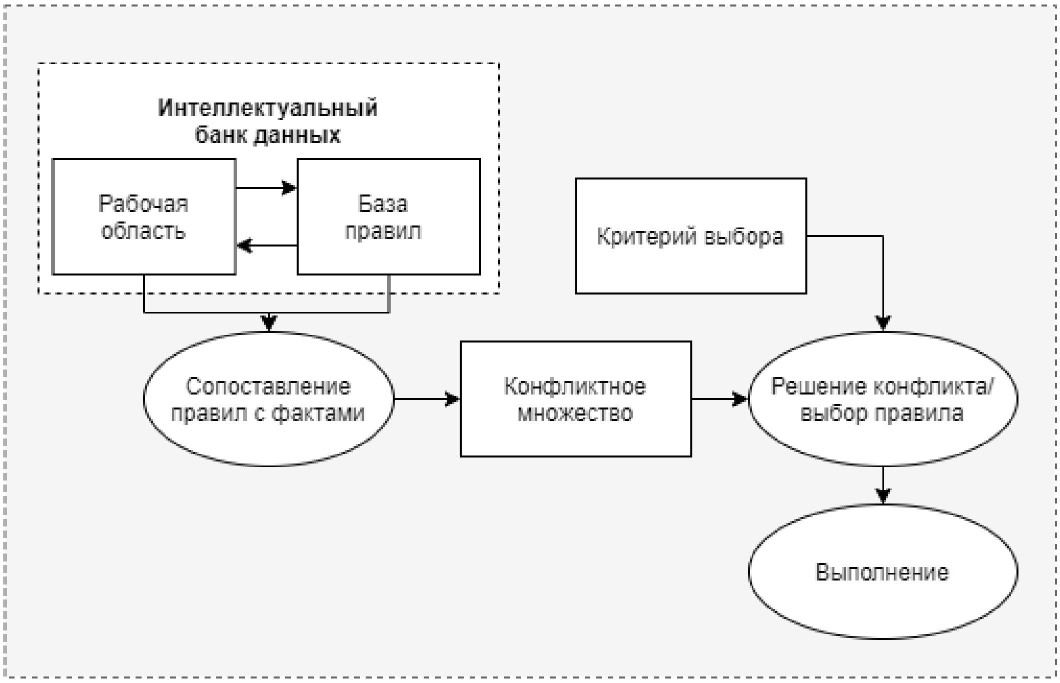


*Рис. 1. Схема работы интерпретатора правил*

подсудимого С. Н.;

защитника — адвоката Кузнецовой С. С.

Действия подсудимого С. Н. суд квалифицировал по ч.1 ст. 105 УК РФ как убийство, то есть умышленное причинение смерти другому человеку.

К обстоятельствам, смягчающим наказание, суд отнес:

– явку с повинной;

– активное способствование раскрытию совершенного преступления;

– неправомерное поведение потерпевшего, явившееся поводом для совершения преступления;

– признание вины и раскаяние в содеянном;

– состояние здоровья – наличие ряда хронических заболеваний, а также наличие признаков органического расстройства личности.

Обстоятельств, отягчающих наказание подсудимому, предусмотренных ч. 1 ст. 63 УК РФ, судом установлено не было.

Суд признал С. Н. виновным в совершении преступления, предусмотренного ч. 1 ст. 105 УК РФ, по которой назначил наказание в виде лишения свободы сроком 7 лет.

Пример 2 — Приговор № 1-46/2019 1-513/2018 от 10 июня 2019 г. по делу № 1-46/2019 [4].

Левобережный районный суд г. Воронежа в составе:

председательствующего судьи Мещеряковой И. А.;

с участием государственного обвинителя — прокурора Левобережного района г. Воронежа Полякова В. Б.;

подсудимой Е. М.;

защитника — адвоката Тихоновой В. В.;

при секретаре Долженковой Е. Г.

Суд и квалифицировал действия Е. М, по ч.1 ст. 105 УК РФ, как убийство, то есть умышленное причинение смерти другому человеку.

В качестве обстоятельств, смягчающих наказание, суд учитывал:

– признание подсудимой своей вины, что свидетельствует о раскаянии ее в содеянном;

– противоправное поведение потерпевшего, явившееся поводом для преступления;

– явку с повинной;
– состояние здоровья и возраст подсудимой.
Обстоятельств, отягчающих наказание, по делу не установлено.
Е. М. суд признал виновной в совершении преступления, предусмотренного ч.1 ст. 105 УК РФ, назначив ей наказание в виде лишения свободы на срок 6 лет.
В результате, судя по обстоятельствам, в первом примере должно быть более мягкое наказание, чем во втором. На самом деле – итоговая мера в приговоре Железнодорожного районного суда строже. Разница в итоговых сроках наказания составила 1 год.
Программное обеспечение, на основании введенных данных о квалификации преступления и установленных обстоятельствах, предлагает решения, представленные на рис. 2 и рис. 3.

*Рис. 2. Результат работы на примере 1*

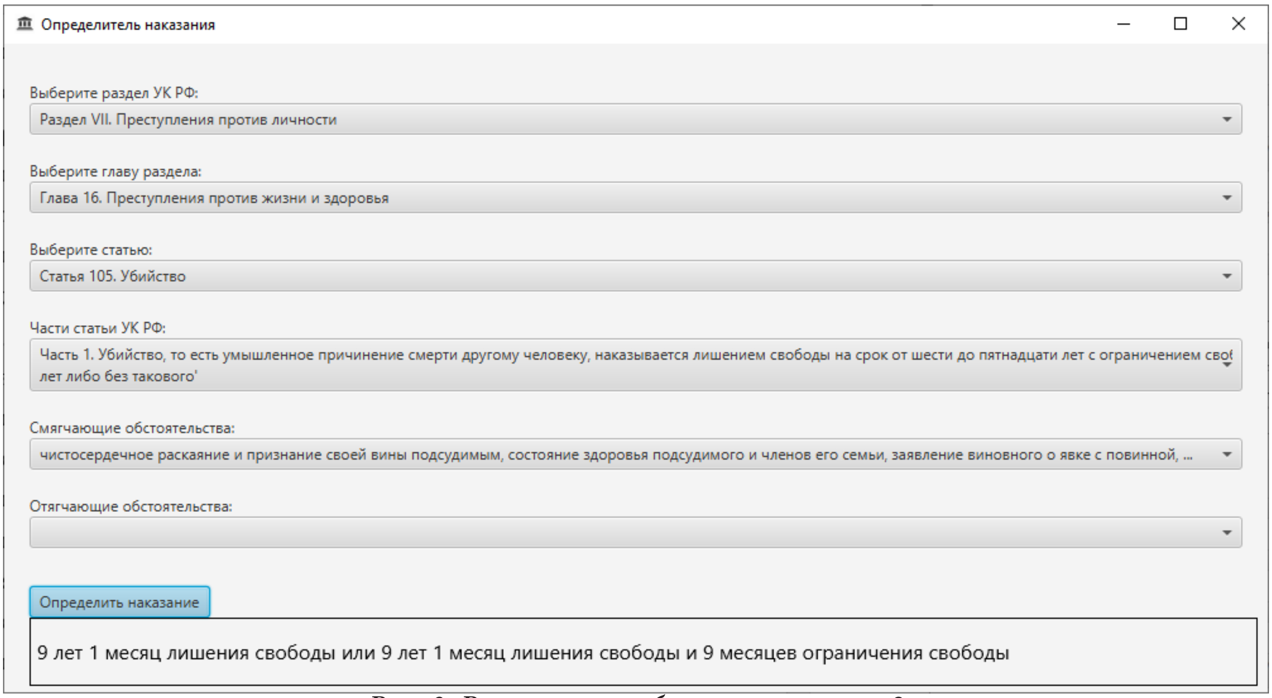


*Рис. 3. Результат работы на примере 2*

Рекомендованные наказания определены в пределах верхней и нижней границы санкции ч. 1 ст. 105 УК РФ, а также с соблюдением правил, установленных ч.1 ст. 62 УК РФ. Разница итоговых наказаний наглядно продемонстрирована в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение итоговых наказаний

| № примера | Кол-во смягчающих обстоятельств | Решение суда | Решение программы |
|---|---|---|---|
| Пример 1 | 5 | 7 лет лишения свободы | 8 лет 6 месяцев лишения свободы или 8 лет 6 месяцев лишения свободы и 7 месяцев ограничения свободы |
| Пример 2 | 4 | 6 лет лишения свободы | 9 лет 1 месяц лишения свободы или 9 лет 1 месяц лишения свободы и 9 месяцев ограничения свободы |

На волю судьи ложится только решение оставлять дополнительное наказание в виде ограничения свободы или нет.

## Заключение

Проведенный анализ способа представления знаний с помощью продукционной модели позволяет говорить о ее соответствии классу решаемых задач. Таким образом, на основании выбранного способа сформирована база знаний, представлены элементы продукционной системы. Применимость выбранного подхода была протестирована на примерах приговоров районных судов города Воронежа.

В дальнейшем планируется дополнять базу знаний новыми правилами и расширять область решений практически значимых экспертных задач.

## Литература

1. Уголовный кодекс РФ от 13 июня 1996 г. № 63-ФЗ // Собрание законодательства Российской Федерации. – 17 июня 1996 г. – № 25. – Ст. 2954.

2. *Тихомирова О. А.* Программное обеспечение задачи назначения наказания в уголовном судопроизводстве / О. А. Тихомирова, И. Е. Воронина, Т. Ю. Харченко // Сб. трудов междунар. научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 11–13 ноября 2019 г.) – Воронеж, 2019. – С. 514–517.

3. *Харченко, Т. Ю.* Разработка формальной процедуры поддержки принятия судебных решений / Т. Ю. Харченко, И. Е. Воронина // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 1. – С. 96–101.

4. *Харченко Т. Ю.* Продукционная модель в принятии судебных решений / Т. Ю. Харченко, И. Е. Воронина, // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – №1. – С. 1-7.

5. Судебные и нормативные акты РФ. – URL: https://sudact.ru/practice/sudebnaya-praktika-po-ugolovnym-delam (дата обращения: 01.05.2020).

УДК 004.42

# РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ, ПРЕОБРАЗУЮЩЕГО СООБЩЕНИЕ ИЗ ФОРМАТА ИСХОДНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ФОРМАТЫ НЕСКОЛЬКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ-ПОЛУЧАТЕЛЕЙ

**А. А. Уханов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Работа посвящена разработке интеграционного решения с помощью IBM Integration Bus. В данной статье рассматривается один из способов связывания трех различных программных решений, использующих в качестве средства для передачи данных очередей IBM MQ и преобразования из изначального формата в форматы конечных систем с помощью описания формата сообщения исходной системы и формата системы-приёмника. В качестве примера используется исходное сообщение с позиционной строкой, которое необходимо разобрать по определенному правилу, далее над полученными данными необходимо выполнить преобразования, с помощью которых будут созданы сообщения в форматах, удовлетворяющих конечным системам.

**Ключевые слова:** интеграция, описание форматов данных, DFDL, XML, IBM Integration Bus, IBM MQ, очереди сообщений, корпоративная сервисная шина, позиционная строка, ESQL, потоки сообщений.

## Введение

В больших компаниях, в частности банках, часто возникает проблема обеспечения взаимодействия между имеющимися у них приложениями. Каждое предприятие в течение своей работы накапливает различный набор программных продуктов [1]. В итоге появляется задача обеспечения взаимодействия между данными решениями для обеспечения сквозных бизнес-процессов, находящихся за пределами одного программного решения.

Существует несколько способов интеграции приложений, такие как:

- обмен через общую базу данных;
- удаленный вызов функций;
- обмен файлами;
- использование сервисной шины предприятия вместе с очередями сообщений.

Все эти способы имеют свои плюсы и минусы, но в данной статье будет рассматриваться последний случай, который имеет следующие плюсы:

1. Имеется возможность для трансформации данных, позволяющая интегрировать приложения, рассчитанные на различные форматы данных, без необходимости их доработок.

2. Слабые связи между системами, участвующими в интеграции, присоединяемая система зачастую ничего не знает о других участниках. Все действия сводятся к передаче сообщений в сервисную шину и приёму сообщений из нее.

3. Гарантированная доставка данных и снятие нагрузки по маршрутизации с исходного приложения. Системе-источнику достаточно отправить в очередь необходимые данные и не требуется сложных алгоритмов для проверки доставки сообщения получателю, данная проблема ложится на плечи сервисной шины.

В данной статье рассматривается способ связывания трех приложений в единую систему, без доработок по преобразованию форматов на стороне интегрируемых приложений.

## 1. Условие поставленной задачи

Имеется три системы, первая отправляет в очередь сообщений IBM MQ позиционную строку, в которой информация идет без разделителей сплошным текстом. Необходимо вычитать сообщение из данной очереди, разобрать его на составляющие, сформировать два сообщения в понятных конечным системам форматах и отправить в соответствующие системы.

Входящее сообщение имеет формат, описанный в табл. 1. Описание полей сообщения 1-й конечной системы показан в табл. 2, а 2-й конечной системы в табл. 3. Схематическое представление взаимодействующих приложений изображено на рис. 1.

Таблица 1

*Описание входной позиционной строки*

| Длина | Пример | Описание |
|---|---|---|
| 10 | 123412345678 | Серия и номер паспорта РФ |
| 10 | 01.01.2020 | Когда выдан |
| 100 | ГУ МВД ПО Воронежской области | Кем выдан |
| 100 | Воронежская обл., ул. Ленина | Адрес регистрации |
| 100 | Иванов Иван Иванович | ФИО |
| 35 | Г.ВОРОНЕЖ | Город рождения |
| 200 | Постоянный клиент | Особые отметки |
| 20 | +79000000000 | Номер телефона для связи |

Таблица 2

*Формат входного сообщения в XML-формате для 1-й системы*

| Название поля | Длина | Пример | Описание |
|---|---|---|---|
| SER | 4 | 1234 | Серия паспорта РФ |
| NUM | 6 | 12345678 | Номер паспорта РФ |
| IDATA | 10 | 01.01.2020 | Когда выдан |
| ISSUEDBY | 100 | ГУ МВД ПО Воронежской области | Кем выдан |
| REG | 100 | Воронежская обл., ул. Ленина | Адрес регистрации |
| FIO | 100 | Иванов Иван Иванович | ФИО |
| CITY | 35 | Г.ВОРОНЕЖ | Город рождения |

Таблица 3

*Формат входного сообщения JSON-формате для 2-й системы*

| Название поля | Длина | Пример | Описание |
|---|---|---|---|
| FIO | 100 | Иванов Иван Иванович | ФИО |
| CITY | 35 | Г.ВОРОНЕЖ | Город рождения |
| MARKS | 200 | Постоянный клиент | Особые отметки |
| TEL | 20 | +79000000000 | Номер телефона для связи |

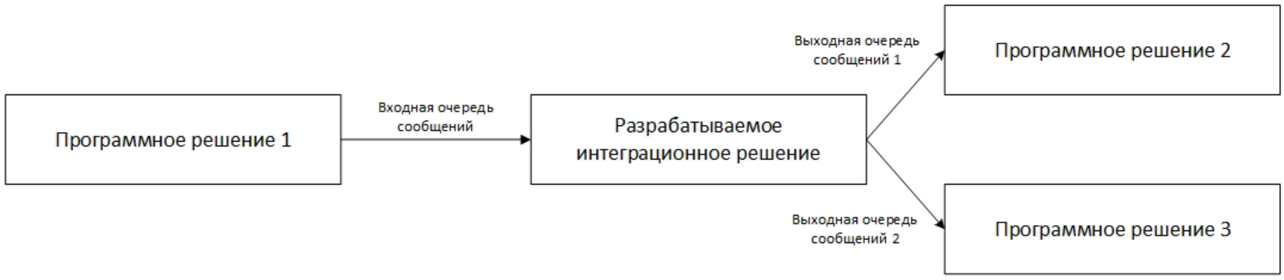



*Рис. 1. Схематическое представление взаимодействующих систем*

## 2. Реализация

Взаимодействие между интегрируемыми программными решениями происходит посредством отправки сообщения во входную очередь сообщений для разрабатываемого интеграционного решения на сервисной шине IBM Integration Bus [2], далее на стороне сервисной шины полученная информация обрабатывается, формируются исходящие сообщения и отправляются в соответствующие выходные очереди. Основными единицами исполнения в IBM Integration Bus являются потоки сообщений, представление потока сообщений, разработанного для решения данной задачи представлено на рис. 2. На рисунке можно увидеть, что входным звеном является MQInput — звено, забирающее сообщение из очереди, далее следует одна из множества звеньев Trace (отвечают за журналирование), основная логика распологается в звене Compute, которая представляет собой модуль, написанный на языке ESQL. Далее идут выходные звенья, которые записывают в выходные очереди после соответствующего журналирования.

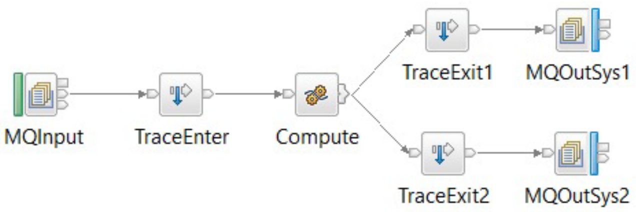



*Рис. 2. Изображение потока сообщений*

### *2.1. Разбор входящего сообщения*

На вход сервисной шине поступает сообщение с информацией, представленном в формате позиционной текстовой строки т. е. строки, в которой чтобы извлечь данные необходимо знать с какой позиции начинается нужная информация. Для упрощения разбора данных был написан шаблон на языке *DFDL* (Data Format Description Language), который поддерживается сервисной шиной *IBM*. Для этого необходимо описать длину, простые типы данных и наличие заполнителей в исходной строке данных [3].

### *2.2. Формирование исходящих сообщений*

Сначала необходимо создать структуру сообщения *IBM MQ*. Сообщение в данной системе очередей представляет собой дерево, имеющее несколько прямых потомков корневого узла: заголовок *Properties* — информация о кодировках сообщения, входных очередях и прочей информации, общий для всех типов входных сообщений [4] (существует всегда во внутреннем представлении сообщения, даже если сервисная шина не используется в паре с MQ); заголовок

*MQMD* — информация, специфическая для сообщений, полученных из очередей *IBM MQ*; далее обычно следует заголовок с информацией: это может быть *JSON*, *XML*, информация произвольного формата, разобранная парсером *DFDL* и так далее.

Далее требуется произвести необходимые преобразования над данными. Ниже представлен код, который создает исходящие сообщения в рамках поставленной задачи:

```
CREATE COMPUTE MODULE Transform_Compute
   CREATE FUNCTION Main() RETURNS BOOLEAN
   BEGIN
      CALL CreateOutMessage(InputRoot, OutputRoot);
      CREATE LASTCHILD OF OutputRoot DOMAIN 'XMLNSC';
      SET OutputRoot.XMLNSC.SER = SUBSTRING(InputRoot.DFDL.SERNUM FROM 1 FOR 3);
      SET OutputRoot.XMLNSC.NUM = SUBSTRING(InputRoot.DFDL.SERNUM FROM 5 FOR 6);
      SET OutputRoot.XMLNSC.IDATA = InputRoot.DFDL.IDATA;
      SET OutputRoot.XMLNSC.ISSUEDBY = InputRoot.DFDL.ISSUEDBY;
      SET OutputRoot.XMLNSC.REG = InputRoot.DFDL.REG;
      SET OutputRoot.XMLNSC.FIO = InputRoot.DFDL.FIO;
      SET OutputRoot.XMLNSC.CITY = InputRoot.DFDL.CITY;
      PROPAGATE TO TERMINAL 'out' DELETE NONE;

      DELETE FIELD OutputRoot.XMLNSC;

      CREATE LASTCHILD OF OutputRoot DOMAIN 'JSON';
      SET OutputRoot.XMLNSC.JSON.Data.FIO = InputRoot.DFDL.FIO;
      SET OutputRoot.XMLNSC.JSON.Data.CITY = InputRoot.DFDL.CITY;
      SET OutputRoot.XMLNSC.JSON.Data.MARKS = InputRoot.DFDL.MARKS;
      SET OutputRoot.XMLNSC.JSON.Data.TEL = InputRoot.DFDL.TEL;
      PROPAGATE TO TERMINAL 'out1';
      RETURN FALSE;
   END;

   CREATE PROCEDURE CreateOutMessage(IN refIn REFERENCE, IN refOut REFERENCE)
   BEGIN
      IF (NOT EXISTS(refOut.Properties[])) THEN
            CREATE FIRSTCHILD OF refOut DOMAIN 'Properties';
       END IF;
      SET refOut.Properties.CodedCharSetId = refIn.Properties.CodedCharSetId;

      CREATE LASTCHILD OF refOut DOMAIN 'MQMD';
      SET refOut.MQMD.Format = MQFMT_RF_HEADER_2;
      SET refOut.MQMD.CodedCharSetId = refIn.Properties.CodedCharSetId;

      CREATE NEXTSIBLING OF refOut.MQMD DOMAIN 'MQRFH2';
      SET refOut.MQRFH2.(MQRFH2.Field)Format = MQFMT_STRING;
      SET refOut.MQRFH2.(MQRFH2.Field)Version = MQRFH_VERSION_2;
      SET refOut.MQRFH2.(MQRFH2.Field)CodedCharSetId = refIn.Properties.
CodedCharSetId;

   END;
END MODULE;
```

В данном коде представлены действия, создающие новые сообщения на основе входного [5]. Сначала создаются необходимые заголовки, необходимые для любого сообщения *IBM MQ*, далее следует создание *JSON* с информацией, удовлетворяющей формату программного решения 2, а далее из исходящего дерева удаляется узел, с уже ненужной информацией и заполняется информацией формата программного решения 3.

## Заключение

В статье был представлен только один способ интеграции вышеуказанных приложений, есть возможность разобрать входящее сообщение и с помощью XLST и вручную внутри непосредственно написанного кода ESQL. Результатом написания данной статьи была показательная реализация приложения, интегрирующего несколько приложений в единую систему.

## Литература


1. Интеграция на основе сообщений. Преимущества и отличия от других подходов. Habr.com [Электронный ресурс] // URL: https://habr.com/ru/post/326088/ (дата обращения 21.04.2020).

2. IBM Knowledge Center [Электронный ресурс] // IBM, 2020. URL: https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/ (дата обращения 03.06.2020).

3. НОУ ИНТУИТ [Электронный ресурс] // НОУ ИНТУИТ, 2003-2020 URL: http://www.intuit.ru/studies/courses/54/54/info (дата обращения 12.05.2020).

4. *Хоп, Г.* Шаблоны интеграции корпоративных приложений / Г. Хоп, Б. Вульф – 1-е изд. – Москва : Вильямс, 2007. – 672 с.

5. MQ Series.net [Электронный ресурс] // URL: http://www.mqseries.net/phpBB2/viewforum.php?f=7  (дата обращения 20.01.2020).

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

UDC 532.582.7

# MOVEMENT OF LIQUID DROPLETS IN A SHEAR FLOW

**A. I. Fedyushkin**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow*

**Annotation.** The problem of particle motion around a particle in a shear flow is considered for conditions of weightlessness and normal earth gravity. Cases with particle densities greater or less than the density of the main buffer moving fluid (oil particles in water and water particles in oil) are presented. Based on numerical modeling, the nature of the influence of gravitational, viscous, lifting, and drag forces on the trajectory of liquid particles in a shear fluid flow is shown. The minimum distance between liquid small drops and a streamlined drop is shown.
**Ключевые слова:** numerical simulation, motion of liquid particles, shear flow, particle closest approach.

In the given work the problem about movement of particles around a cylindrical particle in a shear flow for weightlessness and normal Ground conditions is considered. Cases with densities of particles bigger and smaller of density of the basic buffer moving liquid (oil particles in water and water particles in oil) are presented. It is supposed that the quantity of particles is too little and they do not render influence on the basic flow.

Movement of particles with diameter $d$, around a cylindrical particle of diameter $d$, which located in the centre ($x = 0,\ \ y = 0$) of rectangular region $[-X < x < X,\ \ -Y < y < Y]$, with fluid flow along an axis $x$ with a velocity $\mathbf{V}(x, y) = ay$ (Fig. 1) is considered. The vector of acceleration of gravity $g$ is directed towards to an axis $y$.

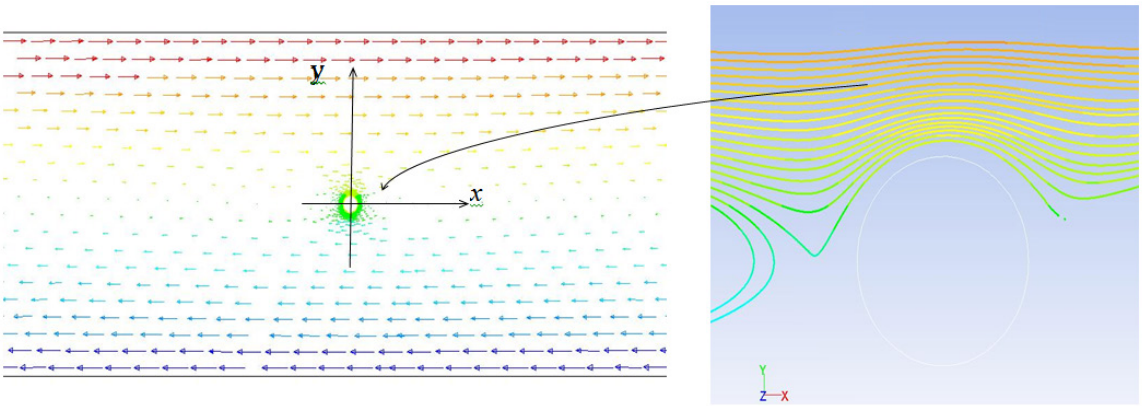



*Fig. 1. The scheme of simulation region, field of vector of velocity (at the left) and tracks of particles around a cylindrical particle which there is in the beginning of co-ordinates (on the right)*

The particle in the centre of calculation region is simulated by not deformable cylindrical surface and rotatable on account of a shear flow. Cases of the task for surface shear stress equal to zero and tasks of a surface tension for water and oil are considered. The calculations have shown that velocity on a cylindrical surface coincides with angular speed $\omega = 1/2\mathbf{rotV}$ ($\omega$ – a vector of angular rotation of an element of environment in a point).

Mathematical simulation is performed on the basic of numerical solutions of unsteady 2D Navier-Stokes equations for incompressible laminar fluid flow. A movement of the particles is calculated in Lagrangian variables.

The friction and Saffman lift forces of interaction of the particles with a fluid flow were taken into account of model.

Initial distances of particles were $2d$ from the centre of region and they regular intervals located on a vertical on a range from $y = 0$ to $y = 0.5d$. Initial speeds of particles corresponded to velocities of environment in the given point.

In given paper results of simulation for following values of parameters: a diameter of particles $d = 0.0001$ m, $X = 0.0025$ m, $Y = 0.001$ m, $\alpha = 300$ sec$^{-1}$ are presented.

Two variants of particles and a buffer liquids are considered with following properties:

1) the drops of diesel oil (a density is 730 kg/m$^3$) in water (a density is 875 kg/m$^3$, a viscosity is 0.000589 kg/m sec),

2) the drops of water in diesel oil (a density is 730 kg/m$^3$, a viscosity is 0.0024kg/m sec).

The time dependences of position of ten particles (y co-ordinate) are shown in Fig. 2.

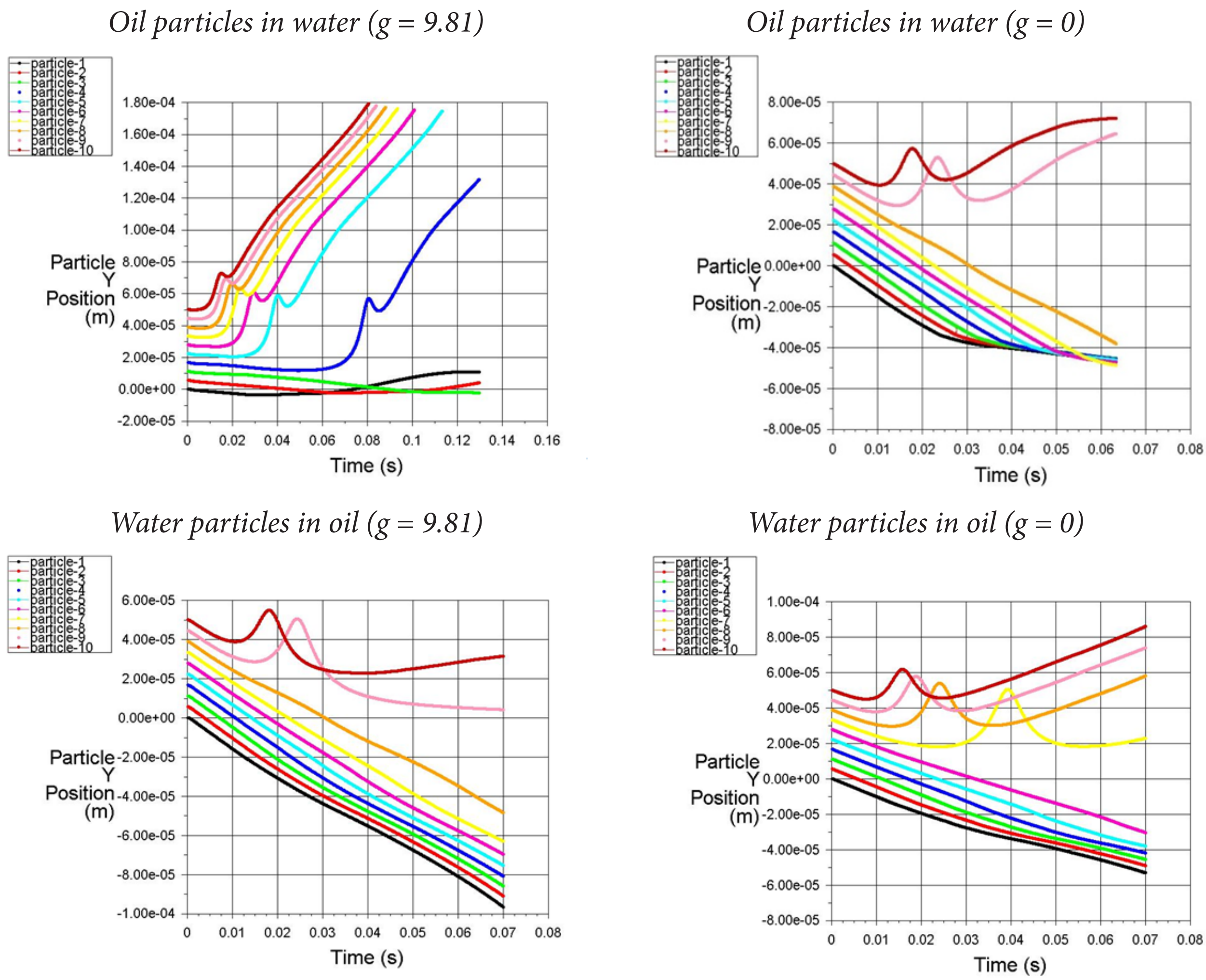



*Fig. 2. Y co-ordinate position of the oil and water particles from time for Ground (left column) and weightlessness conditions (right column)*

Time dependences of distances of two oil running particles to a surface of the cylindrical particle from $x$ co-ordinate are presented in Fig. 3. The given two oil particles (in Fig. 3) are chosen, as the coming most nearer to the cylindrical particle for the given series of calculations. The minimum distance of closeness with the cylindrical particle approximately is $0.07d$.

The results of numerical simulation have shown character of influence of gravity, viscosity, lift and drag forces on trajectories of a movement of water and oil particles in a shear flow.

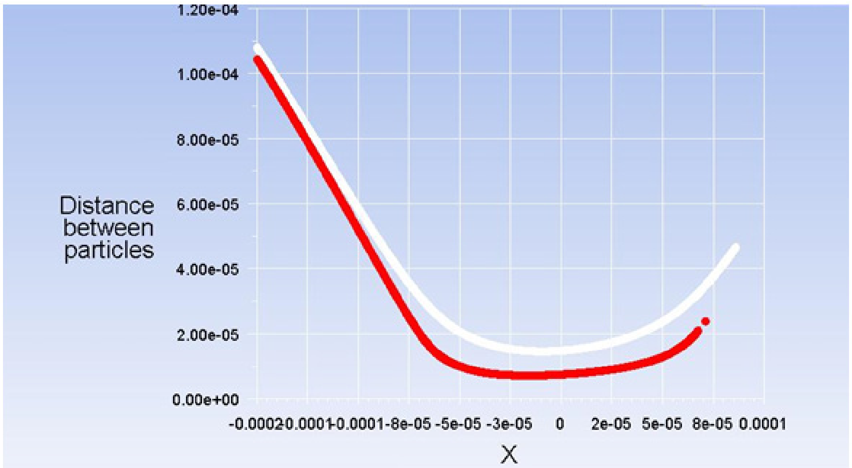



*Fig. 3. The dependences of distance of two oil running particles to surfaces of the cylindrical particle (which is located in the centre of region) from x co-ordinate*

**Acknowledgements**

The study was supported by the Government program (contract # AAAA-A20-120011690131-7) and was funded by RFBR, project number 20-04-60128.

УДК 517.97 : 532.526

# ON FRACTAL PHENOMENA IN LANGUAGES AND THEIR QUANTITATIVE CHARACTERISTICS

**A. A. Kretov[1], M. V. Polovinkina[2], I. P. Polovinkin[1], M. V. Lometc[1]**

*[1]Voronezh State University*
*[2]Voronezh State University of Engineering Technologies*

**Annotation.** In this paper, we describe hypothetical possibilities for applying nonlinear dynamics methods to linguistic research. We suggest to refer to a large text corpus (meta-book of the writer, national language, language of the branch of knowledge) as a fractal object and to measure its fractal dimension (by Hausdorff). We consider the question of practical calculation of fractal dimension, as well as the question of motivation for applying the fractal concept to the language.
**Ключевые слова:** fractal dimension, Heaps' law, lexical diversity, type/token ratio, growth of a language vocabulary.

## 1. Introduction

The non-linear dynamics theory is faced with many phenomena in various fields of activity, where its apparatus can be applied. In particular, this can be said about the principle of self-similarity and the concept of a fractal. We can say that the concept of a fractal in mathematics and physics has taken shape. In other fields, the detection of self-similarity effects and the ability to use the tools of the fractal theory are rather scattered, although the base of the revealed facts is quite extensive. In this paper, we propose to look at some of the achievements in modern linguistics from the fractal theory point of view. Fractal (self-similar) manifestations in the language have been noticed in linguistics researching (see, for example, [1–3]). Basically, we are talking about the statement and verbal description of self-similarity in the language. However, there is every reason to consider the quantitative characteristics of the language fractality.

## 2. Self-similarity and fractality of language

We assume that the language as an object of research has (or at least can be endowed by the researcher) one of the main properties that distinguish the fractal, namely the property of self-similarity. To illustrate one of the manifestations of self-similarity, let us turn to the concept of the core and periphery of the language (for more information, see the monograph [4], according to which we construct the narration in this section).

The concepts of the core (kernel, center) and periphery are firmly established in linguistics [5]. There are at least two understandings of the core. In one of them, the most typical mass-like phenomena belong to the core. So, there are more single-valued words in the dictionary than two-valued or three-valued ones, therefore, on this basis, single-valued words should be attributed to the core, first of all, then two-valued, three-valued and more multi-valued words will be assigned to the periphery.

In the second approach, the core includes those phenomena that have the maximum degree of manifestation of a trait, and the periphery includes the phenomena with the minimum degree of manifestation of the trait. In this case, the core will include words with the maximum number of values: 20, 15, 10, and the periphery will include one-, two -, three-valued words.

These two approaches and the two types of cores should be different terminologically. For example, in the first case, we can talk about a quantitative core, and in the second case, we can talk about a qualitative core. We are talking here about qualitative cores. However in relation to the language, the qualitative core is a quantitative periphery and Vice versa, therefore, regardless of which core and periphery are meant (quantitative or qualitative), the boundary between them will remain unchanged and in this sense, it will be universal.

The answer to the question about the natural boundary between the frequency core and the periphery should be found in the analysis of specific texts and frequency dictionaries compiled on their basis.

It is known that the first thousand of the most common words of the Russian language corresponds to the coverage of 60 to 80 % of the text. If we take the next 2000 words, the text coverage will increase by no more than 20 %. If we take the next 4th–5th thousand, they will cover less than 10 % of the text; the 6th–7th thousand will cover about 5 % of the test, and with each subsequent interval of 2000 words, the percentage of text coverage will decrease. In the beginning, the text growth (in %) significantly outstrips the vocabulary growth, and at the end, the vocabulary growth significantly outstrips the text growth. Therefore, there must be a point at which there is a change of laws, a point at which the relative growth of the dictionary begins to overtake the relative growth of the text, and we, increasing the dictionary, stop acting rationally, spending more effort for the sake of a smaller result. This point will be the natural boundary between the core and the periphery of the frequency dictionary.

In the first approximation, that point can be found as the total length of the text $M$ (in word usages) divided by the number of different words $N$ (word forms, linguistic units, lemmas). This is the average frequency of a word $F_{av}$ (or word form) in the text in question:

$$F_{av} = M / N, \tag{1}$$

$$F_P < F_{av} < F_C, \tag{2}$$

where $F_P$ and $F_C$ are frequencies of words in the periphery and in the core correspondingly.

Here we should refer to A. I. Kuznetsova's idea [6] that the language core is arranged on the principle of matryoshka (Russian nested doll). Let's call the core of the whole language to be the first. The first core one itself has its own core and periphery, which can be detected if we use the parameters of the first core. For example, for Russian language, taking 4.348 words for 100\% of the vocabulary ($N_2$), and 902.725 word forms for 100 % of the whole text ($M_2$) and applying the same procedure to them as to the dictionary as a whole, we get $F_{av2} = 207.6$. Thus, the boundary between the second core and the second periphery is found. Let us repeat this procedure until we get the single most frequently used word. The Russian language core "matryoshka" [7] consists of 7 cores. These data are comparable to data from other frequency dictionaries (see [4] for details). This applies to the frequency dictionaries of different languages, as well as to the frequency dictionaries of individual works and meta-books of writers, etc. At the same time, in all considered examples, the number of cores not go beyond 7+2 out of dependency on fluctuations in the size of frequency dictionaries. An interesting picture is revealed when replacing the absolute characteristics of the cores with relative ones. We take as a unit the fraction of text covered by the smallest core equal to the most frequent word. Then it turns out [4] that the relative values of the cores in the frequency dictionary are determined by a sequence of numbers, which is set using recurrent relations of the Fibonacci type. Of course, this is a statistical statement. Its validity was confirmed using the standard procedure for testing the statistical hypothesis. The above means that the structure of the language and text is endowed with the properties of self-similarity and recursiveness, that is, it can be classified as a fractal.

### 3. Fractal dimension of the meta-book text

In [8], an attempt is made to clarify Heaps' law (with reference to [9]), according to which a number of different (unique) words (N) in a book, as a function of the total number of words in the book (M), has an order of growth $\Theta(M^{\alpha})$ with $\alpha \in (0,1)$. Considering the Heap's law not as an asymptotic estimate, but as an exact formula with a variable exponent, the authors rewrite it as

$$\alpha = \alpha(M) = \ln N / \ln M. \tag{3}$$

We consider this approach as a reason to turn to the apparatus developed in the theory of fractals. More precisely we regard this formula as a step to calculate the fractal dimension of a text.

The founder of the theory of fractals Benoit Mandelbrot in the book [10] describes the following approach to the concept of fractal dimension. Let's choose a set of congruent "atomic" sets in space $R^d$ that have topological dimension $d$. This is a set of either $d$-dimensional balls or $d$-dimensional cubes. For certainty, we assume that those are balls. Suppose that the fractal object belongs to space $R^d$. Let's fix a sufficiently small radius $l$ and cover the entire fractal object with balls of radius $l$. Assume that this procedure requires at least $N$ balls. The number

$$\alpha_0 = -\lim_{l\to 0}(\ln N / \ln l) = \lim_{l\to 0}(\ln N / \ln(1/l)) \tag{4}$$

is called the fractal dimension of the object in question.

In form (4), this definition is hardly suitable for describing the text, since we can not make the size of the atomic set, which is naturally considered to be a word (word usage), tending to zero. We have to change it a little in order to adapt it to our needs. In the denotations by [8], we put

$$l = 1/M. \tag{5}$$

It is possible to interpret equality (5) as follows. Considering every word usage as an "atomic brick" for a text in question, we determine its size by comparing this "brick" with the text itself, since, in fact, there is nothing else to measure it with. In other words, for the size of the "atom" we take the share occupied by it as a whole. By the power of text coverage, we mean the number of unique words (lemmas) whose word usage made up the entire text. Next, by definition, we put

$$\alpha_0 = -\lim_{l\to 0}(\ln N / \ln l) = \lim_{M\to+\infty}(\ln N / \ln M) = \lim_{M\to+\infty}\alpha(M), \tag{6}$$

and the number defined by formula (6) is called the fractal dimension of the language. Here, by language, we mean both the national language and the language of the writer or the language of the branch of knowledge (for example, the language of scientific literature in chemistry, mathematics, the language of journalism, etc.).

## 4. On the practical calculation of the fractal dimension of a text

Formula (6) assumes that the text volume, understood as the number of words used in it, can take arbitrarily large values. If we are talking about the text of a certain work, then, of course, this is not the case. The authors of the mentioned work [8] introduce the concept of a writer's meta-book as an association of all texts written by this writer. If a writer is sufficiently prolific, then this concept allows us to assume that $M \to +\infty$. Although, in practical calculation, we still have to confine the available length of the meta-book for calculating the approximate value $\alpha_0$. The authors [8] claim and illustrate with examples of texts by three different authors (Hardy, Melville and Lawrence) that $\alpha$ decreases as $M$ increases. Our observations of Tolstoy's texts do not refute this conclusion. For our purposes, the Leo Tolstoy meta-book is a very convenient object of research, since Leo Tolstoy owns both relatively small and very voluminous ("War and peace") works, and the range between the lengths of small and large works is filled quite tightly. We consider it possible to start from the position that $\alpha$ is a decreasing function of the variable $M$. As it is known, limit of a function that is decreasing on an interval at the right end of this interval is equal to the infimum of the function on the interval. Therefore, the value of $\alpha$ at the maximum value in the specified range should be considered as the best approximation of the fractal dimension.

## References

1. *Kretov A. A., Voronina I. E.* The Russian word as a self-similar recursive structure. In: Linguistics at the end of the XX century: results and prospects: collection of scientific works,1, Moscow : Philology. – 1995. – p. 269–71. (in Russian).

2. *Bronnik L. V.* On fractal self-similarity in language. Proceedings of the Volgograd state pedagogical University. – 2009. – V. 44, No 10. – P. 15–9 (In Russian).

3. *Petryakov L. D.* Methodological perspectives of fractal semantics. News of universities. Series "Humanitarian Sciences». – 2017. – 8(2). – P. 148–53. (in Russian).

4. *Kretov A. A.* Basics of lexical and semantic prognostics. Voronezh: Publishing house of Voronezh state University, 2006 (in Russian).

5. *Kuznetsova A. I.* Parametric study of peripheral phenomena in the field of morphemics: on the material of the Russian language. Abstract of the dissertation of the doctor of Philology. – Moscow, 1988 (in Russian).

6. *Kuznetsova A. I.* Correlation of the center and periphery in the field of morphemics of the Russian language In: Scientific and technical conference "Problems of derivatology": Thesis of reports; 2. – Perm, 1981. – p. 153--6 (in Russian).

7. *Zasorina L. N.* (editor) Frequency dictionary of the Russian language: About 40,000 words. – Moscow : Russian language, 1977 (in Russian).

8. *Bernhardsson S., Correa da Rocha L. E., Minnhagen P.* The meta book and size-dependent properties of written language // New Journal of Physics. – 2009. – 11:123015 (15pp). Online at http://www.njp.org/ doi:10.1088/1367-2630/11/12/123015.

9. *Heaps H. S.* Information Retrieval: Computational and Theoretical Aspects. – New York : Academic Press, 1978.

10. *Mandelbrot B. B*. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco : W.H. Freeman, 1982. – 468 p.

UDC 519.6

# EXTRACTION OF FRACTURE MECHANICS PARAMETERS FROM FEM ANALYSIS: ALGORITHMS AND PROCEDURES

**A. V. Mironov, D. M. Petrova, Y. N. Bachareva**

*Samara National Research University*

**Annotation.** The paper describes new algorithms and procedures proposed for determining fracture mechanics parameters from finite element analysis using the over deterministic method. The multi-parameter crack tip stress field description is used. The algorithms and procedures based on multi-parameter stress field representations in series form are shown to be a powerful tool for reliable and accurate parameter determination. The technique is aimed at the determination of coefficients of the Williams series expansion from finite element analysis and is based on the over deterministic approach. The methodology is illustrated and applied to several cases of cracked specimens. Examples are presented for crack-tip fields recorded using digital photoelasticity. The results of finite element analysis are compared with the digital photoelasticity experiments. The results are in good agreement. The principal stresses obtained from finite element method are in good agreement with the isochromatic fringe patterns obtained by the photoelasticity method. Explanation has been made for giving guidance to a user on how best to approach implementation of the method from a practical standpoint.

**Ключевые слова:** crack-tip fields, over deterministic method, finite element analysis, higher order terms, multi-parameter stress field presentation, digital photoelasticity, digital image processing.

## Introduction

Defects and cracks play a decisive role in characterizing the strength and failure of these materials and structures [1–5]. Therefore, gaining insight on cracking processes is of crucial importance [1]. The first step in analyzing any fracturing process is to determine the crack tip asymptotic fields in order to characterize the stress, deformation and displacement near the crack tip, which requires the coefficients (unknowns) of the crack tip asymptotic field to be determined via reliable methods [1–10]. The first terms of the crack tip stress series expansion in isotropic linear elastic materials are singular, and, hence, dominant, in the proximate vicinity of the crack tip. Therefore, in the singular dominant zone the first terms are sufficient to characterize the crack tip fields. However, at further distances from the crack tip, the importance of the higher order terms become evident [6–11]. Thus, precise and simple algorithms are needed to reliably calculate coefficients in the multi-parameter crack-tip fields. Numerical methods and in particular finite element method (FEM) [6–11] allow us to extract the crack tip parameters. Moreover, it is worth noting that even determining the stress intensity factor is still the subject of investigations. For instance, in [12] direct extraction of stress intensity factors by a high-order numerical manifold method is realised. The proposed in [12] SIF extraction method is shown to yield highly accurate results even without mesh refinement. Formulas extracting stress intensity factors (SIFs) of the biharmonic equations on cracked domains with clamped (or simply supported or free) boundary conditions along the crack faces are derived in [13]. In [13] it is shown the iteration methods quickly converge and the proposed enrichment method yields highly accurate stress intensity factors. It is also demonstrated that for a known true solution, the extraction formulas yield exact stress intensity factor. Thus, the determination of SIF still raises questions. The determination of higher order coefficients requires more accurate approaches [14–24].

This article applies the finite element over-deterministic method to determine the coefficients of the crack tip asymptotic fields. The present paper proposes the technique for extracting the higher order terms of the Williams series expansion (WE) for the crack tip stress field in cracked specimens.

## 1. The multi-parameter crack tip stress field expansion

The main objective of this paper is the numerical determination of higher-order coefficients of WE. Polar coordinates $r, \theta$ are introduced and centered at the crack tip. In polar coordinates the Williams series solution for the near crack – tip stress field has the form [18, 23, 24]

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \sum_{m=1}^{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m r^{k/2-1} f_{m,ij}^{(k)}(\theta), \tag{1}$$

where index $m$ is associated to the fracture mode; $a_k^m$ are coefficients related to the geometric configuration, load and mode; $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ are angular functions depending on stress components and mode. Analytical expressions for angular eigenfunctions $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ are available [16,17]:

$$\begin{aligned}
f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= (k/2)\Big[\big(2+k/2+(-1)^k\big)\cos(k/2-1)\theta - (k/2-1)\cos(k/2-3)\theta\Big],\\
f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= (k/2)\Big[\big(2-k/2-(-1)^k\big)\cos(k/2-1)\theta + (k/2-1)\cos(k/2-3)\theta\Big],\\
f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= (k/2)\Big[-\big(k/2+(-1)^k\big)\sin(k/2-1)\theta + (k/2-1)\sin(k/2-3)\theta\Big],
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -(k/2)\Big[\big(2+k/2-(-1)^k\big)\sin(k/2-1)\theta - (k/2-1)\sin(k/2-3)\theta\Big],\\
f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -(k/2)\Big[\big(2-k/2+(-1)^k\big)\sin(k/2-1)\theta + (k/2-1)\sin(k/2-3)\theta\Big],\\
f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= (k/2)\Big[-\big(k/2-(-1)^k\big)\cos(k/2-1)\theta + (k/2-1)\cos(k/2-3)\theta\Big].
\end{aligned} \tag{3}$$

The multi-parameter fracture mechanics concept consists in the idea that the crack-tip stress field is described by means of WE (1). In this work the central crack in an infinite plane medium is considered. Analytical determination of coefficients in crack-tip expansion for a finite crack in an infinite plane medium is given in [23, 24]:

$$a_{2n+1}^1 = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!\sigma_{22}^{\infty}}{2^{3n+1/2}(n!)^2(2n-1)\mathrm{a}^{n-1/2}}, \quad a_2^1 = -\sigma_{22}^{\infty}/4, \quad a_{2k}^1 = 0 \tag{4}$$

for Mode I crack;

$$a_{2n+1}^2 = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!\sigma_{12}^{\infty}}{2^{3n+1/2}(n!)^2(2n-1)\mathrm{a}^{n-1/2}}, \quad a_{2k}^2 = 0 \tag{5}$$

for Mode II crack.

The analytical solution (4), (5) allows us to validate the proposed method since one can compare the numerical results with the analytical ones. The crack length is less than the width and height of the plate. It is shown that the higher order terms in WE can play significant role in the description of the crack tip fields. Nowadays, various techniques are used to determine the parameters $a_k^m$ that characterize the crack-tip stress field. Now one can enumerate analytical [15, 16, 23, 24], experimental [7–1, 25, 26] and numerical [19] methods. One of the promising methods is FEM. One of the numerical examples discussed below is the large plate with the central crack. The finite element solution will be obtained and the results will be compared with the analytical formulae (4) and (5).

## 2. Finite element over-deterministic method

As it is noted in [1] the basic principle of the finite element over-deterministic method is the use of a large number of FE data points in order to calculate the crack tip parameters. This is done by forming an algebraic system of equations where the number of equations is more than the number of unknowns. In this case the over-deterministic system of equations is encountered. In the framework of using the over-deterministic method to determine the coefficients of (1) nodal stresses can provide the necessary set of equations. The over deterministic technique assumes more equations than unknowns in order to obtain more accurate values. This implies that one can form an over deterministic system. Taking data from different points at different distances from the crack tip is allowed as higher order terms are included in the stress equations. The algorithm is implemented using in the mathematical software Maple. One can use the approach described in [12] and present eqn. (1) in the matrix form as

$$\sigma = CA. \tag{6}$$

The closed form solution of (6) for the unknown vector of fracture mechanics parameters $A$ can be written as

$$A = \left(C^T C\right)^{-1} C^T \sigma$$

where $\left(C^T C\right)^{-1} C^T$ is the pseudo-inverse of $C$.The coefficients $A$ are estimated by minimizing the objective function which is of quadratic form for stress expression in terms of unknown parameters:

$$J(A) = \left(\sigma - CA\right)^T \left(\sigma - CA\right)/2.$$

### 3. Numerical example

The first example is the plate with the small central crack. In this work, 2D finite element analysis (FEA) of cracked specimens is carried out using Abaqus software to estimate SIF, T-stresses and coefficients of higher-order terms of WE. The analysis is done with 8-noded plane strain elements. The quarter point element is used to capture square root singularity at the crack tip. The center crack model is of dimension 400 mm×400 mm having a crack of 10 mm length. The mesh pattern around the crack tip is kept very fine to capture the high-stress gradient. The mesh convergence is achieved with 72 elements along circumferential and 60 along the radial direction. In total, there are 13 344 elements. The typical finite element mesh is shown in fig. 1. To determine the higher order coefficients the stress tensor components from the nodes belonging to concentric circles are used. One can use different number of concentric circles. A class of numerical experiments with different numbers of concentric circles has been realized. The minimum number of stress tensor components was 219 since one can use the only circle with the following stress tensor components $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Increasing the number of considered concentric circles surrounding the crack tip one can enhance the dimension of the system (6). The maximum number of equations in (6) in the numerical experiments performed was 3492 from which the first fifteen coefficients of WE have been obtained.

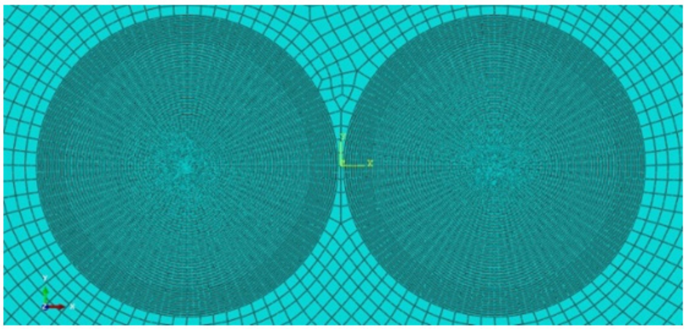


*Fig. 1. Typical mesh containing singular elements near the crack tips*

The results of extraction of the coefficients of WE in the vicinity of the crack tip are given in Table 1 where the first column shows the coefficients of WE obtained from FEA whereas the second one shows the error in FEM comparatively with the analytical results given by formulae (4) and (5) for an infinite plate with the central crack.

Table 1

*Coefficients of multi-parameter Williams series expansion for a plate with a central crack of small length*

| Coefficients of multi-parameter Williams series expansion for a plate with a central crack of small length | Error |
|---|---|
| $a_1^1 = 4.909 MPa \cdot m^{1/2}$ | 0.01 % |
| $a_2^1 = -2.449 MPa$ | 0.09 % |
| $a_3^1 = 2.484 MPa \cdot m^{-1/2}$ | 0.13 % |
| $a_5^1 = -0.6236 MPa \cdot m^{-3/2}$ | 0.22 % |
| $a_7^1 = 0.3112 MPa \cdot m^{-5/2}$ | 0.31 % |
| $a_9^1 = -0.1951 MPa \cdot m^{-7/2}$ | 0.35 % |
| $a_{11}^1 = 0.1361 MPa \cdot m^{-9/2}$ | 0.44 % |
| $a_{13}^1 = -0.1056 MPa \cdot m^{-11/2}$ | 0.54 % |
| $a_{15}^1 = 0.0786 MPa \cdot m^{-13/2}$ | 0.68 % |

## 4. Extraction of the coefficients of the Williams series expansion for the semicircular bend specimen from the FEM analysis

In this part of the paper the semicircular bend (SCB) specimen with an inclined crack shown in fig. 2 is studied. The following notations are adopted. $P$ is the applied load, $S$ is loading span in the SCB specimen, $a$ is crack length, $\alpha$ is crack inclination angle. The semi-circular bend specimen subjected to three-point ben ding has received much attention in recent years for measuring the mixed mode I/II fracture resistance [16–19].

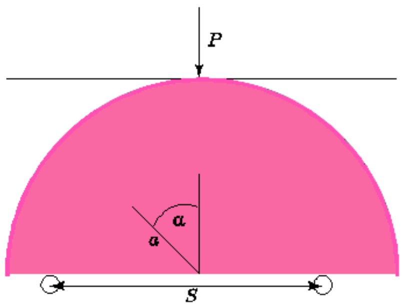



*Fig. 2. Geometry of the semi-circular bend specimen*

In this work, 2D FEA of semidisks with vertical crack and inclined notches is carried out using Abaqus software. To estimate SIF, T-stress and higher-order terms and verify the experimental results obtained FEM calculations have been employed. The analysis is done with 8-noded strain elements. The results of FEM analysis are shown in fig. 3, 4. Fig. 3 (left) shows the distribution of the von Mises stress intensity. Fig. 3(right) shows the distribution of the stress component $\sigma_{11}$. Figure 4 shows the distribution of stress component $\sigma_{22}$.

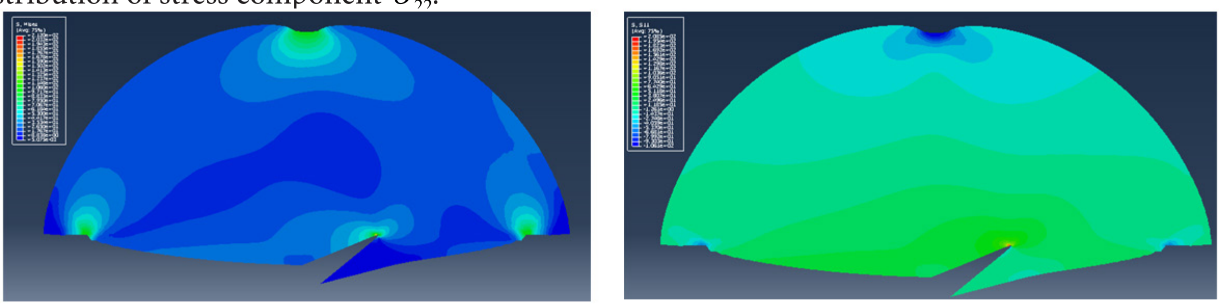


*Fig. 3. Distributions of the von Mises equivalent stress (left) and the stress component $\sigma_{11}$ (right)*

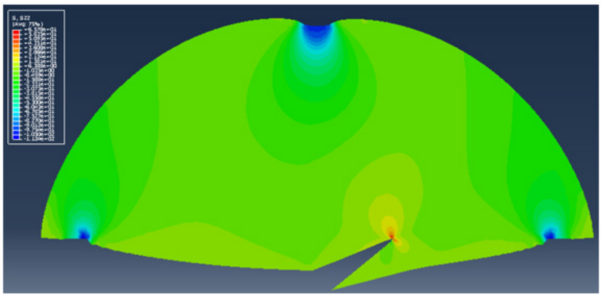


*Fig. 4. The distribution of the stress component* $\sigma_{22}$

The results of calculations for the specimen shown in fig. 2 are tabulated in Table 2.

Table 2

*Crack tip fracture parameters for the SCB specimen*

| Fracture parameter | $n=2$ | $n=4$ | $n=8$ |
|---|---|---|---|
| $K_I(MPa\sqrt{m})$ | 23.90 | 23.99 | 24.00 |
| $K_{II}(MPa\sqrt{m})$ | 0.45 | 0.41 | 0.40 |
| $a_{I2}(MPa)$ | −0.44 | −0.456 | −0.457 |
| $a_{I3}(MPa\cdot m^{-1/2})$ | | 0.145 | 0.146 |
| $a_{I4}(MPa\cdot m^{-1})$ | | 0.001 | 0.000 |
| $a_{I5}(MPa\cdot m^{-3/2})$ | | | 0.021 |
| $a_{I6}(MPa\cdot m^{-2})$ | | | 0.0006 |
| $a_{I7}(MPa\cdot m^{-5/2})$ | | | 0.0004 |
| $a_{I8}(MPa\cdot m^{-3})$ | | | 0.0002 |

**5. Extraction the coefficients of the WE near the crack tip by digital photoelasticity**

Photoelasticity is a whole field experimental technique to obtain stress fields in both 2-D and 3-D elasticity problems [18, 20, 25, 26]. Digital photoelasticity method has rapidly progressed in the last few years and has matured into an industry-friendly technique. Recently there has been a lot of works devoted to various aspects of the method and its applications [18, 20, 27]. The experimental setup is shown in fig. 5 (left). The experimental isochromatic fringe patterns in the plate with the central crack are shown in fig. 5. The over deterministic method has been applied to the experimental data obtained from the photoelasticity observations. The stress optic law relates the fringe order $N$ and the in-plane principal stresses $\sigma_1, \sigma_2$ as $Nf_\sigma / t = (\sigma_1 - \sigma_2)$, where $f_\sigma$ is the material stress fringe and $t$ is the thickness of the specimen. The results of calculations are given in Table 3.

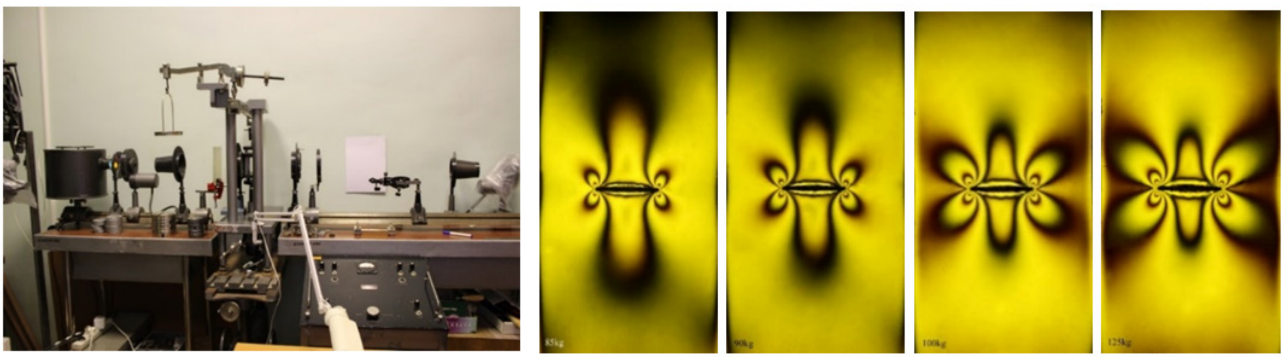


*Fig. 5. Experimental setup of transmission photoelasticity and Isochromatic images for 85 kg, 90 kg, 100 kg and 125 kg*

Table 3

*Coefficients of the Williams series expansion for the plate with the central crack with the geometric parameters as in the experimental photoelasticity method*

| Coefficients obtained by the photoelasticity method | Coefficients obtained by the FEM analysis |
|---|---|
| $a_1^1 = 7.2528 MPa \cdot m^{1/2}$ | $a_1^1 = 7.2527 MPa \cdot m^{1/2}$ |
| $a_1^1 = -2.7516 MPa$ | $a_2^1 = -2.7516 MPa$ |
| $a_3^1 = 2.1406 MPa \cdot m^{-1/2}$ | $a_3^1 = 2.0163 MPa \cdot m^{-1/2}$ |
| $a_4^1 = -0.337 MPa \cdot m^{-1}$ | $a_4^1 = -0.302 MPa \cdot m^{-1}$ |
| $a_5^1 = -0.2844 MPa \cdot m^{-3/2}$ | $a_5^1 = -0.2757 MPa \cdot m^{-3/2}$ |
| $a_6^1 = -0.0919 MPa \cdot m^{-2}$ | $a_6^1 = -0.0985 MPa \cdot m^{-2}$ |
| $a_7^1 = 0.0765 MPa \cdot m^{-5/2}$ | $a_7^1 = 0.0712 MPa \cdot m^{-5/2}$ |
| $a_8^1 = 0.0025 MPa \cdot m^{-3}$ | $a_8^1 = 0.0019 MPa \cdot m^{-3}$ |
| $a_9^1 = -0.0340 MPa \cdot m^{-7/2}$ | $a_9^1 = -0.0315 MPa \cdot m^{-7/2}$ |
| $a_{10}^1 = -0.0017 MPa \cdot m^{-4}$ | $a_{10}^1 = -0.0016 MPa \cdot m^{-4}$ |
| $a_{11}^1 = 0.0098 MPa \cdot m^{-9/2}$ | $a_{11}^1 = 0.0077 MPa \cdot m^{-9/2}$ |
| $a_{12}^1 = 0.0019 MPa \cdot m^{-5}$ | $a_{12}^1 = 0.0012 MPa \cdot m^{-5}$ |
| $a_{13}^1 = 0.0056 MPa \cdot m^{-11/2}$ | $a_{13}^1 = 0.0050 MPa \cdot m^{-11/2}$ |
| $a_{14}^1 = 0.0008 MPa \cdot m^{-6}$ | $a_{14}^1 = 0.0007 MPa \cdot m^{-6}$ |
| $a_{15}^1 = 0.0018 MPa \cdot m^{-13/2}$ | $a_{15}^1 = 0.00147 MPa \cdot m^{-13/2}$ |

## Conclusion

In this paper, we propose and describe an algorithm for constructing the stress field expansion coefficients at the crack tip from finite element calculation data. The algorithm is tested on several examples and the results are compared with the results of the photoelastic experiments. The comparison showed good agreement between the values of the coefficients of the multi-parametric asymptotic expansion. It is shown that higher approximations in the asymptotic expansion are especially significant when processing the entire set of experimental information.


## Acknowledgement

Financial support from the Russian Foundation of Basic Research (project No. 19-01-00631) is gratefully acknowledged.


## References


1. *Aytollahi M. R., Nejati M.,Ghouli S.* The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields. in anisotropic planes // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – V. 231 – 106982.

2. *Vivekanandan A., Ramesh K.* Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2019. – V. 99. – P. 104–117.

3. *Jobin T. M., Khaderi S. N., Ramji M.* Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2020. –V. 126. –105855.

4. *Ramesh K., Pandey A.* An improved normalization technique for white light photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2018. – V. 109. – P. 7–16.

5. *Sasikumar S., Ramesh K.* Applicability of colour transfer techniques in Twelve fringe photoelasticity (TFP) // Optics and Lasers in Engineering. – 2020. – V. 127. – 105963.

6. *Guo E., Liu Y., Han Y., Arola D. Zhang D.* Full-field stress determination in photoelasticity with phase shifting technique // Measurement Science and Technology. – 2018. –V. 29(4). – 045208.

7. *Stepanova L. V., Dolgikh V. S., Turkova V. A.* Digital photoelasticity for calculating coefficients of the Williams series expansion in plate with two collinear cracks under mixed mode loading // Ceur Workshop Proceedings. – 2017. – V. 1904. – P. 200–208.

8. *Stepanova L. V., Dolgikh V. S.* Interference-optical methods in mechanics for the multi-parameter description of the stress fields in the vicinity of the crack tip // Journal of Physics: Conference series. – 2018. – V. 1096(1). – 012117.

9. *Stepanova L. V.* The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidiscs using the photoelasticity method and finite element method // AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2216. – 020013.

10. *Dolgikh V. S., Stepanova L. V.* A photoelastic and numeric study of the stress field in the vicinity of two interacting cracks: Stress intensity factors, T-stresses and higher order terms //AIP Conference Proceedings. – 2020. – V. 2216. – 020014.

11. *Stepanova Larisa V., Roslyakov Pavel, Lomakov Pavel* A photoelastic study for multiparametric analysis of the near crack tip stress field under mixed mode loading // Procedia Structural Integrity. – 2016. – V. 2. – P. 1797–1804.

12. *Wu J., Wang Y., Cai Y., Ma G.* Direct extraction of stress intensity factors for geometrically eloborate cracks using a high-order Numerical Manifold Method // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – V. 230. – 106963.

13. *Kim S, Palta B., Oh H-S.* Extraction formulas of stress intensity factors for biharmonic equations containing crack singularities// Computers and Mathematics with Applications. – 2020. –V. 80. – P. 1142–1163.

14. *Stepanova L.* Influence of higher-order terms of the Williams expansion on the crack-tip stress field for mixed-mode loadings: Asymptotic solutions and interference-optical methods of solid mechanics // ICF 2017 – 14th International Conference on Fracture. – 2017. – V. 2. – P. 110–111.

15. *Stepanova L. V., Roslyakov P. S.* Complete asymptotic expansion m.williams near the crack tips of collinear cracks of equal length in an infinite plane medium // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2015. – V. 4. – P.188–225.

16. *Stepanova L. V., Igonin S. A.* Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damaged medium //Applied Mathematical Modelling. – 2014. –V. 38(14). –P. 3436–3455.

17. *Stepanova L. V., Yakovleva E. M.* Asymptotic stress field in the vicinity of a mixedd-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2015. –V. 10(3). –P. 367–393.

18. *Stepanova L. V., Roslyakov P. S.* Complete Williams asymptotic expansion of stress field near the crack tip: Analytical solutions, interference-optic methods and numerical experiments // Procedia Structural Integrity. – 2016. – V. 2. –P. 1789–1796.

19. *Patil P., Vysasarayani C. P., Ramji M.* Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2017. – V. 93. – P. 182–194.

20. *Tabanyukhova M. V.* Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts) // Key Engineersing Material. – 2020. –V. 827. – P. 330–335.

21. *Leon J.C.D., Restrepo-Martinez A., Branch-Bedoya J. W.* Computational analysis of Bayer colour fulter arrays and demosaicking algorithms in digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. – 2019. –V. 122. – P. 195–208.

22. *Stepanova L. V., Dolgich V. S.* The investigation of cracks' parameters of the Williams series asymptotic expansion using photoelasticity method // ICF 2017 – 14th International Conference on Fracture. –2017. –V. 2. – P. 530–531.

23. *Hello G.,Tahar M.B., Roelandt J. M.* Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – V. 49. – P. 556–566.

24. *Hello G.* Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Struct. – 2018. – V. 144–145. – P. 265–275.

25. *Ramesh K., Promod B. R.* Digital image processing of fringe patterns in photomechanic // Opt. Eng. – 1992. – V. 31(7). – P. 148.

26. *Ramesh K., Gupta S., Kelkar A. A.* Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited // Eng. Fracture Mechanics. – 1997. – V. 56, No 1. –P. 25-45.

27. *Ramesh K. Sasikumar S.* Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications // Optics and Lasers in Engineering. – 2020. – 106186.

UDC 004.942; 519.6

# FACHER INTEGRAL POINT SETS WITH PARTICULAR DISTANCES OF ARBITRARY CARDINALITY

**R. E. Zvolinsky**

*Voronezh State University*

**Annotation.** An integral point set in $m$-dimensional Euclidean space, $m \geq 2$, is a point set $M$ such that all the distances between the points of $M$ are integers and $M$ is not situated on an $(m-1)$-dimensional hyperplane. An integral point set $M$ is called prime, if the greatest common divisor of all the distances occurring in $M$ is 1. In this work we prove that for every $n \geq 3$, $d \geq 1$ there exists a prime integral point set $M$ of $n$ points on the plane, where $M$ contains points $M_1$ and $M_2$ such that distance between $M_1$ and $M_2$ is exactly $d$. The corresponding constructions of prime integral point sets are presented.
**Keywords:** combinatorial geometry, number theory, integral point sets, facher integral point sets, prime integral point sets, constructions of prime integral point sets, cardinality of an integral point set.

## 1. Introduction

**Definition 1.** [1] An integral point set in $m$-dimensional Euclidean space, $m \geq 2$, is a point set $M$ such that all the distances between the points of $M$ are integers and $M$ is not situated on an $(m - 1)$-dimensional hyperplane.

Erdös and Anning proved [2; 3] that every integral point set consists of a finite number of points.

Taking this into account, we denote the set of all integral point sets of $n$ points in $m$-dimensional Euclidean space by $\mathfrak{M}(m,n)$ (using the notation in [4]). The number of points in an integral point set is called its cardinality.

**Definition 2.** A diameter of the integral point set $M$ is defined as

$$\operatorname{diam}(M) = \max_{M_1, M_2 \in M} |M_1 M_2|.$$

Besides cardinality and diameter, every integral point set also has a characteristic [5; 6].

**Definition 3.** A planar integral point set of $n$ points with $n-1$ points on a straight line is called a facher set.

Facher sets are very dominating examples of planar integral point sets. In [7], facher sets of characteristic 1 are called *semi-crabs*. We refer the reader to [8; 9] for further classification.

**Definition 4.** [10] An integral point set $M$ is called prime, if the greatest common divisor of all the distances occurring in $M$ is 1.

*Remark*. If an integral point set is prime, then it cannot be squashed to an integral point set of the same cardinality and structure but smaller diameter.

For every integer $n \geq 3$ Solymosi presented [11] a construction of a facher integral point set $M \in \mathfrak{M}(2,n)$ such that equality $|M_1 M_2| = 2$ holds for some $M_1, M_2 \in M$. The constructed set has both odd and even distances and thus is prime. In [12] Avdeev improved Solymosi's result and presented a construction of a facher integral point set $M \in \mathfrak{M}(2,n)$ such that equality $|M_1 M_2| = 1$ holds for some $M_1, M_2 \in M$. Based on Solymosi's result and his own one, Avdeev presented the following conjecture [12, Conjecture 6.12]:

**Conjecture 1.** For every $n \geq 3$, $d \geq 1$ there exists a prime set $M \in \mathfrak{M}(2,n)$ which contains points $M_1$ and $M_2$ such that distance between $M_1$ and $M_2$ is exactly $d$.

In this work we prove Conjecture 1.

## 2. Constructions

**Theorem 1.** *Let $s$ and $a$ be coprime positive integers, then*

$$a^{\varphi(s)} - 1 \equiv 0 \pmod{s},$$

*where $\varphi(s)$ is Euler's totient function, which counts the positive integers up to a given integer $s$ that are coprime to $s$.*

Theorem 1 is also known as the Fermat — Euler theorem or Euler's totient theorem [13].

Below we generalize Solymosi's and Avdeev's results and present the following constructions:

• Construction 1 provides for any $j \in \mathbb{N}$ a facher integral point set $M \in \mathfrak{M}(2,n)$ such that for some $M_1, M_2 \in M$ we have $|M_1M_2| = 2 \cdot j$.

• Construction 2 provides a facher integral point set $M \in \mathfrak{M}(2,n)$ such that for some $M_1, M_2 \in M$ we have $|M_1M_2| = 3$.

• Construction 3 provides for any $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a facher integral point set $M \in \mathfrak{M}(2,n)$ such that for some $M_1, M_2 \in M$ we have $|M_1M_2| = 2m+1$.

Note that Construction 2 is Construction 3 for $m = 1$.

### *2.1. Construction 1*

Set $x_0 = 0$, $y_0 = j \cdot (m^2 - 1)^{1/2}$, where $j \in \mathbb{N}$ and $m = 3^{2^{k-2}}$ for a positive integer $k > 2$. Define the point $N = (x_0, y_0)$.

Note that $\varphi(2^k) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$. Then by Theorem 1

$$m^2 - 1 = 3^{2^{k-1}} - 1 = 3^{\varphi(2^k)} - 1 \equiv 0 \pmod{2^k}.$$

Thus $m^2 - 1$ can be written in the form $n2^k$ for some $n \in \mathbb{N}$. Let

$$x_i = j^2 \cdot n2^{i-1} - 2^{k-i-1}, \quad y_i = 0,$$

$$x_i' = -x_i = -j^2 \cdot n2^{i-1} + 2^{k-i-1}, \quad y_i' = 0$$

for $2 \le i \le k-1$. We define points

$$M_i = (x_i, y_i), \quad M_i' = (x_i', y_i')$$

and set

$$M_1 = (j,0), \quad M_1' = (-j,0).$$

Now the point set $M = \{N, M_1, \ldots, M_{k-1}, M_1', \ldots, M_{k-1}'\}$ is integral, because the distance between $N$ and $M_i$ for $2 \le i \le k-1$ is

$$|NM_i| = \left((j^2 \cdot n2^{i-1} - 2^{k-i-1})^2 + j^2 \cdot n2^k\right)^{1/2} = \left((j^2 \cdot n2^{i-1} + 2^{k-i-1})^2\right)^{1/2} = j^2 \cdot n2^{i-1} + 2^{k-i-1} \in \mathbb{N}.$$

In particular, for $i = k-1$ we obtain

$$|NM_{k-1}| = j^2 \cdot n2^{k-2} + 1.$$

On the other hand, the distance between $M_1$ and $M_1'$ is

$$|M_1M_1'| = 2 \cdot j.$$

Moreover, the greatest common divisor of $|NM_{k-1}|$ and $|M_1M_1'|$ is 1.

Thus, the resulting point set $M$ is prime.

### *2.2. Construction 2*

Before constructing a facher integral point set for an arbitrary number of points, we solve this problem for 3 points, i.e. for any $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ we construct a facher integral point set $B_i$ of 3 points such that for some $C_i, C_i' \in B_i$ we have $|C_iC_i'| = 2i + 3$.

Let us set

$$x_i = \frac{3}{2} + i, \quad x_i' = -x_i = -\frac{3}{2} - i$$

for any $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and define points

$$R_i = (0, h_i), \quad C_i = (x_i, 0), \quad C_i' = (x_i', 0),$$

where $h_i$ is the minimum distance from $R_i$ to the edge $C_iC_i'$ such that $|R_iC_i| = |R_iC_i'| \in \mathbb{N}$.

Note that

Table 1

*The minimum integral distances*

| $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $h_i^2$ | $x_i^2 + h_i^2$ | $\|R_iC_i\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.5 | 2.25 | 1.75 | 4 | 2 |
| 1 | 2.5 | 6.25 | 2.75 | 9 | 3 |
| 2 | 3.5 | 12.25 | 3.75 | 16 | 4 |
| 3 | 4.5 | 20.25 | 4.75 | 25 | 5 |
| 4 | 5.5 | 30.25 | 5.75 | 36 | 6 |
| 5 | 6.5 | 42.25 | 6.75 | 49 | 7 |
| 6 | 7.5 | 56.25 | 7.75 | 64 | 8 |
| 7 | 8.5 | 72.25 | 8.75 | 81 | 9 |
| 8 | 9.5 | 90.25 | 9.75 | 100 | 10 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Then

$$h_i = \frac{\sqrt{7 + 4i}}{2}$$

and $|R_iC_i| = |R_iC_i'| = i + 2$.

Thus, the resulting point set $B_i = \{R_i, C_i, C_i'\}$ is integral for any $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Define a point $R = (0, h)$ and choose a positive integer $d > 4$ such that for

$$h = \frac{\sqrt{7 + 4d}}{2}$$

we have

$$|RC_0| = |RC_0'| = \sqrt{4 + d} \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

Note that for any positive integer $\mu > 1$

$$4 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2\mu + 1) = 4 + \frac{5 + (2\mu + 1)}{2} \cdot (\mu - 1) =$$

$$= 4 + (\mu + 3) \cdot (\mu - 1) = 4 + \mu^2 + 2\mu - 3 = \mu^2 + 2\mu + 1 = (\mu + 1)^2.$$

Let us set $d = \mu^2 + 2\mu - 3$ in (*). Then $|RC_0| = |RC_0'| = \mu + 1$.

Let $l_i = |RC_i|$ and $O = (0, 0)$, where $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Applying the Pythagorean theorem to triangle $ORC_i$, we obtain the following equation:

$$\left(\frac{3}{2} + i\right)^2 + h^2 = l_i^2,$$

or, equivalently,

$$\frac{9}{4} + h^2 + i^2 + 3i = l_i^2.$$

Also, by the Pythagorean theorem

$$\frac{9}{4} + h^2 = |RC_0|^2 = (\mu + 1)^2.$$

Then the equation will take the form

$$(\mu+1)^2+i^2+3i=l_i^2.$$

Let $i=l_i-j\geq 0$, where $j\in\mathbb{N}$ and $2\leq j\leq \mu+1$. Then

$$(\mu+1)^2+(l_i-j)^2+3\cdot(l_i-j)=l_i^2,$$

or, equivalently,

$$l_i=\frac{(\mu+1)^2-j^2}{2j-3}+j.$$

Then

$$x_i=\frac{3}{2}+i=\frac{3}{2}+l_i-j=\frac{(\mu+1)^2-j^2}{2j-3}+\frac{3}{2}.$$

This equation has integral solutions. For example,

$$l_0=\mu+1,\ \text{ if }\ j=\mu+1,$$

$$l_{\mu^2+2\mu-3}=\mu^2+2\mu-1,\ \text{ if }\ j=2.$$

We define the coordinates of the points as following (multiply the coordinates [12, Construction 5.4] by 3):

$$M_{J\pm}=\left(\pm\frac{3\cdot b_J}{2},0\right),\quad N=\left(0,\frac{3\cdot\sqrt{a}}{2}\right),$$

where $a=2^{2^k}-1$. Thus, we obtain a point set $M=\{N,M_{J\pm}\}$, which is integral, but not prime, because all distances are multiples of 3.

Let $R=N$. Then

$$|NC_0|^2=\frac{9}{4}+\frac{9\cdot(2^{2^k}-1)}{4}=|RC_0|^2=l_0^2=(\mu+1)^2,$$

or, equivalently,

$$\mu=3\cdot 2^{2^{k-1}-1}-1.$$

For $i=\mu^2+2\mu-3$ we obtain

$$x_{\mu^2+2\mu-3}=\frac{3}{2}+l_{\mu^2+2\mu-3}-j=\left(3\cdot 2^{2^{k-1}-1}-1+1\right)^2-4+\frac{3}{2}=9\cdot 2^{2^k-2}-\frac{5}{2}.$$

Let us add a point $\widetilde{M}=(x_{\mu^2+2\mu-3},0)$ to $M$. Then

$$\begin{aligned}|N\widetilde{M}|&=\left(81\cdot 2^{2^{k+1}-4}-45\cdot 2^{2^k-2}+\frac{25}{4}+\frac{9\cdot\left(2^{2^k}-1\right)}{4}\right)^{1/2}=\\&=\left(81\cdot 2^{2^{k+1}-4}-45\cdot 2^{2^k-2}+\frac{25}{4}+9\cdot 2^{2^k-2}-\frac{9}{4}\right)^{1/2}=\\&=\left(81\cdot 2^{2^{k+1}-4}-36\cdot 2^{2^k-2}+\frac{16}{4}\right)^{1/2}=\left(81\cdot 2^{2^{k+1}-4}-36\cdot 2^{2^k-2}+4\right)^{1/2}=\\&=\left(\left(9\cdot 2^{2^k-2}-2\right)^2\right)^{1/2}=9\cdot 2^{2^k-2}-2\equiv 1\pmod 3.\end{aligned}$$

In particular, for $H=\{k-1\}$ we obtain

$$|M_{H+}M_{H-}|=3.$$

Thus, the resulting point set $M=\{N,\widetilde{M},M_{J\pm}\}$ is prime.

### *2.3. Construction 3*

Similarly to Construction 2 for any $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ we obtain the following equation:

$$l_i=\frac{(\mu+1)^2-j^2}{2j-(2m+1)}+j,$$

where $i=l_i-j,\ \ j\in\mathbb{N},\ \ m+1\le j\le\mu+1$. Then

$$x_i=\frac{2m+1}{2}+i=\frac{2m+1}{2}+l_i-j=\frac{(\mu+1)^2-j^2}{2j-(2m+1)}+\frac{2m+1}{2}.$$

This equation has integral solutions. For example,

$$l_0=\mu+1,\ \text{ if }\ j=\mu+1,$$

$$l_{\mu^2+2\mu-m^2-2m}=\mu^2+2\mu-m^2-m+1,\ \text{ if }\ \ j=m+1.$$

We define the coordinates of the points as following (multiply the coordinates [12, Construction 5.4] by $2m+1$):

$$M_{J\pm}=\left(\pm\frac{(2m+1)\cdot b_J}{2},0\right),\quad N=\left(0,\frac{(2m+1)\cdot\sqrt{a}}{2}\right),$$

where $a=2^{2^k}-1$. Thus, we obtain a point set $M=\{N,M_{J\pm}\}$, which is integral, but not prime, because all distances are multiples of $2m+1$.

We define points

$$R=\left(0,\frac{\sqrt{4\mu^2+8\mu-4m^2-4m+3}}{2}\right),\quad C_0=\left(\frac{2m+1}{2},0\right).$$

Let $R=N$. Then

$$|NC_0|^2=\frac{(2m+1)^2}{4}+\frac{(2m+1)^2\cdot(2^{2^k}-1)}{4}=|RC_0|^2=l_0^2=(\mu+1)^2,$$

or, equivalently,

$$\mu=(2m+1)\cdot 2^{2^{k-1}-1}-1.$$

For $i=\mu^2+2\mu-m^2-2m$ we obtain

$$x_{\mu^2+2\mu-m^2-2m}=\frac{2m+1}{2}+l_{\mu^2+2\mu-m^2-2m}-j=$$

$$=\left((2m+1)\cdot 2^{2^{k-1}-1}-1+1\right)^2-(m+1)^2+\frac{2m+1}{2}=(2m+1)^2\cdot 2^{2^k-2}-\frac{2m^2+2m+1}{2}.$$

Let us add a point $\widetilde{M}=(x_{\mu^2+2\mu-m^2-2m},0)$ to $M$. Then

$$|N\widetilde{M}|=\left((2m+1)^4\cdot 2^{2^{k+1}-4}-(2m+1)^2\cdot(2m^2+2m+1)\cdot 2^{2^k-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{4m^4+4m^2+1+8m^3+4m^2+4m}{4}+\frac{(2m+1)^2\cdot(2^{2^k}-1)}{4}\right)^{1/2}=$$

$$=\left((2m+1)^4\cdot 2^{2^{k+1}-4}-(2m+1)^2\cdot(2m^2+2m+1-1)\cdot 2^{2^k-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{4m^4+4m^2+1+8m^3+4m^2+4m-4m^2-4m-1}{4}\right)^{1/2}=$$

$$=\left((2m+1)^4\cdot 2^{2^{k+1}-4}-2m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)^2\cdot 2^{2^k-2}+\frac{4m^4+8m^3+4m^2}{4}\right)^{1/2}=$$

$$=\left((2m+1)^4\cdot 2^{2^{k+1}-4}-2m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)^2\cdot 2^{2^k-2}+m^2\cdot(m+1)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\left((2m+1)^2\cdot 2^{2^k-2}-m\cdot(m+1)\right)^2\right)^{1/2}=(2m+1)^2\cdot 2^{2^k-2}-m\cdot(m+1)=$$

$$=\frac{(2m+1)^2\cdot 2^{2^k}-(2m+1)^2+1}{4}.$$

In particular, for $H=\{k-1\}$ we obtain

$$|M_{H+}M_{H-}|=2m+1.$$

Moreover, the greatest common divisor of $|N\widetilde{M}|$ and $|M_{H+}M_{H-}|$ is 1. Thus, the resulting point set $M=\{N,\widetilde{M},M_{J\pm}\}$ is prime.


## Acknowledgements

This work was carried out at Voronezh State University and supported by the Russian Science Foundation grant 19-11-00197.


## References


1. *Kurz S., Laue R.* Bounds for the minimum diameter of integral point sets // Australasian Journal of Combinatorics. – 2007. – Vol. 39. – P. 233–240. – arXiv: 0804.1296v3.

2. *Anning N. H., Erdös P.* Integral distances // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1945. – Vol. 51, no. 8. – P. 598–600. – DOI: 10.1090/S0002-9904-1945-08407-9.

3. *Erdös P.* Integral distances // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1945. – Vol. 51, no. 12. – P. 996. – DOI: 10.1090/S0002-9904-1945-08490-0.

4. *Авдеев Н. Н., Семёнов Е. М.* Множества точек с целочисленными расстояниями на плоскости и в евклидовом пространстве // Математический форум (Итоги науки. Юг России). – 2018. – P. 217–236.

5. *Kemnitz A.* Punktmengen mit ganzzahligen Abständen. – 1988.

6. *Kurz S.* On the characteristic of integral point sets in $\mathbb{E}^m$ // Australasian Journal of Combinatorics. – 2006. – Vol. 36. – P. 241–248. – arXiv: math/0511704.

7. *Antonov A. R., Kurz S.* Maximal integral point sets over $\mathbb{Z}^2$ // International Journal of Computer Mathematics. – 2008. – Vol. 87, no. 12. – P. 2653–2676. – DOI:10.1080/00207160902993636. – arXiv: 0804.1280.

8. *Avdeev N. N., Zvolinsky R. E., Momot E. A.* On particular diameter bounds for integral point sets in higher dimensions. – 2019. – arXiv: 1909.10386v1.

9. *Зволинский Р. Е., Момот Е. А.* О некоторых оценках диаметра множеств точек с целочисленными расстояниями в многомерных пространствах // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики – сборник трудов Международной научной конференции. – Научно-исследовательские публикации, 2019. – P. 810–814.

10. *Noll L. C., Bell D. I.* $n$-clusters for $1<n<7$ // Mathematics of Computation. – 1989. – Vol. 53, no. 187. – P. 439–444.

11. *Solymosi J.* Note on integral distances // Discrete Comput. Geom. 30. – 2003. – P. 337–342. – DOI: 10.1007/s00454-003-0014-7.

12. *Avdeev N. N.* On existence of integral point sets and their diameter bounds. – 2019. – arXiv: 1906.11926.
13. *Hardy G. H., Wright E. M.* An Introduction to the Theory of Numbers // Oxford University Press, London, 1979. – 5th edition. – p. 63.
14. *Авдеев Н. Н.* Об отыскании целоудалённых множеств специального вида // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики – сборник трудов Международной научной конференции. – Научно-исследовательские публикации, 2018. – P. 492–498.

УДК 004.942

# РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ФОРМИРОВАНИЯ РЕЙТИНГА БАНКОВ НА ОСНОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

**Т. В. Азарнова, В. О. Дубовая**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Для оценки деятельности банков используется достаточно много различных показателей, например, показатели выполнения своих долговых обязательств, показатели финансового положения, показатели текущей ликвидности, показатели абсолютной ликвидности и риска. Каждый показатель характеризует банк с какой-то определенной стороны, для построения рейтингов деятельности банков требуются интегральные показатели, которые дают комплексную оценку эффективности и качества функционирования объектов исследования. Сложность построения интегрального показателя, как правило, заключается в необходимости решения слабоструктурированной задачи определения важности отдельных показателей, входящих в интегральный. В данной работе описывается подход к построению интегрального показателя, реализующий экспертно-вероятностный принцип формирования весов важности, учитывающий неопределенность мнения экспертов. Проводится анализ распределения интегрального показателя по однородным классам банков, полученным по алгоритму самоорганизующихся сетей Кохонена.
**Ключевые слова:** показатели деятельности банков, интегральный показатель, генерация весовых коэффициентов, сети Кохонена.

## Введение

В рамках данного исследования проанализированы различные подходы к рейтингованию деятельности банков. Для проведения рейтинга используются различные показатели эффективности деятельности банков [1], на основании комплексной оценки которых банки выстраиваются в убывающую (возрастающую) последовательность. Рейтинг позволяет оценивать основные аспекты деятельности банка, что предоставляет контрагентам возможность проанализировать привлекательность сотрудничества с финансовой структурой, а банкам оценить свою конкурентоспособность [2]. Одним из важнейших рейтингов банка является рейтинг надежности, отражающий способность банка выполнять свои обязательства перед вкладчиками и заёмщиками. Такой вид используется в сфере банковского надзора для обеспечения стабильности банковской системы, в частности, для предотвращения банкротства организаций. Рейтинг основывается на данных учета и баланса, а также на непосредственных проверках банка. Данные рейтинга не публикуются. Существуют рейтинги, которые подлежат публикации. Такие рейтинги создаются независимыми рейтинговыми агентствами. Их используют специалисты банков, бирж, а также вкладчики, акционеры. Выделяются три основных метода построения рейтинга: номерной – ранжирование по различным показателям; балльный – оценка банка в баллах, на основании этого построение сводных данных; индексный – на основании различных финансовых показателей банку присваивается индекс. Для оценки финансового состояния используются также такие подходы как: эмпирический, экономико-математический, статистический и смешанные. Одной из самых популярных систем оценки банков является — «Единая система рейтингования финансовых учреждений» (CAMELS). Оцениванием и составлением рейтингов коммерческих организаций занимаются рейтинговые агентства [3]. По всему миру можно насчитать множество рейтинговых агентств, но одни из самых популярных это S&P Global Ratings, Moody's Investor Services и Fitch Ratings. Их еще называют «Большая тройка», а также LACE Financial Corp. В РФ также есть рейтинговые агентства — это РИА «Рейтинг», «Рус-Рейтинг», Национальное рейтинговое агентство (НРА), «AK&M» РА, «Эксперт РА».

В данной статье описан алгоритм построения рейтинга банков на основе интегрального показателя, формируемого в условиях неопределенности мнений экспертов, разработанное авторами программное обеспечение по данному алгоритму и вычислительный эксперимент по построению рейтинга 114 банков. Средствами пакета прикладных программ «STATISTICA» проанализировано распределение рейтинга по основным однородным классам банков, выделенных на основе метода самоогранизующихся сетей Кохонена [4]. Гипотеза анализа распределения рейтинга заключалась в том, что в однородных группах банков должны быть близкие значения сводного интегрального показателя.

При построении интегрального показателя использовались следующие 11 характеристик деятельности банков [1]: чистая прибыль — сумму прибыли, которая не включает в себя налоги и затраты; кредитный портфель — сумма, которую должны банку заёмщики; просроченная задолженность в кредитном портфеле – сумма своевременно не погашенных кредитов; вклады физических лиц — сумма денежных средств в определенной валюте, отданная в банк под процентную ставку для хранения и получения прибыли; вложения в ценные бумаги — инвестирование банков своего капитала в ценные бумаги с целью получения прибыли и регулирования платежеспособности и ликвидности; рентабельность активов (ROA) — инструмент контроля и анализа финансовой деятельности организации, а также эффективности использования имущества компании; рентабельность продаж (ROS) — эффективность работы с издержками; оборачиваемость выручки ($К_{об}$) — оборачиваемость активов за какой-либо период; норматив достаточности капитала (Н1) — характеристика надежности банка и способность банка покрывать убытки за свой счет, не в ущерб заёмщикам; мгновенная ликвидность (Н2) — часть краткосрочных обязательств, которую банк может выполнить немедленно (в ближайшее время), только за счет ценных бумаг, денег и депозитов; текущая ликвидность (Н3) — характеристика достаточности оборотных средств, которые могут покрыть краткосрочные обязательства; кредиты физическим лицам, предприятиям и организациям — займ в денежной форме, предоставляемый кредитором заемщику на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процента.

## Алгоритм формирования рейтинга банков

Рассмотрим общий алгоритм формирования рейтинга банков в условиях неопределенности мнений экспертов:

1. Выбираются показатели, по которым оцениваются банки.

2. Далее нормируются значения показателей банков по формуле:

$$X_{норм} = \frac{X - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}}. \tag{1}$$

3. С помощью алгоритмов генерации неупорядоченных выборок и перестановок с повторениями формируются наборы весовых коэффициентов $W_1 = (W_{1,1}, \ldots, W_{1,11}), \ldots, W_m = (W_{m,1}, \ldots, W_{m,11})$.

4. Обрабатывается экспертная информации о сравнительной важности показателей, представленная в виде неравенств: $w_i \le w_j$; $w_i \ge w_j$; $w_i = w_j$.

5. Формируется окончательный список векторов, отвечающих заданным требованиям экспертов о сравнительной важности показателей $W_1 = (W_{1,1}, \ldots, W_{1,11}), \ldots, W_p = (W_{p,1}, \ldots, W_{p,11})$.

Для каждого банка:

5.1. Рассчитывается интегральный показатель с каждым полученным на шаге 5 набором весовых коэффициентов:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{11} w_{ij} x_{норм\, j}, \tag{2}$$

где $Q_i$ — значение интегрального показателя;

$x_{норм}$ — нормированное значение показателя;

$w_{ij}$ — значение $j$-го весового коэффициента в $i$-м наборе весовых коэффициентов;

5.2. Вычисляется среднее значение интегрального показателя:

$$Q_{cp} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Q_i. \quad (3)$$

6. Вычисляется среднеквадратическое отклонение интегрального показателя по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{p}(Q_i - Q_{cp})^2}. \quad (4)$$

7. Формируется рейтинг банков на основании средних значений интегральных показателей для каждого банка.

В рамках данного алгоритма используется специальный алгоритм генерации весовых коэффициентов показателей эффективности деятельности банков. Данный алгоритм генерирует наборы весовых коэффициентов вида:

$$W_i = (W_{i1}, W_{i2}, \ldots, W_{i11}) \quad (5)$$

$$W_{i1} + W_{i2} + \ldots + W_{i11} = 1 \quad (6)$$

$$W_{ij} \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right). \quad (7)$$

Алгоритм состоит из двух частей:

Алгоритм 1 [5]. Поиск всех различных по составу элементов комбинаций m натуральных чисел $(1, 2, 3, \ldots, m)$, сумма цифр которых дает $n$.

Алгоритм 2 [5]. Поиск всех перестановок комбинаций, найденных в первой части алгоритма.

На основании данного алгоритма было разработано программное обеспечение в среде Visual Studio и проведен вычислительный эксперимент.

В качестве базы вычислительного эксперимента использовались данные по 114 российским банкам [6]. Список банков представлен на рис. 1.

Рис. 2–5 демонстрируют работу разработанного программного обеспечения.

Сначала выбираются значения $M$ и $N$.

На рис. 2 отражены сгенерированные наборы весов важности показателей деятельности банков. Всего было сгенерировано 286 наборов. На основании учета экспертных предпочтений, отраженных на рис. 3, количество наборов сократилось до 137.

На рис. 4 приведен фрагмент расчета средних значений и среднеквадратических отклонений для интегральных показателей банков.

В рамках эксперименты была выдвинута гипотеза о том, что близкие по своим характеристикам банки, имеют близкие значения рейтинга по интегральному показателю.

Для проверки данной гипотезы была проведена кластеризация банков методом самоорганизующихся сетей Кохонена. В качестве меры близости использовалось Евклидово расстояние. Самоорганизующиеся сети Кохонена позволяют демонстрировать результаты кластеризации на плоскости в виде распределения банков по ячейкам некоторой сети.

Результаты расчетов в пакете Statistica методом карты Кохонена приведены на рис. 5–7.

Результаты показывают, в какой класс попал объект с указанием его рейтинг (ранг). Ниже на рис. 6 представлена диаграмма, отражающая распределение банков по классам.

Рис. 7 отражает группировки на карте Кохонена банков с низким, средним и высоким рейтингом.

| № | Название банка | № | Название банка | № | Название банка |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Сбербанк России | 39 | Локо-Банк | 77 | СЭБ Банк |
| 2 | ВТБ Банк Москвы | 40 | Примсоцбанк | 78 | Джей энд Ти Банк |
| 3 | Пересвет | 41 | МБА-Москва | 79 | Аресбанк |
| 4 | ВТБ 24 | 42 | Гута-Банк | 80 | Петербургский Социальный Коммерческий Банк |
| 5 | Газпромбанк | 43 | СДМ-Банк | 81 | Кемсоцинбанк |
| 6 | Райффайзенбанк | 44 | Держава | 82 | Расчетно-Кредитный Банк |
| 7 | Тинькофф Банк | 45 | Союз | 83 | Сетелем Банк |
| 8 | Ситибанк | 46 | Саровбизнесбанк | 84 | Приморье |
| 9 | Альфа-Банк | 47 | Банк Финсервис | 85 | К2 Банк |
| 10 | Хоум Кредит Банк | 48 | Современный Коммерческий Инновационный Банк | 86 | БКС — Инвестиционный Банк |
| 11 | Банк Уралсиб | 49 | Пойдем! | 87 | Кредит Урал Банк |
| 12 | Совкомбанк | 50 | Россельхозбанк | 88 | Фондсервисбанк |
| 13 | Московский Кредитный Банк | 51 | Глобэкс | 89 | РЕСО Кредит |
| 14 | Промсвязьбанк | 52 | Киви Банк | 90 | Алеф-Банк |
| 15 | Русский Стандарт | 53 | Финанс Бизнес Банк | 91 | Денизбанк Москва |
| 16 | Всероссийский Банк Развития Регионов | 54 | Челиндбанк | 92 | БНП Париба Банк |
| 17 | Росбанк | 55 | Тойота Банк | 93 | СКБ-Банк |
| 18 | Экспресс-Волга | 56 | Дальневосточный Банк | 94 | Кредит Европа Банк |
| 19 | Россия | 57 | Татсоцбанк | 95 | Русфинанс Банк |
| 20 | Ренессанс Кредит | 58 | Кубань Кредит | 96 | Народный Банк |
| 21 | РосЕвроБанк | 59 | Российский Национальный Коммерческий Банк | 97 | Внешфинбанк |
| 22 | Связь-Банк | 60 | Кольцо Урала | 98 | Александровский |
| 23 | Банк «Санкт-Петербург» | 61 | Модульбанк | 99 | Ури Банк |
| 24 | Нордеа Банк | 62 | Мир Бизнес Банк | 100 | НК Банк |
| 25 | Меткомбанк (Каменск-Уральский) | 63 | Интерпрогрессбанк | 101 | Росгосстрах Банк |
| 26 | ОТП Банк | 64 | Ак Барс | 102 | Иваново |
| 27 | МТС Банк | 65 | БыстроБанк | 103 | Инбанк |
| 28 | Новикомбанк | 66 | Объединенный Капитал | 104 | Форштадт |
| 29 | СМП Банк | 67 | Русьуниверсалбанк | 105 | Зираат Банк |
| 30 | Аверс | 68 | Челябинвестбанк | 106 | Руснарбанк |
| 31 | Бинбанк Диджитал | 69 | Хлынов | 107 | Новобанк |
| 32 | РН Банк | 70 | Липецккомбанк | 108 | ББР Банк |
| 33 | Экспобанк | 71 | Еврофинанс Моснарбанк | 109 | Первый Клиентский Банк |
| 34 | Запсибкомбанк | 72 | НБД-Банк | 110 | БайкалИнвестБанк |
| 35 | Левобережный | 73 | Севергазбанк | 111 | Крокус-Банк |
| 36 | Сургутнефтегазбанк | 74 | Курскпромбанк | 112 | Росдорбанк |
| 37 | Коммерцбанк (Евразия) | 75 | Девон-Кредит | 113 | Екатеринбург |
| 38 | Металлинвестбанк | 76 | ЦентроКредит | 114 | Тольяттихимбанк |

*Рис. 1. Банки, участвующие в рейтинге*

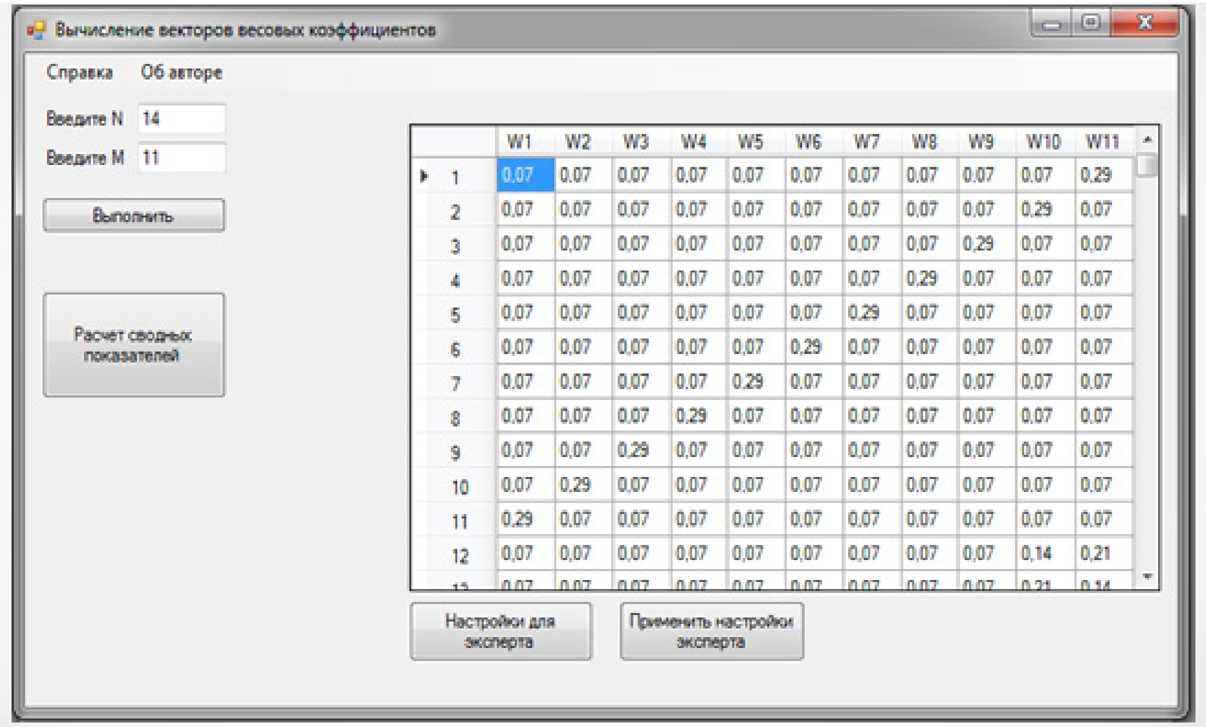



*Рис. 2. Выбор значений M, N и формирование списка векторов весовых коэффициентов*

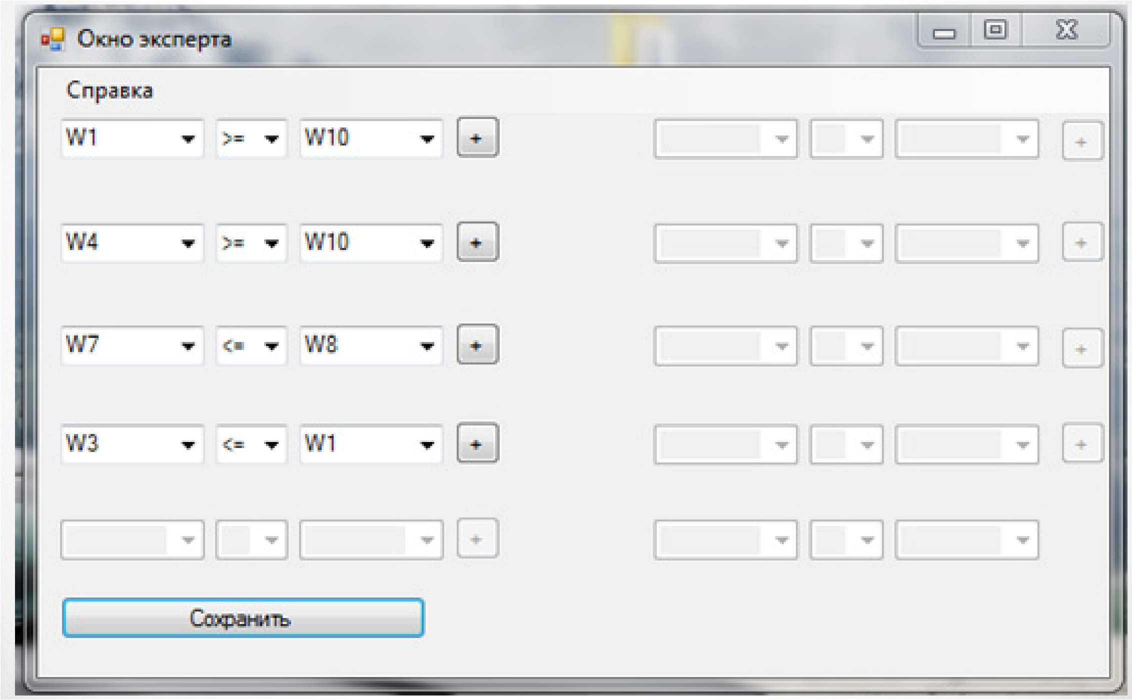



*Рис. 3. Предпочтения экспертов относительно важности показателей*


| | Q[j] | S[j] | min[j] | max[j] |
|---|---|---|---|---|
| Сбербанк | 0,75644614... | 0,127466 | 0,030489096 | 1 |
| Пересвет | 0,25747158... | 0,089216 | 0,000461132 | 1 |
| Русьуниверсалбанк | 0,20640114... | 0,046384 | 0,01249206 | 0,450163354 |
| Нордеа Банк | 0,18562040... | 0,068894 | 0 | 0,632980168 |
| Гута-Банк | 0,16317343... | 0,061482 | 0,001202144 | 0,636767502 |
| Челиндбанк | 0,15585801... | 0,027881 | 0,008363328 | 0,301626163 |
| РосЕвроБанк | 0,15164354... | 0,105298 | 1,75754E-10 | 1 |
| Сургутнефтегазбанк | 0,13565008... | 0,062221 | 0,000112779 | 0,652795756 |
| Челябинвестбанк | 0,13554288... | 0,088762 | 0 | 1 |
| ВТБ Банк Москвы | 0,12780691... | 0,038301 | 0 | 0,477347001 |
| Ренессанс Кредит | 0,12725682... | 0,090273 | 4,63173E-06 | 1 |
| Союз | 0,10968215... | 0,027429 | 0,004975651 | 0,31638164 |
| Россельхозбанк | 0,10657722... | 0,035116 | 0,021640116 | 0,382339164 |
| Экспобанк | 0,10326626... | 0,074387 | 0 | 0,738591791 |
| Кубань Кредит | 0,10116916... | 0,047158 | 0,000797049 | 0,460893795 |
| Хоум Кредит Банк | 0,09673318... | 0,03422 | 0,001131163 | 0,339693498 |
| ВТБ 24 | 0,09501215... | 0,058818 | 3,33935E-05 | 0,656575364 |
| Ситибанк | 0,09485402... | 0,054127 | 0,003432576 | 0,595113064 |
| Запсибкомбанк | 0,09413268... | 0,041083 | 0 | 0,36232162 |
| РосБанк | 0,09119473... | 0,020514 | 0,005610841 | 0,198220984 |
| Металлинвестбанк | 0,08647777... | 0,040396 | 0 | 0,433365369 |
| Дальневосточный | 0,08224144... | 0,034136 | 0 | 0,362245715 |
| Газпром | 0,08129461... | 0,046783 | 8,72367E-05 | 0,511735077 |
| Альфа-Банк | 0,07217497... | 0,013758 | 0,004869786 | 0,127262534 |
| Татсоцбанк | 0,07095982... | 0,028343 | 0,000460968 | 0,283282995 |

*Рис. 4. Расчет средних значений и среднеквадратических отклонений для интегральных показателей банков*

| Банк | Положение | Qr |
|---|---|---|
| Сбербанк России | (1, 1) | 114 |
| ВТБ 24 | (1, 2) | 106 |
| Альфа-Банк | (1, 2) | 111 |
| Совкомбанк | (1, 3) | 27 |
| Русский Стандарт | (1, 3) | 41 |
| Росбанк | (1, 3) | 51 |
| Экспресс-Волга | (1, 3) | 3 |
| Связь-Банк | (1, 3) | 64 |
| Новикомбанк | (1, 3) | 47 |
| СМП Банк | (1, 3) | 29 |
| РН Банк | (1, 3) | 17 |
| Глобэкс | (1, 3) | 12 |
| Финанс Бизнес Банк | (1, 3) | 1 |
| Кубань Кредит | (1, 3) | 25 |
| БыстроБанк | (1, 3) | 16 |
| Аресбанк | (1, 3) | 11 |
| Сетелем Банк | (1, 3) | 13 |
| РЕСО Кредит | (1, 3) | 15 |
| Кредит Европа Банк | (1, 3) | 8 |
| Русфинанс Банк | (1, 3) | 5 |
| Александровский | (1, 3) | 9 |
| НК Банк | (1, 3) | 4 |
| Форштадт | (1, 3) | 6 |
| Росдорбанк | (1, 3) | 2 |
| Райффайзенбанк | (1, 4) | 71 |
| Московский Кредитный Банк | (1, 4) | 84 |
| Промсвязьбанк | (1, 4) | 97 |
| Россия | (1, 4) | 39 |
| Банк «Санкт-Петербург» | (1, 4) | 65 |
| ОТП Банк | (1, 4) | 63 |
| МТС Банк | (1, 4) | 73 |
| СДМ-Банк | (1, 4) | 19 |

| Банк | Положение | Qr |
|---|---|---|
| БКС — Инвестиционный Банк | (1, 4) | 52 |
| Алеф-Банк | (1, 4) | 20 |
| СКБ-Банк | (1, 4) | 24 |
| Инбанк | (1, 4) | 18 |
| ВТБ Банк Москвы | (2, 1) | 112 |
| Газпромбанк | (2, 1) | 107 |
| Металлинвестбанк | (2, 2) | 59 |
| Примсоцбанк | (2, 2) | 79 |
| Ак Барс | (2, 2) | 80 |
| Липецккомбанк | (2, 2) | 95 |
| Севергазбанк | (2, 2) | 37 |
| ЦентроКредит | (2, 2) | 50 |
| Кредит Урал Банк | (2, 2) | 82 |
| Левобережный | (2, 3) | 75 |
| Банк Финсервис | (2, 3) | 45 |
| Тойота Банк | (2, 3) | 44 |
| Дальневосточный Банк | (2, 3) | 85 |
| Кольцо Урала | (2, 3) | 26 |
| Девон-Кредит | (2, 3) | 30 |
| Петербургский Социальный Коммерческий Банк | (2, 3) | 56 |
| Всероссийский Банк Развития Регионов | (2, 4) | 68 |
| Аверс | (2, 4) | 77 |
| Саровбизнесбанк | (2, 4) | 62 |
| Мир Бизнес Банк | (2, 4) | 23 |
| Еврофинанс Моснарбанк | (2, 4) | 40 |
| Фондсервисбанк | (2, 4) | 87 |
| БНП Париба Банк | (2, 4) | 54 |
| Тольяттихимбанк | (2, 4) | 35 |
| РосЕвроБанк | (3, 1) | 104 |
| Приморье | (3, 1) | 81 |
| Ситибанк | (3, 2) | 74 |
| Запсибкомбанк | (3, 2) | 100 |

| Банк | Положение | Qr |
|---|---|---|
| Объединенный Капитал | (3, 2) | 69 |
| Курскпромбанк | (3, 2) | 60 |
| Джей энд Ти Банк | (3, 2) | 93 |
| Меткомбанк (Каменск-Уральский) | (3, 3) | 72 |
| Коммерцбанк (Евразия) | (3, 3) | 49 |
| Руснарбанк | (3, 3) | 89 |
| Новобанк | (3, 3) | 42 |
| Российский Национальный Коммерческий Банк | (3, 4) | 38 |
| Ури Банк | (3, 4) | 70 |
| Зираат Банк | (3, 4) | 78 |
| Крокус-Банк | (3, 4) | 57 |
| Нордеа Банк | (4, 1) | 105 |
| К2 Банк | (4, 1) | 110 |
| Росгосстрах Банк | (4, 1) | 98 |
| Иваново | (4, 1) | 101 |
| Екатеринбург | (4, 1) | 102 |
| Хоум Кредит Банк | (4, 2) | 86 |
| Ренессанс Кредит | (4, 2) | 109 |
| Экспобанк | (4, 2) | 83 |
| Челиндбанк | (4, 2) | 94 |
| Тинькофф Банк | (4, 3) | 43 |
| Бинбанк Диджитал | (4, 3) | 36 |
| Держава | (4, 3) | 66 |
| Современный Коммерческий Инновационный Банк | (4, 3) | 10 |
| Пойдем! | (4, 3) | 28 |
| Киви Банк | (4, 3) | 33 |
| Модульбанк | (4, 3) | 14 |
| Народный Банк | (4, 3) | 91 |
| Внешфинбанк | (4, 3) | 76 |
| Гута-Банк | (4, 4) | 96 |
| Русьуниверсалбанк | (4, 4) | 103 |
| Кемсоцинбанк | (4, 4) | 67 |

*Рис. 5. Рейтинг банков*

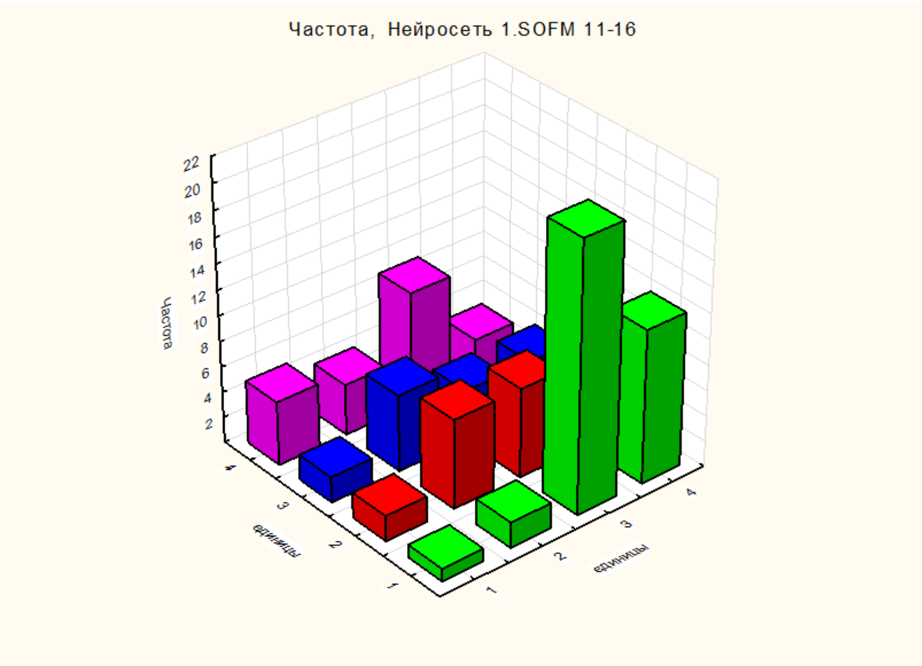



*Рис. 6. Распределение банков по классам*

Рис. 5 демонстрирует, что все объекты были разделены на 16 кластеров. Будем считать, что значения ранга до 30 обозначают — низкий рейтинг, значения от 31 до 70 — средний ранг, значения от 71 до 114 — высокий рейтинг. В табл. 1 отображено количество объектов, попавших в каждый класс, самый большой — (1,3), он содержит 21 объект.

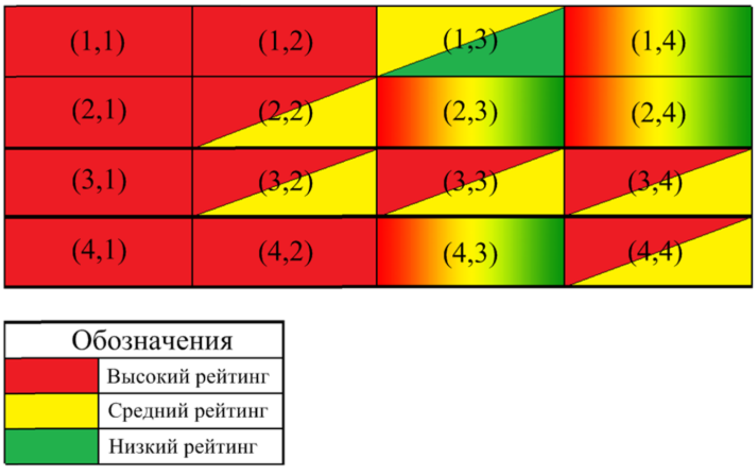



*Рис. 7. Распределение рейтинга баков по классам*

Таблица 1

*Распределение рейтинга по классам*

| Банк | Нейрон ID | Положение | Активация | Рейтинг |
|---|---|---|---|---|
| Сбербанк России | 1 | (1, 1) | 0,022513 | 114 |
| ВТБ 24 | 2 | (1, 2) | 0,220383 | 106 |
| Альфа-Банк | 2 | (1, 2) | 0,215527 | 111 |
| Совкомбанк | 3 | (1, 3) | 0,071979 | 27 |
| Русский Стандарт | 3 | (1, 3) | 0,144501 | 41 |
| Росбанк | 3 | (1, 3) | 0,090426 | 51 |
| Экспресс-Волга | 3 | (1, 3) | 0,137006 | 3 |
| Связь-Банк | 3 | (1, 3) | 0,080947 | 64 |
| Новикомбанк | 3 | (1, 3) | 0,053273 | 47 |
| СМП Банк | 3 | (1, 3) | 0,063795 | 29 |
| РН Банк | 3 | (1, 3) | 0,093768 | 17 |
| Глобэкс | 3 | (1, 3) | 0,073715 | 12 |
| Финанс Бизнес Банк | 3 | (1, 3) | 0,120772 | 1 |
| Кубань Кредит | 3 | (1, 3) | 0,045462 | 25 |
| БыстроБанк | 3 | (1, 3) | 0,052264 | 16 |
| Аресбанк | 3 | (1, 3) | 0,040736 | 11 |
| Сетелем Банк | 3 | (1, 3) | 0,093683 | 13 |
| РЕСО Кредит | 3 | (1, 3) | 0,141802 | 15 |
| Кредит Европа Банк | 3 | (1, 3) | 0,078393 | 8 |
| Русфинанс Банк | 3 | (1, 3) | 0,084491 | 5 |
| Александровский | 3 | (1, 3) | 0,038421 | 9 |
| НК Банк | 3 | (1, 3) | 0,046604 | 4 |
| Форштадт | 3 | (1, 3) | 0,076166 | 6 |
| Росдорбанк | 3 | (1, 3) | 0,05491 | 2 |
| Райффайзенбанк | 4 | (1, 4) | 0,102653 | 71 |
| Московский Кредитный Банк | 4 | (1, 4) | 0,145383 | 84 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Промсвязьбанк | 4 | (1, 4) | 0,197047 | 97 |
| Россия | 4 | (1, 4) | 0,103432 | 39 |
| Банк «Санкт-Петербург» | 4 | (1, 4) | 0,060767 | 65 |
| ОТП Банк | 4 | (1, 4) | 0,067424 | 63 |
| МТС Банк | 4 | (1, 4) | 0,051471 | 73 |
| СДМ-Банк | 4 | (1, 4) | 0,072444 | 19 |
| БКС – Инвестиционный Банк | 4 | (1, 4) | 0,059888 | 52 |
| Алеф-Банк | 4 | (1, 4) | 0,060846 | 20 |
| СКБ-Банк | 4 | (1, 4) | 0,082664 | 24 |
| Инбанк | 4 | (1, 4) | 0,066759 | 18 |
| ВТБ Банк Москвы | 5 | (2, 1) | 0,182104 | 112 |
| Газпромбанк | 5 | (2, 1) | 0,178017 | 107 |
| Металлинвестбанк | 6 | (2, 2) | 0,137582 | 59 |
| Примсоцбанк | 6 | (2, 2) | 0,090712 | 79 |
| Ак Барс | 6 | (2, 2) | 0,082781 | 80 |
| Липецккомбанк | 6 | (2, 2) | 0,134507 | 95 |
| Севергазбанк | 6 | (2, 2) | 0,089344 | 37 |
| ЦентроКредит | 6 | (2, 2) | 0,117401 | 50 |
| Кредит Урал Банк | 6 | (2, 2) | 0,052759 | 82 |
| Левобережный | 7 | (2, 3) | 0,072128 | 75 |
| Банк Финсервис | 7 | (2, 3) | 0,107189 | 45 |
| Тойота Банк | 7 | (2, 3) | 0,064055 | 44 |
| Дальневосточный Банк | 7 | (2, 3) | 0,105146 | 85 |
| Кольцо Урала | 7 | (2, 3) | 0,073812 | 26 |
| Девон-Кредит | 7 | (2, 3) | 0,03059 | 30 |
| Петербургский Социальный Коммерческий Банк | 7 | (2, 3) | 0,03233 | 56 |
| Всероссийский Банк Развития Регионов | 8 | (2, 4) | 0,078482 | 68 |
| Аверс | 8 | (2, 4) | 0,065891 | 77 |
| Саровбизнесбанк | 8 | (2, 4) | 0,097721 | 62 |
| Мир Бизнес Банк | 8 | (2, 4) | 0,056292 | 23 |
| Еврофинанс Моснарбанк | 8 | (2, 4) | 0,034833 | 40 |
| Фондсервисбанк | 8 | (2, 4) | 0,125773 | 87 |
| БНП Париба Банк | 8 | (2, 4) | 0,158427 | 54 |
| Тольяттихимбанк | 8 | (2, 4) | 0,04978 | 35 |
| РосЕвроБанк | 9 | (3, 1) | 0,064365 | 104 |
| Приморье | 9 | (3, 1) | 0,062955 | 81 |
| Ситибанк | 10 | (3, 2) | 0,106702 | 74 |
| Запсибкомбанк | 10 | (3, 2) | 0,080919 | 100 |
| Союз | 10 | (3, 2) | 0,092682 | 99 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Объединенный Капитал | 10 | (3, 2) | 0,084593 | 69 |
| Курскпромбанк | 10 | (3, 2) | 0,035528 | 60 |
| Джей энд Ти Банк | 10 | (3, 2) | 0,112651 | 93 |
| Ури Банк | 12 | (3, 4) | 0,19012 | 70 |
| Зираат Банк | 12 | (3, 4) | 0,105838 | 78 |
| Крокус-Банк | 12 | (3, 4) | 0,099993 | 57 |
| Нордеа Банк | 13 | (4, 1) | 0,211289 | 105 |
| К2 Банк | 13 | (4, 1) | 0,709291 | 110 |
| Росгосстрах Банк | 13 | (4, 1) | 0,347226 | 98 |
| Иваново | 13 | (4, 1) | 0,363255 | 101 |
| Екатеринбург | 13 | (4, 1) | 0,338802 | 102 |
| Хоум Кредит Банк | 14 | (4, 2) | 0,053181 | 86 |
| Ренессанс Кредит | 14 | (4, 2) | 0,052012 | 109 |
| Экспобанк | 14 | (4, 2) | 0,104843 | 83 |
| Челиндбанк | 14 | (4, 2) | 0,33273 | 94 |
| Тинькофф Банк | 15 | (4, 3) | 0,108997 | 43 |
| Бинбанк Диджитал | 15 | (4, 3) | 0,151846 | 36 |
| Держава | 15 | (4, 3) | 0,100373 | 66 |
| Современный Коммерческий Инновационный Банк | 15 | (4, 3) | 0,185799 | 10 |
| Пойдем! | 15 | (4, 3) | 0,092248 | 28 |
| Киви Банк | 15 | (4, 3) | 0,147053 | 33 |
| Модульбанк | 15 | (4, 3) | 0,121851 | 14 |
| Народный Банк | 15 | (4, 3) | 0,253898 | 91 |
| Внешфинбанк | 15 | (4, 3) | 0,159798 | 76 |
| Гута-Банк | 16 | (4, 4) | 0,270808 | 96 |
| Русьуниверсалбанк | 16 | (4, 4) | 0,603771 | 103 |
| Кемсоцинбанк | 16 | (4, 4) | 0,456216 | 67 |

Анализ результатов показывает, подтверждение гипотезы исследования в основной доле классов, но в некоторые классы попали банки с различным уровнем рейтинга. Данную проблему можно объяснить тем, что рейтинг оказался более чувствителен к разнице в показателях, чем евклидово расстояние. Возможно, нужно провести эксперимент с использованием различных типов расстояния между объектами в методе самоорганизующихся сетей Кохонена.

## Заключение

Банки являются важнейшими финансовыми структурами любой экономической системы. От эффективности их работы в целом зависит дееспособность и устойчивость современного бизнеса. Хорошо апробированным инструментом оценки конкурентоспособности и надежности банков являются рейтинги, проводимые государственными и частными рейтинговыми агентствами. Результаты рейтинга во многом зависят от способа построения интегрального показателя, по которому ведется ранжирование. Наиболее распространенными являются интегральные показатели, представляющие линейные свертки основных нормированных характеристик банковской деятельности. Сложность применения линейных сверток заключается в нахождении весовых коэффициентов, интерпретируемых как важность характеристик. В данной статье предложен формализованный алгоритм работы с весовыми коэффициентами в условиях неопределенности мнений экспертов и проведены расчеты на базе разработанного программного обеспечения. Адекватность рассматриваемого алгоритма проверяется на основании гипотезы о распределении рейтинга в классах однородных групп банков. Расчёты показали, что банки, находящиеся в однородных кластерах, выделенных на основании самоорганизующихся сетей Кохонена, имеют близкие значения рейтинга.

**Литература**

1. *Турбанов, А.* Банковское дело: Операции, технологии, управление / А. Турбанов, А. Тютюнник. – Москва : Альпина Паблишерз, 2010. – 682 с.

2. *Полозов, А. А.* Энциклопедия рейтинга: экономика, спорт, общество / А. М. Карминский, А. А. Полозов, С. П. Ермаков. – Москва : Экономика и жизнь, 2011. – 455 с.

3. Эксперт РА – рейтинговое агентство : официальный сайт. – URL: https://raexpert.ru (дата обращения: 26.09.2020);

4. *Каширина, И. Л.* Нейросетевые и гибридные системы / Т. В. Азарнова, И. Л. Каширина.— Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2014. – 80 с. Кнут. Том 4. Выпуск 2. Генерация всех кортежей и перестановок. 2008.

5. *Липский, В.* Комбинаторика для программистов / В. Липский – Москва : Мир, 1988. — 200 с.

6. Банки.ру : официальный сайт. – URL: http://www.banki.ru. (дата обращения: 20.09.2020).

УДК 519.85

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СИНХРОНИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВИЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБУЧЕНИЯ

**Т. В. Азарнова, П. В. Полухин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Распределенные вычислительные системы являются эффективным инструментом решения сложных задач, связанных с обработкой больших массивов информации, в частности, задач машинного обучения. Для повышения эффективности работы данных систем при решении конкретных задач используются специальные методы моделирования процессов синхронизации и разрабатываемые на основе данного моделирования методы оценки, прогнозирования задержек обработки и выполнения запросов. Рассматриваемые в работе подходы к организации работы распределенных вычислительных систем, базирующиеся на математическим аппарате теории массового обслуживания, позволяют оптимизировать механизмы обработки заявок, связанных с решением задач распределения ресурсов, и повысить согласованность вычислительных процессов при решении задач обучения.
**Ключевые слова:** синхронизация, распределенная память, теория массового обслуживания, однолинейные системы, потоки требований.

## Введение

Решение задач обучения, реализуемых в рамках настройки параметров искусственных нейронных, байесовских сетей и сетей принятия решений требует значительных вычислительных ресурсов, при реализации таких задач как: генерация начального вероятностного распределения (динамические байесовские сети), обучение и распространение вероятностного вывода. В процессе работы различных алгоритмов, направленных на получение распределения вероятностей с требуемой точностью, в частности базирующихся на методе Монте-Карло, требуется формирование достаточно большого числа выборок. Масштабность вычислений порождает трудности при проведении практических расчетов. Современные ЭВМ обладают значительными ресурсными возможностями, однако в рамках генерации и обучения больших объемов данных достаточно часто их ресурсы становятся недостаточными для оперативного выполнения задач. Для решения таких задач используются распределенные системы с общей шиной. В качестве шины могут выступать стандартные системы передачи данных на основе Ethernet и оптоволоконных линий (FC). Особую роль в проектировании таких систем играет решение вопросов синхронизации данных, балансировки нагрузки и предотвращения коллизий и ошибок, возникающих в процессе функционирования системы. Процессы синхронизации, выполняемые в рамках параллельных алгоритмов, генерируют потоки требований для выделения вычислительных ресурсов, а также получения доступа к области данных, в частности к обучающей выборке, загружаемой с файловой системы и распределяемой между отдельными параллельными блоками алгоритма. Моделирование процесса выполнения параллельных алгоритмов на основе теории массового обслуживания (ТМО) позволяет повысить эффективность их взаимодействия, оптимизировать задержки, снизить уровень противоречивость данных, обрабатываемых в распределенных системах. Применение теории массового обслуживания позволяет вычислить основные характеристики эффективности рассматриваемых параллельных вычислительных систем, определить основные показатели устойчивости в случае возникновения сбоев или ошибок.

**Алгоритмы синхронизации распределенных систем**

Среди алгоритмов синхронизации распределенных систем особый интерес представляют алгоритмы, основанные на рассылке широковещательных сообщений между отдельными узлами таких систем с целью достижения требуемого уровня консистентности. Наибольшее распространение получили алгоритмы Лэмпорта, Рикарта-Агравала и Сузуки-Касами. Первые два алгоритма используют временные метки для синхронизации обработки заявок между отдельными узлами, что создает необходимость введения дополнительных логических часов, а каждому узлы ставится в соответствие метка времени. Такой подход требует выполнения постоянной синхронизации временных меток, в противном случае процедура вычислений будет невыполнима. Алгоритм Сузуки-Касами не использует временные метки, он оперирует маркерами для определения монопольного доступа к требованиям, возникающим в процессе синхронизации. Критерий синхронизации определяется процедурой организации процесса владения маркерами. Очередность получения маркера формируется в соответствии с запросами, поступающим от других процессов в процедуре отправки широковещательных сообщений, отражающих необходимость обращения процессов к разделяемым ресурсам. Алгоритм передачи маркера, определяющего необходимость доступа к ресурсам некоторым процессом $\theta_i$ выполняется путем рассылки привилегированного сообщения $Pr_i$. В самом начале считаем, что право владения маркером принадлежит только одному процессу $\theta_i$. Для получения маркера любой из процессов $\theta_j$ выполняет рассылку сообщений $R_j$ всем оставшимся процессам $\theta_k$. При этом, вводим ограничение, связанное с тем, что процесс $\theta_j$, получивший доступ к маркеру в текущий момент времени, может периодически осуществлять у нему обращение, до тех пор, пока не будет оправлено сообщение $Pr_i$ другому процессу $\theta_{j+1}$. Определим структуру передаваемых сообщений как $R_j = R(j,n)$, $j = 1,2,\ldots,m$. В данном случае, $j$ есть порядковый номер процесса, для которого осуществляется отправка сообщения, $n$ – совокупность чисел, определяющих общее число обращение процесса $\theta_j$ для реализации входа в критическую секцию $n+1$. Из вышеописанных утверждений следуют, что для каждого процесса $\theta_j$ для которого выполняется отправка синхронизирующих сообщений, необходимо хранить наборы $RN$, включающие в себя максимальные значения из картежей $n$ для остальных процессов $\theta_{j+m}$. Формализуем представление процедуры обновления $RN$ во время поступления сообщений $R_i = R(j,n)$

$$RN[j] = \max(RN[j], n)$$

Для получения модели синхронизации для алгоритма Сузуки-Касами, рассмотрим порядок формирования и отправки сообщений между процессами $\theta_j$ и $\theta_{j+m}$. Для передачи сообщений используется формат $Pr_i(Q, LN)$, $Q$ – очередь запросов размерностью $N_Q$ для каждого из процессов $\theta_{j+m}$ для которых выполняется широковещательная рассылка, $LN$ – очередь запросов, содержащая кортежи значений, а $LN[j]$ задает порядковый номер последовательности сообщений, характерных для текущего процесса $\theta_i$. Как только процесс $\theta_i$ осуществляет выход из критической секции и освобождает доступ к распределенному ресурсу, происходит обновление очереди $LN[i] = RN[i]$ для последнего полученного сообщения $Pr_i$ соответствующего процессу $\theta_i$. После чего производим обновление очереди $RN[i] = LN[i] + 1$ для $\theta_i$. Если $\theta_i \notin Q$, добавляем $\theta_i$ в очередь $Q$. После формирования очереди $RN[i]$, если $Q \neq \varnothing$, производим отправку сообщения $Pr_i(Q[N_Q - 1], LN)$ первому из процессов $\theta_j \in Q$. Если очередь $Q = \varnothing$ процесс $\theta_i$ будет удерживать маркер, пока в $Q$ не попадет ни один поток $\theta_j$ в процессе рассылки сообщений $R_j$ процессом $\theta_i$. В таком случае очередь $Q$ будет содержать лишь те процессы, от которых были получены широковещательные сообщения на доступ к разделяемым ресурсам. Искомая модель синхронизации имеет следующий вид

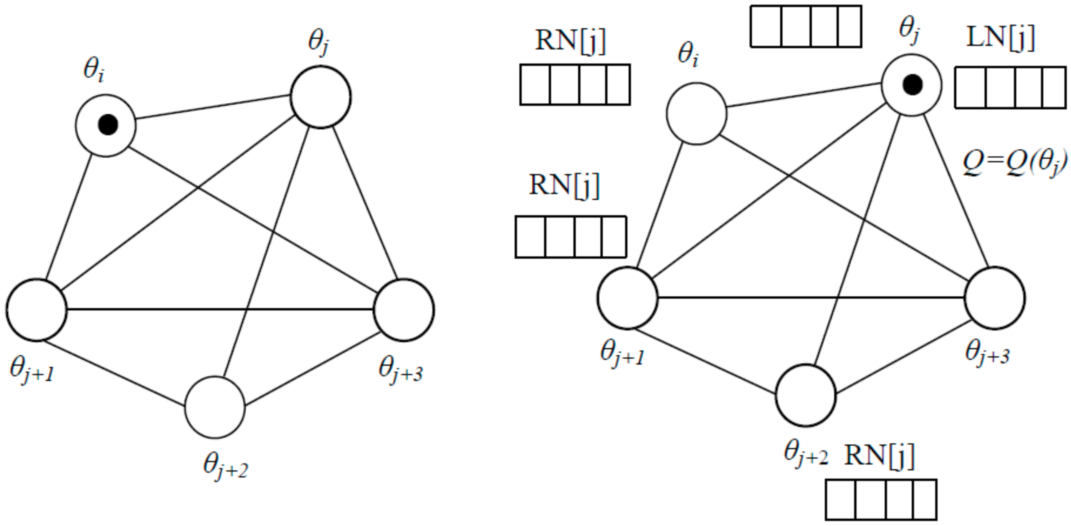



*Рис. 1. Этапы синхронизации параллельных процессов на примере процессов $\theta_i$ и $\theta_j$ с использованием алгоритма Сузуки-Касами*

В приведенном рис. 1 предполагается, что жирным обозначены процессы $\theta_{j+m}$, непосредственно связанные с процессами $\theta_i$ и $\theta_j$. Это дает возможность определить направленность процедуры синхронизации при передаче маркера между потоками. Сложность представления классической модели на основе алгоритма Сузуки-Касами заключается в отсутствии прогнозирования и оценки пропускной способности алгоритма, а также неоднозначность в определении максимальной размерности числа обращений, возникающий в процессе синхронизации. Это обусловлено тем, что параллельные системы могут запускать несколько разных заданий, распределенных между всеми потоками системы, а количество входов в критические секции для обеспечения синхронизации распределяемых ресурсов может быть неограниченным. Для решения таких проблем целесообразно использовать элементы теория массового обслуживания. В таком случае, модель синхронизации будет поддерживать и оценивать максимально допустимый поток требований необходимый для нормальной работы алгоритмов синхронизации. С учетом того, что большинство классических механизмов синхронизации можно представить в виде однолинейных систем, в рамках исследования будут рассматриваться однолинейные системы массового обслуживания (ОСМО) с задержками и стационарным потоком требований без последействий. Для задания СМО необходимо определить три основных параметра: входной поток, дисциплину очереди и механизм обслуживания заявок. В качестве дисциплине очереди будем рассматривать FIFO (обслуживается первый пришедший из потоков). Рассмотрим процедуру задания входного потока требований. Предполагается, что $t = t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ $(0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$ – моменты получения заявок на синхронизацию образуют пуассоновский поток, а длительность обработки заявки подчинена показательному закону с интенсивностью $\mu$. Если заявка на синхронизацию ресурса поступила в момент времени, когда ни один из процессов не выполнил блокировку данного ресурса, то синхронизация выполняется для первого потока, обратившегося к ресурсу, остальные обращения других потоков ставятся в очередь и будут выполняться в порядке поступления, как только первый поток освободит ресурс. Под окончанием обслуживания заявки понимается завершение блокировки ресурса отдельным потоком и выход из критической секции. Рассмотрим структуру входящего потока требований, представляющего собой совокупность требований на синхронизацию ресурсов между процессами в распределенной вычислительной системе.

Для определения функции вероятности прихода $k$ требований за время $t$ – $p_k(t)$ полагаем,

$$p_k(t+h) = \sum_{i=1}^{k} p_i(t)\, p_{k-i}(h), \;\; h > 0, \;\; t > 0 \tag{1}$$

В процессе синхронизации используется Пуассоновский поток требований без последействий $p_0(t)=e^{-\lambda t}$, поэтому выражение (1) преобразуется следующим образом:

$$p_0(h)=1-\lambda h+o(h),\ \ h\to 0 \tag{2}$$

$$p_k(t+h)=(1-\lambda h)p_k+\sum_{i=0}^{k-1}p_i(t)p_{k-1}(h)+o(h). \tag{3}$$

Из выражения (3), с учетом того, что $p_{k-n}(h)/h=\lambda a_{k-i}$ можно получить следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h}=-\lambda p_k(t)+\sum_{i=0}^{k-1}p_i(t)\frac{p_{k-i}(h)}{h}+o(1) \tag{4}$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt}=-\lambda p_k(t)+\lambda\sum_{i=0}^{k-1}a_{k-i}p_i(t). \tag{5}$$

При $k=0$ получается частный случай уравнения (5)

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t) \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнение Эрланга в соответствии с формулой (5) будет иметь следующий вид

$$\begin{cases}\dfrac{df_1(t)}{dt}=\lambda a_1 f_0(t),\\ \dfrac{df_2(t)}{dt}=\lambda\left(a_1 f_1(t)+a_1 f_0(t)\right),\\ \dfrac{df_k(t)}{dt}=\lambda\left(a_1 f_{k-1}(t)+a_2 f_{k-2}(t)+\ldots+a_k f_0(t)\right).\end{cases} \tag{7}$$

где $f_k(t)=p_k(t)/e^{\lambda t},\ p_k(0)=f_k(0)=0.$

Одним из способов решения системы уравнений (7) является метод, основанный на использовании производящей функции. В таком случае, введем обобщенное обозначение производящей функции для определения $p_k(t)$

$$F(t+x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t)x^k \tag{8}$$

Тогда формула (5) и ее частный случай формула (6) могут быть преобразованы за счет их умножения на множитель $x^k$ с дальнейшем суммирование по всем $k$ из полуинтервала $k\in[0;\infty)$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}&=-\lambda F+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}x^k\sum_{i=1}^{k}a_i p_{k-i}(t)=\\ &=-\lambda F+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}a_i\sum_{j=0}^{\infty}p_j(t)x^{i+j}=-\lambda F+\lambda F(t,x)\sum_{i=1}^{\infty}a_i x^i\end{aligned} \tag{9}$$

Для получения искомой производящей функции $F(t,x)$ для стационарного потока без последействия введем следующее обозначение

$$S(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i \tag{9}$$

Так как $F(0,x)=p_0(0)=1$, определим выражение для нахождения $F(t,x)$

$$F(t,x)=e^{\lambda(S(x)-1)t} \tag{10}$$

Для оценки вероятности $p_k(t)$ на основе производящей функции $F(t,x)$, полагаем, что мы имеем временные срезы, в которые поступают требования, составляющие стационарный поток с интенсивностью $\lambda$. В таком случае, вероятность $a_k$ будет является характеристикой появления $k$ требований в текущий момент времени. Так как поток требований является стационарным без последействия, вероятность $a_k$ будет является безусловной, так как нам не важен вклад предыдущих требований, а также порядок следования требований, поступающих от процессов, обрабатываемых алгоритмами синхронизации. Определим вероятность $p_k(t)$ поступления $k$ требований за момент времени $t$

$$\begin{gathered} p_k(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}P_j(k) \\ F(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}P_j(k)x^k=(S(x))^j=\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i x^i\right)^j \end{gathered} \tag{11}$$

где $P_j(k)$ – вероятность наступления $k$ требований за моменты времени $j$.

## Представление процессов синхронизации распределенных систем в виде модели системы массового обслуживания

Для определения задержек синхронизации, а также определения вероятности перехода в состояние синхронизации и выхода из него, необходимо определить закон распределения времени обслуживания заявок. Полагаем, что распределенная система синхронизации представляет собой СМО с ожиданием, где каждый поток ожидает получение доступа к ресурсу, до тех пор, пока им владеет другой процесс. В исследовании полагаем, что имеет систему ожидания смешанного типа, где задается максимальный период ожидания синхронизации $T^s_{max}$ для каждого и процессов, а длительности обслуживания заявок на синхронизации будут являться независимыми случайными величинами, не зависящими от входного потока требований и имеющими одинаковый закон распределения. После истечения периода ожидания, заявка на обеспечение синхронизации является необработанной, а алгоритм синхронизации генерирует исключение. При этом период ожидания может иметь строго определенное значение или являться случайной величиной, характеристики которой определяются в зависимости от загруженности вычислительной системы. В таком случае интенсивность выходящего потока заявок будет равно $\mu=1/\mathbb{M}(T^s_{обсл.})$, где $T^s_{обсл.}$ – среднее время обслуживания. Предполагается, что время обслуживания заявок имеет показательное распределение следующего вида

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases}1-e^{-\mu\sigma}, & \sigma\ge 0\\ 0, & \sigma<0\end{cases}, \tag{12}$$

где $\sigma$ может принимать значения $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ – длительности обслуживания $n$ типов заявок, поступающих на вход СМО системы синхронизации.

Введенные предположения, связанные входящими потоками требований, временами обслуживания и временами ожидания в очереди, позволяют нам использовать математических аппарат Марковских случайных процессов $\xi(t)$ (цепей) для моделирования процессов синхронизации:

$$P\left(\xi(t_{n+1})=X_n|\xi(t_1)=X_1,\ldots,\xi(t_n)=X_n\right)=P\left(\xi(t_{n+1})=X_n|\xi(t_n)=X_n\right) \tag{13}$$

Для описания таких процессов необходимо задать два типа вероятностей: начальные вероятности $P\left(\xi(t_0)=j\right)=P_j(0)$, условные вероятности перехода $P\left(\xi(t_{n+k})|\xi(t_n)\right)$ (переходные вероятности). Для однородных Марковских процессов вероятность $P\left(\xi(t_{n+k})|\xi(t_n)\right)$ зависит лишь от смежных временных срезов, то есть срезы $t=(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1})$ не будут вносить вклад в распределение вероятностей переходов из состояния $t_n$ в $t_{n+1}$. Переходная вероятность для однородного марковского процесса задается следующим образом:

$$P\left(\xi\left(t_{n+1}\right)=j|\xi\left(t_n\right)=i\right)=P_{ij}\left(\Delta t\right), \quad \sum_j P_{ij}\left(\Delta t\right)=1 \quad \forall \Delta t \tag{14}$$

где $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ – разность между временными срезами $t_{n+1}$ и $t_n$, $i, j$ – число требований присутствующих в системе после завершения обслуживания двух смежный требований для моментов $t_n$ и $t_{n+1}$ соответственно.

Простейший граф переходов для СМО процесса синхронизации с интенсивностями, входящего и выходящего потоков заявок $\lambda_m$ и $\mu_m$ будет иметь следующий вид:

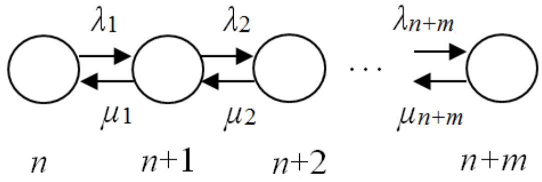



*Рис. 2. Граф Марковского процесса для СМО синхронизации*

Из рис. 2 следует, что $n$ – описывает начальное состояние системы (канал свободен), переход в состояние $n+1$ определяет вход в критическую секцию и выполнения синхронизации для процесса $Q_1$, $n+2$ в системе имеется два процесса $Q_1$ и $Q_2$ (для $Q_1$ выполняется синхронизации, $Q_2$ находится в режиме ожидания), $n+m$ – выполнение синхронизации для процесса $Q_m$ и наличие $Q=\left(Q_1,Q_2,\ldots,Q_{m-1}\right)$ потоков, ожидающих синхронизации. В таком случае получаем условие, из которого следует, что при входе в критическую секцию, синхронизация для каждого из процессов, выполняется только один раз. Отметим, что при появлении события исключения внутри критической секции, ресурс освобождается текущим процессом $Q_i$ для исключения взаимной блокировки. Такой подход позволяет использовать СМО на основе Марковских цепей для моделирования циклических алгоритмов с синхронизацией. При этом полагаем, что при использовании математического аппарата Марковских цепей переходы из состояния $n$ в состояние $n+1$ происходят под воздействием простейшего потока требований $(P\left(t\right)=e^{-\lambda t})$. Рассмотрим построение марковской СМО с ожиданием для реализации модели Сузуки-Касами, представленной на рис. 1. Для этого запишем вероятности для переходов маркеров между процессами, ожидающими синхронизации, в виде матрицы переходных вероятностей

$$(P_{ij}\left(t\right))=\begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & \cdots & P_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \sum_{j=1}^{n} P_{ij}=1 \tag{15}$$

Вероятности $P\left(\xi\left(t_0\right)\right)$ и $P\left(\xi\left(t_{n+k}\right)|\xi\left(t_n\right)\right)$ удовлетворяют уравнениям Чепмена-Колмогорова. Вероятности состояний $P\left(\xi\left(t_{n+m}\right)\right)$ как функции, зависящие от времени $t_{n+m}$ могут быть получены из уравнений Колмогорова. Для этого введем следующие обозначения $P\left(t\right)=\left(P_{ij}\left(t\right)\right)$ – матрица переходных вероятностей для случайного процесса $\xi\left(t_n\right)$, $t\geq 0$ Запишем уравнения Колмогорова в следующей форме

$$\frac{dP\left(t\right)}{dt}=P\left(t\right)A\left(t\right), \frac{dP\left(t\right)}{dt}=A\left(t\right)P\left(t\right), \tag{16}$$
$$P\left(0\right)=I$$

где $I$ – единичная матрица.

В уравнении (16) множитель $A\left(t\right)=a_{ij}$ представляет собой матрицу инфинитезимальных переходов, образованную из производных, взятых для каждого их элементов матрицы переходов $P\left(t\right)$ в нуле. Матрица инфинитезимальных переходов имеет следующий вид

$$A(t)=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\ . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix} \tag{17}$$

Элементы матрицы переходов $A(t)$ можно задать в виде предела при $t \to 0$

$$\begin{gathered} a_{ii}(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\left(p_{ii}(t)-1\right)}{t}<0, \\ a_{ij}(t)=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ii}(t)}{t}>0, i\neq j \end{gathered} \tag{18}$$

С учетом матрицы инфинитезимальных переходов, уравнения Колмогорова (16) для $P(t)$ могут быть переписаны в следующей развернутой форме

$$\begin{gathered} \frac{dP_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}(t)a_{kj}(t), \\ \frac{dP_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{kj}(t)P_{ik}(t), i,j=0,1,\dots n \end{gathered} \tag{19}$$

Отметим, что при $t=0$ получим частный случай уравнений Колмогорова (19)

$$P(0)=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases} \tag{20}$$

С учетом матрица инфинитезимальных переходов, получаем дифференциально-разностные уравнения переходных вероятностей $P_{ij}(t)$, характеризующих процесс гибели и размножения

$$\begin{gathered} \frac{dP_x(t)}{dt}=\lambda P_{x-1}(t)-(\lambda+\mu)P_x(t)+\mu P_{x+1}(t), \quad x=1,2,\dots,n, \\ \frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \end{gathered} \tag{21}$$

Для решения уравнения (21) воспользуемся производящей функцией $F(S,t)$ и преобразованием Лапласа. Производящая функция, соответствующая вероятностям $P_x(t)$, будет иметь следующий вид

$$F(S,t)=\sum_{x=0}^{\infty}P_x(t)S^X, \ |S|\leq 1. \tag{22}$$

Используя выражение для производящей функции, перепишем выражение (21):

$$S\frac{dF(S,t)}{dt}=(1-S)\left((\mu-\lambda S)F(S,t)-\mu P_0(t)\right) \tag{23}$$

Допустим, что число заявок на синхронизации в момент времени $t=0$ будет иметь значение $X(0)=x_0$, тогда для производящей функции $F(S,t)$ можно задать преобразование Лапласа $f(S,t)=L(F(S,t))$. С учетом введенных ограничений $X(0)=x_0$, производящая функция может быть записана как $F(S,0)=S^{x_0}$. Тогда выражение (23) можно привести к следующему виду:

$$f(S,z)=\frac{S^{x_0+1}-\mu(1-S)l(z)}{zS-(1-S)(\mu-\lambda S)}, \tag{24}$$

где $l(z)=L(P_0(t))$ – преобразование Лапласа для $P_0(t)$.

Из определения преобразования Лапласа для функции $F(S,t)$ получаем, что $f(S,z)$ будет конечна при $|S| \le 1$. Тогда в этой области, нулевые значения числителя и знаменателя будут совпадать:

$$\delta_{1,2} = \left( \frac{(\lambda+\mu+z) \mp \left((\lambda+\mu+z)^2 - 4\lambda\mu\right)^{\frac{1}{2}}}{2\lambda} \right), \tag{25}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{\lambda+\mu+z}{\lambda}, \delta_1 \times \delta_2 = \frac{\mu}{\lambda},$$

где $z = -\lambda(1-\delta_1)(1-\delta_2)$.

Применяя теорему Руше, получаем, что знаменатель выражения (24) будет принимать значение нуля только один раз внутри области $|S| = 1$. В таком случае, выражение для производящей функции может быть преобразовано путем сокращения на $S - \delta_1$ и разложения в ряд:

$$f(S,z) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\theta^{x_0+i}\sqrt{(\theta-\omega)}} - \frac{1}{\theta^{x_0+i+1} - \theta^{x_0+i-1}} + \frac{1}{\theta^{|x_0-i|+1} - \theta^{|x_0-i|-1}} \right) \sqrt{\omega^{x_0-i-1}} S^i \tag{26}$$

где $\omega = \mu/\lambda,\ \delta_1 = \sqrt{\omega}/\theta,\ \delta_1 = \sqrt{\omega}\theta.$

Запишем преобразование Лапласа для производной функции $F(S,t)$ с использованием формулы (23):

$$L\left(\frac{dF(S,t)}{dt}\right) = zf(z,S) - S^{x_0} = -\lambda(1-\delta_1)(1-\delta_2) f(z,S) - S^{x_0} \tag{27}$$

Подставляя выражение для преобразования Лапласа $f(S,z)$ из выражения (26) в формулу (27) сможем определить искомое выражение функции $P_x(t)$ в качестве параметра множителя $S^i$. Несложно доказать, что параметр $L\left(\frac{dP_x(t)}{dt}\right)$ будет представлять собой сумму первых шести членов ряда, каждый из которых можно определить в виде следующего соотношения:

$$\frac{1}{\theta^{n+1}} + \frac{1}{\theta^{n-1}}, \quad n \ge 0 \tag{28}$$

Обратное преобразование Лапласа для данного параметра запишем с использованием функции Бесселя $I_n(x)$ в следующей форме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i}^{c+i} \frac{e^{zi}}{\theta^{n+1} - \theta^{n-1}} dz = \sqrt{\lambda\mu}\sqrt{e^{(\lambda+\mu)t}} \times I_n\left(2\sqrt{\lambda\mu}t\right) \tag{29}$$

Подставляя полученные соотношения в выражение (21) получаем искомое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dP_i(t)}{dt} = \sqrt{(\mu/\lambda)^{x_0-i}}\, e^{-(\lambda+\mu)t} - \Big( (\lambda+\mu) I'_{x_0-i} + \sqrt{\lambda\mu} I'_{x_0-i-1} + \\ + \sqrt{\lambda\mu} I'_{x_0-i+1} + I'_{x_0+i+2} + 2\sqrt{(\lambda+\mu)}\, I'_{x_0+i+1} + \mu I'_{x_0+i} \Big), \end{aligned} \tag{30}$$

где $I'_n = I_n\left(2\sqrt{(\lambda+\mu)}\,t\right)$.

Отметим, что из выражения (30) можно получить распределение для длины очереди заявок синхронизации процессом путем интегрирования правой части выражения.

**Результаты**

Модели синхронизации на основе СМО с практической точки обладают достаточной гибкостью, позволяют контролировать процесс блокировки разделяемых между процессами ресурсов, а также снижают риск возникновения взаимных блокировок. Марковский подход позволяет в любой момент времени осуществлять оценку перехода в состояние синхронизации для определенного процесса, что дает возможность контролировать процедуру рассылки маркеров согласно модели Сузуки-Касами. В данной работе в качестве входного потока был рассмотрел Пуассоновский поток, в определенных ситуациях допустимо использование других распределений. В таком случае для расчета вероятностных характеристик обслуживания может быть использован математический аппарат вложенных цепей Маркова. Основная идея метода вложенных цепей Маркова заключается к сведению любого случайного процесса, не являющегося марковским к марковскому процессу. В результате из исходного случайного процесса выбираются только те подпроцессы, характеристики которых могут образовать Марковскую цепь. При этом временные срезы формируются случайным образом в зависимости от параметров исходного процесса.

Для оценки эффективности предложенного подхода синхронизации, нами рассмотрена возможность применения данной системы для параллельной платформы Apache Spark. Данная система используется для решения сложных вычислительных задач, в частности, реализации алгоритмов машинного обучения. Нами рассмотрены возможности встроенных алгоритмов синхронизации и произведено сравнения с разработанным алгоритмом синхронизации. Стоит отметить, что Apache Spark использует встроенный механизм широковещательной рассылки, работающий по протоколу BitTorrent, обладающему базовыми возможностями для реализации процедур широковещательной рассылки. В основе данного алгоритма лежит возможность разделения блоков между отдельными узлами (процессами). После подключения клиента к мастер-узлу, выступающему в качестве трекера, клиенту передаются адреса остальных клиентов. После этого происходит подключение между клиентами и обмен данными. В Spark в качестве клиентов выступают параллельные процессы, которые инициализирую процедуру получения доступа к общим ресурсам. Такой алгоритм синхронизации имеет один важный недостаток, связанный с тем, что в каждом процессе, будут накапливаться фрагменты данных разделяемых ресурсов, что требует реализации дополнительного механизма проверки их целостности.

Для получения экспериментальных данных рассмотрим типовой кластер Apache Spark развернутый с использованием среды виртуализации VMWare ESXI 6.7, с 10 узлами, распределенными на операционной системе Debian 10. В качестве тестовых данных используется несколько файлов размером до 1 Гб, размещенных в распределенной файловой системе. Приведем сравнение алгоритма BitTorrent, поставляемого в стандартной конфигурации Spark и алгоритма синхронизации на основе модели Сузуки-Касами и СМО (СКСМО).

Таблица 1

*Сравнение алгоритмов синхронизации*

| Алгоритм | Число взаимных блокировок на 1000 запросов синхронизации | Время синхронизации данных объемом 100 Мбайт | Максимальная длина очереди процессов |
|---|---|---|---|
| BitTorrent | 10 | 500 миллисек. | не ограничено |
| СКСМО | 0 | 100 миллисек. | не ограничено |

Из табл. 1 следует, что применение алгоритма СКСМО позволяет снизить порог числа взаимных блокировок, что хорошо сказывается на производительности и отказоустойчивости параллельных алгоритмов для системы Spark. Этот показатель особенно важен при решении задач обучения и вероятностного вывода, так как при возникновении такого рода исключений, процесс обучения будет либо полностью остановлен и обучение необходимо повторить с самого начала, либо часть обучающей выборки не будет учтена в формировании начального распределения вероятностей $P(X_0)$, что приведет к неправильным расчетам на основе данных алгоритмов. Использование теории массового обслуживания позволяет оценить возможности параллельной системы с точки зрения надежности и эффективности, а также оценить общий объем требований, которые возможно обработать такой системой. Оценить возможности по ожиданию доступа к разделяемым ресурсам в процессе выполнения данной синхронизации, а также построить распределения вероятностей для состояния входа в критическую секцию и выхода из нее для каждого из параллельных процессов. Такой подход позволяет адаптировать параллельные системы для решения задач машинного обучения, классификации данных и статистического анализа в условиях большого объема входных данных.

## Заключение

Модели на основе передачи маркера, в частности модель Сузуки-Касами, представляют собой универсальные инструменты для организации процесса синхронизации распределенных систем. Однако при современном уровне сложности решаемых задач, требуется оптимизация, направленная на снижение числа исключений и блокировок, возникающих в процессе передачи маркеров внутри сети. Применение теории массового обслуживания в сочетании с алгоритмом Сузуки-Касами позволяет бороться с данными недостатками за счет введения вероятностных характеристик процесса передачи маркера, а оценки интенсивности входного потока требований и временных характеристик обслуживания, связанных с распределением времени ожидания на обработку заявок синхронизации. Для расчета характеристик СМО были использованы дискретные Марковские процессы. Расчеты позволяют оценить возможности распределенной системы синхронизации при обработке ресурсов, с различной интенсивностью и размером данных. Разработанная система может быть адаптирована к более широкому классу распределений входящего потока требований путем использования метода вложенных цепей Маркова или метода разложения случайного процесса на фазы (метод псевдосостояний).

Для проведения эксперимента разработан модуль синхронизации для параллельной системы Apache Spark, значительно расширяющий возможности данной системы, повышающей ее устойчивость к возникновению исключений и взаимных блокировок, а также позволяющий повысить эффективность распределения системных ресурсов в процессе выполнения параллельных блоков и задач с встроенной синхронизацией.

## Литература

1. *Burns B.* Designing Distributed Systems: Patterns and Paradigms for Scalable Reliable Services / B. Burns. – S: O'Relly, 2018. – 166 p.

2. *Suzuki I, Kasami T.* A distributed mutual exclusion algorithm / I Suzuki, T Kasami // ACM Transaction on Computer Systems, 1985. – Vol. 3, №. 4. – P. 344–349.

3. *Tanenbaum A.S.* Distributed Systems: Principle and Paradigms / A.S. Tanenbaum, M. Steen. – NJ : Prentice Hall, 2017. – 582 p.

4. *Zaharia M.* An Architecture for Fast and General Data Processing on Large Clusters: Dissertation doctor of philosophy in computer science / University of California, Berkeley, 2013. – 113 p.

5. *Зиновьева Л. И., Терпугов А. Ф.* Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от времени ожидания / Л. И. Зиновьева, А. Ф. Терпугов // Автоматика и телемеханика, 1981. – №1. – С. 27–30.

6. *Климов Г.* Теория массового обслуживания / Г. Климов. – М. : Издательство Московского университета, 2011. – 312 с.

7. *Лифшиц А. Л.* Статистическое моделирования систем массового обслуживания / А. Л. Лифшиц, Э. А. Мальц. – М. : Сов. Радио, 1978. – 248 с.

8. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. – М. : Мир, 2006. – 424 с.

9. *Топорков В. В.* Модели распределенных вычислений / В. В. Топорков. – М. : Физматлит, 2004. – 320 с.

10. *Уолрэнд Дж.* Введение в теорию массового обслуживания: Пер. с англ. / Дж. Уолрэнд. – М. : Мир, 1993. – 336 с.

УДК 517

# ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ АНТЕННЫХ УСТРОЙСТВ

**Е. А. Алашеева, Н. В. Рогова**

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики*

При математическом моделировании реальной физической задачи важно найти самый оптимальный способ построения алгоритма. Нужно подобрать такой математический аппарат, который будет:

– прост в понимании для инженеров без специального математического образования;

– обладать быстродействием;

– быть гибким для возможных дальнейших модификаций.

Поэтому роль математика заключается в подборе наиболее удобных математических объектов для решения поставленной проблемы.

Построение математической модели для расчета характеристик антенного устройства состоит из трех этапов:

– сведение задачи к интегро-дифференциальному уравнению одномерному или двумерному в зависимости от конфигурации антенного устройства;

– выбор оптимального для конкретной электродинамической задачи решения полученного уравнения;

– графическое представление расчетов.

Рассмотрим насколько эффективно использовать в качестве базисных функций систему из тригонометрических сплайнов вида (1) для решения полученного интегро-дифференциального уравнения при моделировании различных антенных устройств [1].

$$f(t)=\begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{t-x_{j-1}}{2}\right)\sin^{-1}\left(\dfrac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\right)\sin^{-1}\left(\dfrac{x_j-x_{j-1}}{2}\right), \quad t\in\left[x_{j-1},x_j\right) \\ \dfrac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}-t\right)\cos\left(\dfrac{x_j-x_{j-1}}{2}\right)+ \\ +\sin\left(t-\dfrac{x_{j-1}+x_j}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\right)+ \\ +\sin\left(\dfrac{x_j+x_{j-1}-x_{j+1}-x_{j+2}}{2}\right) \end{array}\right]\times \\ \times\sin^{-1}\left(\dfrac{x_{j+1}-x_j}{2}\right)\sin^{-1}\left(\dfrac{x_{j+2}-x_j}{2}\right)in^{-1}\left(\dfrac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\right), t\in\left[x_j,x_{j+1}\right) \\ \sin^2\left(\dfrac{t-x_{j+2}}{2}\right)\sin^{-1}\left(\dfrac{x_{j+2}-x_j}{2}\right)\sin^{-1}\left(\dfrac{x_{j+1}-x_j}{2}\right), \quad t\in\left[x_{j+1},x_j+2\right) \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим сначала насколько целесообразно использовать базис из данных функции при расчете характеристик тонкопроволочной антенны (рис.1)

Математическая модель данной задачи представляет собой уравнение:

$$E(l)=\int_L\left[i\omega\mu_0 G(l,l')I(l')-\frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\frac{\partial G(l,l')}{\partial l}\frac{\partial l(l')}{\partial l'}\right]dl. \tag{2}$$

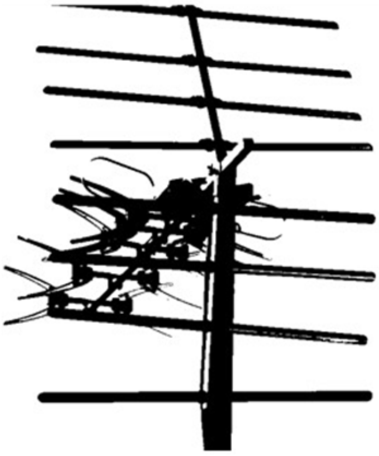


*Рис. 1. Тонкопроволочная антенна*

Будем решать данное уравнение методом Галеркина [2]. В качестве базисных функций будем по очереди использовать сплайны степени $m-1$ дефекта 1,сплайновые вейвлеты, тригонометрические сплайны. Результаты по времени вычисления представим в табл. 1.

Таблица 1

*Время решения уравнения для тонкопроволочной антенны с использованием различных систем базисных функций*

| Наименование базисной функции | Сплайны степени $m$–1 дефекта 1 | Сплайновые вейвлеты | Тригонометрические сплайны |
|---|---|---|---|
| Время работы прораммы | 1мин. | 30 сек. | 5 мин. |

Можно сделать вывод, что в данном случае наиболее эффективно использовать для решения сплайновые вейвлеты.

Теперь рассмотрим насколько эффективно использовать в качестве базисных функций тригонометрические сплайны для расчета параболической антенны (рис. 2)

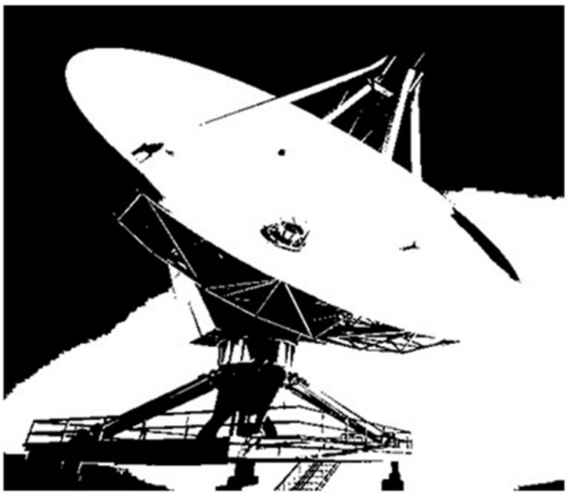


*Рис. 2. Параболическая антенна*

Решение данной задачи сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$-2H_{0y}\left(\vec{r}_0\right) = j_{0x}\left(\vec{r}_0\right) + \iint\limits_S \left(-2j_{0x}\left(\vec{r}\right)\frac{\partial G}{\partial n}\sqrt{1+4x^2}\right)dxdy \tag{3}$$

$$-2H_{0y}\left(\vec{r}_0\right)=j_{0x}\left(\vec{r}_0\right)+\iint\limits_S\left(-2j_{0x}\left(\vec{r}\right)\frac{\partial G}{\partial n}\sqrt{1+4x^2}\right)dxdy \qquad (4)$$

$$\vec{j}_s=j_{0x}\vec{x}_0+j_{0y}\vec{y}_0. \qquad (5)$$

Данное уравнение также будем решать методом Галеркина [3]. В качестве базисных функций будем по очереди использовать сплайновые вейвлеты, тригонометрические сплайны, ряды Фурье [4]. Результаты по времени вычисления представим в табл. 2.

Таблица 2

*Время решения уравнения для параболической антенны с использованием различных систем базисных функций*

| Наименование базисной функции | Ряды Фурье | Сплайновые вейвлеты | Тригонометрические сплайны |
|---|---|---|---|
| Время работы прораммы | 5 мин. | 15 мин. | 15 мин. |

Можно сделать вывод, что в данном случае наиболее эффективно использовать для решения в качестве базисных функций ряды Фурье.

Итак, в разобранных задачах использование тригонометрических сплайнов,как базиса оказалось нецелесообразно. Однако, возможно использование данных функций даст эффект при моделировании сложных антенных структур.

## Литература


1. *Бурова, И. К.* О гладкости сплайнов/ И. К. Бурова, Ю. К. Демьянович // Математическое моделирование. – 2004. – № 12. – С. 40–43.

2. *Алашеева, Е. А.* Метод вейвлет-Галеркина решения интегральных уравнений Фредгольма в двумерных областях / Е. А. Алашеева, И. А. Блатов // Вестник СамГУ. – 2006. – № 9. – С. 24–29.

3. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы. Решения задач и упражнения: Учебное пособие / Н. С. Бахвалов, А. А. Корнев, Е. В. Чижонков. – М. : Бином, 2016. – 352 с.

4. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы: В 2 кн. Кн.1. Численный анализ: Учебник / Н. Н. Калиткин. – М. : Academia, 2018. – 48 с.

УДК 514.122.2; 517.7

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ГИПЕРБОЛЫ

**К. Н. Анахаев[1], А. Х. Дышеков[2], К. К. Анахаев[2], С. Ф. Теммоева[2], К. Г. Жангоразов[3]**

*[1]Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Нальчик*
*[2]Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет, Нальчик*
*[3]Центрводресурсы РСО-Алания, Владикавказ*

**Аннотация.** Гиперболические кривые используются при проведении различных теоретических и прикладных исследований, в том числе в области водохозяйственного и природоохранного строительства. Точное определение длины дуги гиперболы представлено достаточно сложной зависимостью, основанной на «неберущихся» неполных эллиптических интегралах, что затрудняет проведение аналитических расчётов и др. Предложенные элементарные зависимости для определения длины дуги гиперболы дают весьма близкое приближение (до 1 %) к точными значениям и рекомендуются для использования в различных областях науки и техники.
**Ключевые слова:** конические сечения, гиперболическая кривая, гипербола, длина дуги гиперболы, неполные эллиптические интегралы, водохозяйственные объекты.

Гиперболическая кривая (гипербола) является каноническим сечением и образуется при нормальном пересечении плоскостью образующей поверхности тупоугольного конуса [1]. Разность расстояний всех точек гиперболы от двух фокусов, расположенных на действительной оси ($\mp c$), равна постоянной величине $2a$, при этом значение $c$ выражается через полуоси гиперболы $c=\sqrt{a^2+b^2}$, где $a$ и $b$ – действительная и мнимая полуоси. Величины $\varepsilon = c/a > 1$ и $p = b^2/a$ называются, соответственно, эксцентриситетом гиперболы и фокальным параметром – половиной вертикальной хорды от фокуса гиперболы [1, 2].

Уравнения гиперболы выражаются зависимостями:

– в канонической форме $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1;$ (1)

– в параметрической форме $\begin{cases} x = a\cdot \mathrm{ch}(t) \\ y = b\cdot \mathrm{sh}(t); \end{cases}$ (2)

где $t$ – параметр уравнений.

Гиперболические кривые используются при проведении различных теоретических и практических исследований, в том числе связанных с определением траекторий полетов тел (в том числе при взлёте-посадке самолётов), очертаний форм объектов, выражением закона Бойля-Мариотта $PV = const$ для газов ($P$ – объём; $V$ – давление), оптимизации логистических маршрутов [1] и т. д. В частности, определение длины дуги гиперболы востребована и в области водохозяйственного и природоохранного строительства при расчётах различных объектов гиперболического очертания, таких как поверхности береговых склонов, линии скольжения оползневых массивов, береговые линии водотоков и струенаправляющие дамбы водозаборных гидроузлов, водосливные поверхности бетонных плотин и тоннельных (башенных) водосбросов, траекторий свободного падения водного потока на водопадах и водосбросах арочных плотин и др. Точное значение длины гиперболы определяется достаточно сложной зависимостью, основанной на «неберущихся» эллиптических интегралах 1 и 2 рода, что затрудняет проведение аналитических расчётов. Для наглядности приведем известную [3] формулу для расчёта длины дуги гиперболы (от вершины $A$ до заданной точки $M$ с параметром $t_1$) на основе преобразований её параметрического уравнения (2) в виде:

$$L=\int_0^{t_1}\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2}\,dt=\int_0^{t_1}\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2\,t+b^2\,\mathrm{ch}^2\,t}\,dt=\int_0^{t_1}\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2\,t+b^2\left(1+\mathrm{sh}^2\,t\right)}\,dt=$$
$$=\int_0^{t_1}\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2\,t+b^2\,\mathrm{ch}^2\,t}\,dt=\int_0^{t_1}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\mathrm{sh}^2\,t+b^2}\,dt. \tag{3}$$

При замене переменной

$$\begin{cases}\tau=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{sh}\,t}{b};\quad \tau_1=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{sh}\,t_1}{b};\\ dt=\dfrac{bd\tau}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\cos^2\tau+b^2\sin^2\tau}\cdot\cos\tau};\ \lambda=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases} \tag{4}$$

формула (3) преобразуется к виду

$$L=\frac{a}{\lambda}\left(\sqrt{1-\lambda^2\tau_1}\cdot\mathrm{tg}\,\tau_1-E\left(\lambda,\tau_1\right)+\left(1-\lambda^2\right)\cdot F\left(\lambda,\tau_1\right)\right), \tag{5}$$

в которой величины $F\left(\lambda,\tau_1\right)$ и $E\left(\lambda,\tau_1\right)$ являются, соответственно, неполными эллиптическими интегралами 1 и 2 рода при модуле $\lambda$ и модулярном угле $\tau_1$, рассчитываемым по формулам (4) при характеристиках гиперболы $a$, $b$ и параметре заданной точки $t_1$. Указанные эллиптические интегралы не выражаются через элементарные функции [4–9] и аналитическое вычисление их значений представляет собой сложную задачу. При этом, численные решения, дающие практически точные значения интегралов для отдельных точек, ограничены в возможностях выявления внутренних взаимосвязей исходных факторов и оценке их влияния на промежуточные и итоговые результаты рассматриваемой задачи, что обусловливает актуальность и востребованность дальнейшего развития и совершенствования аналитических методов решения задач.

В связи с изложенным ниже предлагаются весьма «простые» зависимости для определения длины дуги от вершины гиперболы до заданной на ней точки, основанные на суммарном представлении линейных зависимостей для участков – до ($0\le t<t_c$) и после ($t\ge t_c$) фокуса гиперболы, в виде:

$$\begin{cases}-\text{ при } x\ge c \text{ (или } t\ge t_c) & L=1.01\left[\sqrt{p^2+\left(c-a\right)^2}+\sqrt{\left(x-c\right)^2+\left(y-p\right)^2}\right];\\ -\text{ при } a\le x<c \text{ (или } 0\le t<t_c) & L=1.01\sqrt{\left(x-a\right)^2+y},\end{cases} \tag{6}$$

в которых $x$ и $y$ – координаты заданной точки; $t_c$ – параметр функции в фокусе гиперболы, равный $t_c=Arch\left(c/a\right)$; $p$ – фокальный параметр гиперболы.

При этом длина дуги между двумя произвольно расположенными точками гиперболы находится как разность между значениями длин кривых, отсчитываемых от вершины гиперболы для каждой из этих точек в отдельности.

В частности, значение длины дуги равносторонней гиперболы $XY=-1$ ($a=b=\sqrt{2}$) между точками $X_1=0.5$; $X_2=1$ (где $X$ и $Y$ – координаты по осям асимптот равносторонней гиперболы), определенное по методу Зельдовича Я. Б. [10, с. 207, 540] на основе удержания двух первых членов в формуле бинома Ньютона, равно 1.146 (+1.2 %) при точном её значении 1.132. Для данного случая значения координат $x$ рассматриваемых точек в прямоугольной («правильной») системе координат, определенные по зависимости [1]

$$x_i=X_i\cos\alpha-Y_i\sin\alpha,$$

где $\alpha=\pi/4$ – угол поворота координатных осей асимптот, соответственно, будут равны $x_1=1.25\sqrt{2}$; $x_2=\sqrt{2}$, а результат расчёта по предлагаемой формуле (6) равен 1.129 (–0.2 %), что практически полностью согласуется с точным значением.

Сравнение расчётов длины дуги гиперболы по предлагаемым формулам (6) с точными значениями зависимости (5) (и программы «Mathlab») даёт весьма близкие результаты (до 1 %) для широкого диапазона изменений параметров гиперболы.

## Заключение

Гиперболические кривые используются при проведении теоретических и практических исследований, в том числе в области водохозяйственного и природоохранного строительства при расчётах различных объектов гиперболического очертания. При этом известный метод для точного определения длины дуги гиперболы представлен достаточно сложной зависимостью, основанной на «неберущихся» неполных эллиптических интегралах, что затрудняет проведение аналитических расчётов.

Предложенные элементарные зависимости (6) для определения длины дуги гиперболы дают весьма близкие приближения (до 1 %) к точным значениям и рекомендуются для использования в различных областях науки и техники.

## Литература


1. *Фильчаков П. Ф.* Справочник по высшей математике. – Киев : Наукова думка, 1973. – 743 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – М. : Наука. 1980. – 975 с.
3. Длина дуги гиперболы. – http://cyclowiki.org/Длина_дуги_гиперболы
4. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М. : Наука, 1977. – 342 с.
5. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические интегралы // Справочник по специальным функциям. Под редакцией Абрамовица М. и Стиган И. – М. : Наука, 1979. – С. 401–441.
6. *Анахаев К. Н.* О методах расчета потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов Якоби // Гидротехническое строительство. – 2008. – № 8. – С. 7–9.
7. *Анахаев К. Н.* О совершенствовании гидромеханических методов расчета потенциальных (фильтрационных) потоков // «Инженерные системы – 2009». Труды междунар. научно-практ. конф. Т. 2. – М. : РУДН, 2009. – С. 588–595.
8. *Анахаев К. Н.* О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Доклады Академии наук. – 2017. – Т. 473, № 2. – С. 151–153.
9. *Анахаев К. Н.* Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. – 2020. – Т. 491, № 2. – С. 24–29.
10. *Зельдович Я. Б.* Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. – М. : Наука, 1970. – 560 с.

УДК 531, 004.021

# РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ JULIA

**А. Д. Антошкин, А. В. Чередниченко**

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** В данной работе рассмотрена реализация алгоритма метода конечных элементов на примере задачи механики твердого тела с использованием языка программирования Julia. Описаны основные особенности языка, использованные при реализации. Приведены результаты вычислений на примере задачи Кирша. Произведено сравнение полученных результатов с результатами расчетов в конечноэлементном пакете Code_Aster.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, теория упругости, задача Кирша, язык программирования Julia, Code_Aster.

## Введение

В настоящее время метод конечных элементов является одним из наиболее широко используемых способов моделирования различных задач механики. В частности, он используется для расчета прочности конструкций, моделирования течения жидкостей и газов, моделирования распространения тепла и многих других прикладных задач.

Основной целью данной работы является реализация метода конечных элементов с использованием языка программирования Julia с возможностью дальнейших модификаций расчетного алгоритма [1]. В качестве тестовой модели будет рассмотрена одна из классических задач теории упругости – задача Кирша [2].

## 1. Язык программирования Julia

Julia – высокоуровневый скриптовый язык программирования с JIT (Just-in-time) компилятором, позволяющим осуществлять компиляцию из байт-кода в машинный код в процессе работы программы. В качестве основной парадигмы программирования в Julia применяется множественная диспетчеризация (Multiple Dispatch). В первую очередь язык предназначен для реализации алгоритмов, содержащих сложные математические вычисления, однако может быть использован и для решения прикладных задач общего характера.

Julia обладает множеством удобных инструментов для решения различных математических задач. Одним из основных используемых в данной работе инструментов является встроенный модуль «`LinearAlgebra`», реализующий многие методы решения задач линейной алгебры.

Для многих скриптовых языков, несмотря на более интуитивное написание кода и особенности вроде динамической типизации, характерно заметное падение производительности по сравнению с классическими компилируемыми языками. Для увеличения производительности Julia использует динамический компилятор на основе LLVM (Low Level Virtual Machine). Это позволяет значительно увеличить эффективность работы написанного кода.

## 2. Архитектура расчетной программы

Для обеспечения модульности архитектура программы разделена на 3 основных блока (рис. 1):

1. Импорт сетки через интерфейс, ввод основных параметров процесса. Для импорта всех начальных параметров и условий используется обычный текстовый файл, отредактированный в специальном формате. Для задания основных параметров задачи используем заранее определенные ключевые слова (например, «PRatio» – коэффициент Пуассона, «YoungMod» – модуль Юнга).

2. Обработка сетки, представление в удобном для вычислений виде. Экспорт преобразованной сетки в вычислительное ядро. Сетка хранится в виде координат узлов, а также соответствий узлов содержащим их элементам. Координаты узлов, как и соответствия узлов элементам, удобно хранить, используя встроенный в Julia тип «Tuple» (кортеж).

```
nodes::Vector{Tuple{Vararg{Float64}}}
elements::Vector{Tuple{Vararg{Int}}}
```

Переменные данного типа имеют фиксированный размер и не могут быть явно перезаписаны после инициализации.

3. Вычисление результатов в ядре, согласно описанной сетке и заданным параметрам процесса (непосредственная реализация метода конечных элементов). Экспорт полученных результатов через интерфейс вывода. Классическая реализация метода конечных элементов подразумевает под собой следующий процесс: вычисление локальных матриц жесткости и векторов нагрузок, сборка глобальной системы линейных уравнений, учет граничных условий, решение итоговой системы. Для решения системы воспользуемся встроенным в Julia модулем «LinearAlgebra».

```
solution = globalK \ loadVector
```

В представленном выше фрагменте кода «global» – матрица коэффициентов системы линейных уравнений, «loadVector» – правая часть. Данный оператор выберет оптимальный способ решения системы, основываясь на виде матрицы коэффициентов. Соответственно, для ускорения расчетов, можно изначально задать матрицу в определенном виде. Например, при помощи встроенного в модуль типа «Symmetric» можно задать матрицу как симметричную.

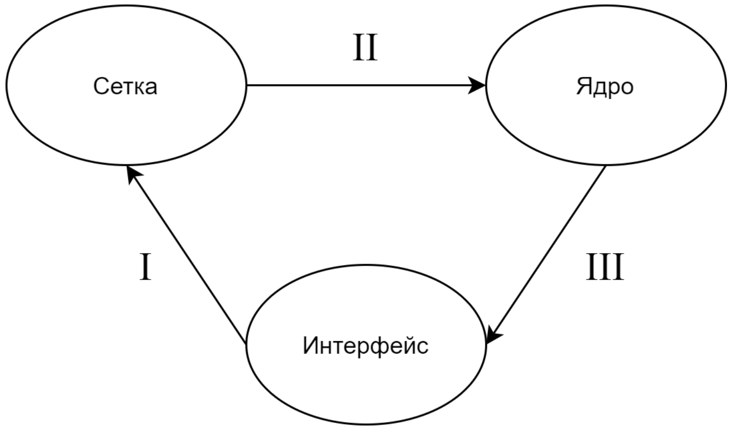



*Рис. 1. Архитектура расчетной программы*

Каждый из представленных блоков, а также расчеты, характерные для конкретного вида конечного элемента, выполнен в виде отдельного модуля Julia. Использование модулей Julia позволяет упростить модификации программы для решения большего класса задач. Таким образом, написание модификаций метода может производиться независимо, не затрагивая основные элементы ядра и интерфейса.

Для дальнейших расчетов в вычислительном ядре реализуем алгоритм метода конечных элементов на основе принципа возможных перемещений. Для упрощения численного интегрирования в данной работе рассматривается изопараметрический конечный элемент.

## 3. Метод конечных элементов

Рассмотрим метод конечных элементов, основанный на принципе возможных перемещений [3]. Разобьем рассматриваемое тело на дискретное множество элементов. Далее зададим искомый вектор перемещений узлов, связывающих полученные элементы:

$$\vec{U} = (u_{1_x}, u_{1_y}, u_{1_z}, \dots, u_{n_x}, u_{n_y}, u_{n_z})^T, \tag{1}$$

где $u_{i_x}, u_{i_y}, u_{i_z}$ – перемещения $i$-го узла вдоль осей $X$, $Y$ и $Z$ соответственно, $n$ – общее количество узлов.

Тогда для любого элемента $e$ можно получить:

$$\begin{gathered} U_e(x,y,z) = \mathrm{H}_e(x,y,z)\vec{U}; \\ \varepsilon_e(x,y,z) = \mathrm{B}_e(x,y,z)\vec{U}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $U_e(x,y,z)$ и $\varepsilon_e(x,y,z)$ – матрицы перемещений и деформаций узлов элемента $\varepsilon$ соответственно.

Напряжения в элементе $\varepsilon$ можно представить следующим образом (закон Гука):

$$\sigma_e = C_e \varepsilon_e + \sigma_e^0, \tag{3}$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{zx} \end{pmatrix}^T, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{pmatrix}^T,$$

$C_e$ – матрица упругости, соответствующая заданному материалу, $\sigma_e^0$ – начальные напряжения элемента $e$, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $E$ – модуль Юнга.

Применяя принцип возможных перемещений, получим:

$$\begin{gathered} \widetilde{U}^T \sum_e \left( \int_{V_e} B_e^T C_e B_e dV_e \right) U = \widetilde{U}^T \sum_e \left( \int_{V_e} H_e^T F_V^e dV_e \right) + \\ + \widetilde{U}^T \sum_e \left( \int_{S_e} H_{S,e}^T F_S^e dS_e \right) + \widetilde{U}^T \widehat{F}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\widehat{F} = \sum_i H_{c,i}^T F_{c,i}$, $F_S$ – поверхностные силы, $F_V$ – объемные силы, $F_C$ – поверхностные силы.

Для изопараметрического конечного элемента верно следующее: $dV_e = \det J\, dr\, ds\, dt$, где $r$, $s$, $t$ – оси естественной системы координат, $J$ – матрица Якоби для перехода из исходной системы координат в естественную. Полагая, что $\widetilde{U}^T = I$, где $I$ – единичная матрица, получим следующую систему линейных уравнений:

$$KU = F, \tag{6}$$

$$K = \sum_e K_e, \tag{7}$$

$$K_e = \int_{V_e} B_e^T C_e B_e \det J\, dr\, ds\, dt, \tag{8}$$

$$F = \sum_e \left( \int_{V_e} H_e^T F_V^e dV_e \right) + \sum_e \left( \int_{S_e} H_{S,e}^T F_S^e dS_e \right) + \widehat{F}. \tag{8}$$

Матрица $K$ называется матрицей жёсткости ансамбля конечных элементов, $K_e$ – локальная матрица жесткости элемента $e$. $F$ является вектором нагрузки, учитывающим влияние объёмных сил, поверхностных нагрузок, начальных напряжений и сосредоточенных сил.

Для учета граничных условий в общем случае запишем систему уравнений в виде:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $U_1$ – неизвестные перемещения узлов, $U_2$ – заданные граничные условия. Тогда:

$$K_{11}U_1 = F_1 - K_{12}U_2. \tag{11}$$

Деформации и перемещения связаны уравнением совместности [4].

### 4. Задача Кирша

Для дальнейшего тестирования алгоритма метода конечных элементов рассмотрим задачу Кирша. Пусть имеется квадратная пластина с отверстием (рис. 2). Сторона квадрата $l = 200$ мм, радиус отверстия $R = 10$ мм.

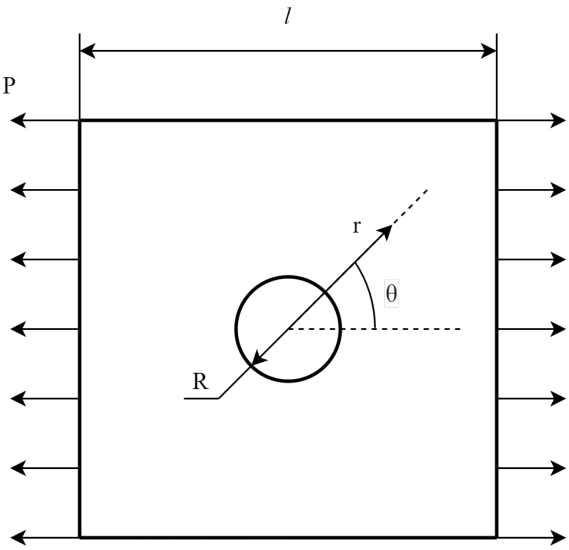



*Рис. 2. Задача Кирша*

К левой и правой граням пластины приложено давление $P = -10$ МПа. Для модели материала пластины используем линейную упругость с параметрами: модуль Юнга $E = 200000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Необходимо найти перемещения, а также соответствующие им деформации и напряжения.

Для упрощения численного решения рассмотрим четверть описанной пластины (рис. 3). Чтобы задача была эквивалентна задаче Кирша, зададим следующие граничные условия: на левой границе запретим перемещения по оси абсцисс $u_1|_{x=0} = 0,$ на нижней – по оси ординат $u_2|_{y=0} = 0.$

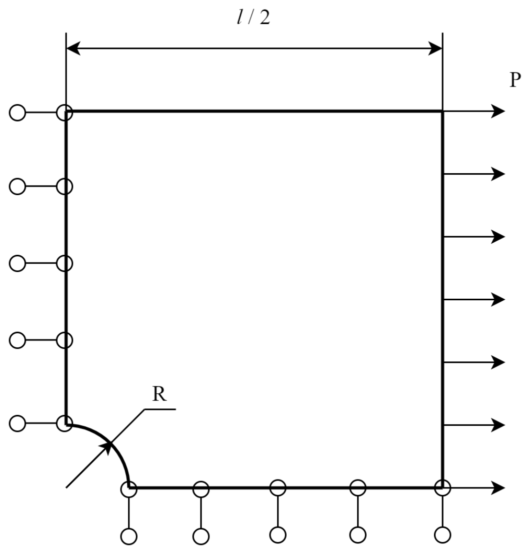



*Рис. 3. Четверть пластины с отверстием*

## 5. Результаты расчетов

В рамках метода конечных элементов для описания пластины введем 4-узловую сетку, построенную в пре- и постпроцессоре Salome (рис. 4).

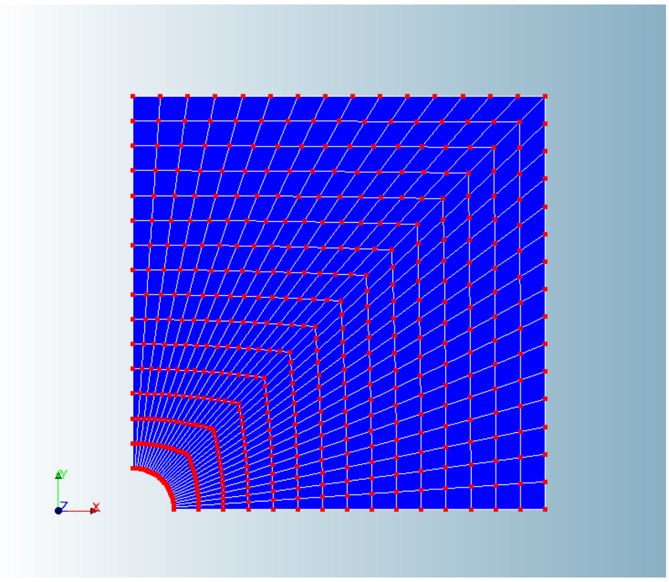
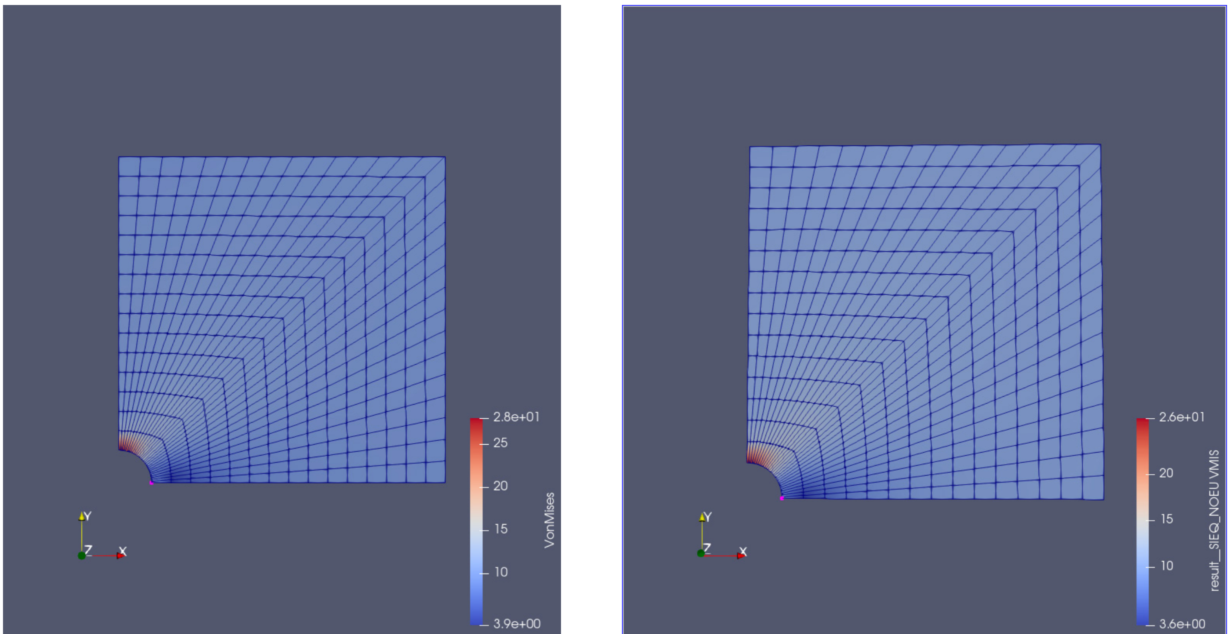


*Рис. 4. Сетка 4-узловых конечных элементов на пластине*

Для оценки сравним полученные результаты с вычислениями в Code_Aster [5]. Code_Aster является свободно распространяемым конечноэлементным программным пакетом для решения задач структурного анализа [6].

Для более наглядного анализа результатов исследуем величину, не зависящую от конкретной системы координат. В качестве такой величины можно использовать напряжение по Мизесу. Распределение напряжений по Мизесу в случае реализации МКЭ на Julia и в случае расчетов в Code_Aster показано на рис. 5.




*а)* *б)*

*Рис. 5. Распределение напряжений по Мизесу (4-узловой конечный элемент):*
*а) Реализация МКЭ на Julia; б) Code_Aster*

Для численного сравнения полученных результатов приведем значения соответствующих искомых величин в некоторых точках пластины (табл. 1). Задача Кирша имеет известное аналитическое решение, основанное на принципе Сен-Венана. Поскольку, согласно данному принципу, имеет место концентрация напряжений в районе отверстия, приведем аналитическое решение только на границе данного отверстия.

*Таблица 1. Сравнение напряжений по Мизесу (4-узловой конечный элемент), МПа*

| | Аналитическое решение | Code_Aster | Реализация МКЭ на Julia | Относительная ошибка |
|---|---|---|---|---|
| $(x, y) = (100,100)$ | – | 9.99987 | 9.99931 | 0.00006 |
| $(x, y) = (100,0)$ | – | 9.72018 | 9.71864 | 0.00016 |
| $(x, y) = (0,100)$ | – | 9.68325 | 9.66293 | 0.00210 |
| $(x, y) = (0,10)$ | 30.00000 | 28.34730 | 27.98610 | 0.01274 |
| $(x, y) = (10,0)$ | 10.00000 | 7.83234 | 8.98065 | 0.14661 |

Далее рассмотрим аналогичную задачу на 8-узловой сетке (рис. 6). Для реализации данного случая необходимо написать программный модуль, содержащий все основные соотношения, характерные для модели с 8-узловым конечным элементом. Сравнение распределений напряжений по Мизесу представлено на рис. 7. Численный анализ полученных результатов приведен в табл. 2.

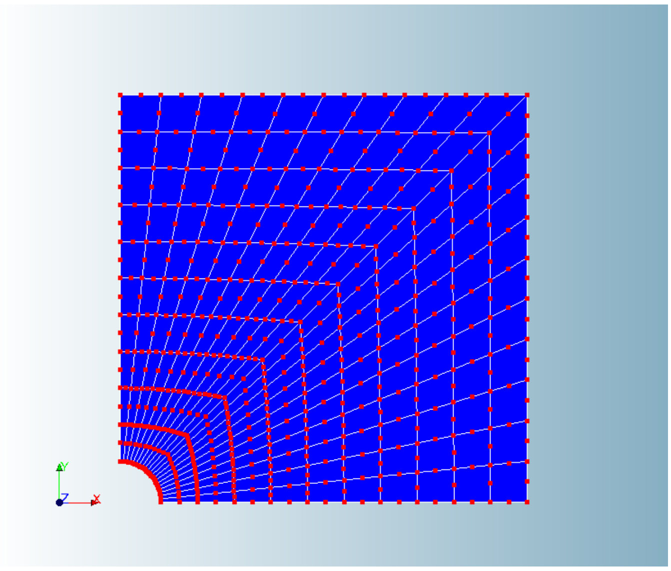
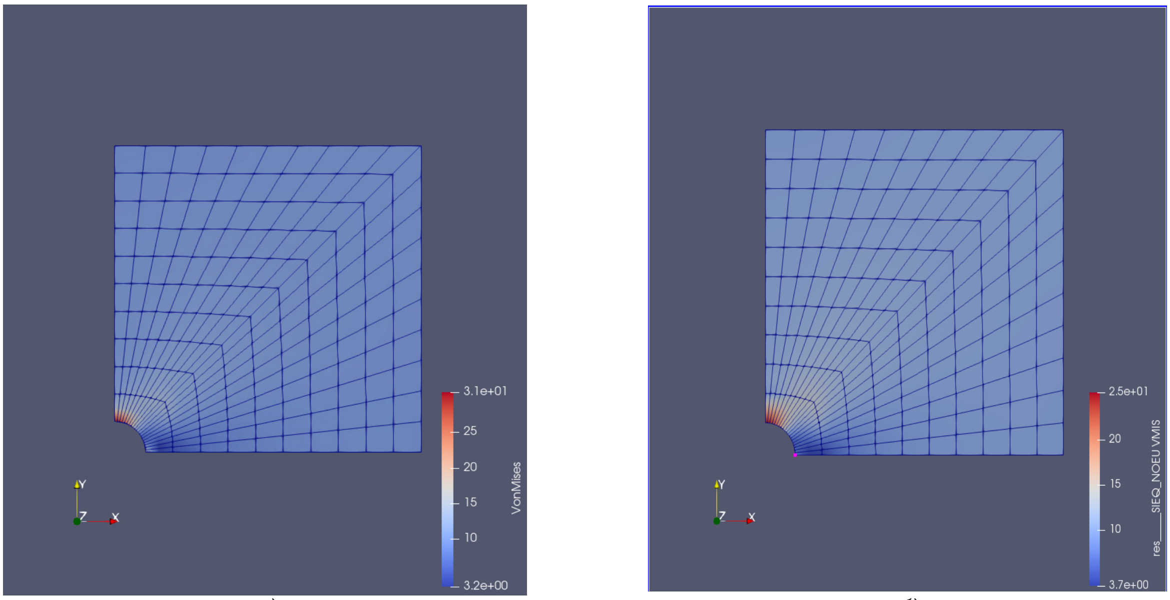


*Рис. 6. Сетка 8-узловых конечных элементов на пластине*

*Таблица 2. Сравнение напряжений по Мизесу (8-узловой конечный элемент), МПа*

| | Аналитическое решение | Code_Aster | Реализация МКЭ на Julia | Относительная ошибка |
|---|---|---|---|---|
| $(x, y) = (100,100)$ | – | 9.99971 | 9.99865 | 0.00011 |
| $(x, y) = (100,0)$ | – | 9.69587 | 9.68801 | 0.00081 |
| $(x, y) = (0,100)$ | – | 9.65889 | 9.60445 | 0.00564 |
| $(x, y) = (0,10)$ | 30.00000 | 28.5715 | 30.0754 | 0.05264 |
| $(x, y) = (10,0)$ | 10.00000 | 7.39623 | 7.6836 | 0.03885 |




*а) б)*

*Рис. 7. Распределение напряжений по Мизесу (8-узловой конечный элемент): а) Реализация МКЭ на Julia; б) Code_Aster*

Из приведенных результатов можно сделать вывод, что полученное распределение корректно. Отметим, что ближе к отверстию рассматриваемой пластины с увеличением концентрации напряжений относительная ошибка увеличивается. Это объясняется разными методами интерполяции значений деформации для определения напряжений в узлах сетки в Code_Aster и реализации МКЭ на Julia.

## Заключение

В ходе работы были написаны основные модули программы, реализующей метод конечных элементов. Составлена архитектура, позволяющая оптимально добавлять новые и модифицировать существующие блоки для расчета и анализа различных прикладных инженерных задач. В качестве примера рассмотрена одна из классических задач теории упругости. Приведены результаты расчета с применением метода конечных элементов на основе принципа возможных перемещений. Сделан вывод о корректности реализованного алгоритма.

## Литература

1. The Julia Language // Официальный сайт Julia Language. – 2020. – URL: https://julialang.org/ (дата обращения: 19.09.2020).

2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер / пер. с англ. М. И. Рейтмана; под ред. Г. С. Шапиро. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1979. – 560 с.

3. *Bathe K. J.* Finite Element Procedures / K. J. Bathe. – Prentice Hall, Pearson Education, 2014. – 1065 p.

4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – Москва : Наука, 1966. – 708 с.

5. Code_Aster Documentation v12 // Официальная документация Code_Aster. – 2020. – URL: https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/en/index.php?man=commande\&lang=en (дата обращения: 19.09.2020).

6. *Cherednichenko A. V.* Calculation of the Heat-Stressed State of the Disk Using Free Software Code_Aster / A. V. Cherednichenko, E. A. Maksimova, I. Yu. Savelyeva // Material Science and Engineering. – 2019. – Vol. 747.

УДК 519.6

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ. ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ MPI

**А. М. Атаян**

*Донской государственный технический университет*

**Аннотация.** Целью работы является построение программного комплекса для распределенного решения задачи переноса вещества в водоеме. Рассмотрена параллельная реализация методов декомпозиции сеточных областей для вычислительно-трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры многопроцессорной вычислительной системы (МВС), расположенной на базе объекта инфраструктуры НТУ «Сириус». Разработан алгоритм параллельного решения поставленной задачи с использованием технологии MPI. Произведено исследование решений и анализ быстродействия параллельных вычислений.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, диффузия-конвекция, параллельные вычисления, многопроцессорные системы.

## Введение

Математическое моделирование процесса переноса вещества дает возможность изучения динамики и тренда явлений, возникающих в мелководных водоемах и речных системах (водных экосистемах) [1]. Становится возможным осуществление прогнозирования последствий антропогенного вмешательства в водную экосистему. Разработка алгоритмов и программ необходима для численной реализации модельных задач гидродинамики течений в прибрежных системах, включая русловые процессы на участках рек со сложной морфометрией русла и поймы [2]. Это дает возможность решить важную научно-практическую задачу оценки влияния планируемого строительства технологических объектов на затопление пойменных территорий и размыв русла реки.

Одним из эффективных средств анализа и прогноза состояния водных систем является численное моделирование, включающее в себя разработку алгоритмов и программ [3]. Важной проблемой, связанной с экологией водных систем, является прогнозирование распространения загрязняющих веществ в воздушной и водной средах.

В области математического моделирования процессов движения загрязняющих веществ в водных системах, а также в области разработки численных методов решения поставленных задач сложилась ситуация, при которой проводимые исследования рассматривают отдельные явления и не охватывают их в комплексе [4–6]. Поэтому для решения проблем, отвечающих поставленной задаче, необходима разработка и теоретическое исследование новых алгоритмов и программ для решения модельных задач, включающих уравнения аэро- и гидродинамики, удовлетворяющих основным законам сохранения вещества, с учетом многокомпонентности среды [7, 8].

В настоящее время отсутствует универсальный метод построения оптимальных трехмерных расчетных сеток [9]. Методы построения трехмерных неструктурированных сеток для решения задач с разрывными коэффициентами подробно описаны в работах [10–12]. В [13–15] для решения подобного класса задач предложено использовать сеточно-характеристический метод.

Деятельность человека и естественные процессы пагубно влияют на гидросферу, вызывая загрязнение природных вод из-за попадания в ручьи, реки, озера, моря и океаны различных химических веществ. К предупредительным мерам относится контроль сбросов неочищенных сточных вод и комплексный экологический мониторинг, который можно осуществлять на основе математического моделирования. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат и ограниченного воздействия на моделируемый объект исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях. Возникает необходимость прогнозирования изменения экологического состояния мелководных водоемов вследствие возникновения в них явлений природного и техногенного характеров на основе методов и средств математического моделирования в прибрежных системах с различным пространственным разрешением от десятков метров – до нескольких километров. Для построения оперативных прогнозов влияния загрязняющих веществ, попавших в прибрежную систему, на продукционно-деструкционные процессы возникает необходимость в использовании высокопроизводительных вычислительных систем, параллельных алгоритмов и программ, позволяющих на три порядка и более уменьшить время расчетов.

Одним из способов распараллелить вычисления является применение технологии MPI, которая позволяет обмениваться сообщениями между процессами, выполняющими одну задачу. При параллельной реализации были разработаны методы декомпозиции сеточных областей для решения вычислительно-трудоемких задач диффузии-конвекции, учитывающие архитектуру и параметры многопроцессорной вычислительной системы.

## 1. Постановка задачи

Задача транспорта веществ может быть представлена уравнением (1) диффузии-конвекции-реакции [16]:

$$c' + uc'_x + vc'_y = \left(\mu c'_x\right)' + \left(\mu c'_y\right)' + f \tag{1}$$

с граничными условиями (2):

$$c'_n\left(x, y, t\right) = \alpha_n c + \beta_n, \tag{2}$$

здесь $u, v$ – составляющие вектора скорости, $f$ – функция, описывающая интенсивность и распределение источников, $\mu$ – коэффициент диффузионного (турбулентного) обмена.

Расчетная область вписана в прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи вводится равномерная сетка [17]:

$$w_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih, y_j = jh_y : n = \overline{0, N_t}, i = \overline{0, N_x} : N_t\tau = \mathrm{T}, \mathrm{N}_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\}, \tag{3}$$

где $\tau$ – шаг по времени; $h_x$, $h_y$ – шаги по пространству; $l_x, l_y$ характерные размеры расчетной области; $N_x, N_y$ – границы по пространству; $N_t$ – верхняя граница по времени.

Для аппроксимации уравнения (1) по временной координате используем схемы с весами.

$$\frac{\hat{c} - c}{\tau} + u\overline{c}_x{}' + v\overline{c}_y{}' = (\mu\overline{c}_x{}')_x{}' + (\mu\overline{c}_y{}')_y{}' + f\,, \tag{4}$$

где $c, \hat{c}$ – значения неизвестной функции на $n$ и $n+1$ временных слоях; $\overline{c} = \sigma\hat{c} + (1-\sigma)c$, $\sigma \in [0,1]$ – вес схемы.

Путем преобразований получаются дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса в случае частичной заполненности расчетных ячеек:

$$(q_0)_{i,j}\frac{\hat{c}_{i,j} - c_{i,j}}{\tau} + (q_1)_{i,j}u_{i+1/2,j}\frac{\overline{c}_{i+1,j} - \overline{c}_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j}u_{i-1/2,j}\frac{\overline{c}_{i,j} - \overline{c}_{i-1,j}}{2h_x} +$$
$$+(q_3)_{i,j}v_{i,j+1/2}\frac{\overline{c}_{i,j+1} - \overline{c}_{i,j}}{2h_y} + (q_4)_{i,j}v_{i,j-1/2}\frac{\overline{c}_{i,j} - \overline{c}_{i,j-1}}{2h_y} = (q_1)_{i,j}\mu_{i+1/2,j}\frac{\overline{c}_{i+1,j} - \overline{c}_{i,j}}{h_x^2} - \tag{5}$$

$$-(q_2)_{i,j}\,\mu_{i-1/2,j}\,\frac{\overline{c}_{i,j}-\overline{c}_{i-1,j}}{h_x^2}-\left|(q_1)_{i,j}-(q_2)_{i,j}\right|\mu_{i,j}\,\frac{\alpha_x\overline{c}_{i,j}+\beta_x}{h_x^2}+(q_3)_{i,j}\,\mu_{i,j+1/2}\,\frac{\overline{c}_{i,j+1}-\overline{c}_{i,j}}{h_y^2}-$$

$$-(q_4)_{i,j}\,\mu_{i,j-1/2}\,\frac{\overline{c}_{i,j}-\overline{c}_{i,j-1}}{h_y^2}-\left|(q_3)_{i,j}-(q_4)_{i,j}\right|\mu_{i,j}\,\frac{\alpha_y\overline{c}_{i,j}+\beta_y}{h_y^2}+(q_0)_{i,j}\,f_{i,j}$$

где $q_i, i=0..4$ – коэффициенты заполненности контрольных объемов 2.

Дискретный аналог (5) уравнения (1) описывает не только изменение концентрации примеси за счет граничных источников, но и сложную геометрию расчетной области.

## 2. Программная реализация и результаты численных экспериментов

Разработано программное обеспечение на базе ЭВМ на языке программирования C++ в среде Microsoft Visual Studio с поддержкой MPI, предназначенное для математического моделирования транспорта веществ. При расчете динамики распространения веществ была проведена декомпозиция расчетной области при работе на многопроцессорной вычислительной системе НТУ «Сириус». Для расчета сеточных уравнений, полученных в результате аппроксимации задачи, использовался метод Зейделя для расчета сеточных уравнений.

Моделирование транспорта веществ производилось на сетках размерами $100\times100$, $200\times200$, $1000\times1000$, $2000\times2000$, $5000\times5000$, $10000\times10000$ расчетных узлов с учетом геометрии сложной области, при этом параметры задавались следующим образом: размеры расчетной области по пространственным координатам $l_x=100$ *м*, $l_y=100$ *м* и по времени $\tau=0.1$ *с*; горизонтальная составляющая равна 4 *м/с*, вертикальная – 3 *м/с*, коэффициент турбулентного обмена равен 5 *м*$^2$*/с*.

Начальное распределение задавалось функцией:

$$C(x,y)=\begin{cases}\sin\left(\pi(x-10)/10\right)\sin\left(\pi(y-10)/10\right), & x\in D\\ 0, & x\notin D,\end{cases} \qquad (6)$$

$$D:\left\{x\in[10,20],\, y\in[10,20]\right\},$$

геометрия расчетной области $\Omega=\Sigma/\sigma$, где

$$\Sigma:\left\{x\in[0,l_x],\, y\in[0,l_y]\right\},$$

$$\sigma:\left\{x\in[30,50],\, y\in[45,50]\right\}.$$

На рис. 1 представлены результаты расчетов по моделированию транспорта веществ на каждом вычислителе при работе на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью. Размер расчетной сетки равен $100\times100$ узлов. Декомпозиция расчетной области выполнена на 4 части при этом ширина смежной области равнялась 2 узлам вдоль направления Ox.

## 3. Результаты работы параллельных алгоритмов

В рамках данной работы построен параллельный алгоритм, реализующий поставленную задачу переноса веществ (1), (2) под управлением системы MPI [18]. Выполнено сравнение результатов работы разработанного параллельного алгоритма с использованием разного числа вычислителей. На рис. 2 представлена архитектура многопроцессорной вычислительной системы НТУ «Сириус».

Запуски проводились последовательно, начиная от запуска на одном процессоре и заканчивая максимально возможным числом процессоров. Данные о расчетных сетках и времени работы программных компонент представлены в табл. 1.

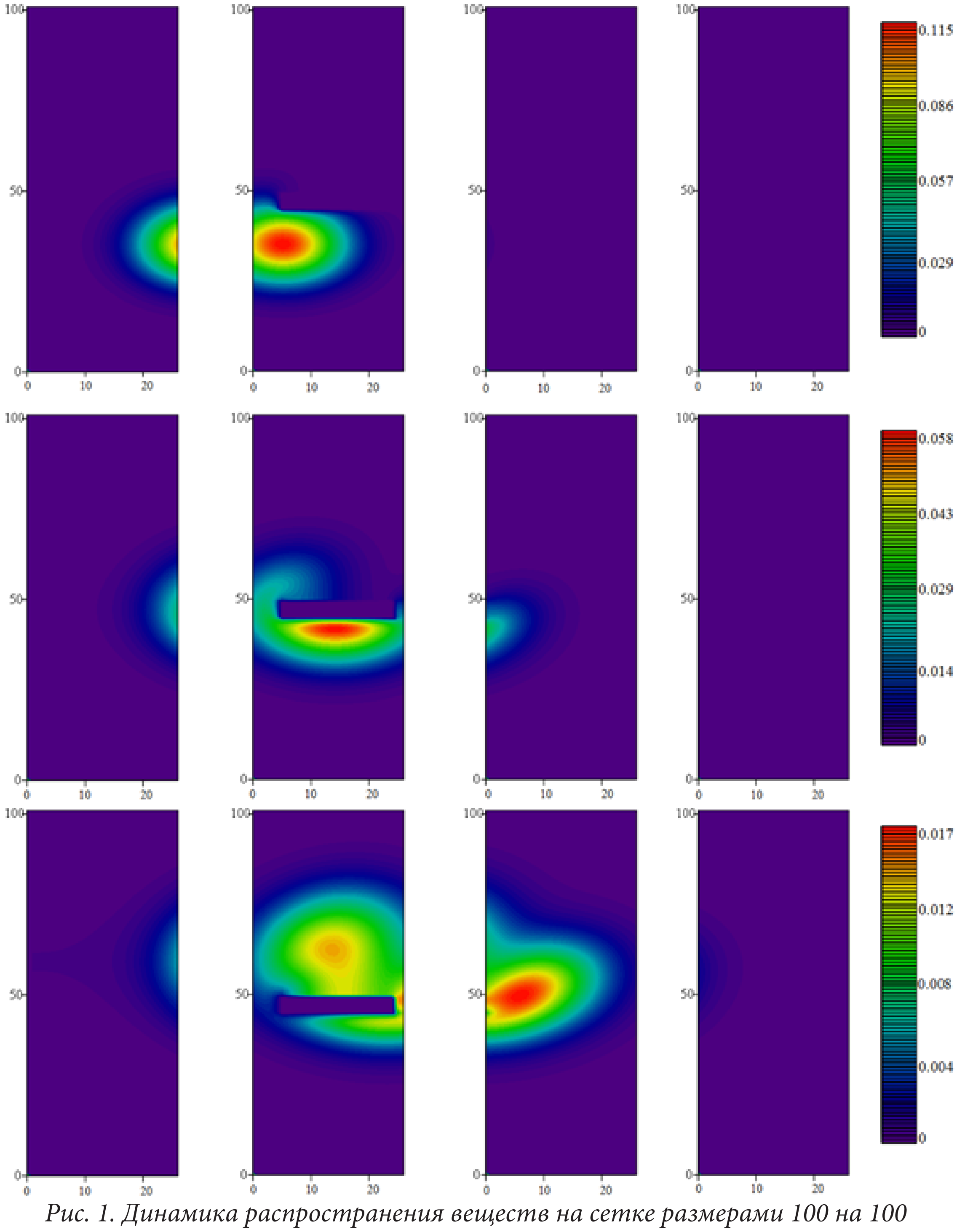


*Рис. 1. Динамика распространения веществ на сетке размерами 100 на 100 с учетом геометрии сложной области (временной интервал равен 5, 8, 11 с)*

На рис. 3 представлен сравнительный анализ ускорения написанного алгоритма в зависимости от числа задействованных вычислителей и размера расчётной сетки. Максимальное количество использованных вычислителей – 24, максимальный размер расчетной сетки – 10000 на 10000 узлов.

Из рисунка видно, что разработанный алгоритм показал низкую эффективность для малых расчетных сеток (размером до $100 \times 100$ расчетных узлов). В случае же больших расчетных сеток (размером от $1000 \times 1000$ расчетных узлов) использование MPI сокращает время вычислений в несколько раз.

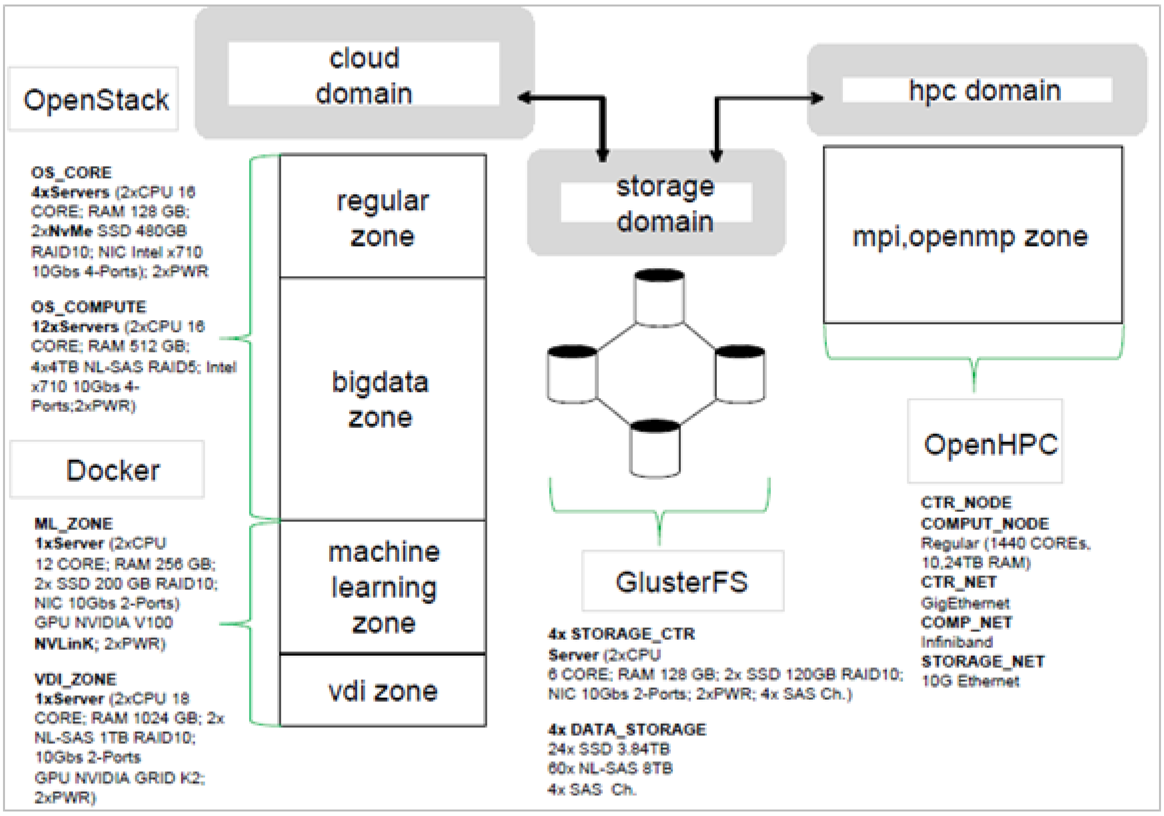



*Рис. 2. Архитектура кластера НТУ «Сириус»*

Таблица 1

*Результаты работы алгоритма с использованием технологии MPI для различного числа вычислителей на разных расчетных сетках*

| | $100\times100$ | $200\times200$ | $1000\times1000$ | $2000\times2000$ | $5000\times5000$ | $10000\times10000$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0499697 | 0.225546 | 6.88553 | 23.0513 | 137.462 | 555.566 |
| 2 | 0.0433911 | 0.127521 | 4.37466 | 13.5953 | 77.9052 | 319.092 |
| 4 | 0.0448879 | 0.109549 | 2.43721 | 7.70409 | 45.7261 | 178.846 |
| 8 | 0.0401893 | 0.0867183 | 1.68896 | 4.85122 | 29.5026 | 118.566 |
| 12 | 0.0467329 | 0.0684677 | 1.44222 | 4.08687 | 24.305 | 99.012 |
| 16 | 0.0524554 | 0.065631 | 1.3455 | 3.75946 | 22.4353 | 89.7314 |
| 20 | 0.0419365 | 0.0723139 | 1.29902 | 3.61813 | 21.0401 | 85.5136 |
| 24 | 0.0468997 | 0.0851117 | 1.26435 | 3.66724 | 20.1848 | 77.9734 |

## Заключение

В ходе данной работы реализован программный комплекс, позволяющий производить расчеты задачи переноса вещества в мелководном водоеме на различных расчетных сетках. Реализованный в программном комплексе параллельный алгоритм ориентирован на многопроцессорную вычислительную систему и позволяет значительно сократить время работы программного комплекса при большом объеме входных данных. Представленный комплекс может использоваться для изучения процессов переноса в природных и технологических системах.

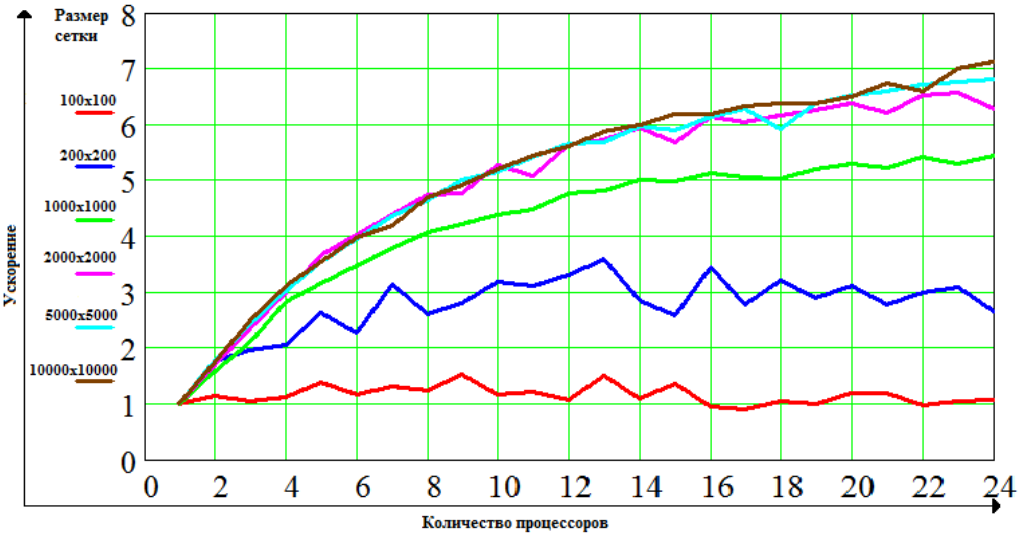



*Рис. 3. Зависимость ускорения от числа вычислителей*

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержки РФФИ, проект № 20-31-90105, а также автор выражает благодарность НТУ «Сириус» за предоставленный вычислительный ресурс.

**Литература**

1. Современные методы математического моделирования развития гидродинамических неустойчивостей и турбулентного перемешивания / В. Ф. Тишкин, В. А. Гасилов, Н. В. Змитренко [и др] // Математическое моделирование. – 2020. – 32:8. – С. 57–90.

2. Метод учета заполненности ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко [и др] // Математическое моделирование. – 2020. – 12(2). – С. 232–245. – DOI: 10.1134/S2070048220020155.

3. Predictive Modeling of Coastal Hydrophysical Processes in Multiple-Processor Systems Based on Explicit Schemes / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, A. V. Shishenya, E. F. Timofeeva // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2018. – 10(5). – P. 648-658. – DOI: 10.1134/S2070048218050125.

4. Модель транспорта и трансформации биогенных элементов в прибрежной системе и ее численная реализация / В. А. Гущин, А. В. Никитина, А. И. Сухинов [и др] // Вычислительная математика и математическая физика. – 2018. – 58(8). – С. 1316–1333. – DOI: 10.1134/S0965542518080092.

5. *Сухинов А. И.* Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы прибрежной зоны и ее программная реализация / А. И. Сухинов, Д. С. Хачунц, А. Е. Чистяков // Вычислительная математика и математическая физика. – 2015. – 55(7). – С. 1216-1231. – DOI: 10.1134/S096554251507012X.

6. Complex of models, explicit regularized schemes of high-order of accuracy and applications for predictive modeling of after-math of emergency oil spill / A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. A. Semenyakina, A.E. Chistyakov // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – 1576. – P. 308-319.

7. *Четверушкин Б. Н.* Квазигазодинамическая модель для описания магнитогазодинамических явлений of magnetogasdynamic phenomena / Б. Н. Четверушкин, А. В. Савельев, В. И. Савельев // Вычислительная математика и математическая физика. – 2018. – 58:8. – С. 1384–1394. – DOI: 10.1134/S0965542518080055

8. *Четверушкин Б. Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред / Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2013. – 5:3. – С. 266–279. – DOI: 10.1134/S2070048213030034

9. *Вабищевич П. Н.* Монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии на треугольных сетках / П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский // Вычислительная математика и математическая физика. – 2002. – 42:9. – С. 1317–1330.

10. *Krasnov M. M.* Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids: Using the operator programming method / M. M. Krasnov, P. A. Kuchugov, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2017. – Vol. 9, № 5. – P. 529–543.

11. *Milyukova O. Yu.* A multigrid method for a heat equation with discontinuous coefficients with a special choice of grids / O. Yu. Milyukova, V. F. Tishkin // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2016. – Vol. 8, № 2. – P.118–128.

12. Difference schemes based on the support operator method for fluids dynamics problems in a collector containing gas hydrates / V. A. Gasilov, I. V.Gasilova, V. F. Tishkin [et al.] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 55, № 8. – P.1310–1323.

13. *Vasyukov A. V.* Grid-characteristic method on tetrahedral unstructured meshes with large topological inhomogeneities / A. V. Vasyukov, I. B. Petrov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. – 58:8. – P. 1259–1269.

14. *Petrov I. B.* Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic waves / I. B. Petrov, A. V. Favorskaya, N. I. Khokhlov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2017. – 57:11. – P. 1771–1777.

15. *Golubev V. I.* Compact grid-characteristic schemes of higher orders for 3D linear transport equation / V. I. Golubev, I. B. Petrov, N. I. Khokhlov // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2016. – 8:5. – P. 577–584.

16. Modelling of oil spill spread / A. Sukhinov, A. Chistyakov, A. Nikitina, [et al.] // 5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV. – 2016. – P. 1134–1139. – DOI: 10.1109/ICIEV.2016.7760176.

17. *Khokhlov N. I.* Application of the grid-characteristic method for solving the problems of the propagation of dynamic wave disturbances in high-performance computing systems / N. I. Khokhlov, I. B. Petrov // Proceedings of ISP RAS. – 2019. – 31:6. – P.237–252.

18. MPI. Вводный курс // MPI. Вводный курс: [сайт]. – 2020. – URL: http://www.ssd.sscc.ru/old/old/kraeva/MPI.html (дата обращения: 15.07.2020).

УДК 004.056

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОДСИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДОСТУПОМ СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ ОТ НЕСАНКЦИОНИРОВАННОГО ДОСТУПА В АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

**А. В. Бацких**

*Воронежский институт МВД России*

**Аннотация.** В статье предложен метод построения аналитической модели расчета показателя эффективности функционирования подсистемы управления доступом системы защиты информации от несанкционированного доступа в автоматизированной системе. Динамика функционирования подсистемы описывается с помощью стохастической сети Петри с использованием преобразования Лапласа-Стилтьеса. Представлены результаты расчета вероятностно-временных характеристик переходов между состояниями и средних значений времени пребывания в каждом состоянии на примере модели «Включение персонального компьютера и идентификация пользователя», описывающей процесс функционирования подсистемы управления доступом системы защиты информации от несанкционированного доступа «Страж NT 4.0».

**Ключевые слова:** несанкционированный доступ, система защиты информации, подсистема управления доступом, конечный марковский процесс, сеть Петри, вероятностно-временные характеристики.

## Введение

В век информатизации автоматизированные системы (АС) становятся все более уязвимыми по отношению к новым видам угроз безопасности информации и, в первую очередь, к угрозам, связанным с несанкционированным доступом (НСД) к их информационным ресурсам. Поэтому разработка надежной подсистемы управления доступом в системе защиты информации (СЗИ) от угроз НСД является актуальной задачей для современных АС [1]. Важным этапом в процессе построения такой подсистемы служит оценка эффективности ее функционирования, под которой подразумевается значимый показатель работы, позволяющий решать проблемы эксплуатации как подсистемы управления доступом, так и СЗИ от НСД в целом с учетом временных характеристик [2, 3].

В связи со сложностью структуры и характера взаимодействия элементов подсистемы управления доступом СЗИ от НСД проведение указанной оценки приводит к необходимости решения целого ряда задач, связанных с созданием математических (преимущественно аналитических) моделей динамики функционирования подсистемы, определением и анализом причинно-следственных связей между объектами в процессе ее разработки [4]. Для исследования процессов защиты информации от НСД в АС и решения указанных задач целесообразно использовать применяемый для моделирования сложных систем математический аппарат сетей Петри [5, 6], к несомненным достоинствам которого относятся: возможность применения для имитации параллельных процессов, удобство в представлении графической модели и исследовании динамики моделируемого объекта, возможность программирования моделируемых процессов.

В соответствии с выше изложенным, для оценки эффективности функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД в АС возникает потребность в разработке аналитической модели, описывающей динамику переходов между состояниями подсистемы и средние значения времени ее пребывания в каждом из этих состояний, на основе использования математического аппарата сетей Петри в программной среде MATLAB.

## Теоретический анализ

Процесс функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД в АС может быть представлен, как марковский с конечным числом состояний, в котором время пребывания подсистемы в каждом из состояний аппроксимируется экспоненциальным законом распределения. С целью построения вероятностно-временных характеристик (ВВХ) указанной подсистемы применяется графовая модель, в которой обращение к подсистеме управления доступом соответствует входу конечного марковского процесса (КМП) в начальное состояние, а завершение выполнения подсистемой своего функционала по данному обращению – входу КМП в конечное поглощающее состояние. Описание динамики функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД осуществляется на основе использования модели стохастической сети Петри [4] и вероятностного подхода, изложенного в работах [7, 8].

Для определения вероятности перехода $F_{ab}(\tau)$ КМП из состояния $a$ в состояние $b$ за время, не превышающее $\tau$, воспользуемся формулой:

$$F_{ab}(\tau) = p_{ab}F_a(\tau),\ a = \overline{1,n},\ b = \overline{1,n} \tag{1}$$

где $F_a(\tau)$ – вероятность того, что время пребывания КМП в состоянии $a$ меньше $\tau$; $p_{ab}$ – вероятность перехода КМП, находящегося в состоянии $a$, в состояние $b$ (не зависит от времени).

С учетом вероятностей перехода КМП в промежуточное состояние и экспоненциального закона распределения для функций $F_a(\tau)$ динамику функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД можно описать следующей системой уравнений [9]:

$$Q_a(\tau) = p_{an}F_a(\tau) + \sum_{b=1}^{n-1} p_{ab}\int_0^{\tau} F_a(t)Q_b(\tau - t)dt\ ,\ a = \overline{1,n-1}\ , \tag{2}$$

где $Q_a(\tau)$ – вероятность достижения КМП, находящимся в состоянии $a$, конечного состояния $n$ за промежуток времени, не превышающий $\tau$.

Преобразуем систему интегральных уравнений (2) в систему линейных алгебраических уравнений, воспользовавшись преобразованием Лапласа-Стилтьеса. Полученная система уравнений (3) представляет собой объединение ВВХ КМП, описывающих отдельные состояния процесса функционирования подсистемы управления доступом, с ВВХ КМП, описывающего общую динамику функционирования данной подсистемы:

$$q_{lapa}(v) = p_{an}f_{lapa}(v) + \sum_{b=1}^{n-1} p_{ab}f_{lapa}(v)q_{lapb}(v),\quad a = \overline{1,n-1}\ , \tag{3}$$

где $q_{lapa}(v)$, $f_{lapa}(v)$ – преобразования Лапласа-Стилтьеса для функций $Q_a(\tau)$ и $F_a(\tau)$ соответственно.

Одним из основных показателей динамики функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД в АС является вероятность достижения КМП конечного состояния за установленное время $\tau_{\max}$, характеризующая вероятность выполнения подсистемой своих функций (показатель временной эффективности функционирования подсистемы управления доступом $V_{ВЭПУД}$. Данная вероятность выражается через ВВХ отдельных состояний функционирования подсистемы с помощью обратного преобразования Лапласа-Стилтьеса следующим образом:

$$V_{ВЭПУД} = L^{-1}\left[q_1(v)\right](\tau)\Big|_{\tau=\tau_{\max}} = q_1(\tau)\Big|_{\tau=\tau_{\max}}\ , \tag{4}$$

где $q_1(v)$ – преобразование Лапласа-Стилтьеса для функции $Q_a(\tau)$.

Алгоритм расчета показателя $V_{ВЭПУД}$ типовой СЗИ от НСД, разработанный с использованием численного метода Гивенса (метода вращений), представлен в [8].

Предложенный метод построения аналитической модели расчета показателя эффективности функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД реализован в виде алгоритма с использованием пакета программ MATLAB на примере модели «Включение ПК и идентификация пользователя» типовой широко используемой в современных АС СЗИ от НСД «Страж NT 4.0». Выбор программной среды MATLAB обусловлен такими ее достоинствами, как: высокий уровень визуализации, возможность модификации моделей для анализа других систем данного типа, наличие средств интеграции с другими программными продуктами.

### Обсуждение результатов

Графовая модель «Включение ПК и идентификация пользователя», описывающая процесс функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД «Страж NT 4.0» в защищенных АС (механизм входа пользователя в систему посредством его идентификации и аутентификации), представлена на рис. 1, а выполняемые ею функции, вероятности переходов КМП из различных состояний в конечное (поглощающее) состояние и среднее время нахождения рассматриваемой подсистемы в каждом из состояний – в табл. 1. Временные характеристики подсистемы «Включение ПК и идентификация пользователя» фиксировались с помощью секундомера.

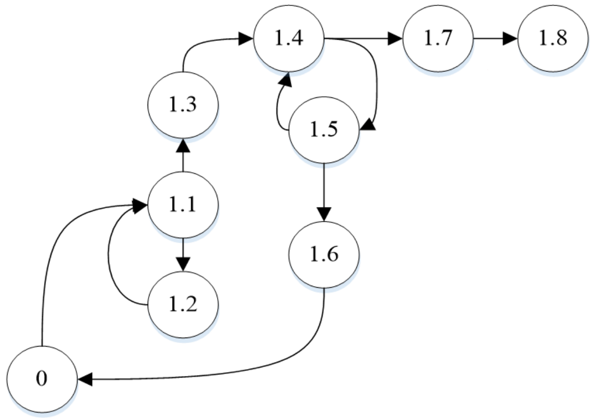



*Рис. 1. Графовая модель процесса функционирования подсистемы «Включение ПК и идентификация пользователя» СЗИ от НСД «Страж NT 4.0»*

Для проведения дальнейших расчетов использовались следующие значения вероятностей переходов $p_{ab}$ между состояниями подсистемы «Включение ПК и идентификация пользователя» СЗИ от НСД «Страж NT 4.0»:

$Pt[0,1.1]=1;$

$Pt[1.1,1.2]=0,01;$ $Pt[1.1,1.3]=0,99;$

$Pt[1.2,1.1]=1;$

$Pt[1.3,1.4]=1;$

$Pt[1.4,1.5]=0,01;$ $Pt[1.4,1.7]=0,99;$

$Pt[1.5,1.4]=0,99;$ $Pt[1.5,1.6]=0,01;$

$Pt[1.7,1.8]=1.$

Результаты вычисления $q_i(\tau)$ для рассматриваемой подсистемы СЗИ от НСД в защищенных АС при ее переходе из начального состояния 0 и предпоследнего состояния 1.7 в конечное поглощающее состояние 1.8 представлены на рис. 2.

В соответствии с графом, представленным на рис. 1, из состояния 1.7 возможен переход только в состояние 1.8, поэтому сумма по промежуточным состояниям в выражении (2) обра-

Таблица 1

*Реакция подсистемы «Включение ПК и идентификация пользователя» СЗИ от НСД «Страж NT 4.0» на деструктивное воздействие и время пребывания в заданных состояниях*

| № состояния | Вероятность перехода КМП из различных состояний в конечное (поглощающее) состояние 1.8, $q_n$ | Функции, выполняемые подсистемой | Время, с |
|---|---|---|---|
| 0 | $q_1$ | Включение ПК (прекращение выполнения функций автоматизированным рабочим местом) | 10 |
| 1.1 | $q_2$ | Предъявление идентификатора | 1 |
| 1.2 | $q_3$ | Прекращение работы идентификатора (в случае новой попытки требуется ввести заново) | 6 |
| 1.3 | $q_4$ | Допуск к вводу пароля | 1 |
| 1.4 | $q_5$ | Ввод пароля | 5 |
| 1.5 | $q_6$ | Повторный ввод пароля | 5 |
| 1.6 | $q_7$ | Блокировка входа в систему при трехразовом неправильном вводе пароля | 1 |
| 1.7 | $q_8$ | Аутентификация субъекта системы | 1 |
| 1.8 | $q_9$ | Вход в систему | 5 |

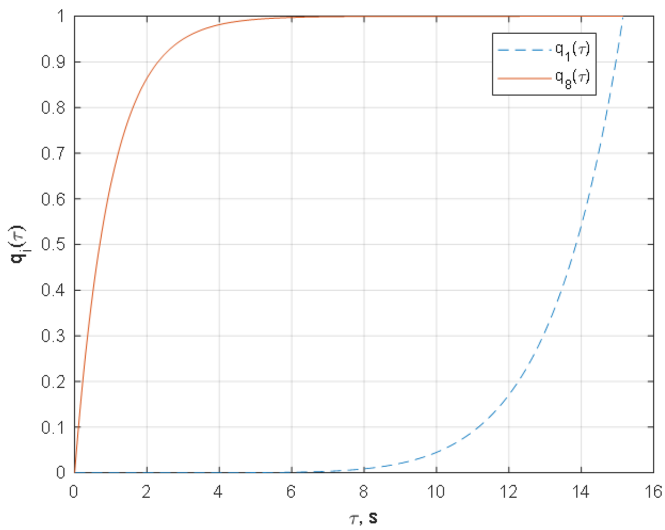



*Рис. 2. Вероятности перехода подсистемы «Включение ПК и идентификация пользователя» СЗИ от НСД «Страж NT 4.0» из состояния 0 и состояния 1.7 в состояние 1.8.*

щается в ноль, и для $q_8(\tau)$ с учетом конкретных значений вероятности перехода и времени пребывания рассматриваемой подсистемы в состоянии 1.7 (см. табл. 1) можно получить следующее простое выражение:

$$q_8(\tau) = p_{78}F_8(\tau) = Pt[1.7, 1.8](1 - e^{-\frac{\tau}{l_8}}) = 1 - e^{-\frac{\tau}{1.0}}. \qquad (5)$$

График $q_8(\tau)$ (рис. 2), полученный путем аналитического решения системы уравнений (3) и выполнения обратного преобразования Лапласа-Стилтьеса для набора функций $q_i(\tau)$, полностью соответствует выражению (5), что подтверждает правильность предложенной аналитической модели рассматриваемой подсистемы СЗИ от НСД и разработанного алгоритма расчета ВВХ.

Величина $q_1(\tau)$, выражающая вероятность перехода подсистемы «Включение ПК и идентификация пользователя» СЗИ от НСД «Страж NT 4.0» из начального состояния 0 в конечное состояние 1.8, является одним из основных показателей динамики функционирования рассматриваемой подсистемы СЗИ от НСД в защищенных АС и равна вероятности выполнения ею своих функций за промежуток времени, не превышающий $\tau$. В соответствии с графиком (рис. 2) вероятность выполнения функций подсистемой «Включение ПК и идентификация пользователя» возрастает с ростом максимально допустимого времени $\tau$ и достигает 1 при $\tau \sim 15$ с. Пороговая величина времени 15 с не превышает суммы времен нахождения рассматриваемой подсистемы в состояниях, образующих кратчайший путь из состояния 0 («Включение ПК») в состояние 1.8 («Вход в систему») (0–1.1–1.3–1.4–1.7–1.8), равной 23 с (см. граф на рис. 1). Представленный на рис. 2 график позволяет оценивать вероятность выполнения функций подсистемой «Включение ПК и идентификация пользователя» за любое указанное время.

Проведение аналогичных расчетов для других входных параметров дают возможность оптимизировать работу подсистемы управления доступом СЗИ от НСД в АС и проверять ее соответствие требованиям по вероятности выполнения функциональных задач за заданное время.

## Заключение

В статье предложен метод построения аналитической модели расчета эффективности функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД в защищенных АС, позволяющей многократно снижать вычислительные затраты при расчете ее вероятностно-временных характеристик. Разработанный метод реализован в виде алгоритма в программной среде MATLAB. Представлены результаты расчетов вероятностно-временных характеристик подсистемы «Включение ПК и идентификация пользователя» СЗИ от НСД «Страж NT 4.0» в АС. Получение аналитических зависимостей вероятностей переходов между состояниями рассмотренной подсистемы позволяет провести оптимизацию времени выполнения ею функциональных задач. Предложенный метод построения аналитической модели функционирования подсистемы управления доступом СЗИ от НСД может быть использован для повышения эффективности эксплуатации как данной подсистемы, так и СЗИ от НСД в АС в целом.

## Литература


1. *Schneier B.* We Have Root: Even More Advice from Schneier on Security // Wiley. – 2019. – 304 p.

2. *Xin Z.* Research on effectiveness evaluation of the mission-critical system // Proceedings of 2013 2nd International Conference on Measurement, Information and Control. – 2013. – P. 869–873.

*3. Yun [and others].* Effectiveness Evaluation on Cyberspace Security Defense System // International Conference on Network and Information Systems for Computers (IEEE Conference Publications). – 2015. – P. 576–579.

4. *Зиновьев П. В., Застрожнов И. И., Рогозин Е. А.* Методы и средства оценки эффективности подсистемы защиты конфиденциального информационного ресурса при ее проектировании в системах электронного документооборота: монография – Воронеж : Воронеж. гос. техн. ун-т, 2015. – 106 с.

5. *Питерсон Д. Ж.* Теория сетей Петри и моделирование систем. пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 264 с.

6. *Linyuan Y. [and others]* Network security analyzing and modeling based on Petri net and Attack tree for SDN // 2016 International Conference on Computing, Networking and Communications (ICNC). – 2016. – P. 133–187.
7. *Алферов В. П., Бацких А. В., Крисилов А. В., Попов А. Д., Рогозин Е. А.* Использование численно-аналитической модели оценки эффективности функционирования системы защиты информации от несанкционированного доступа при анализе ее вероятностно-временных характеристик // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технич. науки. – 2020. – Т. 47, № 1. – С. 58–71.
8. *Дровникова И. Г., Зиновьев П. В., Рогозин Е. А.* Численные методы расчёта показателя эффективности вспомогательной подсистемы в системе электронного документооборота // Вестник Воронеж. ин-та МВД России. – 2016. – № 4. – С. 114–120.
9. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – М. : Сов. Радио, 1977. – 488 с.

УДК 517.988.68 + 519.7

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРЫСОНА

**В. А. Белозуб, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко**

*Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского*

**Аннотация.** В задачах дистанционного зондирования, грави-, магнито-, сейсмо-, геологоразведки используются системы косвенного измерения данных, которые моделируются нелинейными уравнениями Урысона. В работе приводятся такие уравнения и их операторные аналоги. В зависимости от наличия априорной информации, асимптотических свойств интегральных операторов, специфики моделей получен ряд алгоритмов решения. Авторами сформулирована теорема о построении решения исходного уравнения по близкому с оценкой погрешности. В качестве исходного и близкого уравнений выбираются регуляризированные. Предложенный подход, в зависимости от типа регуляризации и итерационных схем, допускает разнообразный набор алгоритмов. В частности, предложен модифицированный вариант алгоритма Левенберга-Марквардта. Также приводится алгоритм поиска характерных точек искомой функции на основе интегрального оператора типа Урысона.

**Ключевые слова:** модели косвенных измерений, уравнения типа Урысона, регуляризирующие итерационные алгоритмы, близкие по решению уравнения, асимптотический подход.

## Введение

В работе рассматривается задача восстановления решений уравнений Урысона в предположении, что известна априорная информация о решении и дополнительная информация о решении близких уравнений. Здесь возникают две самостоятельные задачи обработки и интерпретации косвенно получаемых данных. Обработка полученных экспериментальных данных проводится с целью выделения максимума достоверной информации о реальных характеристиках восстанавливаемых функций. Наблюдаются только интегральные характеристики, т. е. учитывающие суммарный эффект от всех точек наблюдаемого объекта. Такие характеристики нечувствительны даже к большим изменениям величин, характеризующих объект, если эти изменения компенсируют друг друга. Таким образом, задача интерпретации состоит в решении обратной задачи $Az = u$. Прямая задача состоит в измерении интегральных характеристик объекта – правых частей интегральных уравнений типа Урысона 1-го рода $u$ по заданным исходным зависимостям $z$, характеризующим объект.

К дискретным, дискретно-непрерывным, интегральным нелинейным уравнениям типа Урысона приводит широкий класс задач моделирования косвенных измерений, дистанционного зондирования, грави-, магнито-, сейсмо- и геологоразведки и др. В качестве примера рассмотрим одномерный случай определения формы геологической аномалии и ее характеристик (плотность, проводимость и др.) по результатам измерений на поверхности Земли. Требуется определить плотность $\rho(x)$ аномальной области, находящейся на глубине $H$, ограниченной поверхностью $h(x)$, $a \le x \le b$ по изменениям вертикальной составляющей $u(x)$ – силы тяжести на поверхности в точке $(x, H)$, $\gamma$ – гравитационная постоянная.

Соответствующее интегральное уравнение типа Урысона 1-го рода имеет вид

$$\gamma \int_a^b \frac{\rho(\xi) h(\xi) [H - h(\xi)] d\xi}{[(x-\xi)^2 + (H - h(\xi))^2]^{\frac{3}{2}}} = u(x), \qquad a \le x \le b. \tag{1}$$

В предположении, что форма аномалии, находящейся на глубине $H$, нас не интересует, а масса элемента объема в $\Delta\xi$ равна $\rho(\xi)\Delta\xi$, получим уравнение

$$\gamma H\int_a^b \frac{\rho(\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2+H^2]^{\frac{3}{2}}}=u(x), \quad a\le x\le b. \tag{2}$$

Здесь неизвестной функцией является только плотность $\rho(\xi)$ (и может быть $H$, $a$, $b$), в отличие от уравнения (1), в котором неизвестны две функции $h(\xi)$ и $\rho(\xi)$. Вариант уравнения (1), когда масса элемента $\Delta\xi$, сосредоточенного возле точки $\xi$, определяется как $\rho(\xi)\Delta\xi$ и не зависит от $h(\xi)$ запишем в виде:

$$Af\equiv\gamma\int_a^b \frac{\rho(\xi)[H-h(\xi)]d\xi}{[(x-\xi)^2+(H-h(\xi))^2]^{\frac{3}{2}}}=u(x), \quad a\le x\le b, \quad f=(\rho,h). \tag{3}$$

Задача решения уравнений первого рода (1)–(3) является некорректно поставленной [1]. В работах [2–5] приводятся другие модели. Обратная задача для логарифмического потенциала для бесконечной по оси $OY$ контактной поверхности $z(x)$ описывается нелинейным интегральным уравнением [4]:

$$Az=\gamma\rho\int_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2+H^2}{(x-\xi)^2+(H-z(\xi))^2}d\xi=u(x),$$

где $z(\xi)$ – форма поверхности гравитирующего тела; $H$ – глубина залегания; $\rho$ – плотность (если $\rho$ зависит от $x$, то $\rho(\xi)$ находится под знаком интеграла); $|z(\xi)|<H$.

Обратная задача ньютоновского потенциала в линейной постановке для тела, занимающего область $V=\{x,y,z\,|\,a\le x\le b,\ -H\le z\le -H+\varphi(x,y)\}\ c\le y\le d$, описывается уравнением [9]:

$$A\varphi=\gamma\int_a^b\int_c^d \rho(\xi,\eta)\frac{H\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H^2]^{\frac{3}{2}}}=u(x,y,0).$$

В работе [11] рассматривается обратная задача гравиметрии в многослойной среде:

$$Au=g\equiv\Delta g(x,y)=\sum_{l=1}^{L}g_i(x,y), \quad i=1,\dots,L; \quad \lim_{|x|,|y|\to\infty}|u_l(x,y)-H_l|,$$

$$Au=\sum_{l=1}^{L}\gamma\Delta\rho_l\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left\{\frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+u_l^2(\xi,\eta)]^{\frac{1}{2}}}-\frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_l^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Для решения уравнения Урысона 1-го рода, описывающего данную задачу, предложены регуляризирующие алгоритмы на основе метода Левенберга-Марквардта с использованием весовых множителей. Метод является покомпонентным. Сравниваются классический и покомпонентный методы по скорости, сходимости, относительной ошибке и времени выполнения программ.

В работе [9] для двухкомпонентного алгоритма, основанного на схеме регуляризации Лаврентьева и модифицированного метода Ньютона, формулируются теоремы сходимости. Приведены результаты численного решения трехмерной обратной задачи гравиметрии для модели двуслойной среды. В статье [5] применяется метод гомотопии приближенного решения обратных задач логарифмического и ньютоновского потенциалов, которые моделируют обратные задачи грави- и магниторазведки. Для численных алгоритмов используются полиномы Берштейна.

В данной статье авторами в разделах 1 и 3 рассматривается набор моделей общего вида типа Урысона, обсуждается специфика их решения. В разделе 2 предложены новые алгоритмы решения, основанные на использовании решений близких уравнений, для которых решение может быть эффективно найдено заранее. В качестве таких выбираются, в частности, уравнения, решение которых основано на алгоритмах типа Левенберга-Марквардта, подробно исследованных в рамках школы В. В. Васина. В разделе 3 рассмотрены уравнения, для которых допустимы ассимптотические методы решения (дельта-образные ядра).

## 1. Дискретно-непрерывные модели типа Урысона 1-го рода

Рассмотрим набор обобщающих моделей типа Урысона 1-го рода, вид которых приведен во введении. Уравнение (3) $Af = u$ с ядром $k(x,y) = \dfrac{xy}{[x^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$, можно записать в виде

$$Af \equiv \int_a^b k(x-\xi, H-h(\xi))\rho(\xi)d\xi = u(x), \quad a \le x \le b. \tag{4}$$

Если измерения проводятся в дискретных точках $x_i$, $i=\overline{1,m}$, то получаем дискретно-непрерывные системы уравнений типа свертки

$$(Af)_i = \int_a^b k(x_i-\xi, H-h(\xi))\rho(\xi)d\xi = u(x_i) \equiv u_i, \quad a \le x_i \le b, \quad i=\overline{1,m}. \tag{5}$$

Дискретный вариант уравнения (5) представляет собой нелинейную алгебраическую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j k_{i-j}(h_j)\rho_j = u_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{6}$$

$$k_{i-j}(h_j) = k(x_i-\xi_j, H-h(\xi_j)), \qquad \rho_j = \rho(\xi_j), \quad u_i = u_i(x).$$

Другим примером является задача восстановления поверхности по результатам измерения с помощью антенных устройств времени отражения сигнала (импульса) от поверхности $h(\xi)$, направленного вертикально вниз: $\tau \equiv z(\xi) = \dfrac{2}{c}[(x-\xi)^2 + (H-h(\xi))^2]^{\frac{1}{2}}$, где $c$ – скорость распространения импульса, $\tau$ – удвоенное время (до поверхности и обратно).

В связи с тем, что интегрируется отраженный сигнал с весовой функцией $k(x,\xi)$ (ядро, диаграмма направленности, аппаратная функция измерительного прибора), а импульс имеет определенную форму $n(t)$, получаем уравнение

$$Az \equiv \int_a^b m(s)k(x-s)n(t-z(s))ds = u(x,t), \quad a \le x \le b, \quad c \le t \le d, \tag{7}$$

где $m(s)$ характеризует отражение от поверхности, $n(t)$ – дельтаобразная функция. Функция $m$ может зависеть от $z$ и $z'$.

Таким образом, в качестве модельных будем рассматривать дискретно-непрерывные нелинейные операторы следующего вида

$$\begin{aligned}
&(Az)_i \equiv \int_a^b m(s)n(t_i-z(s))ds, \quad c \le t_i \le d, \quad i \in M \subset \mathbb{N} \\
&(Az)_i \equiv \int_a^b k(x-s)n(t_i-z(s))ds, \quad c \le t_i \le d, \quad a \le x \le b \\
&(Az)_i \equiv \int_a^b m(s)k(x-s)n(t_i-z(s))ds, \quad c \le t_i \le d, \quad a \le x \le b.
\end{aligned} \tag{8}$$

В линеаризованных уравнениях используются производные по $z$, которые имеют вид

$$A'(z)_i h \equiv -\int_a^b m(s)n'(t_i-z(s))h(s)ds, \quad c \le t_i \le d,$$

$$A'(z)_i h \equiv -\int_a^b k(x-s)n'(t_i - z(s))h(s)ds, \quad c \le t_i \le d, \tag{9}$$

$$A'(z)_i h \equiv -\int_a^b m(s)k(x-s)n'(t_i - z(s))h(s)ds, \quad c \le t_i \le d.$$

Для рассматриваемого класса задач можно предъявить иерархию математических моделей и множество сценариев измерения, сбора и использования информации для корректного восстановления искомых величин.

Заметим, что невозможно восстановить две функции $h(\xi)$, $\rho(\xi)$ из одного уравнения только по информации о правой части $u(x)$. Поэтому необходимо иметь систему таких уравнений или восстанавливать только некоторые характеристики искомых функций (точки экстремума, участки монотонности и др.), используя априорную, прецедентную или иного рода информацию о решении $f=(h,\rho)$ и специфике модели. Можно поставить задачу нахождения одной из функций $h$ или $\rho$ в предположении, что другая задана.

Пусть заданы приближения функции $h(\xi)$ в виде последовательности функций $h_n(\xi)$, $n=0,1,2,\ldots$, где $h_0(\xi)=0$, тогда $n$-е приближение для $\rho(\xi)$ будем находить в результате решения интегрального уравнения типа (4) (или системы дискретно-непрерывных уравнений (5)):

$$\int_a^b k(x-\xi, H-h_n(\xi))\rho(\xi)d\xi = u(x), \quad a \le x \le b. \tag{10}$$

Приближенное решение $\rho(x)$ используется для построения нового приближения для $h(\xi)$:

$$\int_a^b k(x-\xi, H-h(\xi))\rho_n(\xi)d\xi = u(x), \quad a \le x \le b.$$

В результате получаем решения $f_n=(h_n(\xi),\rho_n(\xi))$.

Естественно, решение находится в результате применения регуляризирующих алгоритмов. Для $h_n(\xi)$ обоснование для дискретного аналога следует из работ В. В. Васина (см. для алгоритма Левенберга-Марквардта работы [6–8]).

## 2. Итерационные алгоритмы решения уравнений типа Урысона

Информация о монотонности искомого решения $z(s)$ позволяет свести задачу решения нелинейного уравнения Урысона 1 рода к линейному уравнению типа свертки. Соответствующие результаты можно найти в работах [13, 14]. Учет разнообразной информации уже требует разработки интеллектуализированной системы обработки данных [12].

Заметим, что данный подход приводит к различным сценариям нахождения искомых величин по результатам косвенных измерений с учетом разнообразной информации. Здесь естественно использовать решение близкого уравнения.

Для обоснования восстановления решений исследуемых уравнений с помощью, например, двух уравнений, рассмотрим простую схему решения одного уравнения $Az=u$ на основе решения близкого ему уравнения $\tilde{A}\tilde{z}=\tilde{u}$. Задача сводится к двум близким экстремальным задачам

$$M^\alpha[z] = \alpha\|z\|^2_{W_2^1} + \|Az-u\|^2_{L_2}, \quad \tilde{M}^\alpha[\tilde{z}] = \tilde{\alpha}\|\tilde{z}\|^2_{W_2^1} + \|\tilde{A}\tilde{z}-\tilde{u}\|^2_{L_2}.$$

Им эквивалентны уравнения

$$Bz \equiv \alpha(-z''+z) + A^*Az = A^*u \equiv g, \quad \tilde{B}\tilde{z} \equiv \tilde{\alpha}(-\tilde{z}''+\tilde{z}) + \tilde{A}^*\tilde{A}\tilde{z} = \tilde{A}^*\tilde{u} \equiv \tilde{g} \tag{11}$$

с параметрами регуляризации $\alpha$, $\tilde{\alpha}$.

Для уравнений вида $Bz=g$ и $\tilde{B}\tilde{z}=\tilde{g}$ справедлива

**Теорема 1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1.* $\exists Y_0 \subset Y,\ g \in Y,\ \tilde{g} \in Y,$ *то* $(g - \tilde{g}) \in Y_0$;

*2. Уравнение* $\tilde{B}z_0 = \tilde{g}$ *имеет единственное решение;*

*3.* $B - \tilde{B} : X \to Y_0$;

*4.* $\exists \tilde{B}^{-1} : Y_0 \to X_0$;

*5. Выполняется условие* $\left\| \tilde{B}^{-1}(B - \tilde{B}) \right\| < 1.$

*Тогда итерационный процесс* $z_{n+1} = z_n \tilde{B}^{-1}[Bz_n - g]$ *– сходится в* $X_0$. *Все элементы* $z_n$ *обладают свойством* $z^* - z_n \subset X_0$. *Справедлива формула для погрешности:*

$$\left\| z_n - z^* \right\| \le \frac{\left\| \tilde{B}^{-1}(\tilde{B} - B) \right\|^n}{1 - \left\| \tilde{B}^{-1}(\tilde{B} - B) \right\|} \left\| \tilde{B}^{-1} g \right\| x_0.$$

*Здесь* $X = Y = L_2,\ \ X_0 = W_2^1$.

Разнообразие алгоритмов следует из применяемых методов регуляризации (в (11) применена регуляризация А. Н. Тихонова).

Для метода регуляризации Лаврентьева $F(z) \equiv Az - u + \alpha(z - z_m)$ итерационная процедура построения приближения $z_{n+1} = z_n + h$ приводит к алгоритму нахождения $h$ из линейного уравнения $[\alpha I + (A'z_n)]h - F(z_n) = 0$ или

$$z_{n+1} = z_n - \gamma[\alpha I + (A'z_n)]^{-1}[Az_n - y + \alpha(z_n - z_m)]. \tag{12}$$

В качестве близких уравнений следует рассматривать уравнения

$$\mathbb{K}h \equiv [\alpha I + (A'z_n)]^{-1}[Az_n - u + \alpha(z_n - z_m)].$$

$$\tilde{\mathbb{K}}\tilde{h} \equiv [\tilde{\alpha} I + (\tilde{A}'\tilde{z}_n)]\tilde{h} = \tilde{A}\tilde{z}_n - \tilde{u} + \tilde{\alpha}(\tilde{z}_n - \tilde{z}_m) \equiv \tilde{g}. \tag{13}$$

обеспечив $\left\| \tilde{\mathbb{K}}^{-1}(\mathbb{K} - \tilde{\mathbb{K}}) \right\| < 1,$ можем найти решение через решение близкого уравнения, более простого по своей структуре, или решение, которое уже найдено для различных уровней погрешности (прецедентная информация).

Для модифицированного варианта метода Левенберга-Марквардта [6–8]решения нелинейных уравнений в частном случае имеет вид

$$z_{n+1} = z_n - \gamma[\tilde{A}'(z_n)^* \tilde{A}'(z_n) + \alpha I]^{-1}[\tilde{A}'(z_n)^*(Az_n - u_\delta) + \alpha(z_n - \tilde{z}_m)]. \tag{14}$$

Здесь $\tilde{z}_m$ – начальное приближение для искомого решения.

Обоснование сходимости предложенных алгоритмов может быть получено по аналогии с работой [9]. В [9] дан обзор итерационных процессов ньютоновского и градиентного типа для устойчивой аппроксимации решений нелинейных нерегулярных операторных уравнений в гильбертовых пространствах. Рассмотрен модифицированный метод Ньютона в форме аналогичной (12), в которой оператор $B_n = (\alpha I + A'z_n)$ заменен на оператор $B_0 = (\beta I + A'z_0)$, где $z_0$ – некоторое начальное приближение. Доказана теорема, обеспечивающая достаточные условия сходимости процесса (12) к решению уравнения, разрешимость которого предполагается [9, с. 28]. Если выбрать такое уравнение в качестве близкого, то по теореме 1 получим решение исходного уравнения с оценкой погрешности, учитывающей погрешность решения близкого уравнения. Таким образом, наличие эффективно решаемых близких уравнений позволяет строить алгоритмы для исходных уравнений. В частности, для этих целей используются асимптотические методы решения.

## 3. Асимптотические методы решения

В решении обратной задачи используются асимптотические методы восстановления характерных точек решения нелинейных интегральных уравнений, основанных на методе Лапласа и применении обобщенных функций. Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Урысона 1-го рода вида

$$\int_a^b f_k(x,\, h(x),\, h'(x)) e^{-\lambda\left(t-\frac{2}{c}R_k(h)\right)^2} dx = u_k(t), \quad k=1,2,$$

где $R_k(h) = ((H-h(x))^2 + (x-a_k)^2)^{\frac{1}{2}}$, $\lambda \gg 1$ – фиксированный параметр, $c$, $H$, $a_1$, $a_2$ – фиксированные числа, причем $H \gg 1$, $R_k(h) \neq 0$.

Предполагается, что существует решение $h(x)$, например, в классе достаточно гладких функций. Ставится задача определения характерных точек («блестящих», точек экстремума) решения системы при заданных $u_k(t)$, $k=1,2$.

Для решения поставленной задачи применяется метод Лапласа, определяющий поведение интеграла

$$\int_a^b f(x) e^{-\lambda(t-S(x))^2} dx = q(t),$$

при условии $\lambda \gg 1$. Предполагается, что:

1. Для $t$: $\min\limits_{a\le x\le b}(t-S(x))^2 \neq 0$, $q(t) = O(\lambda^{-\infty})$.

2. Для фиксированного $t$ существуют корни уравнения $S(x)=t$ и все они $x_1,\ldots,x_p$ являются простыми, причем ни одна из этих точек не является граничной, тогда справедливо асимптотическое представление

$$q(t) = \lambda^{-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \left( \sum_{k=1}^{p} \frac{f(x_k)}{|S'(x_k)|} + O(\lambda^{-1}) \right).$$

3. Если для выбранного $t$ существует единственный простой корень $\hat{x}$ уравнения $S(\hat{x}) = t$, кратности 1, такой что $S'(\hat{x}) = 0$, $S''(\hat{x}) \neq 0$, тогда

$$q(t) = \lambda^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{f(\hat{x})}{|S''(\hat{x})|^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right),$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. При условии, что $f(x)$ положительная, непрерывная, медленно меняющаяся функция, то из асимптотических представлений следует, что функция $q(t)$ принимает максимальное значение в точках, лежащих в окрестностях $\lambda^{-\frac{1}{4}}$ точек $\hat{t}$, для которых существует стационарная точка $\hat{x}$ такая, что $S(\hat{x}) = \hat{t}$.

Эти представления позволяют построить алгоритм нахождения характерных точек исходного уравнения. Предполагается, что промежуток изменения $t$ содержит промежуток $[m_k, M_k]$, где

$$m_k = \min_{[a,b]} \frac{2}{c} R_k(h), \quad M_k = \max_{[a,b]} \frac{2}{c} R_k(h), \quad k=1,2.$$

При сформулированных условиях относительно $H$, стационарные точки $h(x)$ близки к стационарным точкам $R_k(h)$. Пусть $h_1$, $h_2, \ldots,$ $h_m$ – упорядоченное по убывании множество значений функции $h(x)$ в ее стационарных точках $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_m$. Расстояние от $a_1$, $a_2$ до $[a,b]$ имеет порядок $\ll H$, поэтому последовательность $R_k(h_i) = \frac{2}{c}((H-h_i)^2 + (x_i - a_k)^2)^{\frac{1}{2}}$ является упорядоченной по возрастанию. В этом случае стационарные точки $h(x)$ находятся по правой части по следующему алгоритму.

АЛГОРИТМ

1°. Находим упорядоченные по возрастанию точки максимума $u_k(t): t_1^k, t_2^k, \ldots, t_p^k, \ \underline{k} = 1,2.$

2°. Для каждого $i = \overline{1,p}$ решаем относительно $h$, $x$ систему уравнений $R_k(h,x) = t_i^k$, $k=1,2$. Получаем $(h_i, x_i)$.

3°. Полагаем $h(x_i) = h_i$, $i = \overline{1,p}$.

В практических расчетах используется регуляризация решения системы шага 2° и $k = N > 2$.

Рассматривается также решение системы нелинейных уравнений типа Урысона в классе кусочно-постоянных функций и кусочно-линейных функций. На основании проведенных численных экспериментов получены следующие результаты.

1. Высокая точность в определении всплесков правых частей системы интегро-дифференциальных уравнений типа Урысона обеспечивает достаточную точность в определении стационарных точек.

2. Метод обладает большей устойчивостью по отношению к определению высоты $h$, чем по координате $x$ стационарной точки $h(x)$ относительно неточностей определения точек резких максимумов (всплесков) правых частей.

3. Увеличение числа точек наблюдения, т. е. увеличение числа совместно рассматриваемых нелинейных уравнений, улучшает устойчивость в определении стационарных точек $h(x)$ относительно погрешностей в определении точек максимумов правых частей.

## Заключение

В работе получены следующие результаты: приведен набор модельных дискретно-непрерывных моделей типа Урысона 1-го рода, применяемых в прикладных задачах восстановления решений. Получены регуляризирующие алгоритмы, учитывающие различную априорную информацию. Предложены новые алгоритмы решения уравнений типа Урысона 1-го рода, основанные на эффективном решении близких им уравнений. Показана возможность использования асимптотических методов.

## Литература


1. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – Москва : Наука, 1983. – 200 с.

2. *Жданов М. С.* Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей / М. С. Жданов. – Москва : Наука, 1984. – 327 с.

3. *Zhdanov M. S.* Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems / M. S. Zhdanov. – N. Y. Elsevier, 2002. – 610 p.

4. *Бойков И. В.* Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2004.

5. *Бойков И. В.* Применение метода гомотопии к решению обратных задач теории потенциала / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – С. 17–27.

6. *Vasin V. V.* Operators and Iterative Processes of Fejer Type / V. V. Vasin, I. I. Eremin. – Berlin : Walter de Gruyter GmbH\&Co.KG. – 2009. – 155 p. – DOI: 10.1515/9783110218190.

7. *Vasin V. V.* The Levenberg-Marquardt method for approximation of solutions of irregular operator equations / V. V. Vasin // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73. – P. 440–449. – DOI: 10.1134/S0005117912030034.

8. *Vasin V. V.* The Levenberg-Marquardt method and its modified versions for solving nonlinear equations with application to the inverse gravimetry problem / V. V. Vasin, G. Ya. Perestoronina // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – Vol. 280. – Pp. 174–182. – DOI: 10.1134/S0081543813020144.

9. *Васин В. В.* Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии / В. В. Васин, Е. Н. Акимова, А. Ф. Миниахметова // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 26–37.

10. *Lukyanenko V. A.* Some Tasks for Integral Equations of Urison's Type / V. A. Lukyanenko, M. G. Kozlova, U. A. Hazova // Proceedings of the International Conference «Integral Equations – 2010», 25–27 August 2010. – Lviv, Ukraine: PAIS, 2010. – P. 80–84.

11. *Skurydina A. F.* A regularized Levenberg-Marquardt type method applied to the structural inverse gravity problem in a multilayer medium and its parallel realization / A. F. Skurydina // Вестник ЮУрГУ. Сер. Вычислительная математика и информатика. – 2017. – Т. 6, No 3. – P. 5–15. – DOI: 10.14529/cmse170301.

12. *Белозуб В. А.* Интеллектуализация обработки данных в некорректных задачах дискретной оптимизации / В. А. Белозуб, М. Г. Козлова // Международная конференция «XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2016): сборник тезисов. – Симферополь : ООО ФОРМА, 2016. – С. 132–135.

13. *Белозуб В. А.* Некоторые алгоритмы восстановления решений типа Урысона / В. А. Белозуб, М. Г. Козлова // Материалы IX международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IX» (г. Ростов-на-Дону, 22–25 апреля 2019 г.). – Ростов н/Д : Изд-во Ростовского отделения Российской инженерной академии, 2019. – С. 126–127.

14. *Белозуб В. А.* Учет информации в дискретно-непрерывных системах уравнений типа Урысона / В. А. Белозуб, М. Г. Козлова // Марчуковские научные чтения – 2019 : Труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Ин-т вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. Новосибирск, 1–5 июля 2019 г. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2019. – С. 45–51. – DOI: 10.24411/9999-016A-2019-10008.

УДК 004.92

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ АЛГОРИТМОВ ПОВЫШЕНИЯ РЕЗКОСТИ

**А. М. Беляева**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье описываются и сравниваются алгоритм повышения резкости с использованием лапласиана и алгоритм повышения резкости с использованием градиента. А также приведены демонстративные примеры их использования, на которых видно повышение резкости изображения.
**Ключевые слова:** повышение резкости, лапласиан, градиент, маска, цифровая обработка изображений.

## Введение

Изображения в настоящее время занимают очень важную роль в жизни человека. При помощи изображений люди исследуют космос, могут провести полное обследование организма человека. Так же изображения используются для исследования поверхности Земли или дна морей, рек, океанов. Каждый день создаются миллиарды изображений.

Для создания изображений существует огромное множество технологий. К сожалению, условия, при которых создаются изображения и мощность используемых аппаратов, не всегда позволяют получить изображения наивысшего качества. Они могут быть тусклыми, нерезкими, зашумленными, темными и т.п.

В некоторых случаях полученные изображения могут быть улучшены при помощи повышения контрастности, изменения экспозиции или повышения резкости.

Основная цель при повышении резкости – подчеркивание мелких деталей изображения и улучшение качества частей изображения, оказавшихся не в фокусе при съемке.

Существует много различных способов, при помощи которых можно улучшить резкость изображения. В данной работе рассмотрено, как можно реализовать повышение резкости изображения, используя лапласиан и градиент. А также приведено сравнение этих методов между собой.

## 1. Описание алгоритмов

### *1.1. Повышение резкости изображения при помощи градиента*

Для повышения резкости цифровых изображений могут использоваться производные. Метод, описанный в этом пункте, основан на использовании первых производных. Известно, что первая производная от константы, будет равна нулю, первая производная от прямой, не равна нулю и первая производная в местах, где функции сменяют друг друга, также отлична от нуля. При повышении резкости цифровых изображений работают с дискретным аналогом производной, который также сохраняет все свойства. Таким образом, дискретный аналог производный, далее называемый просто производной, обладает следующими свойствами:

1. На участках с постоянным уровнем яркости он равен нулю;
2. В начале и конце разрывов – отличен от нуля;
3. На склонах яркости он будет также отличен от нуля.

Рассмотрим определение производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Если $f(x)$ дискретная, то наименьшее возможное $\Delta x$ равно 1, $\Delta x = 1$, тогда:

$$f'(x) = f(x+1) - f(x). \tag{2}$$

Для обработки изображений при помощи первых производных, используется градиент, который для функции двух переменных $f(x, y)$ определяется следующим образом:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а также модуль градиента:

$$\nabla f = |\nabla f| = \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Однако объем всех вычислений, которые потребуются для обработки всего изображения при помощи формулы (4), достаточно велик, потому частой практикой является использование формулы (5), вместо формулы (4).

$$\nabla f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|. \tag{5}$$

В соответствии с формулой (5) маска имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Маску (6) называют перекрестным градиентным оператором Робертса. Однако в работе с изображениями удобнее работать с масками $3 \times 3$. Поэтому в данной работе будет использоваться оператор Собела, ядра которого выглядит следующим образом [1]:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для получения резкого изображения можно воспользоваться следующим алгоритмом.

**Алгоритм 1.** Получение резкого изображения.

1. Применить маску (7) к исходному изображению.
2. Вычесть из исходного изображения изображение, полученное на шаге 1.

На шаге 1 алгоритма 1 получится изображение с резкими перепадами яркости, эти перепады яркости будут выглядеть более светлыми на темном фоне, а на шаге 2 получится более резкое изображение.

### *1.2. Повышение резкости изображения с помощью лапласиана*

Повышение резкости возможно и при помощи вторых производных. Как и в случае с первыми, важно знать поведение вторых производных на участках с постоянным уровнем яркости, в начале и в конце разрывов, а также на протяжении самих склонов. Вторая производная, для повышения резкости цифровых изображений, должна обладать следующими свойствами:

1. На участках с постоянным уровнем яркости она будет равна нулю;
2. В начале и конце разрывов вторая производная будет отлична от нуля;
3. На склонах яркости она также будет равна нулю.

Вторая производная для функции $f(x)$ определяется по формуле:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}. \tag{8}$$

Так как в дискретном случае $\Delta x = 1$, то используя формулу (2), получим

$$f'(x+1) = f(x+2) - f(x+1),$$
$$f'(x) = f(x+1) - f(x), \tag{9}$$

и в итоге:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f\left(x+2\right) + f\left(x\right) - 2f\left(x+1\right). \tag{10}$$

Формулу (10) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f\left(x+1\right) + f\left(x-1\right) - 2f\left(x\right). \tag{11}$$

Оператор Лапласа задается следующей формулой:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{12}$$

В соответствии с формулой (10) получим формулы для вторых производных функции двух переменных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f\left(x+1, y\right) + f\left(x-1, y\right) - 2f\left(x, y\right), \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f\left(x, y+1\right) + f\left(x, y-1\right) - 2f\left(x, y\right). \tag{14}$$

В итоге получим следующую формулу:

$$\nabla^2 f = (f\left(x+1, y\right) + f\left(x-1, y\right) + f\left(x, y+1\right) + f\left(x, y-1\right)) - 4f\left(x, y\right). \tag{15}$$

В соответствии с формулой (15) маска оператора Лапласа буде выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Рассмотрим центральный пиксель и его соседей. Если значение центрального пикселя сильно отличается от значений его соседей, то оператор Лапласа принимает наибольшие значения в этом пикселе. Таким образом, он выделяет части изображений с резкими перепадами яркости. Тогда чтобы получить более четкое изображение, нужно сложить исходное изображение с лапласианом. Но так как маска (16) имеет отрицательный центральный коэффициент, то из изображения следует вычесть лапласиан. Эти действия аналогичны Алгоритму 1, но на шаге 1 используется маска (16).

## 2. Алгоритмические основы ПО

В данной работе рассматриваются 8-битные изображения в стандартной модели RGB. Пиксели таких изображений могут принимать $2^8$ значений яркости, то есть значения красного, зеленого и синего цветов находятся в интервале $\left[0, 255\right]$. Далее подразумевается, что работа происходит с каждым каналом.

При работе с цифровыми изображениями также нужно учитывать, что маска $3 \times 3$ должна применяться ко всем пикселям изображения, но не у всех пикселей есть соседние элементы, поэтому пиксели, находящиеся по краям изображения будут искажены.

Также значения пикселей в исходных изображениях должны находятся в интервале $[0, 255]$. При этом может получиться так, что значения элементов в новом изображении будут отрицательными или наоборот больше, чем 255. Например, если вычесть из пикселя со значением 15, пиксель со значением 200, то в новом изображении значение пикселя будет –185, или, если изображение умножается, например, на число 5, а в исходном изображении есть пиксель со значением 100, то в получившемся изображении будет присутствовать пиксель со значением 500. Этого допускать нельзя, потому что значения пикселей должны находиться в интервале $[0, 255]$.

Для того чтобы изображение в результате не искажалось и чтобы значения пикселей не выходили за пределы диапазона яркостей, можно использовать следующие алгоритмы:

1. Алгоритм, расширяющий изображение;

2. Алгоритм, возвращающий значения пикселей в нужный диапазон яркостей на изображении.

**Алгоритм 2.** Расширение изображений.

1. Перед первой строкой изображения добавить новую строку и скопировать в нее пиксели первой строки.

2. После последней строки изображения добавить новую строку и скопировать в нее пиксели последней строки.

3. Перед первым столбцом изображения добавить новый столбец и скопировать в него пиксели первого столбца.

4. После последнего столбца изображения добавить новый столбец и скопировать в него пиксели последнего столбца.

Таким образом, из изображения $N \times M$ получается расширенное изображение $(N+2) \times (M+2)$ (рис. 1). В расширенном изображении маска применяется только к тем пикселям, у которых присутствуют все соседние элементы.

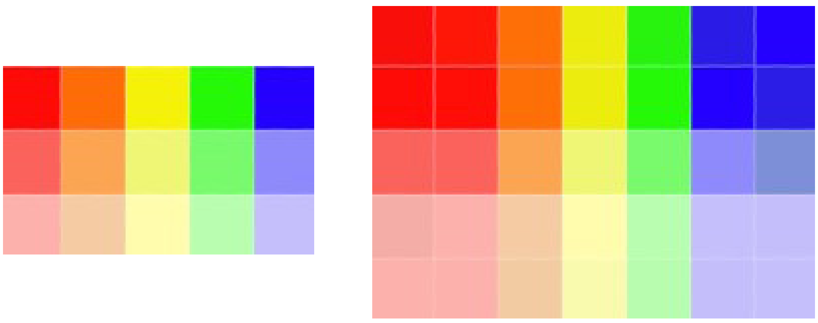


*Рис. 1. (а) Исходное изображение; (б) расширенное изображение*

**Алгоритм 3.** Возвращение значения пикселей в нужный диапазон яркостей.

1. Найти минимальное значение пикселей входного изображения.

2. Полученное значение вычесть из всех элементов этого изображения.

3. Найти максимальное значение $\max$ среди элементов, полученных на шаге 2.

4. Умножить все значения пикселей изображения из шага 2 на значение $255 / \max$.

После применения данного алгоритма, значения пикселей займут весть диапазон $[0, 255]$.

## 3. Описание ПО

Для анализа работы двух алгоритмов, была разработана программа на языке C#, в среде разработки Visual Studio (рис. 2) [2].

На вход в приложение подается некоторое изображение, которое загружается из меню «Файл – Открыть». Далее есть возможность выбрать, каким методом будет обрабатываться изображение, с помощью лапласиана или при помощи градиента. На выходе получается изображение с повышенной резкостью. Первый метод в программе соответствует повышению резкости с использованием градиента, а второй – с использованием лапласиана.

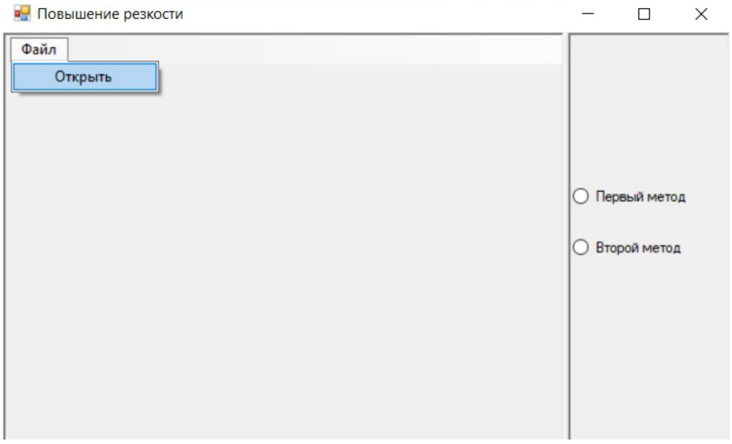



*Рис. 2. Главное окно программы*

В программе содержатся следующие методы: ExpandedBitmap(Bitmap), MainBitmap(Bitmap), FinalBitmap(Bitmap). Рассмотрим каждый из них поподробнее.

На вход метода ExpandedBitmap подается исходное изображение. К нему применяется Алгоритм 2. Метод возвращает расширенное изображение.

На вход метода MainBitmap подается это расширенное изображение. Метод применяет к изображению маску (7), если выбран первый метод или маску (16), если второй. На выходе получается более резкое изображение, значения пикселей которого могут выходить за пределы нужного диапазона.

На вход метода FinalBitmap подается изображение, полученное на выходе метода MainBitmap. Затем применяется Алгоритм 3. Метод возвращает изображение, в котором значения всех пикселей находятся в диапазоне $[0,255]$, которое является конечным.

## 3. Сравнение работы двух алгоритмов

Для сравнения двух алгоритмов, было выбрано изображение (рис. 3(а)). Данное изображение не достаточно резкое. После применения маски (7) или маски (16), получаются более четкие изображения (рис. 3(б), рис. 3(в)).

*Рис. 3. (а) Исходное изображение; (б) изображение, полученное с помощью масок (6); (в) изображение, полученное с помощью маски (15)*

Сравнивая результаты, можно заметить, что метод, основанный на второй производной, справился с задачей лучше. Изображение получилось более контрастным. Стали виднее мелкие детали.

Сравнить результаты можно также вычитая из исходного изображения (рис. 3(а)), преображенные изображения (рис. 3(б), рис. 3(в)). В результате вычитаний получатся новые изображения (рис. 4(а), рис. 4(б)). Первое разностное изображение имеет 28116 не черных прикселей, а второе – 9268 не черных пикселей. Это значит, что метод, основанный на второй производной, лучше выделяет более контрастные области изображения.

Можно еще раз увидеть результаты работы метода, основанного на второй производной (рис. 4). Видно, что преображенное изображение (рис. 4(б)), имеет более четкие границы. Буквы, находящиеся на строчках 7–10, читаются легче и на предпоследней строке есть возможность разобрать некоторые буквы. Видно, что этот метод хорошо справился с задачей улучшения границ (рис. 4(в)).

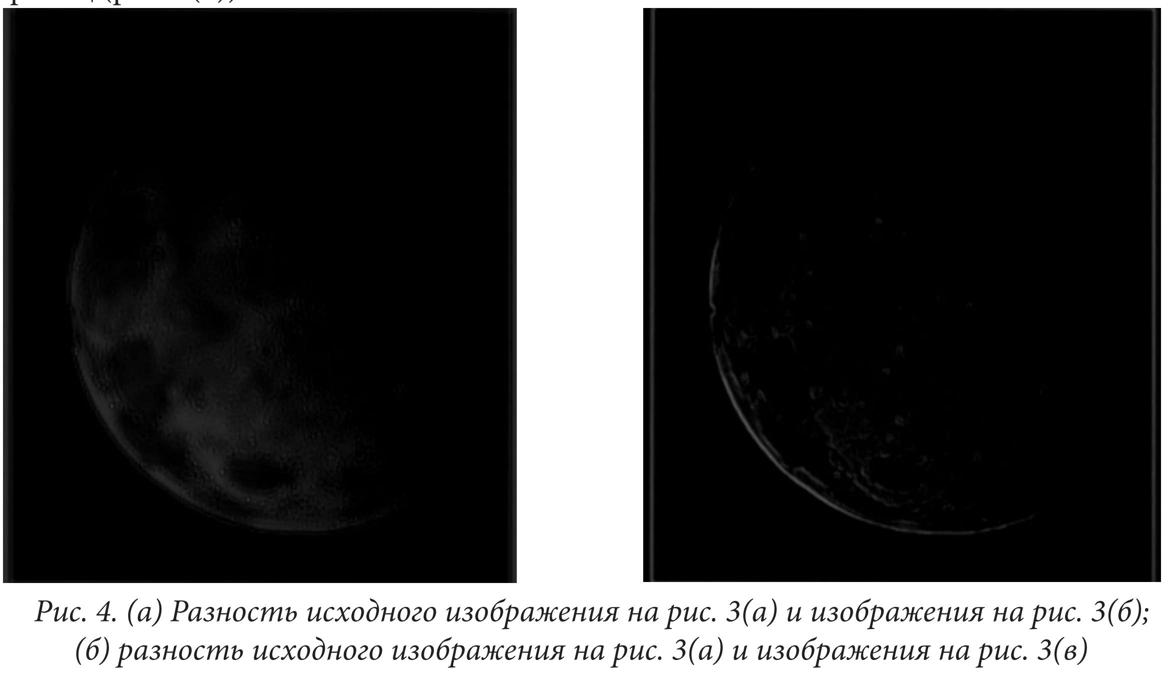


*Рис. 4. (а) Разность исходного изображения на рис. 3(а) и изображения на рис. 3(б); (б) разность исходного изображения на рис. 3(а) и изображения на рис. 3(в)*

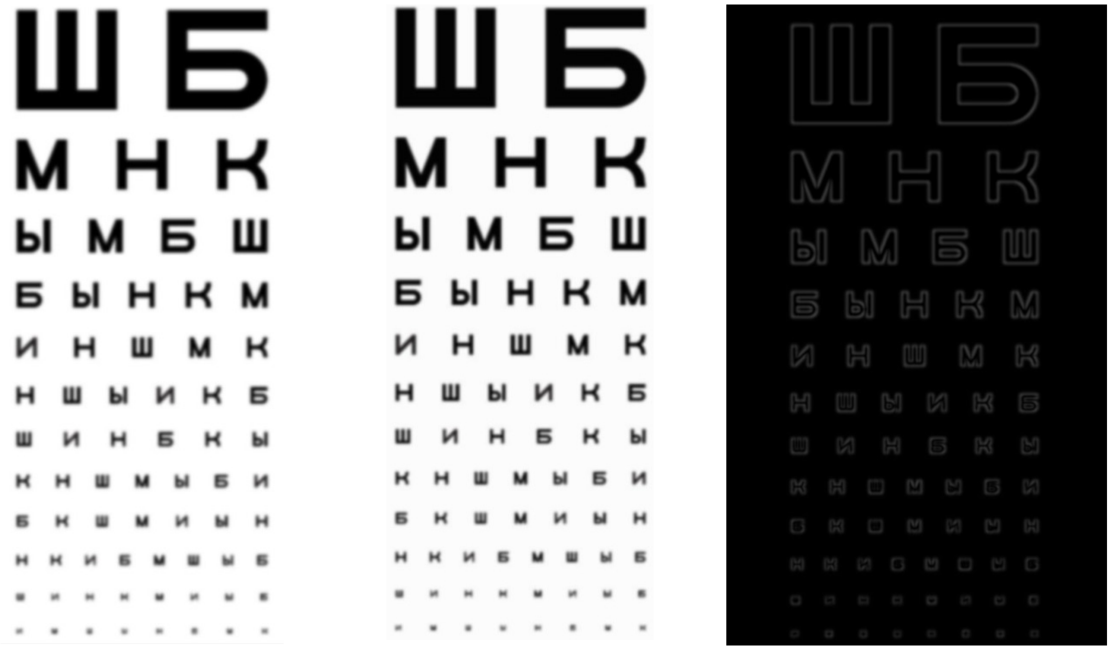


*Рис. 5. (а) Исходное изображение; (б) изображение, полученное с помощью маски (б); (в) разность изображений (а) и (б)*

**Заключение**

В данной работе были описаны два метода обработки изображений. Из описанных выше результатов применения этих алгоритмов на изображение, следует, что алгоритм на основе лапласиана лучше справляется с повышением резкости. Изображения, преображенные этим методом, получаются более контрастными, в отличие от изображений, полученных с использованием градиента. При этом в статье не были рассмотрены варианты комбинирования данных методов, что чисто теоретически может более высокое качество детализации на изображениях.

**Литература**

1. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений: учебное пособие / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва : Техносфера, 2005. – 1072 с.

2. *Шарп Д.* Microsoft Visual C# / Д. Шарп. – Санкт-Петербург : Питер, 2017. – 848 с.

УДК 517.927.4

# О ВТОРЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

**Е. А. Бородина[1], С. А. Шабров[2], Ф. В. Голованева[2], Э. Ю. Курклинская[2]**

*[1]Воронежский государственный университет инженерных технологий*
*[2]Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе исследуется нелинейная математическая модель шестого порядка с негладкими решениями. Мы рассматриваем случай, когда граничная задача гарантированно имеет одно решение, и исследуем вопрос о наличии еще одного. Используя точечный подход Ю. В. Покорного, показавший свою эффективность при анализе моделей второго и четвертого порядков, получены достаточные условия существования второго решения для модели шестого порядка с производными по мере.
**Ключевые слова:** негладкое решение, поточечный подход, нелинейная задача, математическая модель.

В работе изучается нелинейная математическая модель, реализуемая в виде граничной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} - (gu'_x)'_\mu + Q'_\mu u = f(x,u); \\ u(0) = u'_x(0) = u'''_{xx\mu}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u'''_{xx\mu}(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере. При этом основное внимание уделяется случаю, когда модель (1) заведомо имеет одно известное решение и стоит вопрос о существовании другого. Известное решение, без ограничения общности, мы будем считать нулевым, так как можно сделать функциональную замену, осуществляющую сдвиг этого решения в нуль.

Решение (1) мы будем искать в классе $E$ — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — $\mu$-абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(x)$ — $\mu$ -абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. В точках $\xi$, принадлежащих множеству точек разрыва $\sigma(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство

$$-\Delta(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + \Delta(gu''_{xx})'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке $\xi$.

Уравнение из (1) задано почти всюду (по мере $\sigma$) на следующем расширении отрезка $[0;\ell]$. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$ зададим метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство $(J_\sigma;\sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значений $\xi - 0$, $\xi + 0$, которые ранее были предельными.

Индуцируя упорядоченность с исходного множества, придем к неравенствам $x < \xi - 0 < \xi + 0 < y$ для всех $x$, $y$ для которых выполнялись неравенства $x < \xi < y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi - 0$ и $\xi + 0$ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ определим предельными значениями.

Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\varrho(x;y)$.

Объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$ и $Q(x)$ $\mu$-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$, $\min\limits_{x \in \overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, а $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

• $f(x,u)$ при почти всех $x$ (относительно $\mu$-меры) определена и непрерывна по $u$;
• функция $f(x,u)$ измерима по $x$ при каждом $u$;
• $|f(x,u)| \le m(x)$, где $m(x)$ — $\mu$-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Будем говорить, что однородное уравнение

$$-(pu'''_{xx\mu})'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} - (gu'_x)'_\mu + Q'_\mu u = 0$$

не осциллирует на $[0;\ell]$, если любое его нетривиальное решение имеет не более пяти нулей с учетом кратности.

Через $K$ обозначим конус неотрицательных на $[0;\ell]$ функций.

Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x,u)$, непрерывно действует из $C[0;\ell]$ в $L_{p,\sigma}[0;\ell]$;*

*2) $f(x,u) \ge 0$ для всех $x \in [0;\ell]$ и $u \ge 0$;*

*3) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$;*

*4) при некотором $R > 0$ и любом $\lambda \in (0;1)$ дифференциальная модель*

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x,u), \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

*не имеет решений $u(x)$ таких, что*

$$\sup_{x\in(0;\ell)} \frac{u(x)}{u_0(x)} \ge R, \tag{3}$$

*где $u_0(x) = \int\limits_0^x (x-\tau)^2 d\mu(\tau) \cdot \int\limits_x^\ell (\tau - x)^2 d\mu(\tau)$.*

*Тогда задача (1) имеет хотя бы одно решение в $K$.*

Условия теоремы естественно проверять при достаточно больших $R$. Поэтому конкретизация её условий мы можем проводить в терминах асимптотических свойств функции $f(x,u)$.

Функцию $f(x,u)$, которая порождает оператор суперпозиции, действующий из $C[0,\ell]$ в какое-то $L_{p,\sigma}\overline{[0;\ell]}_\sigma$ $(p \in (1,\infty))$, назовём асимптотически нулевой, если $\lim\limits_{u\to\infty} \left\| \hat{f}(\cdot,u) \right\|_p^p = \lim\limits_{u\to\infty} \int\limits_0^\ell |\hat{f}(x,u)|^p d\sigma(x) = 0$, $\hat{f}(x,u) = \sup\limits_{v\ge u} \left| \frac{f(x,v)}{v} \right|$; $f(x,u)$ назовём асимптотически линейной, если для некоторой $q(x) \in L_{p,\sigma}\overline{[0;\ell]}_\sigma$ функция $f(x,u)$ — асимптотически нулевая. При этом будем писать $q(x) = f'_\infty(x)$.

Самый простой пример асимптотически нулевой функции — это функция ограниченная на всей плоскости. Менее тривиальный: $f(x,u)$ не ограничена, но имеет медленный, например, логарифмический, рост на бесконечности.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) существует мажоранта $f^\oplus(x,u)$ такая, что $0 \le f(x,u) \le f^\oplus(x,u)$ для всех $x \in [0,\ell]$ и $u \ge 0$; $f^\oplus(x,u)$ асимптотически линейна;*

*2) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$;*

*3) при $q(x) = f^{\oplus\prime}{}_\infty(x)$ спектральная задача*

$$\begin{cases} Lu = \lambda q(x) u, \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0, \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0, \end{cases}$$

*не имеет точек спектра в единичном круге.*

*Тогда модель (1) разрешима в $K$.*

Если в дополнение к условиям теоремы потребовать $f(x,0)\equiv 0,$ то задача (1) заведомо имеет тривиальное решение, и применение теоремы никакой дополнительной информации не дает.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) однородное уравнение* $Lu=0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_\sigma$;

*2) оператор суперпозиции, порождаемый функцией* $f(x,u),$ *непрерывно действует из* $C[0,\ell]$ *в некоторое* $L_{p,\sigma}[0;\ell]$;

*3)* $f(x,u)\ge 0$ *для всех* $x\in[0,\ell]$ *и* $u\ge 0$;

*4)* $f(x,0)\equiv 0$;

*5) при некотором* $R>0$ *и любом* $\lambda\in(0,1)$ *дифференциальная модель (2) не имеет решений* $u(x)$ *таких, что справедливо (3);*

*6) для некоторого* $r_0>0$ *и некоторой функции* $h(x)\ge 0,$ *отличной от тождественно нулю, такой, что* $h(x)\in L_\infty[0,\ell],$ *при достаточно малом* $\lambda>0$ *модель*

$$\begin{cases} Lu=f(x,u)+\lambda h(x),\\ u(0)=u'_x(0)=u''_{xx}(0)=0,\\ u(\ell)=u'_x(\ell)=u''_{xx}(\ell)=0, \end{cases} \qquad (4)$$

*не имеет решений, для которых неравенство*

$$\tilde u_0(x)\|u\|_C\le u(x)\le r_0\tilde u_0(x) \qquad (5)$$

*справедливо для всех* $x$ *принадлежащих* $[0;\ell]$.

*Тогда математическая модель (1) имеет в* $K$ *нетривиальное решение.*

Следующая теорема показывает, как могут быть проверены условия теоремы 3 в окрестности нуля.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1) однородное уравнение* $Lu=0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_\sigma$;

*2)* $f(x;0)\equiv 0$;

*3) существует функция* $f^{\ominus}(x,u),$ *такая что при некотором* $r>0$ *неравенство*

$$0\le f^{\ominus}(x,u)\le f(x,u)$$

*справедливо при всех* $x\in[0;\ell]$ *и* $u\in[0;r],$ *причем* $f^{\ominus}(x,u)$ *монотонна по* $u$ *при* $u\in[0;r]$;

*4) существует функция* $u_0(x)\in K\setminus\{0\}$, *удовлетворяющая условиям* $u(0)=u'_x(0)=0$ *и при достаточно малом* $\lambda>0$ *следующему неравенству*

$$\lambda(Lu_0)(x)\le f^{\ominus}(x,\lambda u_0(x)),\quad (x\in\overline{[0;\ell]}_\sigma) \qquad (6)$$

*Тогда задача (1) имеет в* $K$ *нетривиальное решение.*


### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ (проект 19-11-00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.


### Литература


1. *Покорный, Ю. В.* Осцилляционная теория Штурма — Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 63, № 1. – С. 111–154.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. – М. : Физматлит, 2004. – 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. – М. : Физматлит, 2009. – 192 с.

4. *Pokornyi, Yu. V.* Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. – 2004. – V. 119, No 6. – P. 769–787.

5. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 4. — С. 578--582.

6. *Pokornyi, Yu. V.* On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. – 2008. – V. 60, iss. 1. – P. 108–113.

7. *Шабров, С. А.* О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, № 1. – С. 52–55.

8. *Шабров, С. А.* Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. – 2013. – № 1. – С. 232–250.

9. *Давыдова, М. Б.* О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, № 4. – С. 13–17.

10. *Баев, А. Д.* Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. – 2014. — Т. 458, № 6. – С. 627–629.

11. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. – 2018. – № 2. – С. 93–105.

12. *Бородина, Е. А.* Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. – 2019. – № 2. – С. 65–69.

13. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. – 2019. – № 3. – С. 93–100.

14. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, Д. А. Чечин, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2020. – Т. 490, № 1. – С. 9–12.

УДК 654.07.012.12

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ НА ОСНОВЕ ЛИЧНОСТНЫХ КАЧЕСТВ, ВЫЯВЛЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ОПРОСНИКА КЕТТЕЛА

**Е. А. Будкеева**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья посвящена проблеме адекватного оценивания профессиональных компетенций, как комплекса взаимосвязанных знаний, умений, установок и личностных качеств. В материале подробно рассматривается возможность оценивания составляющей «личностные качества» и предлагается метод оценивания с помощью латентных переменных. С использованием структурного моделирования и опросника Кеттела выполнен анализ взаимосвязи личностных качеств и успеваемости. Автором было изучено, что личностные качества, выявленные опросником Кеттела, не влияют на успеваемость студентов.

**Ключевые слова:** профессиональные компетенции, оценка профессиональных компетенций, структурные уравнения, структурное моделирование, латентные переменные, скрытые переменные, личностные качества, опросник Кеттела, многомерный анализ данных.

## Введение

В настоящее время все более актуальной становится методология оценивания качества получаемых знаний, основанная на компетентностном подходе. Под компетенциями понимается комплекс взаимосвязанных знаний, умений, установок, личностных качеств и форм поведения, формирующий способности для выполнения задач профессиональной деятельности [1].

Особого внимания среди вышеперечисленного заслуживают личностные качества. В ряде существующих исследований доказано, что особенности личности могут являться профессионально важными факторами в любом виде деятельности. Однако, личностные качества с трудом поддаются выявлению и оценке, вследствие чего до сих пор актуальна проблема адекватного оценивания профессиональных компетенций. Взяв за основу последние исследования в этой сфере, было сделано предположение, что личностные качества можно оценить с помощью латентных переменных, оказывающих значительное влияние на исследуемый объект, но которые невозможно оценить количественно напрямую.

Целью исследования является выявление и изучение латентных переменных, оказывающих влияние на компетенции индивидуума. В качестве инструмента для достижения цели будет использовано структурное моделирование. Для выявления личностных качеств будет использован 16-факторный опросник Кеттела.

## 1. Определение структурного моделирования

Структурное моделирование или структурные уравнения — комплексная методология анализа данных, являющаяся более мощной альтернативой регрессионному, ковариационному и факторному анализу [2].

В сравнении с другими видами анализа данных структурное моделирование имеет ряд преимуществ: отличается высокой надежностью, имеет более гибкие допущения, позволяющие интерпретировать результаты даже при наличии мультиколлениарности, допускает использование конфирматорного факторного анализа, позволяющего снизить ошибки измерений с помощью множества индикаторов для каждой латентной переменной, допускает возможность моделирования промежуточных переменных, а не только аддитивных моделей [3].

Структурное моделирование работает с двумя типами переменных: наблюдаемые и скрытые. Наблюдаемые переменные представляются в явном виде, например, из результатов опроса, отчета или наблюдений, такие переменные называются индикаторами или манифестируемыми переменными [3–4].

Латентные переменные в свою очередь нельзя измерить непосредственно, их существование и проявление предполагают через измеряемые переменные. Особенно важно это в исследовании профессиональных компетенций, где так сложно выявить и дифференцировать основные факторы, такие как обучаемость, знание предмета. Для каждой латентной переменной рекомендуется не менее трех индикаторов, однако, если высока уверенность в валидности и надежности данных, то допустимо применение двух или даже одного индикатора [2–4].

## 2. Обзор методической базы 16-факторного опросника Кеттела

### *2.1. Обзор теории Кеттела*

Для выявления латентных переменных в исследовании применяется методика Кеттела, являющаяся одной из основных общепсихологических теорий, которая предполагает, что люди отличаются друг от друга набором и степенью отдельных, независимых черт. Наборы черт личности (еще их называют факторами) определяются с помощью опросника.

Р. Б. Кеттел выделяет 16 факторов, определяющих личностные качества: общительность (A), интеллектуальность (B), эмоциональная устойчивость (C), доминантность (E), беспечность (F), моральная нормативность (G), смелость (H), эмоциональная чувствительность (I), подозрительность (L), мечтательность (M), дипломатичность (N), тревожность (O), восприимчивость к новому (Q1), самостоятельность (Q2), самодисциплина (Q3), напряженность (Q4). Эти личностные качества будут использованы в исследовании [5].

### *2.2. Группировка и усреднение результатов опроса*

У методик, основанных на опросах, существует определенный недостаток — неустойчивость результатов. Результаты могут колебаться в зависимости от внешних факторов и внутреннего состояния респондента, что в свою очередь может исказить результаты исследования.

Проблема неустойчивости результатов в исследовании решена с помощью группировки и усреднения результатов. Все факторы опросника Кеттела группируются по следующим свойствам [5]:

1) коммуникативные свойства (факторы «A», «H», «E», «L», «N», «Q2»);
2) интеллектуальные свойства (факторы «B», «M», «N», «Q1»);
3) эмоциональные свойства (факторы «C», «F», «H», «I», «O», «Q4»);
4) регуляторные свойства (факторы «Q3», «G»).

## 3. Изучение влияния личностных качеств на профессиональные компетенции

### *3.1. Подготовительный этап исследования*

Для исследования влияния личностных качеств на освоение профессиональных компетенций была взята группа из 135-ти студентов различных ВУЗов России в возрасте от 20-ти до 24-х лет. В качестве измеряемых факторов компетенций взят средний балл за последний год обучения с округлением до единицы (3, 4, 5). Округление до единицы необходимо для исключения таких погрешностей оценивания, как болезнь студента, предвзятое отношение преподавателя, неуспеваемость из-за семейных обстоятельств, соревнований и т.д.

Для получения устойчивых результатов данные выборки сгруппированы и усреднены по методике, описанной в пункте 2.

### *3.2. Предварительный корреляционный анализ данных*

Первым этапом исследования проведен предварительный корреляционный анализ данных для выявления линейной зависимости между наблюдаемыми (средний балл за последний год) и латентными (сгруппированные и усредненные данные опросника Кеттела) переменными. Результаты анализа приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Корреляционная матрица сгруппированных данных по всем факторам*

| | Коммуникации | Интеллект | Эмоции | Регуляторные свойства | Оценка |
|---|---|---|---|---|---|
| Коммуникации | 1 | | | | |
| Интеллект | 0,309769 | 1 | | | |
| Эмоции | 0,260604 | 0,462516 | 1 | | |
| Регуляторные свойства | 0,385706 | 0,387301 | 0,512247 | 1 | |
| Оценка | 0,204027 | 0,082398 | 0,065696 | 0,04949 | 1 |

Линейной зависимости не обнаружено у оценки ни с одной переменной. Это показывают коэффициенты корреляции, значения которых не превышают 0,2.

Рассмотрим на рис. 1–4 графики сгруппированных независимых факторов относительно зависимой переменной (оценки).

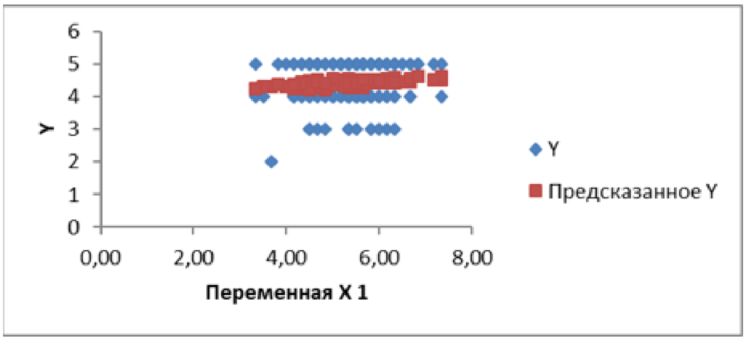



*Рис. 1. График переменной коммуникативных свойств относительно оценки*

На графике рис. 1 нет прямой зависимости и нет предпосылок для предположения нелинейной зависимости. Поэтому коммуникативные свойства не влияют на оценку.

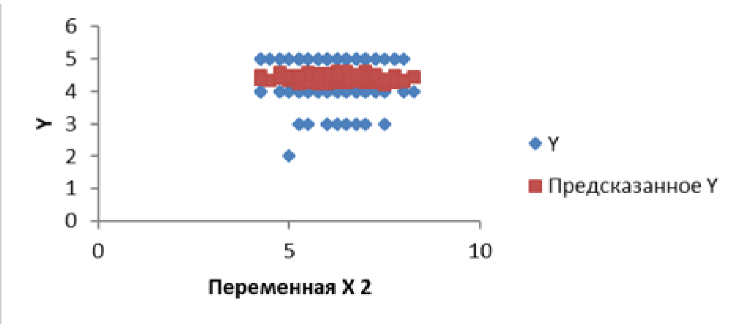



*Рис. 2. График переменной интеллектуальных свойств относительно оценки*

На графике рис. 2 нет прямой зависимости и нет предпосылок для предположения нелинейной зависимости. Поэтому интеллектуальные свойства не оказывают влияния на оценку.

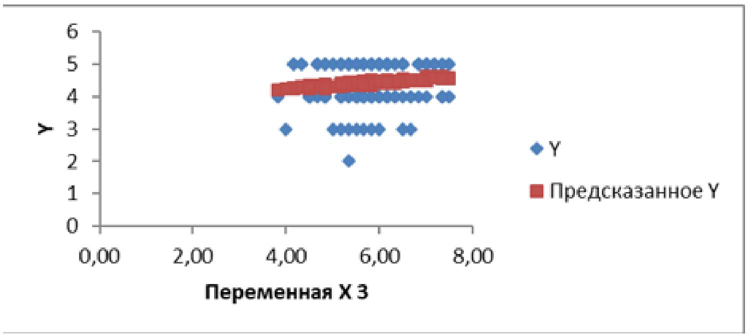



*Рис. 3. График переменной эмоциональных свойств относительно оценки*

На графике рис. 3 нет прямой зависимости и нет предпосылок для предположения нелинейной зависимости. Поэтому эмоциональные свойства не оказывают влияния на оценку.

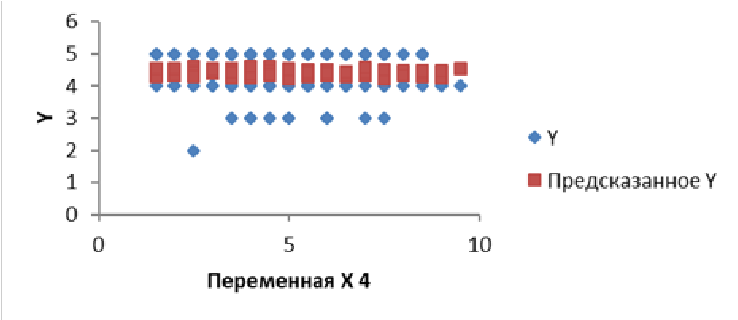



*Рис. 4. График переменной регуляторных свойств относительно оценки*

На графике рис. 4 нет линейной зависимости и нет предпосылок для предположения нелинейной зависимости. Поэтому регуляторные свойства не оказывают влияния на оценку.

Выводы: исходя из предварительного корреляционного анализа можно сказать, что линейной зависимости нет. Также графики всех переменных не дают предпосылок для предположения нелинейной зависимости. Таким образом, у выделенных групп факторов нет взаимосвязи со средним баллом за последний год обучения.

## Заключение

Обнадеживающих результатов на данном этапе нет. Исследование показало, что личностные качества, выявленные по опроснику Кеттела, не связаны с успеваемостью студентов. Возможная причина отрицательного результата – это то, что влияние личностных качеств слишком мало и текущей выборки недостаточно для выявления зависимости. Также не исключено, что личностные качества по Кеттелу действительно не влияют на успеваемость. В дальнейшем в рамках исследования планируется увеличить выборку и расширить методическую базу, применив более современное психологическое тестирование «Пятифакторный опросник личности 5PFQ».

## Литература


1. *Ильина Т. С.* Модельно-инструментальный комплекс оценивания качества освоения образовательных программ студентами высшего учебного заведения: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.10 / Ильина Татьяна Сергеевна; СибГУТИ. – Новосибирск, 2017. – 23 с.

2. Моделирование структурными уравнениями // Компания StatSoft,Inc. : [http://statsoft.ru/home/textbook/default.htm]. – 2012. – URL: http://statsoft.ru/home/textbook/modules/stsepath.html (дата обращения 10.05.2020)

3. *Остапенко Р. И.* Структурное моделирование в психологии и педагогике / Р. И. Остапенко // Перспективы науки и образования. – 2013. – № 2. – С. 49-60.

4. *Митина О. В.* Моделирование латентных изменений с помощью структурных уравнений / О.В. Митина // Экспериментальная психология. – 2008. – № 1. – С. 131–148.

5. *Батаршев А. В.* Диагностика пограниченых психических расстройств личности и поведения : учеб. пособие / А. В. Батаршев ; Изд-во Института Психотерапии. – Москва : Изд-во Института Психотерапии, 2004. – 320 с.

УДК 51.74

# КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ И МАТРИЧНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ КРИТЕРИЕВ

**С. Г. Буланов**

*Ростовский государственный экономический университет, г. Таганрог*

**Аннотация.** Представлен метод анализа устойчивости в смысле Ляпунова систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на линеаризации с помощью приближенного кусочно-полиномиального решения системы. Анализ устойчивости линеаризованной системы выполняется с помощью критериев, полученных на основе матричных мультипликативных преобразований разностных схем численного интегрирования. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка и шага решения. Представленные критерии на практике дают возможность в режиме реального времени выполнять достоверный анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** устойчивость по Ляпунову, компьютерное моделирование устойчивости, линеаризация систем дифференциальных уравнений, мультипликативные преобразования разностных схем.

## Введение

Компьютеризация математических и прикладных исследований приводит к вопросу о выполнимости достоверного анализа устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) средствами вычислительной техники. В работе представлены сравнительно доступные и достоверные средства анализа для автоматизированного контроля устойчивости. Известные методы, если они не относятся к частным видам ОДУ, используют различные способы вычисления функций Ляпунова [1, 2]. Существуют подходы, опирающиеся на разностное приближенное решение системы, с нахождением которого совмещается компьютерный анализ устойчивости, используются также функции правой части дифференциальных уравнений и их производные [3, 4].

Предложенный подход опирается на линеаризацию системы с помощью кусочно-полиномиального приближения решения и правой части системы. В основе приближения лежит алгоритм представления аппроксимирующих полиномов Лагранжа на подынтервале с числовыми коэффициентами. Такое представление позволяет аппроксимировать правую часть ОДУ, а затем и первообразной от нее, которая при соответствующей подынтервалу замене константы приближает искомое решение. Преобразованная система исследуется на основе критериев устойчивости для систем линейных ОДУ, полученных на основе рекуррентных мультипликативных преобразований разностных схем численного интегрирования.

## 1. Описание метода

Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{d\,\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t,\ \mathbf{Y}),\ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0\,. \tag{1}$$

Предполагается, что существует $\delta_0 > 0$, при котором выполнены все условия существования и единственности для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0, \infty)$ и для каждого его возмущения с начальным вектором из окрестности $\left\| \tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0 \right\| \leq \delta_0$. Предполагается также, что в области $R:\{\ t_0 \le t < \infty;\ \mathbf{Y}(t),\ \forall\,\tilde{\mathbf{Y}}(t): \left\| \tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0 \right\| \le \delta_0\ \}$ функция $\mathbf{F}(t,\ \mathbf{Y})$ всюду определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по $t$, компоненты этой функции удовлетворяют неравенству

$$\left| f_k(t,\mathbf{Y}) - f_k(t,\tilde{\mathbf{Y}}) \right| \le L \left| y_k - \tilde{y}_k \right|,\ L = \text{const},\ \forall t \in [t_0,\infty),\ \forall\,(t,\mathbf{Y}),\ (t,\tilde{\mathbf{Y}}) \in R,\ \forall\, k = 1,\ldots,n.$$

С помощью замены $\mathbf{V}(t) = \mathbf{Y}(t) - \mathbf{Z}(t)$, где $\mathbf{Z}(t)$ – невозмущенное решение, система (1) преобразуется к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{U}(t,\ \mathbf{V}),\ \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0,\ \mathbf{U}(t,\ 0) \equiv 0. \tag{2}$$

Выполним следующее преобразование системы (2):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \\ \ldots \\ \dfrac{dv_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u_1(t,\ v_1,\ldots,v_n)}{v_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{u_2(t,\ v_1,\ldots,v_n)}{v_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{u_n(t,\ v_1,\ldots,v_n)}{v_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Возмущение нулевого решения системы (3) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{V}}_{i+1} = (\mathbf{E} + h\,\mathbf{A}(t_i,\tilde{\mathbf{V}}_i))\,\tilde{\mathbf{V}}_i + \tilde{\mathbf{Q}}_i,\ i = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

где $$\mathbf{A}(t_i,\ \tilde{\mathbf{V}}_i) = \begin{pmatrix} \dfrac{u_1(t_i,\ \tilde{v}_{1i},\ldots,\tilde{v}_{ni})}{\tilde{v}_{1i}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{u_2(t_i,\ \tilde{v}_{1i},\ldots,\tilde{v}_{ni})}{\tilde{v}_{2i}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{u_n(t_i,\ \tilde{v}_{1i},\ldots,\tilde{v}_{ni})}{\tilde{v}_{ni}} \end{pmatrix},\ \left\| \tilde{\mathbf{Q}}_i \right\| \le c_1 h^2.$$

При любом выборе $t = \text{const},\ t \in \left[\, t_0,\ \infty \right),\ h$ и переменный индекс $i$ всегда предполагаются связанными соотношениями: $t = t_{i+1},\ h = \dfrac{t_{i+1} - t_0}{i+1},\ i = 0,1,\ldots$ .

Для вычисления диагональных элементов матрицы $\mathbf{A}(t_i,\ \tilde{\mathbf{V}}_i)$ с более высокой точностью, чем на основе разностных методов, используется метод варьируемого кусочно-полиномиального приближения решения задачи Коши для ОДУ [5, 6]. При этом в качестве приближающего полинома используется полином Лагранжа, преобразованный описанным ниже способом.

В формуле полинома Лагранжа $\Psi_{n_0}(t) = \sum\limits_{j=0}^{n_0} f(t_j) \prod\limits_{\substack{r=0 \\ r\ne j}}^{n_0} (t - t_r) \Big/ \prod\limits_{\substack{r=0 \\ r\ne j}}^{n_0} (t_j - t_r)$ выполним следующие преобразования. Пусть $\dfrac{t - t_0}{h} = x,\quad t_j = t_0 + jh,$ тогда $\prod\limits_{\substack{r=0 \\ r\ne j}}^{n_0} (t - t_r) = \prod\limits_{\substack{r=0 \\ r\ne j}}^{n_0} (x - r)h,$ $\prod\limits_{\substack{r=0 \\ r\ne j}}^{n_0} (t_j - t_r) = \prod\limits_{\substack{r=0 \\ r\ne j}}^{n_0} (j - r)h.$ В результате $\Psi_{n_0}(t) = \sum\limits_{j=0}^{n_0} f(t_j) \dfrac{P_{n_0 j}(x)}{G_{n_0 j}(j)},$ где $P_{n_0 j}(x) = \prod\limits_{r=0}^{n_0-1} (x - x_r),$ $G_{n_0 j}(j) = \prod\limits_{r=0}^{n_0-1} (j - x_r)\ \ x_r = \begin{cases} r, & r < j; \\ r+1, & r \ge j. \end{cases}$ Переменную $P_{n_0 j}(x)$ можно представить в виде полинома $P_{n_0 j}(x) = d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + ... + d_{n_0 j}x^{n_0}$, по аналогии $G_{n_0 j}(j)$ преобразуется к виду $G_{n_0 j}(j) = d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + ... + d_{n_0 j}j^{n_0}$ или $G_{n_0 j}(j) = (-1)^{n_0 - j}\, j!(n_0 - j)!$.

Таким образом

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j) \frac{d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + ... + d_{n_0 j}x^{n_0}}{d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + ... + d_{n_0 j}j^{n_0}} . \tag{5}$$

Из соотношения (5) следует, что полином Лагранжа всегда можно представить в виде $\Psi_{n_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n_0} a_\ell x^\ell$, где $a_\ell = \sum_{j=0}^{n_0} \frac{f(t_j) d_{\ell j}}{G_{n_0 j}(j)}$, $x = \frac{t - t_0}{h}$.

Приближение решения и правой части (2) на $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{R-1} [a_i, b_i]$ сводится к последовательному приближению на подынтервалах

$$[a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{P-1} [t_j, t_{j+1}],\ P = 2^{k_0},\ k_0 = \{0, 1, \ldots\}. \tag{6}$$

При каждом $i \ge 1$ полагается $\tilde{v}_k(a_i) = \tilde{v}_{k-1}(b_{i-1})$, $\tilde{v}_k(a_0) = \tilde{v}_0$. На каждом подынтервале из (6) строится кусочно-полиномиальное приближение функции правой части (2). Количество подынтервалов $P = 2^{k_0}$ и степень интерполяционного полинома $n_0$ выбираются так, чтобы было минимальным значение

$$\delta_{kij}(t) = |\, \Psi_{kjn_0}(t) - u_k(t, z_{1j}(t), ..., z_{nj}(t))\, | ,\ t \in [t_j, t_{j+1}] ,\ j = \overline{0, P-1},\ k \in \overline{1, n},$$

где $\Psi_{kjn_0}(t) \approx u_k(t, \tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_n)$, $z_{kj}(t) = \tilde{v}_{kj} + \int_{t_j}^{t} \Psi_{kjn_0}(t)\,dt$ – полином с числовыми коэффициентами, приближающий искомое решение. При этом значения в узлах интерполяции на каждом подынтервале априори вычисляются по методу Эйлера с излагаемыми ниже особенностями.

При каждом $j$ подынтервал $[t_j, t_{j+1}]$ из (6) разбивается на $n_0$ равноотстоящих узлов с шагом $h_0$:

$$t_{jp} = t_j + p h_0,\ p = \overline{0, n_0},\ h_0 = \frac{t_{j+1} - t_j}{n_0}. \tag{7}$$

В каждом из узлов (7) вычисляются значения $u_k(t_{jp}, \overline{v}_{1jp}, ..., \overline{v}_{njp})$, где $\overline{v}_{kjp}$ определяется по методу Эйлера:

$$\overline{v}_{kjp} = \overline{v}_{kj(p-1)} + h_0 \cdot u_k(t_{j(p-1)}, \overline{v}_{1j(p-1)}, ..., \overline{v}_{nj(p-1)}),\ p = \overline{0, n_0},\ k \in \overline{1, n}. \tag{8}$$

При этом в качестве $\overline{v}_{j0}$ берется значение на границе справа из окончательного приближения на предыдущем подынтервале: $\overline{v}_{kj0} = \overline{v}_{k(j-1)n_0}$, для начального подынтервала из (6) $\overline{v}_{k00} = \tilde{v}_{k0}$. При этом значения в (8) можно получить и на основе разностных методов высокого порядка. Значения $u_k(t_{jp}, \overline{v}_{1jp}, ..., \overline{v}_{njp})$ принимаются за значения в узлах интерполяции:

$$\varphi_{kjp} = u_k(t_{jp}, \overline{v}_{1jp}, ..., \overline{v}_{njp}),\ p = \overline{0, n_0},\ k \in \overline{1, n}. \tag{9}$$

Аналогично, всюду ниже $\overline{v}$ будет обозначать вычисляемое приближение точного решения $\tilde{v}$. По условиям интерполяции (9) строится интерполяционный полином Лагранжа степени $n_0$, который приводится к виду:

$$\Psi_{kjn_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n_0} a_{kj\ell} \left(\frac{t - t_{j0}}{h_0}\right)^\ell,\ a_{kj\ell} = \sum_{p=0}^{n_0} \frac{\varphi_{kjp} d_{\ell p}}{G_{n_0 p}}. \tag{10}$$

Полином (10) приближает производную решения задачи (2). Приближение самого решения строится как первообразная от (10) с постоянной, принимающей значение $\overline{v}_{kj0}$. Семейство первообразных от полинома $\Psi_{kjn_0}(t)$ на $j$-м подынтервале имеет вид $\int \Psi_{kjn_0}(x)\,dx = C + h \sum_{\ell=0}^{n_0} \frac{a_{kj\ell}}{\ell + 1} x^{\ell+1}$. Фиксирование в правой части значения нижнего предела и замена константы $C$ на $\overline{v}_{kj0}$ определяет функцию $z_{kj}(t)=\overline{v}_{kj0}+\int\limits_{t_{j0}}^{t}\Psi_{kjn_0}(t)\,dt$, или

$$z_{kj}(t)=\overline{v}_{kj0}+h_0\sum_{\ell=0}^{n_0}\frac{a_{kj\ell}}{\ell+1}\left(\frac{t-t_{j0}}{h_0}\right)^{\ell+1}. \tag{11}$$

Полином (11) принимается за приближение решения $\tilde{v}_k(t)$ на $j$-м подынтервале: $\tilde{v}_k(t)\approx z_{kj}(t),\ t\in[t_j,t_{j+1}]$. Вычисление значений полинома (11) производится по схеме Горнера при $x=\dfrac{t-t_{j0}}{h_0}$:

$$z_{kj}(x)=\overline{v}_{kj0}+h\left(\ldots\left(\left(\frac{a_{kjn_0}}{n_0+1}x+\frac{a_{kj(n_0-1)}}{n_0}\right)x+\frac{a_{kj(n_0-2)}}{n_0-1}\right)x+\ldots+a_{kj0}\right)x\,.$$

Значения $\overline{v}_{kjp}=z_{kj}(t_{jp}),\ p=\overline{1,n_0}$ из (11) в процессе компьютерной реализации оказываются более точными приближениями решения, чем получаемые непосредственно с помощью разностного метода. Эти значения целесообразно принять за новые уточненные значения в интерполяционных узлах для последующего интерполирования. Данный рекуррентный процесс позволяет существенно уточнить полученные приближения.

Аналогичное приближение строится на следующем подынтервале и т. д., до исчерпания интервала $[a_i,b_i]$. Полученное приближение по построению является непрерывным и непрерывно дифференцируемым на всем отрезке интегрирования. Также одновременно с приближением решения имеет место непрерывное на всем рассматриваемом интервале приближение производной от решения [5, 6].

В итоге матрица $\mathbf{A}(t_i,\tilde{\mathbf{V}}_i)$ преобразуется к виду:

$$\tilde{\mathbf{A}}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\Psi_{1jn_0}(t)}{z_{1j}(t)} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \dfrac{\Psi_{2jn_0}(t)}{z_{2j}(t)} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\Psi_{njn_0}(t)}{z_{nj}(t)}\end{pmatrix},\ t\in[t_j,t_{j+1}],\ \ \forall j=\overline{0,P-1}.$$

Преобразуя рекуррентно (4), с учетом выполненной линеаризации, получим выражение для величины возмущения через возмущение начальных данных

$$\tilde{\mathbf{V}}_{i+1}=\prod_{\ell=0}^{i}(\mathbf{E}+h\tilde{\mathbf{A}}(t_{i-\ell}))\tilde{\mathbf{V}}_0+\mathbf{S}_i, \tag{12}$$

где $\mathbf{S}_i=\sum\limits_{k=1}^{i}\prod\limits_{\ell=0}^{i-k}(\mathbf{E}+h\tilde{\mathbf{A}}(t_{i-\ell}))\tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}+\tilde{\mathbf{Q}}_i$.

Выполненная линеаризация позволяет применять методы анализа устойчивости систем линейных ОДУ [7] для исследования системы вида (2).

В частности после линеаризации для анализа устойчивости системы

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\tilde{\mathbf{A}}(t)\mathbf{V}\,,\ \mathbf{V}(t_0)=\mathbf{V}_0 \tag{13}$$

можно использовать матричные мультипликативные и аддитивные критерии устойчивости [7].

Для того чтобы решение задачи (13) было устойчиво, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left\| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (\mathbf{E} + h\,\tilde{\mathbf{A}}(t_{i-\ell})) \right\| \le \tilde{C}_1 = \text{const} \quad \forall t \in [\,t_0, \infty\,). \tag{14}$$

Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (14) и, кроме того, выполняется соотношение

$$\left\| \lim_{t\to\infty} \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (\mathbf{E} + h\,\tilde{\mathbf{A}}(t_{i-\ell})) \right\| \to 0. \tag{15}$$

В аддитивной форме критерий устойчивости (14) примет вид [7]

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{\ell=0}^{i} h\,\tilde{\mathbf{A}}(t_{i-\ell}) \le \tilde{\mathbf{C}}_2 = \text{const} \quad \forall t \in [\,t_0, \infty\,), \tag{16}$$

где $\tilde{\mathbf{C}}_2$ – постоянная (диагональная) матрица. Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (16), а также выполнялось соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{i\to\infty} \sum_{\ell=0}^{i} h\,\tilde{\mathbf{A}}(t_{i-\ell}) = (-\infty). \tag{17}$$

Критерии (14)–(17) инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, шага и длины промежутка численного интегрирования, ориентированы на компьютерную реализацию, которая выполняется в режиме реального времени.

## 2. Численный и программный эксперимент

Исследуется на устойчивость система Лоренца

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \sigma(y_2 - y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 y_3 + r y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 y_2 - b y_3. \end{cases} \tag{18}$$

Требуется на основе численного эксперимента проверить достоверность анализа устойчивости по предложенному методу. Анализ устойчивости системы (18) выполняется с начальными условиями и значениями параметров тождественными с представленными ранее в работе [8]. Это делается с целью сопоставить результаты анализа устойчивости с известными и ранее полученными. После преобразования системы (18) к виду (2) получим

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = \sigma\big((v_2 + z_2) - (v_1 + z_1)\big) - \sigma(z_2 - z_1), \\ \dfrac{dv_2}{dt} = -(v_1 + z_1)(v_3 + z_3) + r(v_1 + z_1) - (v_2 + z_2) + z_1 z_3 - r z_1 + z_2, \\ \dfrac{dv_3}{dt} = (v_1 + z_1)(v_2 + z_2) - b(v_3 + z_3) - z_1 z_2 + b z_3. \end{cases}$$

Первоначально анализ устойчивости выполняется с начальными условиями $y_{10} = y_{20} = \sqrt{b(r-1)}$, $y_{30} = r - 1$ при значениях параметров $\sigma = 10{,}1$, $r = 24{,}74$, $b = 2{,}666667$.

Анализ устойчивости выполняется на основе критериев (14), (15). Исследование проводится на промежутке $[0, 1000]$ с шагом $h = 0.00001$, величина возмущения начальных данных считается равной $0.00001$. На каждом шаге работы программы находится численное значение нормы текущего матричного произведения из (14). На основе этих значений делается вывод о характере устойчивости исследуемой системы. Ограниченное изменение значений нормы соответствует устойчивости, монотонное стремление к нулю характеризует асимптотическую устойчивость, неограниченный рост свидетельствует о неустойчивости.

Таблица 1

*Результаты анализа устойчивости системы (18) с начальными условиями $y_{10} = y_{20} = \sqrt{b(r-1)},\ y_{30} = r-1$ при значении параметров $\sigma = 10{,}1,\ r = 24{,}74,\ b = 2{,}666667$*

| *t* | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *norma* | 1.33 | 1.12 | 1.66 | 1.63 | 1.12 | 1.38 | 1.17 | 1.75 | 1.64 | 1.22 |

Значение нормы ограничено константой, что в соответствии с критерием (14) свидетельствует об устойчивости.

Далее выполняется анализ устойчивости системы (18) при значении параметров $\sigma = 10{,}1$, $r = 24{,}1,\ b = 2{,}666667$ с неизменными начальными условиями.

Таблица 2

*Результаты анализа устойчивости системы (18) с начальными условиями $y_{10} = y_{20} = \sqrt{b(r-1)},\ y_{30} = r-1$ при значении параметров $\sigma = 10{,}1,\ r = 24{,}1,\ b = 2{,}666667$*

| *t* | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| *norma* | $1.79\times10^{-1}$ | $2.92\times10^{-2}$ | $4.51\times10^{-3}$ | $6.66\times10^{-4}$ | $9.46\times10^{-5}$ |
| *t* | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| *norma* | $1.29\times10^{-5}$ | $1.68\times10^{-6}$ | $2.09\times10^{-7}$ | $2.43\times10^{-8}$ | $3.73\times10^{-9}$ |

Монотонное убывание значений нормы по критерию (15) свидетельствует об асимптотической устойчивости.

Ниже выполняется анализ устойчивости системы (18) при значении параметров $\sigma = 10{,}1$, $r = 25{,}15,\ b = 2{,}666667$ с прежними начальными условиями.

Таблица 3

*Результаты анализа устойчивости системы (18) с начальными условиями $y_{10} = y_{20} = \sqrt{b(r-1)},\ y_{30} = r-1$ при значении параметров $\sigma = 10{,}1,\ r = 25{,}15,\ b = 2{,}666667$*

| *t* | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| *norma* | 5.33 | 20.4 | 60.9 | 170 | 674 |
| *t* | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| *norma* | $2.08\times10^{3}$ | $8.19\times10^{3}$ | $3.54\times10^{4}$ | $1.29\times10^{5}$ | $7.21\times10^{5}$ |

Монотонный рост значений нормы соответствует неустойчивости.

Трактовка характера устойчивости системы (18) при вариации параметров оказалась в полном соответствии с известной и ранее полученной [8]. Это свидетельствует о практической пригодности представленного метода. Наряду с представленным методом целесообразно при исследовании устойчивости использовать методы описанные в [3, 4]. В целом эти методы компьютерно-ориентированные, в отдельных разновидностях дают возможность аналитического применения.

## Заключение

Предложен метод анализа устойчивости систем ОДУ на основе линеаризации и критериев, полученных на основе матричных мультипликативных преобразований разностных схем. Линеаризация выполнена на основе кусочно-полиномиального приближения решения и правой части системы в виде полиномов с числовыми коэффициентами. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка, шага решения. При построении и реализации критериев не используются методы качественной теории дифференциальных уравнений. Матричная мультипликативная форма критериев позволяет реализовать их программно в виде цикла по числу сомножителей. По результатам программного и численного эксперимента в режиме реального времени достоверно определяется характер устойчивости исследуемой системы.

**Литература**


1. *Xiao-Lin L.* Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems / L. Xiao-Lin, J. Yao-Lin // J. Appl. Math. Comput. – 2009. – Vol. 29. – P. 247–262.

2. *Giesl P.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming / P. Giesl, S. Hafstein // J. Difference Equ. Appl. – 2014. – Vol. 20. – P. 610–640.

3. *Ромм Я. Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Е. Ромм // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 107–124.

4. *Ромм Я. Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости решений дифференциальных систем / Я. Е. Ромм // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 4. – С. 42–63.

5. *Джанунц Г. А.* Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением / Г. А. Джанунц, Я. Е. Ромм // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 10. – С. 1641–1660.

6. *Буланов С. Г.* Программный анализ устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе мультипликативных преобразований разностных схем и кусочно-полиномиальных приближений решения / С. Г. Буланов, Г. А. Джанунц // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2015. – № 2. – С. 10–20.

7. *Буланов С. Г.* Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем / С. Г. Буланов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 9. – С. 542–549.

8. *Bulanov S. G.* Differential systems stability analysis based on matrix multiplicative criteria / S. G. Bulanov // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – 1479. 012103.

УДК 51.74

# КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДОБАВКОЙ

**С. Г. Буланов**

*Ростовский государственный экономический университет, г. Таганрог*

**Аннотация.** Предложен метод анализа устойчивости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой. Метод опирается на критерии устойчивости, полученные на основе преобразования разностных схем численного интегрирования при ограничениях общего вида. Матричная мультипликативная форма критериев позволяет запрограммировать вычисление выражений в виде цикла по числу сомножителей. Это создает возможность компьютерного анализа устойчивости без обращения к аналитическим методам качественной теории дифференциальных уравнений. Критерии для случая линейных систем не требуют оценки значений характеристических чисел и характеристических показателей. Анализ устойчивости нелинейных систем не требует построения функций Ляпунова.

**Ключевые слова:** устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, разностные решения дифференциальных уравнений.

## Введение

Предлагается метод компьютерного анализа устойчивости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с нелинейной добавкой. Основой метода служат матричные мультипликативные критерии устойчивости, построенные путем преобразования разностных методов численного интегрирования. На этой основе конструируется компьютерная модель анализа устойчивости систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой. Моделирование с ее помощью позволяет сделать однозначный вывод о характере устойчивости системы дифференциальных уравнений в общем случае.

Исследования в данном направлении обусловлены тем, что ряд задач в технических приложениях теории управления сводится непосредственно к анализу устойчивости систем линейных ОДУ и систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой [1, 2]. Кроме того, к анализу устойчивости систем данного вида сводится анализ устойчивости систем общего вида в рамках первого метода Ляпунова и подходов, основанных на линеаризации [3].

Компьютеризация анализа устойчивости целесообразна ввиду трудностей вычислительного характера в случае матриц коэффициентов систем линейных ОДУ большой размерности. Эти трудности подчас носят принципиальный характер: при анализе знаков корней характеристического многочлена могут возникнуть ошибки по причине вычислительной неустойчивости.

В работе не только найден обход вычислительных затруднений, но предложенный метод принципиально не использует преобразований правой части системы. В случае матрицы постоянных коэффициентов вообще не используется информация о характеристическом многочлене матрицы и его корнях.

## 1. Критерии устойчивости систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой

Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \\ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0. \end{cases} \tag{1}$$

$\mathbf{Y}$ – вектор-функция, координаты которой – искомые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ от независимой переменной $t$. $\mathbf{A}(t)$ – матрица коэффициентов, $n \times n$, все ее элементы $a_{ij}(t)$ $i, j = 1, \ldots, n$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\, t_0 ,\ T \,]$, при любом выборе $T = \text{const}$, $T \in [\, t_0, \infty \,)$; $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$ – начальный вектор. Всюду ниже используется каноническая норма матрицы $\| \mathbf{A} \| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{k=1}^{n} | a_{ik} |$ и согласованная с ней норма вектора $\| \mathbf{Y} \| = \max\limits_{1 \le k \le n} | y_k |$.

Предполагается, что для (1) выполнены все условия существования и единственности решения на $[\, t_0, \infty \,)$. Предполагается также, что в общем случае нелинейная функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема на отрезке $[\, t_0 ,\ T \,]$ при любом выборе $T = \text{const}$, $T \in [\, t_0, \infty \,)$. Кроме того функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$ удовлетворяет условию Липшица $\left\| \mathbf{F}(t, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) \right\| \le L \left\| \tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y} \right\|$, $L = \text{const}$ $\forall t \in [\, t_0, \infty \,)$.

Эти же условия предполагаются выполненными для каждого элемента множества возмущённых решений $\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{Y}}(t)$ системы (1), соответствующих возмущённому начальному вектору $\tilde{\mathbf{Y}}(t_0) = \tilde{\mathbf{Y}}_0$, удовлетворяющему неравенству

$$\left\| \tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0 \right\| \le \delta, \ \delta > 0. \tag{2}$$

Пусть $R$ обозначает область, включающую множество всех решений задачи (1) при начальных условиях, удовлетворяющих (2), –

$$R : \{\, t_0 \le t < \infty;\ \tilde{\mathbf{Y}}(t), \mathbf{Y}(t) : \left\| \tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0 \right\| \le \delta \,\}. \tag{3}$$

В области (3) необходимо исследовать решение задачи (1) на устойчивость в смысле Ляпунова. Определение устойчивости заимствовано из [4] с упрощениями [5] на случай рассматриваемого множества $R$.

В данной поставке задачи для $\forall T \in [\, t_0, \infty \,)$ на отрезке $[\, t_0 ,\ T \,]$ выполнены условия [6, 7]:

1) $\| \mathbf{A}(t) \| \le c$, где $c = \text{const}$ зависит от $T$;

2) если $\Phi_k(t_i, \mathbf{Y}_i) = a_{k1}(t_i)\, y_{1i} + \ldots + a_{kn}(t_i)\, y_{ni} + f_k(t_i, \mathbf{Y}_i)$, то $\left| \Phi'_k(t, \mathbf{Y}(t)) \right| \le c_1$, $\left| \Phi'_k(t, \tilde{\mathbf{Y}}(t)) \right| \le c_1$, $c_1 = c_1(t) = \text{const}$ при любом выборе $t \in [\, t_0 ,\ T \,]$, для всех $k = 1, \ldots, n$.

Метод анализа устойчивости опирается на разностную схему решения системы (1). Для определенности в качестве разностной схемы рассматривается метод Эйлера, который для приближённого решения системы (1) имеет вид $\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + h\,\mathbf{A}(t_i)\mathbf{Y}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, или

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{B}(t_i)\ \mathbf{Y}_i + h\,\mathbf{F}(\, t_i, \mathbf{Y}_i), \tag{4}$$

где $\mathbf{B}(t_i) = \mathbf{E} + h\,\mathbf{A}(t_i)$, $h$ – шаг разностной схемы.

При любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [\, t_0, \infty \,)$, $h$ и $i$ предполагаются связанными следующими соотношениями:

$$t = t_{i+1}, \qquad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots . \tag{5}$$

Для возмущённого решения системы (1) соотношение (4) преобразуется в соотношение

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{i+1} = \mathbf{B}(t_i)\ \tilde{\mathbf{Y}}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \tilde{\mathbf{Y}}_i), \tag{6}$$

где $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ из (2), $\tilde{\mathbf{Y}}_{i+1}$ удовлетворяет (3).

Соответствующие приближённым решениям (4), (6) точные решения могут быть представлены в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге. При этом под остаточным членом понимается разность между точным решением и его приближением по методу Эйлера.

Следовательно, $\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{B}(t_i)\ \mathbf{Y}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i) + \mathbf{\Theta}_{Ei}$, $\tilde{\mathbf{Y}}_{i+1} = \mathbf{B}(t_i)\ \tilde{\mathbf{Y}}_i + h\,\mathbf{F}(t_i, \tilde{\mathbf{Y}}_i) + \tilde{\mathbf{\Theta}}_{Ei}$, где $\mathbf{\Theta}_{Ei}$, $\tilde{\mathbf{\Theta}}_{Ei}$ – векторы остаточных членов.

Разность между точным значением возмущённого и невозмущённого решения имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{i+1} - \mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{B}(t_i)(\tilde{\mathbf{Y}}_i - \mathbf{Y}_i) + h(\mathbf{F}(t_i, \tilde{\mathbf{Y}}_i) - \mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)) + \bar{\mathbf{\Theta}}_{Ei}, \tag{7}$$

где $\bar{\mathbf{\Theta}}_{Ei} = \tilde{\mathbf{\Theta}}_{Ei} - \mathbf{\Theta}_{Ei}$. Поскольку $\left\| \bar{\mathbf{\Theta}}_{Ei} \right\| \le \left\| \tilde{\mathbf{\Theta}}_{Ei} \right\| + \left\| \mathbf{\Theta}_{Ei} \right\|$, то

$$\left\| \bar{\mathbf{\Theta}}_{E\,i} \right\| \le c_1 h^2. \tag{8}$$

Для системы (1) рекуррентное преобразование (7) влечет равенство

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{i+1} - \mathbf{Y}_{i+1} = \prod_{\ell=0}^{i} \mathbf{B}(t_{i-\ell})\,(\tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0) + \mathbf{D}_{Ei} + \mathbf{S}_{Ei}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{D}_{Ei} = \sum_{r=1}^{i} \prod_{\ell=0}^{i-r} \mathbf{B}(t_{i-\ell})\, h \left( \mathbf{F}\left(t_{r-1}, \tilde{\mathbf{Y}}_{r-1}\right) - \mathbf{F}\left(t_{r-1}, \mathbf{Y}_{r-1}\right) \right) + h\left( \mathbf{F}\left(t_i, \tilde{\mathbf{Y}}_i\right) - \mathbf{F}\left(t_i, \mathbf{Y}_i\right) \right), \tag{10}$$

$$\mathbf{S}_{Ei} = \sum_{r=1}^{i} \prod_{\ell=0}^{i-r} \mathbf{B}(t_{i-\ell})\, \bar{\mathbf{\Theta}}_{E\,r-1} + \bar{\mathbf{\Theta}}_{E\,i}. \tag{11}$$

Переходя в (9) к пределу при $h \to 0$, что равносильно стремлению $i$ к бесконечности, получим

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{Y}(t) = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \mathbf{B}(t_{i-\ell})(\tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0) + \lim_{i\to\infty} \mathbf{D}_{Ei} + \lim_{i\to\infty} \mathbf{S}_{Ei}. \tag{12}$$

**Лемма 1.** В рассматриваемых условиях выполняется соотношение [8, 9]

$$\left\| \mathbf{S}_{Ei} \right\| = O(h). \tag{13}$$

В условиях леммы 1 имеет место равенство

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{S}_{Ei} = \vec{0}. \tag{14}$$

На основании равенства (14) соотношение (9) примет вид

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{Y}(t) = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \mathbf{B}(t_{i-\ell})(\tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0) + \lim_{i\to\infty} \mathbf{D}_{Ei}. \tag{15}$$

Непосредственно ниже излагается вывод критериев устойчивости решения задачи (1) в предположении, что устойчива, соответствующая системе (1) линейная система.

Критерии устойчивости системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}, \\ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases} \tag{16}$$

приводятся в теореме 1.

**Теорема 1.** Чтобы в рассматриваемых условиях решение задачи (16) было устойчиво, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left\| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \mathbf{B}(t_{i-\ell}) \right\| \le \tilde{c}_1 = \mathrm{const} \quad \forall t \in [\, t_0, \infty\,). \tag{17}$$

Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (17) и, кроме того, имеет место соотношение

$$\left\| \lim_{t\to\infty} \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \mathbf{B}(t_{i-\ell}) \right\| \to 0. \tag{18}$$

В случае постоянства матрицы $\mathbf{A}$ в (16) запись критериев упрощается [8]. Критерий устойчивости (17) примет вид

$$\left\| \lim_{i\to\infty} \mathbf{B}^{i+1} \right\| \le \tilde{c}_2 = \mathrm{const} \quad \forall t \in [\, t_0, \infty\,), \tag{19}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{E} + h\,\mathbf{A}$.

Критерий асимптотической устойчивости (18) преобразуется в следующее соотношение

$$\left\| \lim_{t\to\infty} \lim_{i\to\infty} \mathbf{B}^{i+1} \right\| \to 0. \tag{20}$$

В этом частном случае предложенные критерии отличаются тем, что не требуют информации о характеристическом многочлене матрицы и о его корнях.

Предположим, что решение задачи (1) устойчиво. Тогда для $\forall\tilde{\varepsilon}>0\ \ \exists\delta>0$, такое что как только выполняется неравенство $\left\|\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0\right\|\le\delta$, то

$$\left\|\tilde{\mathbf{Y}}(t)-\mathbf{Y}(t)\right\|\le\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\quad\forall t\in[t_0,\infty). \tag{21}$$

С учетом (15) и в соответствии с (21) с необходимостью должно выполняться неравенство

$$\left\|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\mathbf{B}(t_{i-\ell})\,(\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0)+\lim_{i\to\infty}\mathbf{D}_{Ei}\right\|\le\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\quad\forall t\in[t_0,\infty). \tag{22}$$

Из (22) следует неравенство

$$\left|\left\|\lim_{i\to\infty}\mathbf{D}_{Ei}\right\|-\left\|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\mathbf{B}(t_{i-\ell})\,(\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0)\right\|\right|\le\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \tag{23}$$

Выбирая $\delta=\dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2\tilde{c}_1}$ получим $\left\|\lim\limits_{i\to\infty}\prod\limits_{\ell=0}^{i}\mathbf{B}(t_{i-\ell})(\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0)\right\|\le\dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2}$. Отсюда и из (23) следует, что $\left|\left\|\lim\limits_{i\to\infty}\mathbf{D}_{Ei}\right\|-\dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right|\le\dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ или

$$\left\|\lim_{i\to\infty}\mathbf{D}_{Ei}\right\|\le\tilde{\varepsilon}\qquad\forall t\in[t_0,\infty). \tag{24}$$

Условие (24) является необходимым условием устойчивости. Докажем, что это условие достаточно для устойчивости решений системы (1). Из (15) получаем $\lim\limits_{i\to\infty}\mathbf{D}_{Ei}=\tilde{\mathbf{Y}}(t)-\mathbf{Y}(t)-\lim\limits_{i\to\infty}\prod\limits_{\ell=0}^{i}\mathbf{B}(t_{i-\ell})\,(\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0)$. Следовательно

$$\left\|\tilde{\mathbf{Y}}(t)-\mathbf{Y}(t)\right\|\le\left\|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\mathbf{B}(t_{i-\ell})\right\|\left\|\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0\right\|+\left\|\lim_{i\to\infty}\mathbf{D}_{Ei}\right\|\qquad\forall t\in[t_0,\infty). \tag{25}$$

Выбирая в (2) $\delta=\dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2\tilde{c}_1}$, где $\tilde{c}_1$ из (17), получим, что величина возмущения в (25) оценивается из неравенства

$$\left\|\tilde{\mathbf{Y}}(t)-\mathbf{Y}(t)\right\|\le\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}+\tilde{\varepsilon}=\frac{3\tilde{\varepsilon}}{2}\qquad\forall t\in[t_0,\infty). \tag{26}$$

Выбирая в соотношениях (21)–(26) в качестве $\tilde{\varepsilon}=\dfrac{2}{3}\varepsilon$, получим, что

$$\left\|\tilde{\mathbf{Y}}(t)-\mathbf{Y}(t)\right\|\le\varepsilon\qquad\forall t\in[t_0,\infty). \tag{27}$$

Тем самым для произвольного $\varepsilon>0$ указано $\delta$, такое что как только $\left\|\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0\right\|\le\delta$, то выполняется неравенство (27). Это по определению означает устойчивость невозмущенного решения системы (1). Достаточность доказана.

Имеет место

**Теорема 2.** Чтобы в рассматриваемых условиях и при условии устойчивости системы (16) решение задачи (1) было устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\tilde{\varepsilon}>0$ нашлось $\delta>0$ такое, что при $\left\|\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0\right\|\le\delta$ выполнялось неравенство (24) [9].

Относительно асимптотической устойчивости имеют место следующие утверждения.

**Теорема 3.** В рассматриваемых условиях и при условии асимптотической устойчивости системы (16) решение задачи (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется утверждение теоремы 2 и существует некоторое положительное значение $\delta_1$, такое, что при $\left\|\tilde{\mathbf{Y}}_0-\mathbf{Y}_0\right\|\le\delta_1$ выполняется соотношение

$$\left\|\lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}\mathbf{D}_{Ei}\right\|\to 0. \tag{28}$$

**Доказательство.** Устойчивость решения системы (1) следует из теоремы 2. Если при этом решение задачи (1) асимптотически устойчиво, то $\exists\ \delta_1$, такое что из неравенства $\left\| \tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0 \right\| \le \delta_1$ следует соотношение

$$\left\| \tilde{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{Y}(t) \right\| \to 0 \qquad t \to \infty. \tag{29}$$

Очевидно,

$$\left\| \lim_{i\to\infty} \mathbf{D}_{Ei} \right\| \le \left\| \tilde{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{Y}(t) \right\| + \left\| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \mathbf{B}(t_{i-\ell})(\tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0) \right\|. \tag{30}$$

Второе слагаемое из правой части (30) стремится к нулю в силу соотношению (18). При выборе $\delta_1$ из (29) и при $t \to \infty$ стремится к нулю и первое слагаемое. Следовательно, при том же выборе $\delta_1$ и при $t \to \infty$ стремится к нулю левая часть неравенства (30). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие доказываемой теоремы. Тогда устойчивость решения системы (1) по-прежнему следует из теоремы 2. Асимптотическая устойчивость имеет место на основании следующих соображений. Норма возмущения решения задачи (1) при $t \to \infty$ оценивается из соотношений

$$\left\| \tilde{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{Y}(t) \right\| \le \left\| \lim_{i\to\infty} \mathbf{D}_{Ei} \right\| + \left\| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} \mathbf{B}(t_{i-\ell})(\tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0) \right\|. \tag{31}$$

Второе слагаемое из правой части неравенства (31) стремится к нулю согласно критерию (18). По условию доказываемой теоремы существует $\delta_1 > 0$, такое, что при $\left\| \tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0 \right\| \le \delta_1$ выполняется $\left\| \lim_{i\to\infty} \mathbf{D}_{Ei} \right\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Поскольку оба слагаемых из правой части (31) стремятся к нулю при $t \to \infty$, то стремится к нулю левая часть соотношения (31). Достаточность доказана.

## 2. Компьютерная реализация критериев устойчивости

Необходимым и достаточным условием устойчивости решения задачи (1) является выполнение неравенства (24). Для асимптотической устойчивости решений задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (24) и (28). В дальнейшем выражение, стоящее под знаком нормы в (24) программируется: на каждом шаге работы программы находится разностное приближение возмущенного и невозмущенного решений и циклически накапливаться частичное матричное произведение. Через фиксированное количество шагов выводится на экран текущее значение нормы из левой части неравенства (24). По асимптотическому поведению этих значений нормы делается вывод о характере устойчивости решения исследуемой системы – неограниченный рост нормы будет свидетельствовать о неустойчивости, ограниченность нормы соответствует устойчивости, убывание нормы к нулю при стремлении независимой переменной к бесконечности означает асимптотическую устойчивость.

Исследуется на устойчивость система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 - y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2 + y_2(y_1^2 + y_2^2). \end{cases} \tag{32}$$

Общее решение в аналитическом виде записывается следующим образом: $y_1 = \dfrac{\cos t}{\sqrt{1+ce^{2t}}}$, $y_2 = \dfrac{\sin t}{\sqrt{1+ce^{2t}}}$.

Нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво справа [10].

При исследовании системы (32) первоначально исследуется линейная система, соответствующая нелинейной системе. Это необходимо по той причине, что критерии (24), (28) можно использовать для анализа устойчивости (асимптотической устойчивости) системы (1), если устойчива (асимптотически устойчива) линейная часть из правой части (1). В общем случае исследование системы линейных ОДУ проводится на основе критериев (17) – (20). Программы, реализующие эти критерии, представлены в [8, 9].

Система линейных ОДУ $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 - y_2\,, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2 \end{cases}$ асимптотически устойчива справа, что, в частности, следует из приближения к $\left\| \prod_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}^{2^k} \right\|$ на промежутке $[\,0,\, 1000\,]$ с шагом разностного решения $|\,h\,| = 10^{-6}$ [9]: 1, 1, …, $3{,}695 \times 10^{-15}$, $9{,}513 \times 10^{-30}$, $7{,}226 \times 10^{-59}$, $3{,}038 \times 10^{-117}$, $8{,}832 \times 10^{-234}$, $6{,}730 \times 10^{-467}$.

Значения нормы стремятся к нулю, что в соответствии с критерием (20) свидетельствует об асимптотической устойчивости справа. Далее выполняется анализ устойчивости системы (32) на основе критерия (24). Приближения к $\left\| \lim_{i \to \infty} \mathbf{D}_{E\,i} \right\|$ на промежутке $[\,0,\, 1000\,]$ с шагом величиной $|\,h\,| = 10^{-5}$ равны [9]: $6{,}977 \times 10^{-59}$, $2{,}587 \times 10^{-102}$, $7{,}220 \times 10^{-146}$, $3{,}632 \times 10^{-189}$, $1{,}333 \times 10^{-232}$, $3{,}809 \times 10^{-276}$, $1{,}890 \times 10^{-319}$, $6{,}865 \times 10^{-363}$, $2{,}008 \times 10^{-406}$, $9{,}831 \times 10^{-450}$.

Значения нормы стремятся к нулю на достаточно большом промежутке, что в соответствии с критериями (24), (28) свидетельствует об асимптотической устойчивости решения системы справа.

## Заключение

Представлен метод компьютерного анализа устойчивости систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой. В основе метода лежат критерии устойчивости в виде необходимых и достаточных условий. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностной схемы, длины промежутка и шага решения. Значение полученных критериев заключается в том, что они позволяют определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости систем ОДУ данного класса без представления решения в аналитической форме, непосредственно по значениям разностных приближений. Форма выражений под знаком предела в левой части критериев предоставляет возможность запрограммировать вычисление этих выражений в виде цикла по числу сомножителей. Это влечет предпосылки компьютерного анализа устойчивости в режиме реального времени без обращения к аналитическим методам качественной теории дифференциальных уравнений и к системам компьютерной математики [11–13].

## Литература

1. *Hammarling S. J.* Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation / S. J. Hammarling // IMA J. of Num. Analysis. – 1982. – Vol. 2, is. 3. – P. 303–323.

2. *Luyckx L.* Computational methods in nonlinear stability analysis: stability boundary calculations / L. Luyckx, M. Loccufier, E. Noldus //J. Comput. Appl. Math. – 2004. – Vol. 168, is. 12. – P. 289–297.

3. *Giesl P.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear discrete time systems by linear programming / P. Giesl, S. Hafstein // J. Difference Equ. Appl. – 2014. – Vol. 20, is. 4. – P. 610–640.

4. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. – Москва : Мир, 1964. – 478 с.

5. *Демидович Д. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Д. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.

6. *Буланов С. Г.* Программный анализ устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе мультипликативных преобразований разностных схем и кусочно-полиномиальных приближений решения / С. Г. Буланов, Г. А. Джанунц // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2015. – № 2. – С. 10–20.

7. *Ромм Я. Е.* Численный эксперимент по компьютерному анализу устойчивости линеаризованных систем нелинейных дифференциальных уравнений / Я. Е. Ромм, С. Г. Буланов // Деп. в ВИНИТИ. – 14.07.2016. – № 102. – 18 с.

8. *Буланов С. Г.* Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем / С.Г. Буланов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 9. – С. 542–549.

9. *Ромм Я. Е.* Компьютерный анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой / Я.Е. Ромм, С.Г. Буланов // Деп. в ВИНИТИ. – 11.03.2010. – № 147. – 33 с.

10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва : Наука, 1971. – 534 с.

11. *Doban A.* Computation of Lyapunov functions for nonlinear differential equations via a Yoshizawa-type construction / A. Doban, M. Lazar // 10th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems NOLCOS: IFAC-PapersOnLine (Monterey, 23-25 august 2016). – 2016. – P. 29–34.

12. *Zhaolu T.* A numerical algorithm for Lyapunov equations / T. Zhaolu, G. Chuanqing //J. Appl. Math. Comput. – 2008. – Vol. 202, is. 1. – P. 44–53.

13. *Xiao-Lin L.* Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems / L. Xiao-Lin, J. Yao-Lin // J. Appl. Math. Comput. – 2009. – Vol. 29, is. 1-2. – P. 247–262.

УДК 517.925.7

# АЛГОРИТМЫ УДАЛЕНИЯ ПОМЕХ С ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ СЕРИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**Д. Д. Булгакова, С. Н. Медведев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Представлены алгоритмы для решения задачи удаления помех с изображения по серии изображений. Представлено два варианта алгоритмов для серии снимков, полученных при фиксации камеры, а также алгоритм, основанный на совмещении меток, при обработке изображений, полученных с незафиксированной камеры. Результаты работы продемонстрированы на иллюстративных примерах.
**Ключевые слова:** удаление помех, усреднение изображений, ранговый фильтр, цифровая обработка изображений.

## Введение

В настоящее время обработка изображений становится всё более востребованной областью фундаментальных и прикладных научных исследований. Это напрямую связано с развитием социальных сетей, где люди могут публиковать изображения, а также аппаратных средств, позволяющих сделать фотографию. Сейчас практически у каждого человека есть смартфон, достав который, можно за несколько секунд сделать снимок. Кто-то фотографирует для себя, кто-то для коммерческих целей, но и тем и другим людям нередко приходится сталкиваться с тем, что сделать желаемый кадр практически не представляется возможным. Часто помехой становятся проезжающие машины, проходящие люди, велосипедисты, провода и другие объекты.

Во время путешествий, да и в обычной жизни помехи очень часто портят снимки. Возникает проблема удаления нежелательных объектов с изображения. Для её решения были разработаны алгоритмы, которые будут описаны в этой работе.

Рассмотрим задачу удаления помех определенного типа с изображения. Такими помехами являются, например, люди, проезжающие автомобили и прочие объекты, которые попали на снимок случайно и не были запланированы изначально.

Требуется получить «чистое» изображение объекта, как на рис. 1. Чистым изображением назовём изображение, на котором отсутствуют помехи.

*Рис. 1. Требуемый результат*

Решение такой задачи очевидно требует дополнительной информации. Невозможно восстановить изображение лишь по одной фотографии, поскольку за помехами скрывается часть изображения, которую также необходимо отобразить. Соответственно, необходимо получить набор фотографий.

В связи с этим ставится задача восстановления «чистого» изображения объекта по серии снимков, на которых помехи расположены в разных местах.

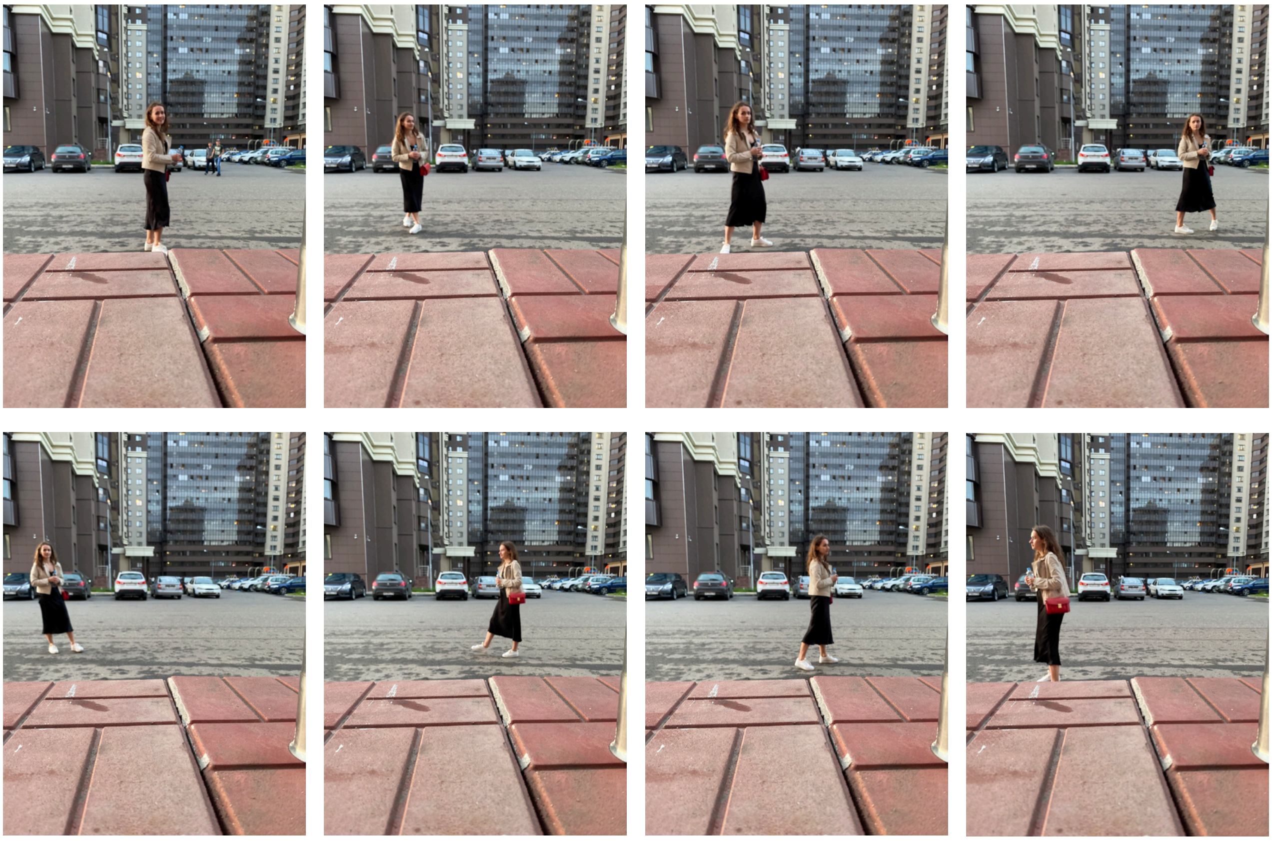


*Рис. 2. Серия снимков*

Сложность данной задачи будет зависеть в том числе от положения камеры при создании снимков.

Будут рассмотрены два варианта: камера зафиксирована (например, на штативе) и камера смещается при создании серии снимков (съёмка с рук).

В первом случае объект фотографии располагается на одном и том же месте в пространстве изображения. Во втором случае объект располагается в разных местах на изображении и тогда необходимо совмещение изображений, чтобы возможно было использовать алгоритм для задачи с фиксированной камерой.

### 1. Постановка задачи с фиксированной камерой

Рассмотрим задачу удаления помех с изображения по серии снимков, полученных с фиксированной камерой. То есть имеется набор снимков с идентичным расстоянием, углом съёмки и всеми остальными характеристиками фотографии.

Особенность этой задачи состоит в том, что камера остаётся неподвижной на протяжении всей съёмки. Это позволяет не производить дополнительную обработку набора перед использованием алгоритма для решения поставленной задачи.

Например, производится съёмка памятника архитектуры. Цель – сфотографировать его без людей или с минимальным их количеством.

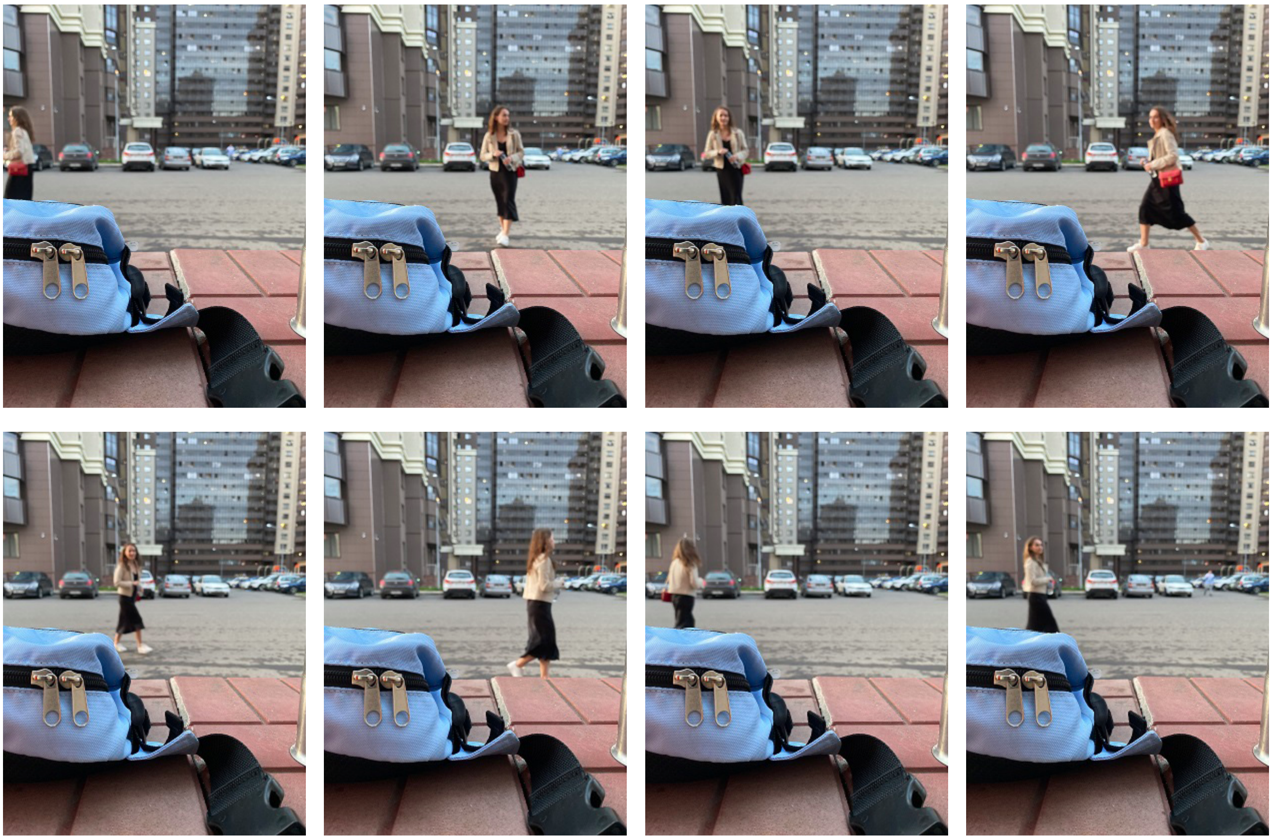


*Рис. 3. Серия снимков для задачи с фиксированной камерой*

На рис. 3 представлены примеры фотографий, которые подлежат обработке алгоритмом с фиксированной камерой. Эти фотографии были сделаны на смартфон с помощью штатива. Основным объектом съёмки является здание и двор, а человек является помехой. Следовательно, необходимым результатом работы алгоритма будет являться фотография, не содержащая, в данном случае, человека (рис. 4). В общем случае, это будет изображение, очищенное от помех.

*Рис. 4. Фотография без помех*

Чтобы физически добиться такого эффекта, нужно прийти на место съёмки очень рано утром, но если памятников планируется снять много, то это не самая лучшая идея. Поэтому можно использовать программное обеспечение, которое «сотрёт» из кадра помехи.

**2. Алгоритм решения задачи с фиксированной камерой с усреднением**

В ходе написания работы был разработан алгоритм решения задачи с фиксированной камерой с использованием усреднения. Идея алгоритма заключается в том, что в качестве значения пикселей выходного изображения используются усреднённые значения соответствующих пикселей набора фотографий. Эти величины рассчитываются по следующим формулам:

$$R_{cp} = \sum_k R_{ij,k} \Big/ k,\ G_{cp} = \sum_k G_{ij,k} \Big/ k,\ B_{cp} = \sum_k B_{ij,k} \Big/ k,$$

где $R_{cp}$, $G_{cp}$, $B_{cp}$ соответственно средние значения цветовых каналов красного, зеленого и синего цвета; $R_{ij,k}$, $G_{ij,k}$, $B_{ij,k}$ – значения цветового канала для пикселя $(i, j)$ на $k$ фотографии; $k$ – количество фотографий во входном наборе данных.

Алгоритм задачи удаления помех с фиксированной камерой с усреднением (алгоритм 2):

1. Задать $i = 0$, $j = 0$;
2. Для каждого снимка запомнить цвет пикселя $F_1(i, j)$, $F_2(i, j), \dots, F_n(i, j)$;
3. Вычислить средние значения цветовых каналов:

$$R_{cp} = \sum_k R_{ij,k} \Big/ k,\ G_{cp} = \sum_k G_{ij,k} \Big/ k,\ B_{cp} = \sum_k B_{ij,k} \Big/ k;$$

4. Вставить пиксель с усреднёнными цветовыми каналами в результирующую фотографию $F(i, j) = (R_{cp}, G_{cp}, B_{cp})$;
5. Если $i = N$ и $j = M$ конец работы алгоритма,
   Иначе $i = i + 1$, $j = j + 1$ и переход к шагу 2.

Этот алгоритм удаления помех имеет существенные недостатки.

Если набор данных относительно небольшой, то полностью очистить фотографию не получится, поскольку берутся средние значения цветовых каналов. Соответственно помехи станут тусклее, но не будут удалены с фотографии.

**3. Алгоритм решения задачи с фиксированной камерой с поиском максимального элемента**

Поскольку использование алгоритма решения задачи с усреднением оказалось не достаточно эффективным и помехи всё же оставались, то был разработан алгоритм решения задачи с фиксированной камерой с поиском максимального элемента.

Основная задача алгоритма состоит в том, чтобы отобрать из исходных фотографий пиксели, содержащиеся в максимальном количестве из заданного набора.

Для описания алгоритма введем следующие обозначения: $F_1$, $F_2, \dots, F_n$ – входные изображения размера $N \times M$, $F$ – результирующее изображение (матрица).

Алгоритм решения задачи удаления помех с фиксированной камерой с поиском максимального элемента (алгоритм 1):

1. Задать $i = 0$, $j = 0$;
2. Для каждого изображения запомнить цвет пикселя $F_1(i, j)$, $F_2(i, j)$, ..., $F_n(i, j)$;
3. Найти элемент $(k)$, встречающийся максимальное количество раз для каждого пикселя $(i, j)$. Пусть этот элемент будет равен $F^*(i, j)$;
4. В результирующее изображение записываем найденный элемент $F(i, j) = F^*(i, j)$;
5. Если $i = N - 1$ и $j = M - 1$ конец работы алгоритма,
   Иначе $i = i + 1$, $j = j + 1$ и перейти к шагу 2.

Используя данный алгоритм, можно увидеть проблему. Она состоит в том, что пиксели, находящиеся на одном и том же положении в изображении, с первого взгляда имеют одинаковый цвет. Однако малейшее изменение освещения приводит к тому, что цветовые каналы имеют различные значения от фотографии к фотографии. Это может происходить из-за разного фокуса на фотографии, движения людей, а также по естественным причинам. К таким причинам относится, например, ветер, который колышет листву, двигающиеся облака, тучи, которые меняют попадание солнечного света в кадр. Соответственно, изменение освещение приводит к изменению цвета пикселя.

Для решения данной проблемы необходимо ввести окрестность для значений цветовых каналов. Эту окрестность будем использовать на этапе поиска максимума при сравнивании элементов. Элементы будут считаться равными, если выполняется условие:

$$R \in [R-\varepsilon; R+\varepsilon],\ G \in [G-\varepsilon; G+\varepsilon],\ B \in [B-\varepsilon; B+\varepsilon],$$

где $\varepsilon$ – произвольно заданное целое значение.

В результате работе алгоритма, учитывая корректировку цветовых каналов, получается изображение, не содержащее помех. Так происходит потому, что объект, который требуется удалить, находится в движении. А значит, пиксели, содержащие помехи, встречаются на минимуме фотографий, а пиксели, образующие желаемое изображение, встречаются на большинстве фотографий.

Для реализации предложенных алгоритмов решения задачи с фиксированной камерой было разработано программное обеспечение на языке C# с использованием интерфейса Windows Forms.

Рассмотрим на одном и том же наборе данных работу обоих алгоритмов, чтобы наглядно увидеть разницу между их работой. На рис. 5 представлена серия фотографий, которая являлась входными данными для работы алгоритмов с поиском максимального элемента и с усреднением.

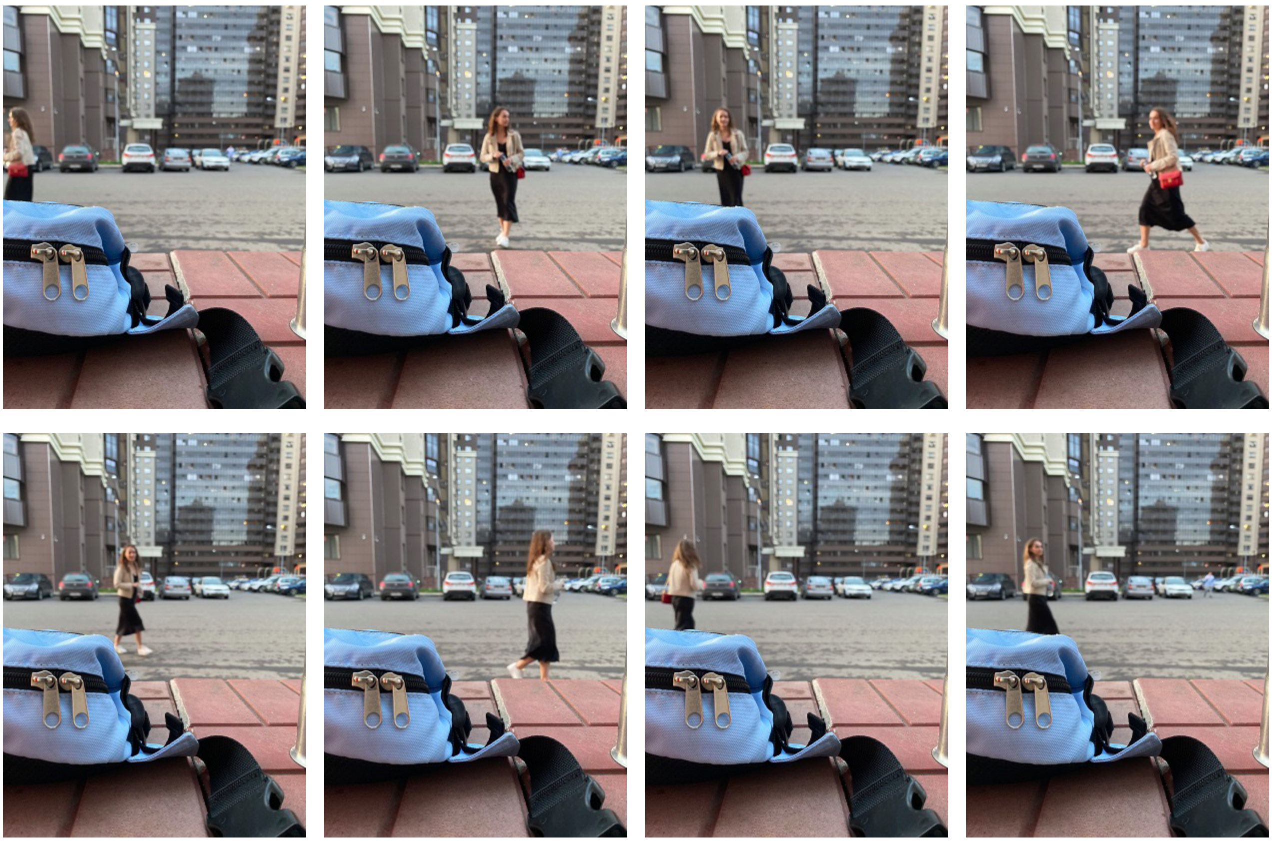


*Рис. 5. Входные данные для задачи с фиксированной камерой*

Рассмотрим изображения, полученные в результате работы алгоритма решения задачи с фиксированной камерой с усреднением. В качестве эксперимента входными данными для работы алгоритма являлось разное количество фотографий (3 и 8). Соответственно, на рис. 6 и 7 представлены результаты работы алгоритма. Можно увидеть, что помехи становятся значительно тусклее с использованием большего количество входных фотографий, однако полностью так и не исчезают, поскольку в выходное изображение вставляется усредненное значение по цветовым каналам.

*Рис. 6. 3 входные фотографии*

*Рис.7. 8 входных фотографий*

При использовании алгоритма с поиском максимального элемента на том же наборе данных получится фотография полностью очищенная от помех. Результирующее изображение представлено на рис. 8.

*Рис. 8. Результат работы алгоритма с поиском максимального элемента*

**4. Задача с двигающейся камерой**

Теперь рассмотрим задачу удаления рассмотрим задачу удаления помех с изображения, в которой серия снимков получена с нефиксированной камеры.

Если камера движется, то изменяется ракурс фотографии, расстояние до объекта, угол съёмки. Таким образом, возникает проблема: расположение объекта фотографии будет изменяться от снимка к снимку, соответственно применение алгоритмов удаления помех с поиском максимума и с усреднением не представляется возможным.

Для решения этой проблемы предлагается использовать метки. Метки – особые точки на изображении. Если метки будут располагаться в одном и том же месте на всех фотографиях из набора, то, соответственно, объект фотографии будет находиться на одном и том же месте. Следовательно, можно будет использовать алгоритмы удаления помех для решения задачи с фиксированной камерой.

Соответственно, чтобы метки на фотографиях с двигающейся камерой располагались в одном и том же месте, необходимо будет их совместить. Будет рассмотрена ситуация с использованием двух меток, которые пользователь расставляет вручную.

Соответственно, исходными данными в этой задаче является набор фотографий, в котором хотя бы одна фотография сделана с иного ракурса. На каждом изображении будет присутствовать две метки. В данном случае под метками понимается пиксель, цвет которого отличается от основной цветовой гаммы фотографии. Например, на рисунке меткой является пиксель ярко-розового цвета (рис. 9).

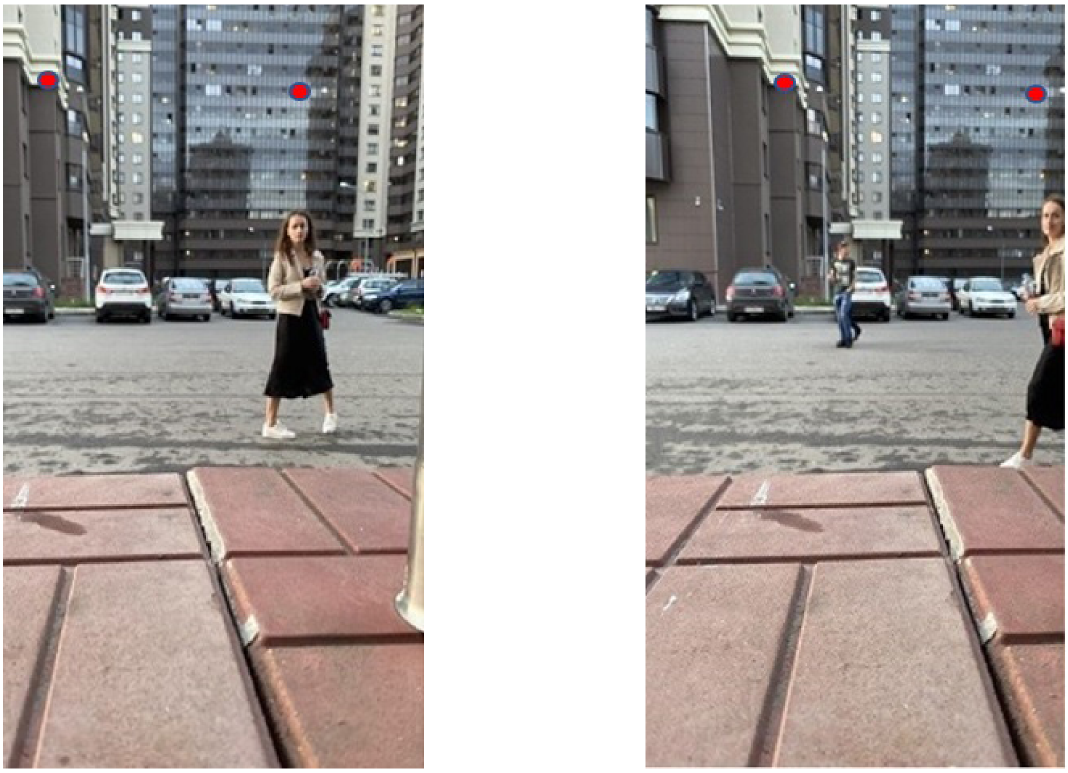


*Рис. 9. Пример входных данных для задачи с двигающейся камерой*

Затем для решения этой задачи необходимо реализовать алгоритм нахождения цвета и их совмещения. На этом этапе получается набор фотографий, который подходит для дальнейшего использования алгоритма задачи удаления помех с фиксированной камерой. Соответственно, чтобы получить требуемый результат (фотографию без помех) необходимо использовать алгоритм удаления помех с фиксированной камерой (рис. 10).

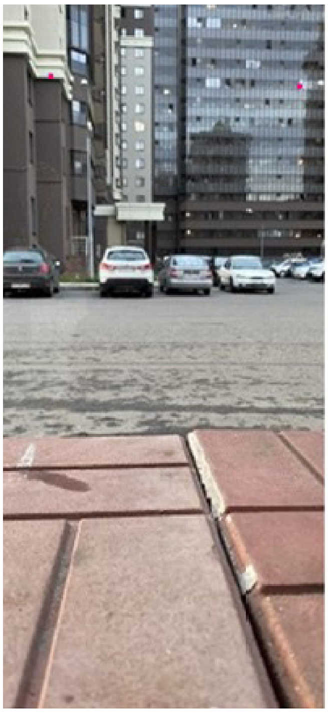


*Рис. 10. Результирующая фотография*

### 5. Алгоритм решения задачи с двигающейся камерой

Рассмотрим алгоритм решения задачи с двигающейся камерой.

Его основная задача состоит в том, чтобы из набора фотографий, сделанных с разных ракурсов, получить изображение, которое бы содержало объект, являющийся целью снимка, и не содержало помех.

Подготовительный этап – расставить метки на каждой фотографии из исходного набора (этап может отсутствовать, в зависимости от выбранного метода работы с метками).

Алгоритм решения задачи удаления помех с двигающейся камерой:

1. Определить координаты всех меток;
2. Совместить метки;
3. Использовать алгоритм 1 или алгоритм 2 решения задачи с фиксированной камерой.

На выходе получается изображение, все основные детали которого содержатся в каждом изображении из исходного набора. Этот алгоритм включает в себя алгоритм решения задачи с фиксированной камерой, следовательно, является более универсальным и может использоваться в обеих ситуациях.

### 6. Совмещение меток

Чтобы использовать алгоритм задачи с фиксированной камерой при решении задачи с двигающейся камерой, необходимо разработать алгоритм совмещения меток. Нужно заметить, что рассматривается ситуация, когда пользователь расставляет метки вручную.

Этот алгоритм потребуется, чтобы привести все фотографии из входного набора данных к единому виду, подходящего для дальнейшего использования алгоритма с фиксированной камерой.

Основные этапы алгоритма совмещения меток:

1. Совмещение первой метки путём переноса;
2. Совмещение второй метки с использованием интерполяции.

Для совмещения первой метки необходимо вычислить векторы переноса. Их можно вычислять относительно усреднённых координат метки или же выбрать фотографию и использовать координаты её метки как эталонные.

Чтобы совместить вторую метку, потребуется сжать (растянуть) изображение. Для этого будет использоваться процесс интерполяции.

Рассмотрим пример работы алгоритма с двигающейся камерой на наборе данных, представленном на рис. 11.

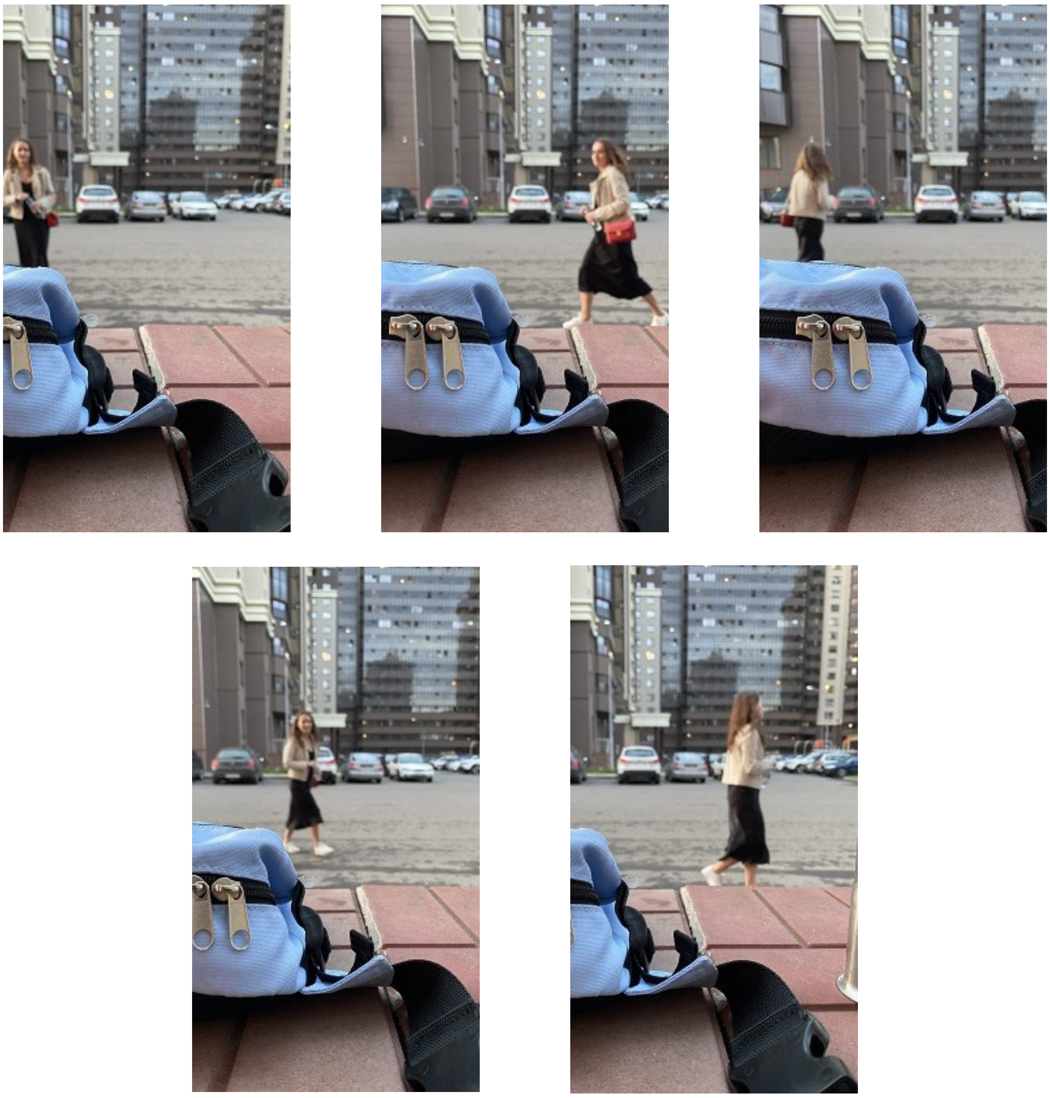


*Рис. 11. Серия фотографий для алгоритма с двигающейся камерой*

Можно заметить, что на каждой фотографии размещена разная часть сумки, где-то ее видно больше, где-то меньше, так же по машинам можно заметить, что камера движется. Соответственно, после работы алгоритма получается следующее изображение (рис. 12).

Нужно отметить, что результирующая фотография получилась гораздо уже фотографий из входного набора. Это связано с тем, что благодаря меткам выделяется область фотографии, которая входит в каждое изображение из набора, соответственно, именно эта область представлена в результате.

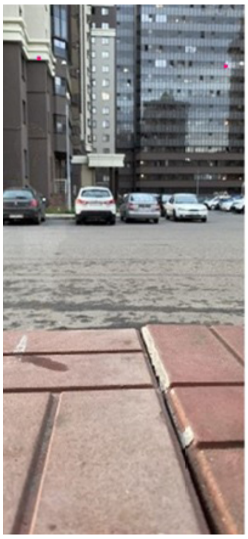


*Рис. 12. Результат работы алгоритма с двигающейся камерой*

## Литература

1. *Тимофеева Н. Е.* Исследование возможности улучшения алгоритма билинейной интерполяции для корректировки цифровых изображений применением теории полей ориентации / Н. Е. Тимофеева // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 1. – С.119–125.

УДК 512.533:004.94

# О ПОСТРОЕНИИ ДВОЙСТВЕННОГО АТТРАКТОРА ЛИНЕЙНЫХ РАНДОМИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

**А. Г. Буховец, П. В. Москалев, Т. Я. Бирючинская**

*Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I*

**Аннотация.** Рассматривается возможность построения для аттрактора рандомизированных систем итерированных функций двойственного аттрактора посредством преобразования Лежандра. В работе продемонстрировано, что свойства двойственного аттрактора существенного зависят от способа реализации процедур построения фрактального множества, что позволяет использовать полученные результаты для идентификации схемы итерационной процедуры.
**Ключевые слова:** рандомизированные системы итерированных функций, преобразование Лежандра, двойственный аттрактор.

Аттрактор линейной рандомизированной системы итеративных функций (РСИФ) в двумерном случае можно определить соотношениями [1]:

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = \xi x_{1,n} + (1-\xi) z_{1,j,n}; \\ x_{2,n+1} = \xi x_{2,n} + (1-\xi) z_{2,j,n}, \end{cases} \tag{F1}$$

для $n = 0, 1, \ldots, N-1,$ которые можно рассматривать как разностную схему уравнения Ланжевена для винеровского процесса с некоторым параметром $0 < \xi < 1.$ Здесь в отличие от классического случая величина $Z$ имеет конечное дискретное распределение: $\{Z_i / p_i\}_{i=1}^{K},\quad p_i > 0,$ $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1.$

Построение аттрактора РСИФ для этой модели может быть выполнено и другой процедурой, использующую урновую схему [2] и ряд $\mu \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i = 1,$ где $\mu$ – зависимая от параметра $\xi$ нормировочная константа $\mu = \xi^{-1}(1-\xi).$ В этом случае на каждом шаге суммы подмножеств указанного ряда записываются в виде строк матрицы $A_l = \{a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{lK}\},$ причём каждый элемент $a_{lj}$ является суммой членов ряда, отобранных в соответствии с заданным распределением $\{p_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, K,\ \sum_{i=1}^{K} p_i = 1\}.$ Результат выполнения этой процедуры можно представить в виде матричного произведения [3]

$$X = AZ. \tag{F2}$$

Заметим, что аттракторы РСИФ $X_1$ и $X_2,$ полученные с помощью процедур (F1) и (F2), не только имеют одинаковую размерность подобия $d_S(X_1) = d_S(X_2) = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}585$ [4], но при идентичных объемах выборок визуально не различимы.

Для исследования структуры фрактальных множеств, полученных с помощью указанных выше процедур (F1) и (F2), запишем разностный аналог преобразования Лежандра [5]. Пусть $\{x_{1,n}, x_{2,n}\}_{n=0}^{N-1}$ – выборка точек аттрактора на плоскости. Тогда при $x_{1,n+1} \neq x_{1,n}$ это преобразование примет вид:

$$\begin{cases} x_{1,n}^{*} = \dfrac{x_{2,n+1} - x_{2,n}}{x_{1,n+1} - x_{1,n}}; \\ x_{2,n}^{*} = x_{2,n} - x_{1,n} x_{1,n}^{*}. \end{cases} \tag{$\mathcal{L}$}$$

Получаемый в результате преобразования $(\mathcal{L})$ аттрактор РСИФ обозначим как $X^{*}$, и по аналогии с непрерывным преобразованием Лежандра будем называть его двойственным аттрактору $X$.

В качестве примера рассмотрим применение преобразования Лежандра ($\mathcal{L}$) к построенным с помощью указанных выше процедур (F1) и (F2) треугольных множеств Серпинского. На рис. 1 слева представлен треугольник Серпинского, построенный по процедуре (F1), и результат применения к нему преобразования ($\mathcal{L}$). На рис. 1 справа представлен треугольник Серпинского, построенный по процедуре (F2), и результат применения к нему того же самого преобразования ($\mathcal{L}$).

Для более удобного сравнения исходные и двойственные к ним аттракторы показаны в одной и той же системе координат. Для построения аттракторов авторы использовали библиотеку «RIFS» для системы R [6].

Нетрудно заметить, что хотя результаты выполнения процедур (F1) и (F2) визуально не различимы, но преобразование ($\mathcal{L}$) для таких данных даёт существенно различные результаты. Так, преобразование ($\mathcal{L}$) для аттрактора $X_1$, полученного с помощью процедуры (F1), порождает множество $X_1^*$ с линейно упорядоченной структурой, размерностью подобия которого будет близка к единице $d_S(X_1^*) \to 1$. То же преобразование ($\mathcal{L}$) для аттрактора $X_2$, полученного с помощью процедуры (F2), порождает множество $X_2^*$ со стохастической структурой, размерность подобия которого будет ограничена интервалом $1{,}585 < d_S(X_2^*) < 2$.

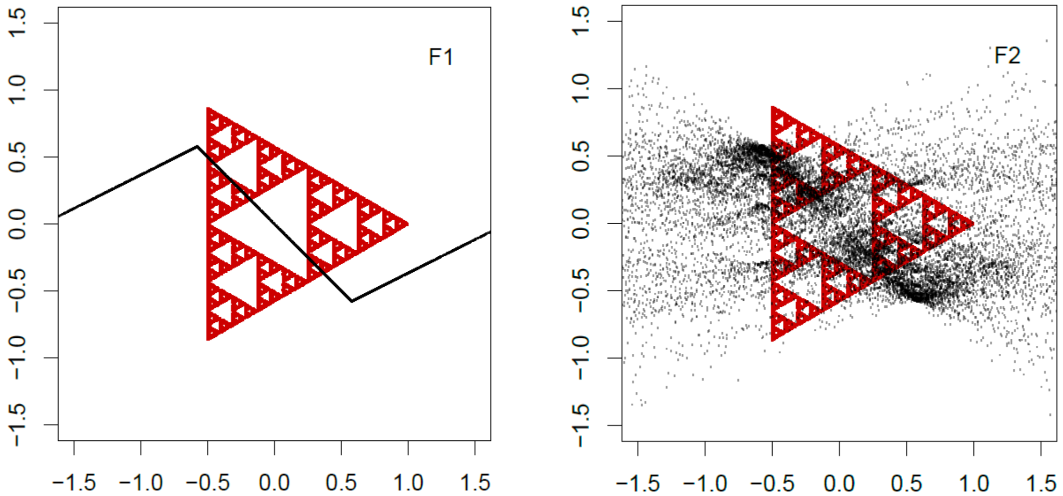



*Рис. 1. Построенные процедурами* (F1) *и* (F2) *фрактальные множества и результаты применения преобразования Лежандра* ($\mathcal{L}$)

Различия представленных на рисунке результатов (F1) и (F2) можно объяснить, если рассматривать построение аттрактора по процедуре (F1) в виде древовидного графа с корнем в точке $X_0$. Тогда движение в рамках процедуры (F1) осуществляется по направлениям, определённым структурой указанного графа, в то время как в случае процедуры (F2) происходит случайный отбор вершин того же графа. Применение преобразования ($\mathcal{L}$) к построенному с помощью (F2) аттрактору РСИФ воспроизводит хаотический характер этой процедуры, что и можно наблюдать на представленной иллюстрации.

Отметим, что повторное применение этого же преобразования $(X^*)^*$ восстанавливает исходное множество $X$ с точностью до симметрии относительно оси ординат, как в случае (F1), так и в случае (F2). Как показывают вычислительные эксперименты, преобразование ($\mathcal{L}$) может быть представлено циклической группой 4 порядка (табл. 1).

Нетрудно заметить, что тождественное преобразование $I$ выполняет роль единичного элемента мультипликативной группы, а группа в целом изоморфна группе базисных элементов комплексного числа: $\{1, i, -1, -i\}$.

Преобразование Лежандра широко используется в статистической физике и термодинамике. В аналитической механике это преобразование позволяет перейти от функции Лагран-

Таблица 1

*Таблица Кэли для преобразования* $(\mathcal{L})$

| $*$ | $I$ | $\mathcal{L}^1$ | $\mathcal{L}^2$ | $\mathcal{L}^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $\mathcal{L}^1$ | $\mathcal{L}^2$ | $\mathcal{L}^3$ |
| $\mathcal{L}^1$ | $\mathcal{L}^1$ | $\mathcal{L}^2$ | $\mathcal{L}^3$ | $I$ |
| $\mathcal{L}^2$ | $\mathcal{L}^2$ | $\mathcal{L}^3$ | $I$ | $\mathcal{L}^1$ |
| $\mathcal{L}^3$ | $\mathcal{L}^3$ | $I$ | $\mathcal{L}^1$ | $\mathcal{L}^2$ |

жа к функции Гамильтона, что упрощает решение целого ряда вариационных задач. В нашей работе мы использовали преобразование Лежандра для идентификации способ построения аттрактора РСИФ. В качестве дальнейшего исследования свойств преобразования Лежандра предлагается рассмотреть гипотезу об инвариантности двойственных фрактальных множеств при гомеоморфных преобразованиях [7].

**Литература**


1. *Буховец А. Г.* Моделирование фрактальных свойств системных объектов / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Вестник ВГУ: Системный анализ и информационные технологии. – 2011. – № 2. – С. 22–26. – URL: http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/analiz/ 2011/02/2011-02-04.pdf (дата обращения: 08.10.2020).

2. *Bukhovets A. G.* Modeling of fractal data structures / A G. Bukhovets, E. A. Bukhovets // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73, No. 2. – P. 381–385. – DOI: 10.1134/S0005117912020154.

3. *Буховец А. Г.* Структура аттрактора рандомизированных линейных систем итерированных функций / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Вестник ВГУ: Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 2. – С. 5–10. – URL: http:// www.vestnik.vsu.ru/pdf/analiz/2016/02/2016-02-01.pdf (дата обращения: 08.10.2020).

4. *Москалев П. В.* О размерности подобия рандомизированной системы итерированных функций / П. В. Москалев, А. Г. Буховец // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4, № 4. – С. 618--691. – DOI: 10.20537/2076-7633-2012-4-4-681-691.

5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : URSS, 2017. – 416 с. – ISBN 978-5-9710-4036-1.

6. *Moskalev P. V.* RIFS: Random Iterated Function System / P. V. Moskalev, A. G. Bukhovets, T. Ya. Biruchinskay. – CRAN: R package version 0.1-5. – URL: https://cran.r-project.org/package=RIFS (дата обращения: 08.10.2020).

7. *Bukhovets A. G.* Conditions for homeomorphism of sets modeled by randomized iterated function systems / A. G. Bukhovets, P. V. Moskalev, E. A. Semin // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – P. 012025. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/ 012025.

УДК 330.322.01+004.413.4

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА ИНВЕСТИЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**М. И. Быкова, Т. Н. Недикова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрено моделирование оценки эффективности и риска инвестиционных проектов на основе аппарата теории нечетких множеств с учетом показателя чистой современной ценности инвестиций (NPV – Net Present Value). Оценена степень риска неэффективности проекта как геометрическая вероятность попадания показателя чистой современной ценности инвестиций в зону неэффективных инвестиций, благодаря которой каждый инвестор, исходя их своих инвестиционных предпочтений, может выделить для себя отрезок неприемлемых значений риска.
**Ключевые слова:** эффективность инвестиционных проектов, стратегическая задача, риск инвестиций, нечеткие множества, неопределенность данных, распределение вероятности.

## Введение

Предметная область исследования находится на стыке современной прикладной математики и экономики. Значительная динамика современного рынка инвестиций обусловливает необходимость как можно более точного определения риска инвестиций и прогнозирования будущего результата при всех возможных сценариях развития инвестиционного проекта, включающего план мероприятий, связанных с осуществлением капитальных вложений, с целью их последующего возмещения и получения прибыли. Рассмотренная задача относится к новым математическим подходам формализации, одновременной обработки разнородной информации (детерминированной, интервальной, лингвистической, статистической) и дает возможность построения на базе этих подходов специализированных методик. Влияние факторов неопределенности на инвестиционный проект приводит к возникновению непредвиденных ситуаций, приводящих к неожиданным потерям, убыткам, даже в тех проектах, которые первоначально признаны экономически целесообразными для предприятия, поскольку не учтенные в инвестиционном проекте негативные сценарии развития событий, пусть и мало ожидаемые, тем не менее, могут произойти и сорвать реализацию инвестиционного проекта [2–4].

Методы, базирующиеся на теории нечетких множеств, относятся к методам оценки и принятия решений в условиях неопределенности. Их использование предполагает формализацию исходных параметров и целевых показателей эффективности инвестиционного проекта (в основном, NPV) в виде вектора интервальных значений (нечеткого интервала), попадание в каждый интервал которого, характеризуется некоторой степенью неопределенности. Осуществляя арифметические и другие операции с такими нечеткими интервалами по правилам нечеткой математики, эксперты получают результирующий нечеткий интервал для целевого показателя [2, 3, 7, 8]. На основе исходной информации, опыта и интуиции эксперты часто могут достаточно уверенно количественно охарактеризовать границы (интервалы) возможных (допустимых) значений параметров и области их наиболее возможных (предпочтительных) значений.

К методам, основывающимся на теории нечетких множеств, можно, в качестве частного случая, отнести широко известный интервальный метод [1, 3, 7]. Данный метод соответствует ситуациям, когда достаточно точно известны лишь границы значений анализируемого параметра, в пределах которых он может изменяться, но при этом отсутствует какая-либо количественная или качественная информация о возможностях или вероятностях реализации различных его значений внутри заданного интервала. В соответствии с данным методом, входные переменные инвестиционного проекта задаются в виде интервалов, функции принадлежности которых, являются классическими характеристическими функциями множества, поэтому далее возможно прямое применение правил нечеткой математики для получения результирующего показателя эффективности инвестиционного проекта в интервальном виде. В интервальном методе за уровень (степень) риска предлагается принимать размер максимального ущерба, приходящегося на единицу неопределенности [1].

### 1. Аппарат нечетких множеств и показатель ценности инвестиций

Инвестиционный проект предполагает планирование во времени трех основных денежных потоков, зависящих от состояния рынка: потока инвестиций, потока текущих (операционных) платежей и потока поступлений. Это планирование осуществляется в условиях неопределенности, что неизбежно влечет риск принятия инвестиционных решений. Способ оценки риска инвестиций прямо связан со способом формализации неопределенности, присущей исходным данным проекта. Если неопределенность рассматривается как «размытость» данных (т. е. точное планируемое значение параметра неизвестно), то целесообразно использовать аппарат нечетких множеств, в частности, треугольные нечеткие числа, которые моделируют высказывание типа «значение параметра приблизительно равно $a'$ и однозначно находится в диапазоне $\left[a_{\min}, a_{\max}\right]''$ ».

Пусть задано треугольное нечеткое число с функций принадлежности $\mu_A(x)$, тогда для заданного значения уровня $\alpha$ можно определить интервал достоверности $\left[a_1, a_2\right]$, содержащий те значения $x$, для которых $\mu_A\left(x\right) \ge \alpha$. В терминах интервалов достоверности можно определить основные арифметические действия над нечеткими числами, что позволяет представить формулы для расчетов показателей инвестиционного проекта в нечеткой форме. Пусть заданы два нечетких числа $a$ и $b$ с интервалами достоверности при заданном уровне $\alpha$ – $\left[a_1, a_2\right]$ и $\left[b_1, b_2\right]$, соответственно. Тогда

- сложение $\left[a_1, a_2\right]+\left[b_1, b_2\right]=\left[a_1+b_1, a_2+b_2\right]$;
- вычитание $\left[a_1, a_2\right]-\left[b_1, b_2\right]=\left[a_1-b_1, a_2-b_2\right]$;
- умножение $\left[a_1, a_2\right]\times\left[b_1, b_2\right]=\left[a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2\right]$;
- деление $\left[a_1, a_2\right]/\left[b_1, b_2\right]=\left[a_1/b_1, a_2/b_2\right]$;
- возведение в степень $\left[a_1, a_2\right]^k=\left[a_1{}^k, a_2{}^k\right]$.

Рассмотрим показатель чистой современной ценности инвестиций (NPV – Net Present Value), который используется для оценки эффективности инвестиционного проекта в предположении, что все инвестиционные поступления приходятся на начало инвестиционного процесса; оценка ликвидационной стоимости проекта производится по факту, по истечении срока жизни проекта [3]:

$$NPV=-I+\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta V}{(1+r_i)^i}+\frac{C}{(1+r_{N+1})^{N+1}}, \tag{1}$$

где $I$ – стартовый объем инвестиций; $N$ – число плановых интервалов (периодов) инвестиционного процесса, соответствующих сроку жизни проекта; $\Delta V_i$ – оборотное сальдо поступлений и платежей в $i$-м периоде; $r_i$ – ставка дисконтирования, выбранная для $i$-го периода с учетом оценок ожидаемой стоимости используемого в проекте капитала, $C$ – ликвидационная стоимость чистых активов, сложившаяся в ходе инвестиционного процесса (в том числе остаточная стоимость основных средств на балансе предприятия).

Инвестиционный проект признается эффективным, если значение показателя $NPV$ больше определенного проектного уровня $G$ (в частности $G = 0$).

## 2. Формализация нечеткой задачи для оценки эффективности проекта

Сформулируем нечеткую постановку данной задачи. Пусть все параметры являются «размытыми», то есть их точное значение неизвестно, тогда можно рассматривать следующий набор нечетких чисел для анализа эффективности проекта: $\tilde{I} = \left(I_{\min}, I', I_{\max}\right)$ – нечеткая оценка объёма инвестиционных ресурсов; $\tilde{r}_i = \left(r_i^{\min}, r_i', r_i^{\max}\right)$ инвестор не может точно оценить стоимость капитала, используемого в проекте; $\Delta\tilde{V}_i = \left(\Delta V_i^{\min}, \Delta V_i', \Delta V_i^{\max}\right)$ – инвестор прогнозирует диапазон изменения денежных результатов инвестиционного проекта с учетом возможных колебаний цен на реализуемую продукцию, стоимости потребляемых ресурсов, условий налогообложения, влияния других факторов; $\tilde{C} = \left(C^{\min}, C', C^{\max}\right)$ – инвестор нечетко представляет себе потенциальные условия будущей продажи действующего бизнеса или его ликвидации; $\tilde{G} = \left(G_{\min}, G', G_{\max}\right)$ – нечеткая оценка предпочтительного значения критерия эффективности (инвестор нечетко представляет себе критерий, по которому проект может быть признан эффективным, или неясно, что можно будет понимать под «эффективностью» на момент завершения инвестиционного процесса).

При заданном значении уровня по каждому нечеткому числу получаем интервалы достоверности $\left[I_1, I_2\right]$, $\left[r_{i1}, r_{i2}\right]$, $\left[\Delta V_{i1}, \Delta V_{i2}\right]$, $\left[C_1, C_2\right]$. Путем подстановки соответствующих границ интервалов в формулу (1) для NPV, получаем ее нечеткий вариант в виде:

$$\left[NPV_1, NPV_2\right] = \left[-I_2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta V_{i1}}{\left(1 + r_{i2}\right)^i} + \frac{C_1}{\left(1 + r_{N+1,2}\right)^{N+1}}, \quad -I_1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta V_{i2}}{\left(1 + r_{i1}\right)^i} + \frac{C_2}{\left(1 + r_{N+1,1}\right)^{N+1}}\right]. \qquad (2)$$

Заметим, что данная формула позволяет получить интервал на [0,1], для всех значений $x$ которого $\mu_{NPV}\left(x\right) \geq \alpha$ при заданном значении уровня $\alpha$. По этому интервалу можно реконструировать результирующее нечеткое число $NPV^*$ путем аппроксимации его функции принадлежности некоторой ломаной [5, 6]. Часто оказывается возможным привести $NPV^*$ треугольному виду.

Рассмотрим подход к оценке риска инвестиций. На рис. 1 представлены функции принадлежности $NPV^*$ и значения $\tilde{G}$, которое является наиболее предпочтительным значением этого показателя.

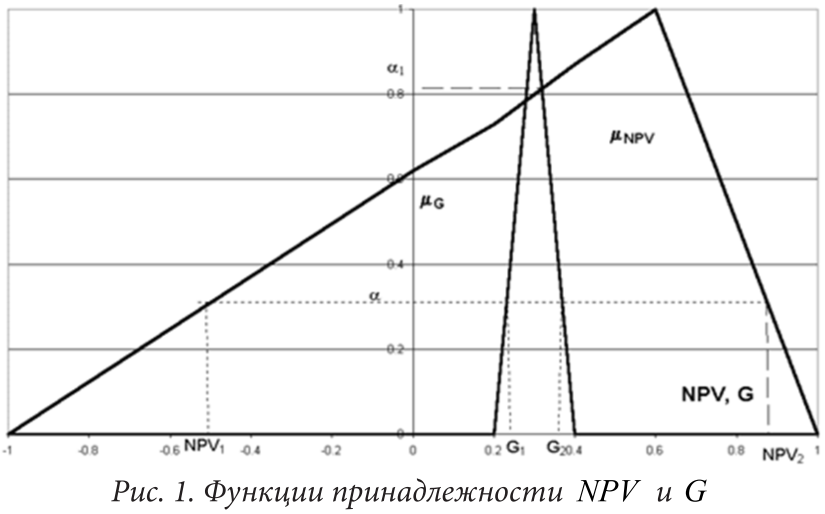



*Рис. 1. Функции принадлежности $NPV$ и $G$*

Заметим, что функции принадлежности пересекаются в точках с ординатами $a_* < a^*$. Выберем произвольный уровень принадлежности $\alpha$ и определим соответствующие интервалы

$\left[NPV_1, NPV_2\right]$ и $\left[G_1, G_2\right]$. При $\alpha > a^*$, $NPV_1 > G_2$, интервалы не пересекаются, и уверенность в том, что проект эффективен, стопроцентная, поэтому степень риска неэффективности инвестиций равна нулю. Уровень $a^*$ можно интерпретировать как верхнюю границу зоны риска. При $0 < \alpha < a^*$ интервалы пересекаются. На рис. 2 показана заштрихованная зона неэффективных инвестиций, ограниченная прямыми $G = G_1$, $G = G_2$, $NPV = NPV_1$, $NPV = NPV_2$ и биссектрисой координатного угла $G = NPV$.

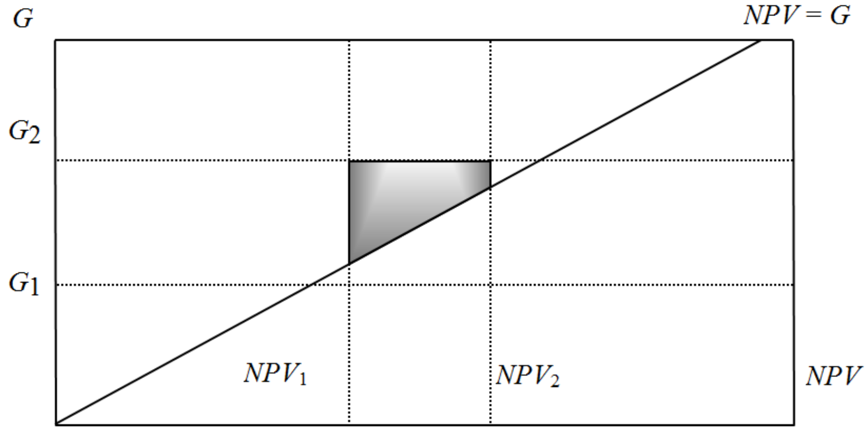



*Рис. 2. Зона неэффективных инвестиций*

Взаимные соотношения параметров $G_1$, $G_2$, $NPV_1$, $NPV_2$ позволяют определить площадь заштрихованной фигуры в виде:

$$S_\alpha = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad NPV_1 \geq G_2; \\ \dfrac{\left(G_2 - NPV_1\right)^2}{2}, \quad \text{если} \quad G_2 > NPV_1 \geq G_1; NPV_2 \geq G_2; \\ \dfrac{\left(G_1 - NPV_1\right) + \left(G_2 - NPV_1\right)}{2} \cdot \left(G_2 - G_1\right), \quad \text{если} \quad NPV_1 < G_1; NPV_2 \geq G_2; \\ \left(G_2 - G_1\right)\left(NPV_2 - NPV_1\right) - \dfrac{\left(NPV_2 - G_1\right)^2}{2}, \quad \text{если} \quad NPV_1 < G_1 \leq NPV_2; NPV_2 < G_2; \\ \left(G_2 - G_1\right)\left(NPV_2 - NPV_1\right), \quad \text{если} \quad NPV_2 \geq G_2. \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку все реализации $\left(NPV, G\right)$ при заданном уровне принадлежности $\alpha$ равновозможны, то степень риска неэффективности проекта, есть геометрическая вероятность попадания точки $\left(NPV, G\right)$ в зону неэффективных инвестиций, то есть:

$$\phi(\alpha) = \frac{S_\alpha}{\left(G_2 - G_1\right)\left(NPV_2 - NPV_1\right)}. \tag{4}$$

Тогда выражение для интегральной оценки степени риска неэффективности инвестиционного проекта можно представить в виде:

$$\wp = \int_0^{a^*} \phi(\alpha) d\alpha . \tag{5}$$

Пусть показателю $NPV$ соответствует нечеткое число $\left[NPV_{\min}, NPV', NPV_{\max}\right]$, тогда с учетом преобразований будем иметь

$$\wp = \begin{cases} 0, \text{ при } \mathrm{G} \le NPV_{\min}; \\ R\left(1 + \dfrac{1-a^*}{a^*}\ln\left(1-a^*\right)\right), \text{ при } NPV_{\min} < G < NPV'; \\ 1\text{-}(1\text{-}R)\left(1 + \dfrac{1\text{-a*}}{\text{a*}}\ln(1\text{-a*})\right), \text{ при } \mathrm{NPV}' < G < NPV_{\max}; \\ 1, \text{ при } G \ge NPV_{\max}. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь

$$R = \begin{cases} \dfrac{G - NPV_{\min}}{NPV_{\max} - NPV_{\min}}, \quad \text{при} \quad G < NPV_{\max}; \\ 1, \quad \text{при} \quad G \ge NPV_{\max}. \end{cases}$$

$$\alpha^* = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad G < NPV_{\min}; \\ \dfrac{G - NPV_{\min}}{NPV' - NPV_{\min}}, \quad \text{при} \quad NPV_{\min} < G < NPV'; \\ 1, \quad \text{при} \quad G = NPV'; \\ \dfrac{NPV_{\max} - G}{NPV_{\max} - NPV'}, \quad \text{при} \quad NPV' < G < NPV_{\max}; \\ 0, \quad \text{при} \quad G \ge NPV_{\max}. \end{cases}$$

Можно показать, что интегральная оценка степени риска $\wp$ принимает значения от 0 до 1, где 0 соответствует предельно низкому риску, а 1 – предельно высокому. Каждый инвестор, исходя их своих инвестиционных предпочтений, может классифицировать значения $\wp$, выделив для себя отрезок неприемлемых значений риска. Возможна также более подробная градация степеней риска с помощью лингвистической переменной *степень риска*, которая принимает значения в лингвистической шкале $L =$ {*незначительна*, *низкая*, *средняя*, *относительно высокая*, *неприемлемая*}.

## Заключение

Подход, основанный на использовании нечетких чисел, имеет следующие особенности: во-первых, позволяет учитывать полный спектр возможных сценариев инвестиционного процесса; во-вторых, ожидаемая эффективность проекта не является точечным показателем, а представляет собой интервал со своим распределением ожиданий, характеризующимся функцией принадлежности соответствующего нечеткого числа. Взвешенная полная совокупность ожиданий позволяет оценить интегральную меру ожидания негативных результатов инвестиционного процесса, то есть степень инвестиционного риска.

## Литература

1. *Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А.* «Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика». – М. : «Дело», 2004. – 888 с.

2. *Вощинин А. П.* Задачи анализа с неопределенными данными — интервальность и/или случайность? // Интервальная математика и распространение ограничений: Рабочие совещания. – МКВМ-2004. – С. 147–158.

3. *Деревянко П. М.* Сравнение нечеткого и имитационного подхода к моделированию деятельности предприятия в условиях неопределенности // Современные проблемы экономики и управления народным хозяйством«. Сб. научн. статей. Вып. 14. – СПб. : СПбГИЭУ, 2005. – С. 289–292.: Персональный сайт в Интернете. – Электрон. дан. – СПб., 2006. – Режим доступа: http://fuzzylib.narod.ru/ E-mail: paveldrn@mail.ru.

4. *Кофман А., Хил Алуха Х.* Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями. Пер. с исп. — Мн.: «Вышэйшая школа», 1992. – 224 с.

5. *Недосекин А. О.* «Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций». – СПб. : Типография «Сезам», 2002. – 181 с.

6. *Недосекин А. О.* Оценка риска инвестиций по NPV произвольно-нечеткой формы. – СПб., 2004.

7. *Севастьянов П. В., Севастьянов Д. П.* Оценка финансовых параметров и риска инвестиций с позиций теории нечетких множеств // Надежные программы. – 1997. – № 1. – С. 10–19.

8. *Царев В. В.* Оценка экономической эффективности инвестиций. – СПб. : Питер, 2004. – 464 с.

УДК 51-72

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ МЕТОДОМ ЧОРИНА

**Д. Л. Винокурский, Н. В. Кононова, Т. И. Авдеева, М. Н. Кононов, Ю. А. Андрусенко**

*Северо-Кавказский федеральный университет*

**Аннотация.** Изучение свойств магнитных жидкостей [1] началось с 30-х годов XX века. Интенсивное изучение физических свойств данного рода жидкостей происходит с 1970 годов [2–5]. В современных условиях магнитные жидкости широко представлены в высокотехнологических производствах. Это и современные насосы [6], новые конструкции приводов [7] и тепловых труб [8], применение магнитных жидкостей в качестве гасителей колебаний.

**Ключевые слова:** термомагнитная конвекция, магнитное поле, уравнение Чорина.

## Введение

В работе рассматривается явление термомагнитной конвекции, строится математическая модель термомагнитной конвекции, решение поставленной задачи производится методом Чорина [12]. Целью данной работы является исследование термомагнитной конвекции в магнитных жидкостях.

Изучение свойств магнитных жидкостей [1] началось с 30-х годов XX века. Интенсивное изучение физических свойств данного рода жидкостей происходит с 1970 годов [2–5]. В современных условиях магнитные жидкости широко представлены в высокотехнологических производствах. Это и современные насосы [6], новые конструкции приводов [7] и тепловых труб [8], применение магнитных жидкостей в качестве гасителей колебаний.

Приведенные примеры показывают актуальность изучения свойств магнитных жидкостей.

В работе [3] проведено изучение теплообмена в вертикальном слое магнитной жидкости в присутствии магнитного поля с постоянным градиентом. В работе [9] описан эксперимент с магнитной жидкостью, находящейся в кубическом корпусе. На двух гранях которого поддерживается разность температур, а остальные четыре — теплоизолированны акриловой смолой. В данной работе показано, что градиент магнитного поля усиливает гравитационную естественную конвекцию.

## 1. Математическая модель конвекции магнитной жидкости

В магнитном поле

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \tag{1}$$

Имеется градиент магнитного поля

$$\nabla \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}. \tag{2}$$

Уравнение неразрывности в присутствии магнитного поля будет иметь следующий вид:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{3}$$

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla \cdot \vec{u} = -\nabla p - \rho \beta g \left(T - T_1\right) + \mu \nabla^2 \vec{u} + \mu_0 \vec{M} \cdot \nabla \cdot \vec{H} \tag{4}$$

$$\rho C_p \vec{u} \cdot \nabla T = k \nabla^2 T \tag{5}$$

здесь $H$ — напряженность магнитного поля,

$B$ — индукция магнитного поля,

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м* — магнитная постоянная,

$u$ — скорость жидкости,
$\rho$ — плотность магнитной жидкости,
$T$ — абсолютная температура,
$M$ — динамическая вязкость,
$p$ — давление магнитной жидкости,
$\beta$ — коэффициент объемного расширения,
$k$ — теплопроводность.

В общем случае мы можем предположить, что магнитная индукция меняется линейно и тогда уравнение (2) запишем в виде:

$$\nabla H = \frac{1}{\mu_0}\frac{\Delta B}{\Delta z}\vec{e}_z, \tag{6}$$

где $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичный вектор.

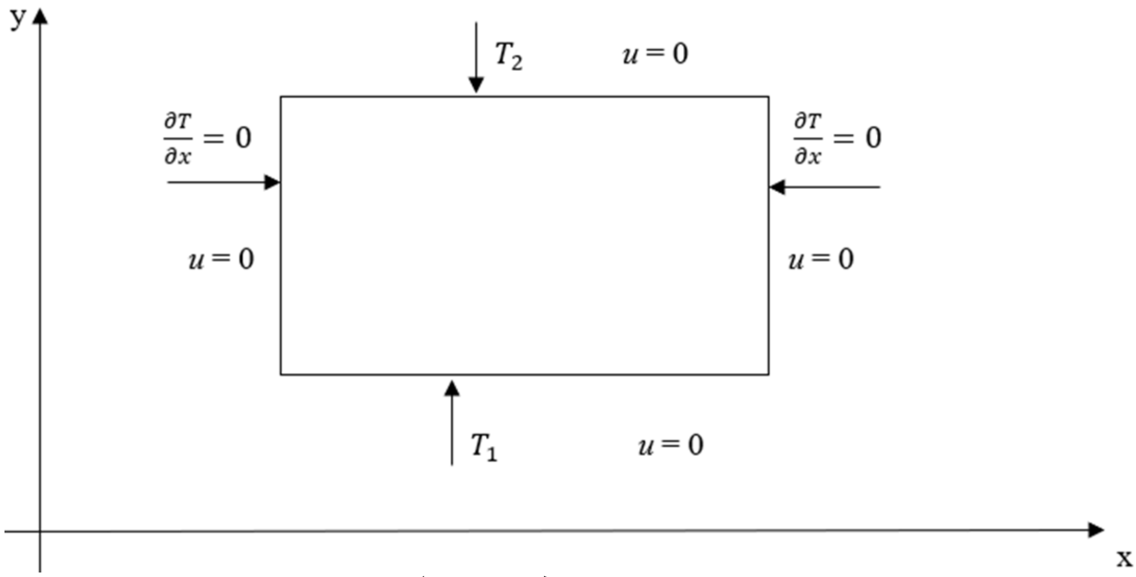



*Рис. 1. Область задачи и краевые условия*

Переходя к безразмерным переменным, получаем следующую задачу:

$$\nabla' u' = 0$$

$$\sqrt{Gr}u'\nabla' u' = -\nabla' p' - \sqrt{Gr}q'T' + \nabla'^2 u' \tag{7}$$

$$\sqrt{\Pr}\cdot\sqrt{Gr}\cdot u'\cdot\nabla' T' = \nabla'^2 T'^2 \tag{8}$$

здесь $\nabla' = L\nabla,\ u' = u\dfrac{\rho C_p L}{k\Pr\sqrt{Gr}},\ T' = \dfrac{T - T_1}{T_2 - T_1}$

$p' = p\dfrac{L^2\rho C_p}{\mu\beta g\Delta T L^3},\ g' = \vec{e}_g \pm \dfrac{\mu_0 k\left|\nabla H\right|}{\rho\beta g}\vec{e}_{\nabla H}$

$Gr = \dfrac{\rho^2\beta g\Delta T L^3}{\mu^2}$ — число Грасгофа,

$\Pr = \dfrac{C_p\mu}{k}$ — число Прандтля,

$\vec{e}_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ — направляющий вектор ускорения свободного падения,

$\vec{e}_{\nabla H}$ — направляющий вектор градиента магнитного поля

## 2. Конечно-разностная аппроксимация

Для решения задач (1)–(8) будем использовать схему Чорина [11]. Схема метода Чорина представлена на рис. 2.

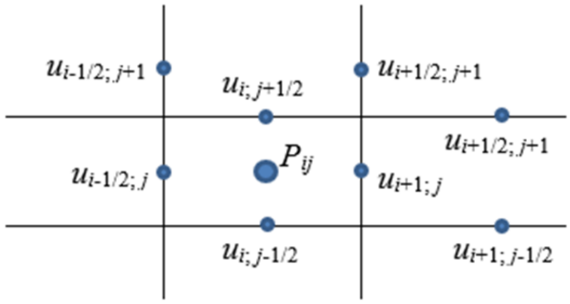



*Рис. 2. Схема метода Чорина*

Данная схема выбирается из принципа удобства масштабирования и быстроты сходимости решения. В расчетах использовались значения постоянных величин из работы [1].

## 3. Заключение

На рис. 3 представлены изотермы в различное время моделирования. Алгоритм показал хорошую сходимость и устойчивость к изменению начальных и граничных условий.

Данный алгоритм может применяться для моделирования термомагнитной конвекции.

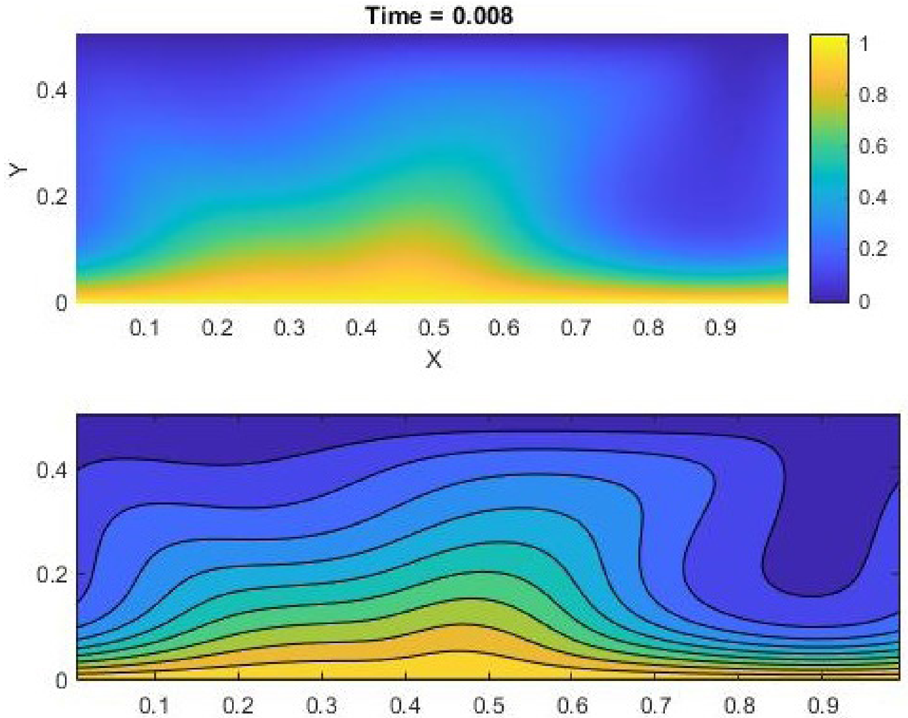



*Рис. 3. Изменение со временем температуры слоя магнитной жидкости*

## Литература


1. *Elmore W. C.* The magnetisation of ferromagnetic colloids // Phys. Rev. – 1938. – 54. P. 1092–1095.

2. *Berkovskii B. M., Bashtovoi V. G.* Gravitational convection in a ferromagnetic liquid // Magnitnaya Gidrodinamika. – 1971. – 7. – P. 24–28.

3. B*erkovsky B. M., Fertman V. E., Polevikov V. K., Isaev S. V.* Heat transferacross vertical ferrofluid layers // Int. J. Heat Mass Transfer. 1976. – 19. – P. 981–986.

4. *Blums E.* Free convection in an isothermic magnetic fluid caused by magnetophoretic transport of particles in the presence of a non-uniform magnetic field // J. Magn. Magn. Mater. – 1987. – 65. – P. 343–346.

5. *Blums E., Cebers A. O., Maiorov M. M.* Magnetic Fluids, Walter de Gruyter. – 1997.

6. *Park G. S., Seo K.* A study on the pumping forces of the magnetic fluid linear pumps // IEEE Trans. Magn. – 2003. – 39. – P. 1468–1471.

7. *Kamiyama S.* A magnetic fluid actuator // Adv. Robotics. – 1986. – 1. – P. 177–185.

8. *Ming Z., Zhongliang L., Guoyuan M. Shuiyuan C.* The experimental study on flat plate heat pipe of magnetic working fluid // Exp. Therm. Fluid Sci. – 2009. – 33. – P. 1100.

УДК 519.6; 51-76

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ДЕГЕНЕРАТИВНЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ

**О. Ф. Воропаева[1], Т. В. Баядилов[1], Е. С. Воропаева[1,2], Т. С. Михаханова[1,2], Ч. А. Цгоев[1,2]**

*[1]Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск*
*[2]Новосибирский государственный университет*

**Аннотация.** Представлены основные результаты нескольких циклов численных исследований в области моделирования динамики гибели клеток и асептического воспаления при дегенеративных заболеваниях. Разработаны новые математические модели асептического воспаления в хирургической ране и при инфаркте миокарда. Выполнен численный анализ моделей диффузии и хемотаксиса в патогенезе инфаркта миокарда и болезни Альцгеймера. Адекватность результатов исследований подтверждается детальным сопоставлением с экспериментальными данными.
**Ключевые слова:** математическая модель, дегенеративные заболевания, инфаркт миокарда, болезнь Альцгеймера, асептическое воспаление.

## Введение

Современная биомедицина объединяет в группу дегенеративных заболеваний инфаркты миокарда и мозга, фиброзы разных органов, онкологические заболевания, болезнь Альцгеймера и другие нейропатологии, потому что одной из важнейших характерных черт их патогенеза является дисбаланс процессов пролиферации (размножения) и гибели клеток, накопление в клетках патологических изменений, при которых происходит непрерывное ухудшение структуры и функционирования тканей или органов. Известно, что течение и прогноз этих заболеваний существенным образом зависят от характера повреждения, а также от доминирующей формы клеточной смерти. Сильное и непоправимое повреждение, как правило, вызывает некроз клеток и тканей, острую или хроническую воспалительную реакцию иммунной системы. А при повреждении ДНК под влиянием эндогенных и экзогенных стрессовых факторов происходит запуск программ репарации или безболезненной клеточной смерти (апоптоза), которые находятся под контролем белковых систем. Анализ литературных источников позволяет заключить, что хотя уровень понимания клеточных и молекулярных механизмов дегенеративных заболеваний становится все более высоким, однако он остается недостаточным в точки зрения потребностей фундаментальной медицины и клинической практики.

## 1. Вычислительная технология

Хорошо известно, что биохимические процессы в живых системах относятся к числу чрезвычайно сложных трудноформализуемых многоуровневых процессов, их лабораторное исследование затруднено по многим причинам, а математические модели характеризуются крайне высоким уровнем неопределенностей. При разработке математических моделей биомедицинских систем наиболее ответственной является задача структурной и параметрической идентификации модели или отдельных уравнений. В рамках настоящей работы достаточно высокую эффективность показала предложенная в [1] экономичная вычислительная технология, которая предполагает поочередную идентификацию каждого нового уравнения или их блоков с использованием экспериментальных данных и/или известных численных решений в качестве динамических параметров (этап «расщепления») и последующую сборку из готовых элементов новой модели. Этот алгоритм позволяет существенно снизить временные затраты и уровень сложности задачи идентификации.

Математические постановки задач представляют собой начальные и начально-краевые задачи для жестких нелинейных систем ОДУ, функционально-дифференциальных уравнений и уравнений типа реакция-диффузия. В основе алгоритма решения дифференциальных уравнений с запаздыванием лежит метод последовательного интегрирования. Численное решение задачи Коши для нелинейных систем ОДУ осуществляется с использованием конечно-разностных схем типа предиктор-корректор решения задачи Коши и идеи метода Зейделя. Основные результаты методических расчетов, обосновывающих выбор метода решения конкретной задачи Коши, представлены в [1–3]. Наиболее эффективными численными методами (в том числе и для жестких задач) оказались методы из семейства Адамса (Адамса или Адамса-Бэшфорта-Моултона теоретически 4-го порядка точности), а наиболее удобным – полунеявный метод Эйлера. Поиск оптимального набора параметров моделей в задаче минимизации функционала, сформулированного в смысле наименьших квадратов, осуществлялся с применением стохастического генетического алгоритма BGA, который показал достаточно высокую эффективность и надежность [1]. Для каждой решаемой обратной задачи осуществлялось от 20 до 100 равноценных запусков BGA, а далее для каждого параметра подсчитывались медианное значение и процентили 25 % и 75 % выборки. Оптимальный набор значений параметров определялся минимальным значением функционала, полученным для центральных 50 % индивидуумов выборки. При этом выдвигалось строгое требование положительной определенности параметров и неотрицательности компонент решения, естественное для данного класса математических моделей, а также соответствие качественных свойств решения прямой задачи известным биологическим представлениям о свойствах объекта исследования.

## 2. Биологические модели динамики воспаления

Воспаление любой локализации является защитным ответом на повреждение и одновременно – основным повреждающим фактором при дегенеративных патологиях разных органов. В рамках принятого в настоящей работе подхода наиболее важным клеточным компонентом воспаления считаются лейкоциты – нейтрофилы и моноциты-макрофаги, которые обладают способностью к адгезии, хемотаксису и фагоцитозу, а также являются источником целого комплекса специфических белковых молекул, известных как цитокины. Цитокины включают в себя ряд функционально различных групп молекул, в их числе – способствующие воспалению и противовоспалительные интерлейкины; факторы некроза опухолей, обладающие регуляторным и цитотоксическим действием; хемокины, стимулирующие хемотаксис клеток иммунной системы к зоне повреждения; факторы роста, которые обеспечивают рост и функциональную активность клеток, участвующих в восстановлении целостности ткани. В конкретных моделях уровень идеализации биологического процесса, в значительной мере, определялся имеющимся объемом экспериментальных измерений факторов воспаления в динамике.

## 3. Инфаркт миокарда

Эффективность вычислительной технологии структурной и параметрической идентификации уравнений впервые была продемонстрирована в [1] на примере математической модели биохимического процесса при инфаркте миокарда (ИМ). Там же представлена разработанная математическая модель динамики гибели клеток миокарда в ядре инфаркта (далее упоминается как модель 1), которая включает в себя, в частности, дифференциальные уравнения следующего вида:

$$\frac{dM_C}{dt}=\left(-\frac{q_1 I_1}{I_1+q_5}-\frac{q_2 T_a^5}{T_a^5+q_6}\right)\frac{q_3 M_C}{I_{10}+q_7}-q_4 M_1 M_C,$$

$$\frac{dT_a}{dt}=\left(\lambda_3 M_1+\lambda_1\left(M_{C0}-M_C\right)\right)\frac{c_5}{I_{10}+c_5}-d_3 T_a,\quad \frac{dI_{10}}{dt}=\lambda_5 M_2\frac{c_1}{I_{10}+c_1}-d_2 I_{10},$$

где $M_C$ – плотность клеток сердечной мышцы; $L_m$ – плотность моноцитов; $M_{un}$, $M_1$ и $M_2$ – плотность неактивированных макрофагов, макрофагов фенотипов M1 и M2 соответственно; $I_{10}$, $T_\alpha$ и $I_1$ – концентрации цитокинов IL10, TNFα и IL1; $M_{C0}=M_C(0)$.

Сначала задача решалась в пространственно-однородной постановке. Показано, что модель 1 описывает не только основной сценарий ИМ, но и его течение при некоторых типичных сопутствующих патологических изменениях лейкоцитарной формулы, а также состояние условного здоровья и ряд известных терапевтических воздействий. Адекватность результатов моделирования подтверждается качественным и количественным согласием с экспериментальными данными [1]. Для доказательства адекватности модели были проделаны основанные на биомедицинских соображениях «диагностические» тесты. Эти тесты, помимо прочего, позволили установить возможность триггерного режима в течении инфаркта, который предполагает наличие и переключение двух сценариев – острый инфаркт с возможностью выздоровления и летальный исход.

Особое внимание отводится пространственному варианту модели 1, который учитывает диффузию цитокинов в зоне повреждения (для простоты предполагается, что зона повреждения находится на удалении от крупных кровеносных сосудов). Численный алгоритм решения задачи основан на методе расщепления по пространственным переменным. Основная цель исследования – выяснить, обеспечивает ли принятая в модели 1 структура нелинейных слагаемых, описывающих биохимические взаимодействия, адекватное биологическим представлениям пространственное распространение веществ при постоянных значениях коэффициентов диффузии. Некоторые результаты численных экспериментов, иллюстрирующих динамику концентраций цитокинов и плотности кардиомиоцитов при инфаркте в левом желудочке сердца мыши, представлены на рис. 1. Здесь приведены данные об изменении плотности основных клеток сердечной мышцы $M_C(t,x_0,y_0)$ и концентрации провоспалительного фактора некроза опухолей (хемокина) $T_\alpha(t,x_0,y_0)$ в центре зоны повреждения (при моделировании для обезразмеренных независимых переменных принято $x_0=y_0=1$) и соответствующие трем характерным моментам времени распределения этих переменных в центральном сечении плоскости $(x,y)$. Можно видеть, что при постоянных коэффициентах диффузии пространственно-распределенная модель инфаркта характеризуется стабильной локализацией зоны повреждения кардиомиоцитов, которая эволюционирует в пространственной области неизменных размеров в согласии экспериментальными данными (см. подробности в [1]). Для остальных переменных задачи – плотностей клеток иммунной системы и концентраций цитокинов – характерно весьма слабо выраженное расширение области локализации. Следует отметить, что подобный тип решения достаточно хорошо известен как один из наиболее интересных вариантов решений диффузионных уравнений, для которых конечная скорость распространения локальных возмущений является существенно нелинейным эффектом. Полученный эффект «самоизоляции» означает, по-видимому, что в рамках принятой модели механизмы биохимических реакций «подавляют» естественную тенденцию к расширению зоны повреждения, обусловленную диффузией активных веществ и молекул.

Для пространственно распределенной модели найден триггерный режим, переводящий биологическую систему из состояния острого инфаркта в состояние мгновенного летального исхода.

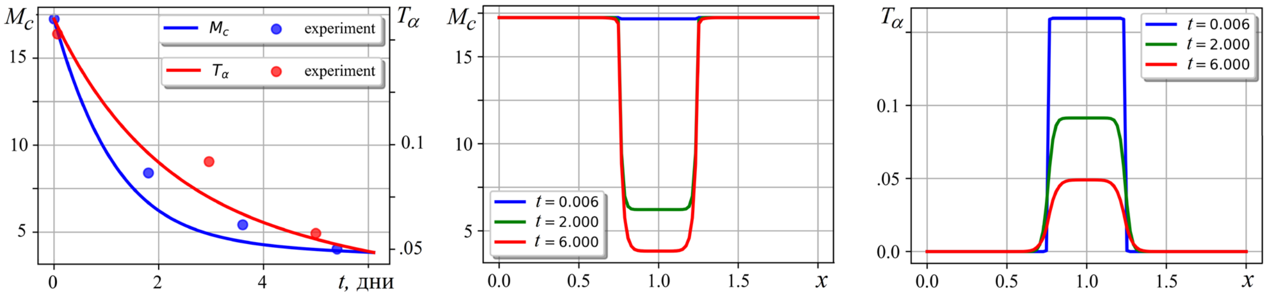



*Рис. 1. Изменение обезразмеренных значений плотности кардиомиоцитов $M_C$ и концентрации $T_\alpha$ в центре зоны повреждения и на оси $y = 1$*

## 4. Динамика асептического воспаления в хирургической кожной ране

При изучении механизмов дегенеративных заболеваний чрезвычайно высока потребность в создании как можно более полной математической модели асептического (небактериального) воспаления. Одним из наиболее доступных для лабораторного и даже клинического исследования вариантов асептического воспаления представляется процесс в зоне травматического некроза при заживлении хирургической раны. Разработана новая математическая модель динамики факторов воспаления, представляющая собой жесткую нелинейную систему четырнадцати функционально-дифференциальных уравнений [2, 3]. Адекватность модели подтверждена количественным согласием численного решения с широким спектром экспериментальных измерений в центральной зоне асептической кожной раны у мыши (рис. 2). Помимо основного сценария, в рамках принятой модели выполнено численное моделирование ряда неблагоприятных сценариев развития воспаления в ране. Речь идет о сопутствующих раневому повреждению нарушениях в механизме очищения зоны повреждения от нейтрофилов, подвергшихся апоптозу (эффероцитозе), и в лейкоцитарной формуле.

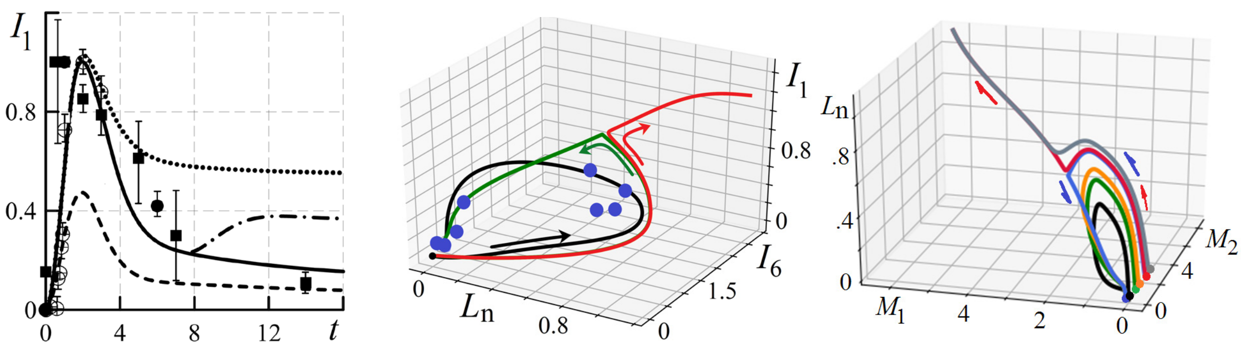



*Рис. 2. Динамика обезразмеренных концентраций цитокинов $I_1$, $I_6$, $T_\alpha$ и плотностей нейтрофилов $L_n$ и макрофагов $M_1$ и $M_2$ при асептическом раневом повреждении. Линии: черные сплошные – нормальное течение острого воспаления, цветные – изменение сценария при возмущении начальных условий, штрих-пунктирные – «неэффективный эффероцитоз», пунктирные – «тромбоцитемия», штриховые – «апластическая анемия»; маркеры – экспериментальные данные; стрелки указывают направление изменения времени*

Численный анализ показал, что при значениях параметров, обеспечивающих реализацию классического сценария острой воспалительной реакции (черные сплошные линии на рис. 2), модель имеет как минимум еще одно нетривиальное устойчивое стационарное решение. В этом случае решение, соответствующее классическому острому сценарию воспаления, теряет устойчивость под влиянием возмущения начальных данных для ряда компонент решения задачи. Для более детального изучения полученного решения и его соответствия хроническому сценарию воспаления необходимо привлекать дополнительные экспериментальные данные.

## 5. Динамика гибели нейронов при болезни Альцгеймера

Представления о патогенетических механизмах болезни Альцгеймера (БА) в современной биологии и медицине остаются пока предметом дискуссий, однако в большей части литературных источников ключевыми нейропатологическими признаками заболевания признаются внутриклеточные нейрофибриллярные клубки молекул гиперфосфорилированного тау-белка, внеклеточные амилоидные бляшки и массовая гибель нейронов в гиппокампе. Все это вызывает оксидативный стресс и ведет к хроническому воспалению мозга и нарушениям многих когнитивных функций. Биологическая модель настоящей работы охватывает все указанные механизмы БА.

На первом этапе математическая модель динамики гибели клеток при БА формулировалась в пространственно-однородном приближении в виде нелинейной системы ОДУ, где уравнения представляют собой балансные соотношения, описывающие клеточно-молекулярные механизмы развития БА в рамках биокинетического подхода. Главное содержание настоящих исследований связано с разработкой модели в пространственно неоднородной постановке (с учетом диффузии цитокинов и хемотаксиса клеток иммунной системы) и оценкой соответствия полученных решений известным биомедицинским представлениям. Разработан численный алгоритм решения задачи, основанный на методе расщепления по пространственным направлениям. Выполнена серия методических расчетов, демонстрирующих работоспособность алгоритма при моделировании пространственно-временного развития локальных возмущений на основе нелинейных уравнений диффузии и реакции-диффузии. Это позволило определить некоторые общие закономерности распространения тепла (вещества) при наиболее характерных для биохимических процессов аппроксимациях скоростей реакций, включая те, которые используются в разработанной модели БА.

Для модели болезни Альцгеймера выполнен цикл численных экспериментов, направленных на анализ особенностей нелинейной структуры правых частей уравнений и роли нелинейных коэффициентов диффузии, которые позволяют получить биологически корректную общую картину развития повреждения и конечную скорость распространения повреждающих факторов на временном интервале, соответствующем характерному времени развития патологического процесса при болезни Альцгеймера. На рис. 3 представлены результаты численных экспериментов, в которых рассматривается распространение нейровоспаления от множественных локальных источников повреждения (восемь источников в центре и один на периферии). Можно видеть, что со временем зоны с повышенным уровнем повреждающих факторов БА и воспалительных факторов, первоначально локализованные в относительном удалении друг от друга, постепенно распространяются и способны влиять друг на друга. Численные эксперименты показали, что модель адекватно описывает основные признаки патологии БА: в случае болезни плотность нейронов в зоне повреждения убывает со временем, повышен уровень бета-амилоида и тау-белка. При этом нейроны умирают со скоростью около 5.5 % в год, за это время плотность бета-амилоида внутри нейронов возрастает примерно в 7 раз, что согласуется с известными оценками, основанными на лабораторных и клинических данных. Наибольшую эффективность показала модель с нелинейными коэффициентами диффузии. Работа является продолжением и развитием [3].

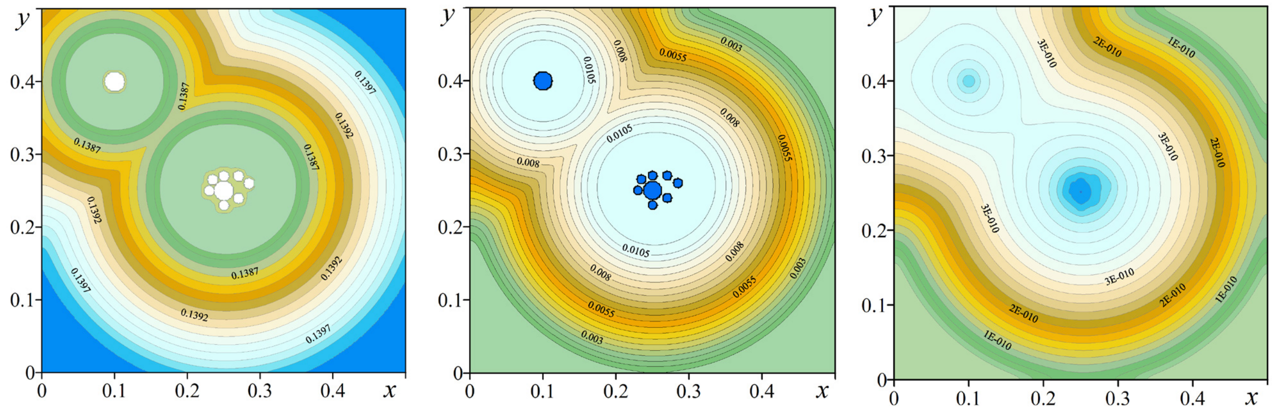



*Рис. 3. Распределение плотности нейронов (слева), активированных астроцитов (в центре) и концентрации хемокина MCP-1 (справа) через 400 дней после «обнаружения» БА*

**Литература**


1. *Tsgoev C. A.* Mathematical modelling of acute phase of myocardial infarction / C. A. Tsgoev, O. F. Voropaeva, Yu. I. Shokin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2020. – Vol. 35. – P. 111–126.

2. *Воропаева О. Ф.* Математическая модель динамики асептического воспаления / О. Ф. Воропаева, Т. В. Баядилов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2020. – Т. 23, № 3. – С. 1–15.

3. *Воропаева О. Ф.* Математическое моделирование динамики гибели клеток при асептическом воспалении / О. Ф. Воропаева, Т. В. Баядилов, С. В. Леонтьев // Международная конференция «Актуальные проблемы математики, информатики и механики»: Воронеж, 18–20 декабря 2017 г. Сб. трудов. – 2017. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации». – С. 625–631.

УДК 519.6; 51-76

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОТИВОРАКОВЫХ ТЕРАПЕВТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

**О. Ф. Воропаева[1], К. С. Гаврилова[1,2], С. Д. Сенотрусова[1]**

*[1]Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск*

*[2]Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет*

**Аннотация.** Разработаны новые математические модели и выполнен анализ функционирования ключевых регуляторов программируемой клеточной смерти при воздействии на раковую клетку химиопрепаратами и облучением. Адекватность результатов исследований подтверждается детальным сопоставлением с экспериментальными данными.
**Ключевые слова:** математическая модель, апоптоз, p53, p21, Bax, микроРНК, химиотерапия.

## Введение

Онкологические заболевания относятся к числу наиболее коварных дегенеративных заболеваний, патогенез которых связан с накоплением в клетках дефектов ДНК и с неопластическими нарушениями. Белок p53 широко известен как важный супрессор опухоли, который активируется повреждением ДНК, таким как радиация, окислительный стресс и химиотерапевтические препараты [1]. Среди множества известных функций p53 одной из главных признается его способность препятствовать размножению клеток с дефектами ДНК через запуск программ регуляции клеточного цикла, старения и апоптоза (естественного самоуничтожения клеток). Утрата этой функции p53 может привести к накоплению в организме дефектных, в том числе раковых клеток. Управление реакцией p53 на повреждение ДНК является важнейшей задачей, с решением которой связывается реальный прогресс в борьбе с дегенеративными заболеваниями. В случае раковых клеток требуется запустить механизм гиперактивации p53, который позволит добиться устойчивого и выраженного терапевтического эффекта химио- или радиотерапии.

Представленный в настоящей работе цикл исследований имеет целью продемонстрировать возможности минимальных математических моделей динамики сигнального пути p53 с точки зрения описания результатов лабораторных экспериментов, раскрывающих динамические особенности p53-зависимой реакции организма на повреждение. Главное внимание уделено анализу противораковых терапевтических стратегий, принудительно активирующих p53 для запуска программы смерти раковых клеток.

## 1. Динамика системы p53–микроРНК в раковых клетках

В последние годы наиболее активно обсуждается роль p53-зависимых малых некодирующих молекул РНК (микроРНК или miR), которым отводится особое место среди регуляторов сигнального пути p53. Это особенно важно в связи с тем, что микроРНК все чаще предлагаются к использованию в клинической практике как биологические маркеры, т. е. те измеряемые количественно параметры состояния пациента, которые как индикаторы определяют норму, патологию или результат лекарственной коррекции заболевания. Ниже будут представлены результаты математического моделирования реакции системы p53–miR для класса микроРНК с положительной обратной связью с p53.

### *1.1. Базовая математическая модель*

В качестве базовой математической модели динамики системы p53–ингибитор–miR, на основе которой построены модели, соответствующие принятому в рамках конкретных лабораторных экспериментов уровню идеализации биологической системы, привлекается система дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами следующего достаточно общего вида [2, 3]:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_1 - a_2 f(y_1(t), y_2(t), k_f) - a_3 y_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = b_1 + b_2 g(y_1(t-\tau_1), y_2(t-\tau_1), k_g) - b_3 y_2(t) - b_4 f(y_2(t-\tau_3), y_3(t-\tau_3), k_m), \tag{2}$$

$$\frac{dy_3}{dt} = c_1 + c_2 f(y_1(t-\tau_2), y_3(t-\tau_2), k_p) - c_3 y_3(t). \tag{3}$$

$$f(y_1, y_2, k) = \frac{1}{2}\left( y_1 + y_2 + k - \sqrt{(y_1 + y_2 + k)^2 - 4 y_1 y_2} \right), \tag{4}$$

$$g(y_1, y_2, k_g) = \frac{y_1 - f(y_1, y_2, k_f)}{y_1 + k_g - f(y_1, y_2, k_f)}. \tag{5}$$

Здесь $y_1$, $y_2$, $y_3$ – уровни p53, белка-ингибитора p53 и микроРНК, соответственно; $\tau_i$ определяют время запаздывания реакции на сигналы в молекулярной сети. Минимальная модель (1)–(5) составлена из балансных соотношений, отражающих вклад в совместную динамику системы p53–ингибитор–miR механизмов спонтанной генерации и деградации (в рамках модели эти термины подразумевают как конститутивные процессы, так и обусловленные влиянием каких-либо не описанных явно факторов), а также особо выделяемых процессов взаимного влияния элементов системы – p53-зависимой активации/генерации белка-ингибитора и микроРНК, инактивации/деградации p53 под влиянием ингибитора, микроРНК-зависимого подавления генерации белка-ингибитора p53. В качестве основных представлений функций взаимодействия использовались кинетические модели действующих масс, Гольдбетера – Кошланда и Михаэлиса – Ментен. Численное решение системы уравнений с запаздывающими аргументами основано на применении идеи метода шагов. Численный алгоритм и результаты методических расчетов представлены в [2–4].

Математическое моделирование динамики сигнального пути p53 в условиях, приближенных к условиям лабораторных экспериментов, предполагает адаптацию базовой модели и решение обратной коэффициентной задачи с применением стохастического генетического алгоритма BGA [5]. Для каждой решаемой задачи проводилось от 20 до 60 равноценных запусков BGA. Оптимальный набор значений параметров определялся минимальным значением функционала, полученным для центральных 50 % наборов значений параметров этой выборки. При этом выдвигался ряд требований к решению прямой задачи, обусловленных биологическими соображениями.

### *1.2. Бимодальное переключение динамики p53 в зависимости от уровня повреждения ДНК*

В лабораторных экспериментах [6] с клетками остеосаркомы человека (линия раковых клеток U2OS с p53 дикого типа) изучалась динамика p53 и его ингибитора белка Mdm2 при воздействии на клетку этопозидом, который вызывает повреждение ДНК и, как следствие, активацию p53-зависимого апоптоза клетки-мишени. Результаты расчетов с привлечением базовой модели показали, что, как и в лабораторных экспериментах, при отсутствии повреждения ДНК петля отрицательной обратной связи p53–Mdm2 поддерживает в клетке достаточно низкий уровень p53 (это характерно для нормальных клеток, но еще более выражено в раковых клетках с p53 дикого типа), а при наличии повреждения наблюдается переключение системы p53–Mdm2 на режим с монотонным увеличением p53 (рис. 1а). В рамках принятой модели показано, что за бимодальное переключение под воздействием этопозида в сети p53 отвечают сразу несколько механизмов – не связанные с взаимодействием p53 и Mdm2 «конститутивные» процессы активации и деградации p53, ингибирующее влияние Mdm2 на p53 и саморазрушение Mdm2. Это согласуется с выводами [6, 7], основанными на данных лабораторных наблюдений.

### *1.3. Динамика системы p53–Wip1–miR-16 в клетках остеосаркомы человека*

Для того чтобы продемонстрировать важную роль miR-16 в регуляции мРНК и белка Wip1, который действует как критический ингибитор сигнального пути p53 при повреждении ДНК, в одном из лабораторных экспериментов [8] раковые клетки линии U2OS подвергались внешнему воздействию ионизирующим облучением с той же целью, что и в [6] – через искусственное повреждение ДНК активировать интересующий сегмент сигнального пути p53 (этот метод широко известен как один из вариантов радиотерапии раковых клеток). Для описания этих лабораторных экспериментов [8] использовалась базовая математическая модель, а также ее модификация, включающая в себя уравнение динамики мРНК Wip1. На рисунке 1б можно видеть, что полученные численные решения достаточно хорошо согласуются с лабораторными данными: как и в [8], система p53–Wip1–miR-16 демонстрирует импульсный режим с одним всплеском уровней белков и микроРНК, при этом уровень Wip1 изменяется в противофазе с p53 и miR-16, что полностью соответствует типу их взаимосвязи. Результаты исследований базовой и модифицированной моделей подтверждают адекватность принятого в базовой модели подхода к моделированию, в основе которого лежит предположение о пропорциональности уровней мРНК и соответствующего белка.

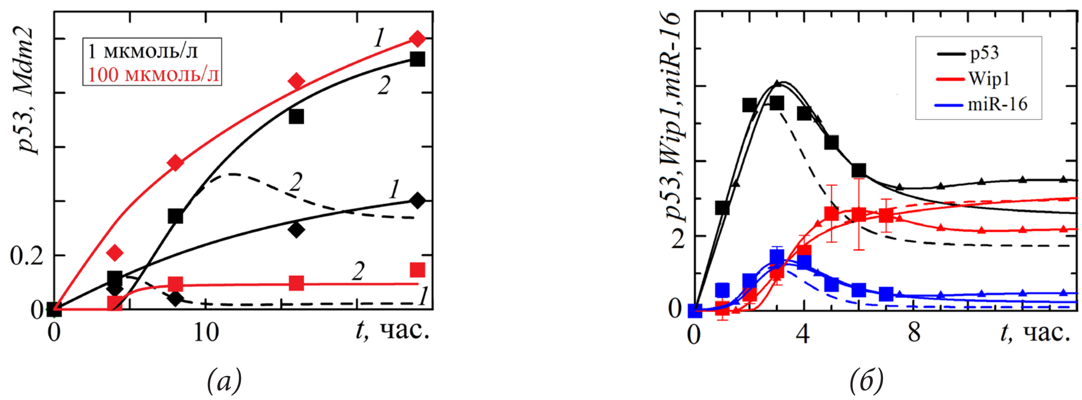



*Рис. 1. (а) Фолд-изменение уровней белков p53 и Mdm2 при воздействии этопозида (1 мкмоль/л и 100 мкмоль/л). Численные решения (линии): 1 – p53, 2 – Mdm2; экспериментальные данные [6]: ромбы – p53, квадраты – Mdm2. (б) Динамика системы p53–Wip1–miR-16 в раковой клетке после ее облучения: сплошные линии – базовая модель, маркированные треугольниками – модифицированная модель; квадраты – экспериментальные данные [8]. Штриховые линии – результат моделирования состояния до облучения*

Численные эксперименты показали, что только одновременное увеличение дозы облучения и усиление влияния микроРНК на Wip1 приводит к гиперактивации p53 и существенному снижению уровня Wip1, что соответствует ситуации массового запуска p53-зависимого апоптоза раковых клеток и может рассматриваться как иллюстрация синергического эффекта. Результаты численных экспериментов подтверждают выводы [8], основанные на анализе лабораторных данных: сверхэкспрессия miR-16 способствует подавлению индукции Wip1, чувствительной к повреждению ДНК, а ингибирование miR-16 заметно ускоряет и усиливает индукцию Wip1.

### *1.4. Динамика p53-зависимых miR-34a, -192, -194 и -215 в клетках множественной миеломы*

Разработана минимальная математическая модель динамики p53 с учетом сразу нескольких микроРНК, под контролем которых находится белок-ингибитор p53. Для описания эффекта активации положительной обратной связи p53–микроРНК–p21 под влиянием нутлина в клетках множественной миеломы используется следующая математическая модель, основанная на модели 1:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_1 - a_2 f(y_1(t), y_2(t), k_f)\frac{k_n^{\alpha_n}}{k_n^{\alpha_n} + N^{\alpha_n}(t)} - a_3 y_1(t),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = b_0 + b_1 g(y_1(t-\tau_1), y_2(t-\tau_1), k_g) - b_2 y_2(t)$$

$$-b_3^{m34} f(y_2(t-\tau_3), y_3^{m34}(t-\tau_3), k_m^{m34}) - b_3^{m215} f(y_2(t-\tau_3), y_3^{m215}(t-\tau_3), k_m^{m215})$$

$$-b_3^{m192} f(y_2(t-\tau_3), y_3^{m192}(t-\tau_3), k_m^{m192}) - b_3^{m194} f(y_2(t-\tau_3), y_3^{m194}(t-\tau_3), k_m^{m194}),$$

$$\frac{dy_3^{m34}}{dt} = c_1^{m34} + c_2^{m34} f(y_1(t-\tau_2), y_3^{m34}(t-\tau_2), k_p^{m34}) - c_3^{m34} y_3^{m34}(t),$$

$$\frac{dy_3^{m192}}{dt} = c_1^{m192} + c_2^{m192} f(y_1(t-\tau_2), y_3^{m192}(t-\tau_2), k_p^{m192}) - c_3^{m192} y_3^{m192}(t),$$

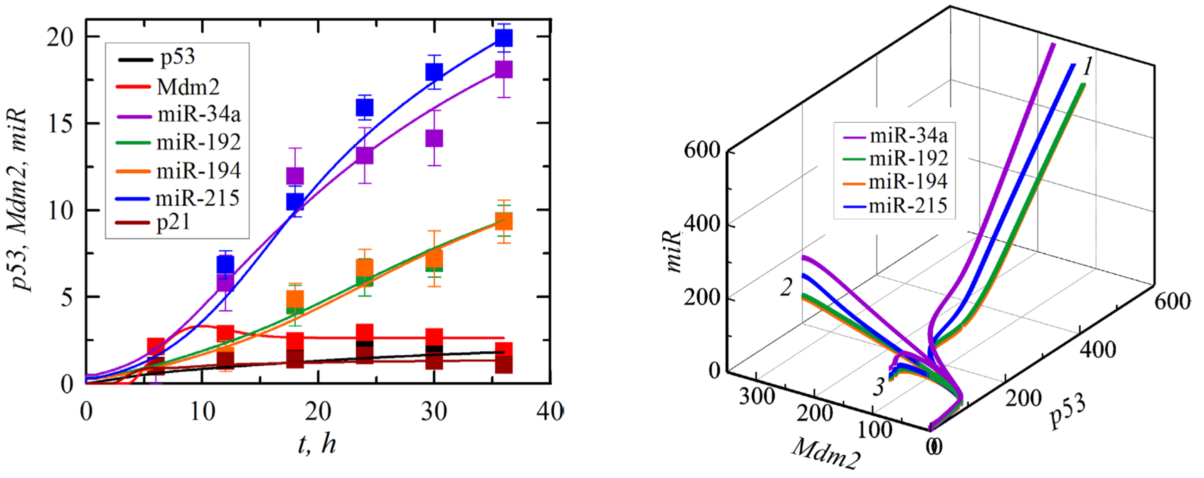
$$\frac{dy_3^{m194}}{dt} = c_1^{m194} + c_2^{m194} f(y_1(t-\tau_2), y_3^{m194}(t-\tau_2), k_p^{m194}) - c_3^{m194} y_3^{m194}(t),$$

$$\frac{dy_3^{m215}}{dt} = c_1^{m215} + c_2^{m215} f(y_1(t-\tau_2), y_3^{m215}(t-\tau_2), k_p^{m215}) - c_3^{m215} y_3^{m215}(t),$$

$$\frac{dy_4}{dt} = d_1 g(y_1(t-\tau_4), y_4(t-\tau_4), k_b, d_3) - d_2 y_4.$$

Здесь $y_1$, $y_2$, $y_4$ – уровни белков p53, Wip1 и p21; $y_3$ – уровни микроРНК, причем верхние индексы $m34$, $m192$, $m194$, $m215$ указывают на принадлежность к семейству микроРНК miR-34, miR-192, miR-194, miR-215 соответственно; $N(t)$ – функция, описывающая изменение концентрации нутлина от нулевого значения к постоянному, равному экспериментальному уровню концентрации [9]. Для проверки ее адекватности использовались экспериментальные данные [9] (рис. 2а). В рамках принятой модели показано, что, как и в [9], микроРНК miR-34a, miR-192, miR-194 и miR-215, которые являются позитивными регуляторами p53, подавляются в клетках множественной миеломы, но могут быть активированы p53 и затем способны регулировать экспрессию Mdm2 (этот механизм демонстрирует наличие петли положительной обратной связи перечисленных микроРНК с p53). Показано также, что имеется прямая связь между экспрессией miR-34a, miR-194, miR-192 и miR-215 и функциональной активностью белка p21, который известен как мишень p53, регулятор программ клеточного цикла и старения.

Результаты численных экспериментов наглядно продемонстрировали, что эффективность терапевтического воздействия нутлином находится под влиянием p53-зависимых микроРНК-ингибиторов Mdm2: микроРНК сдерживают рост уровня Mdm2, способствуя более эффективной активации сети p53. Показано (рис. 2б), что только совместное влияние этих воздействий – нутлина и микроРНК – описывает эффективную терапевтическую стратегию,




(а) (б)

*Рис. 2. (а) Динамика системы p53–Mdm2–miR-34a–miR-192–miR-194–miR-215–p21 в клетке множественной миеломы после воздействия нутлина: маркеры – экспериментальные данные [9], линии – модель. (б) Фазовые траектории численных решений, описывающих динамику системы p53–Mdm2–miR-34a–miR-192–miR-194–miR-215 в клетке множественной миеломы: 1 – совместное воздействие нутлина и микроРНК; 2 – нутлиновая терапия без учета микроРНК; 3 – модель с учетом микроРНК без химиотерапии*

основанную на запуске p53-зависимого апоптоза, что указывает на синергический эффект. Наблюдаемые в численных экспериментах тенденции соответствуют известным представлениям о функционировании сигнального пути p53 в раковой клетке с p53 дикого типа (см., например, [10]). Более детальное изложение материала можно найти в [11].

## 2. Математическая модель динамики белковой системы p53–Mdm2–Wip1–p21–Bax

Разработана новая математическая модель динамики белковой системы p53–Mdm2–Wip1–p21–Apaf1–Bax, в которой p53 играет ключевую роль. В отличие от моделей [11–13], в настоящей модели предпринята попытка описать в упрощенной форме не только механизм взаимовлияния двух белков-ингибиторов Mdm2 и Wip1, но также более детально смоделировать функционирование системы белков-мишеней p53 – p21, Apaf1 и Bax. Известно, что эти белки выполняют целый ряд важнейших функций в организации ответа на сигнал о клеточном повреждении ДНК. Важный, но пока слабо изученный белок p21 блокирует размножение генетически дефектных клеток и играет ключевую роль в запуске программы клеточного старения, которая, как и программа апоптоза, является одним из способов необратимого подавления размножения дефектных клеток. Белок Bax считается одним из ключевых белков, участвующих в запуске программы апоптоза, Apaf1 является основным компонентом апоптосом – крупных белковых структур, которые формируются внутри клетки и непосредственно участвуют в запуске каскада апоптозных реакций. Все они являются важными участниками процесса, определяющего «судьбу» поврежденной клетки. Наиболее распространенным является предположение, что при относительно слабом повреждении ДНК доминирующую роль играют те программы, в которых задействован белок p21, а более сильное повреждение активирует проапоптозные белки этой сигнальной системы. Следует отметить, что более глубокое понимание этого процесса и его конкретная реализация является в настоящее время предметом серьезных исследований.

Математическая модель функционирования белковой сети p53–Mdm2–Wip1–p21–APAF1–BAX в условиях стресса имеет следующий вид:

$$\frac{dP_i}{dt} = \beta_P - \alpha_{MP_i} MP_i - \beta_{SP} \frac{S^2}{S^2 + T_S^{\,2}} P_i - \alpha_{P_i} P_i - \alpha_{WP_i} WP_{\boldsymbol{i}},$$

$$\frac{dP_a}{dt} = \beta_{SP} \frac{S^2}{S^2 + T_S^{\,2}} P_i - \alpha_{MP_a} MP_a - \alpha_{WP_a} WP_a,$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta_{M_i} + \beta_M P_a \left(t - \tau_M\right) - \alpha_{SM} SM - \alpha_M M,$$

$$\frac{dS}{dt} = \beta_S - \alpha_{WS} \frac{W^4}{W^4 + T_W^{\,4}} S - \alpha_S S,$$

$$\frac{dp}{dt} = k_{sp1} + k_{sp2} \frac{P_a^\alpha}{J_p + P_a^\alpha} p - k_{dp21} p,$$

$$\frac{dF}{dt} = k_{sF1} + k_{sF2} \frac{P_a^\gamma}{J_F + P_a^\gamma} p - k_{dF} F,$$

$$\frac{dW}{dt} = \beta_W P_a \left(t - \tau_W\right) - \alpha_W W,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_{sB1} + k_{sB2} \frac{P^\sigma}{J_B + P^\sigma} B - k_{dB} B.$$

Здесь приняты следующие обозначения: $P_i$, $P_a$ – уровни неактивированного и активного белка p53; $M$, $W$ – уровни Mdm2 и Wip1; $S$ – уровень активного сигнала; $p$, $F$, $B$ – уровни белков p21, APAF1 и BAX соответственно; $P = P_i + P_a$. Начальные данные для компонент вектора решений задаются согласованными с экспериментальными данными [13] в виде функций $\mathbf{X}(\theta) = \mathbf{x}_0(\theta)$, где $\theta \in [-\tau, 0]$, $\tau = \max(\tau_M, \tau_W)$. На рис. 3 показаны изменения фазового портрета системы, наблюдаемые при изменении параметра запаздывания $\tau_W$ в условиях внешнего стрессового воздействия, не связанного с облучением. Получено, в частности, что динамика системы характеризуется переходом из стационарного состояния (с неподвижной предельной точкой в фазовом пространстве) к предельным циклам и торообразным траекториям. При этом сохраняется множественность решений, о которой сообщалось при изучении предыдущих модификаций модели (см., например, [12]).

Калибровка новой модели основана на детальном сопоставлении с наблюдаемой в [13] экспериментальной динамикой всех шести белков системы при обработке раковой клетки гамма-облучением (этот прием широко известен как вариант радиотерапии). На рис. 4 приведены решения модели, полученные в результате численного решения обратной коэффициентной задачи (сплошные линии) с привлечением набора экспериментальных данных [13]. Здесь же штриховыми линиями показан вариант решения задачи, соответствующий более выраженному сигналу о повреждении, который распространяется в белковой сети под влиянием усиливающегося воздействия гамма-облучения). Можно видеть, что разработанная модель дает детальное количественное описание наблюдаемой в лабораторных экспериментах [13] динамики системы ключевых белков сигнального пути p53 в раковых клетках под воздействием гамма-облучения. Дальнейшее совершенствование модели связано с реализацией дополнительных терапевтических сценариев и моделированием управления программой смерти раковых клеток.

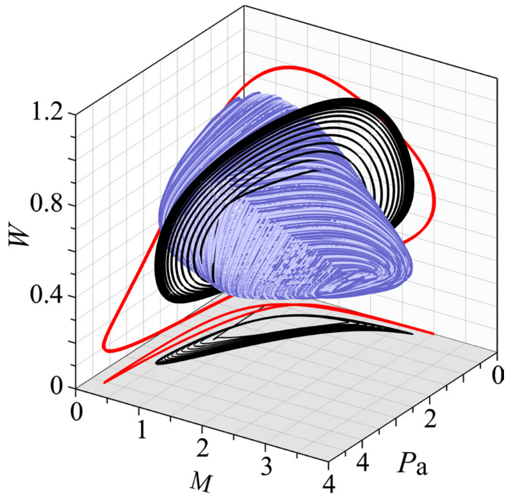



*Рис. 3. Метаморфозы фазового портрета системы в биологически адекватном диапазоне значений параметров*

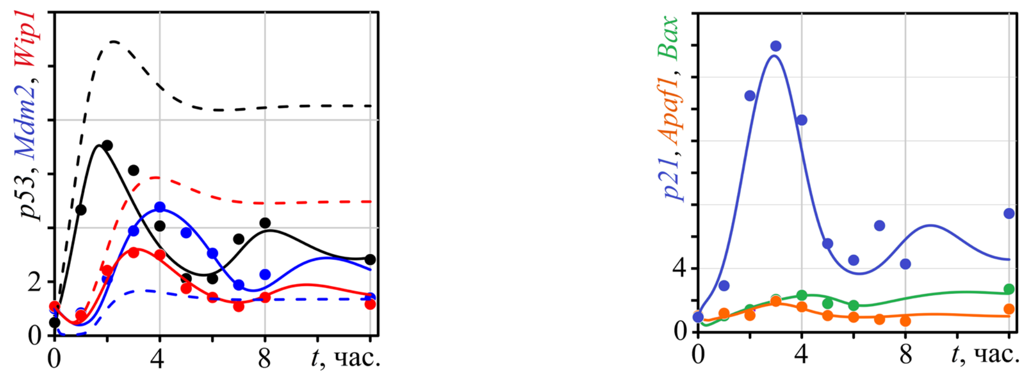



*Рис. 4. Активация сегментов сигнального пути белка p53 в раковых клетках под воздействием гамма-облучения. Линии – расчеты, маркеры – экспериментальные данные [13]. Штриховые линии – моделирование состояний при дополнительных воздействиях*

## Литература

1. *Yamakuchi M.* MiR-34, SIRT1 and p53: The feedback loop / M. Yamakuchi, C. J. Lowenstein // Cell Cycle. – 2009. – Vol. 8, No 5. – P. 712–715. doi: 10.4161/cc.8.5.7753.

2. *Сенотрусова С. Д.* Математическое моделирование функционирования положительной связи в системе онкомаркеров p53–микроРНК / С. Д. Сенотрусова, О. Ф. Воропаева // СибЖВМ. – 2019. – Т. 22, № 3. – С. 325–344. doi: 10.15372/SJNM20190306.

3. Гиперактивация сигнального пути p53–микроРНК: математическое моделирование вариантов противоопухолевой терапии / О. Ф. Воропаева, П. Д. Лисачев, С. Д. Сенотрусова, Ю. И. Шокин // Математическая биология и биоинформатика. – 2019. – Т. 14, № 1. – С. 355–372. doi: 10.17537/2019.14.355.

4. Математическое моделирование функционирования и регуляции биологической системы p53–Mdm2 / О. Ф. Воропаева, Ю. И. Шокин, Л. М. Непомнящих, С. Р. Сенчукова. – Москва : Изд-во РАМН, 2014. – 176 с.

5. *Tsgoev C. A.* Mathematical modelling of acute phase of myocardial infarction / C. A. Tsgoev, O. F. Voropaeva, Yu. I. Shokin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2020. – Vol. 35. – P. 111–126.

6. DNA damage strength modulates a bimodal switch of p53 dynamics for cell-fate control / X. Chen, J. Chen, S. Gan, H. Guan, Y. Zhou, Q. Ouyang, J. Shi // BMC Biology. – 2013. – Vol. 11. – Article No. 73. doi: 10.1186/1741-7007-11-73.

7. Variable sensitivity to DNA damaging chemotherapeutic modulated by cell type-dependent bimodal p53 dynamics/ R. Yang, B. Huang, Y. Zhu, Y. Li, F. Liu, J. Shi // Science Advances. – 2018. – Vol. 4, No 12. – Article No. eaat5077. doi: 10.1126/sciadv.aat5077.

8. Oncogenic Wip1 phosphatase is inhibited by miR-16 in the DNA damage signaling pathway / X. Zhang, G. Wan, S. Mlotshwa, V. Vance, F.G. Berger, H. Chen, X. Lu // Cancer Res. – 2010. – Vol. 70. – P. 7176–7186. doi: 10.1158/0008-5472.

9. Downregulation of p53-inducible microRNAs 192, 194, and 215 impairs the p53/MDM2 autoregulatory loop in multiple myeloma development / F. Pichiorri, S.S. Suh, A. Rocci [et al.] // Cancer Cell. – 2010. – Vol. 18. – P. 367–381. doi: 10.1016/j.ccr.2010.09.005.

10. Recurrent initiation: A mechanism for triggering p53 pulses in response to DNA damage / E. Batchelor, C.S. Mock, I. Bhan, A. Loewer, G. Lahav // Molecular Cell. – 2008. – Vol. 30, No 3. – P. 277–289. doi: 10.1016/j.molcel.2008.03.016.

11. *Сенотрусова С. Д.* Применение минимальных математических моделей динамики сигнального пути белка р53–микроРНК к анализу лабораторных данных / С. Д. Сенотрусова, О. Ф. Воропаева, Ю. И. Шокин // Вычислительные технологии. – 2020 (в печати).

12. *Воропаева О. Ф.* Минимальные математические модели функционирования белковой сети р53–Mdm2–Wip1–p21 / О. Ф. Воропаева, К. С. Гаврилова, С. Д. Сенотрусова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции (Воронеж, 3–5 декабря 2018 г.) – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2019. – С. 672–679.

13. *Purvis J. E.* p53 dynamics control cell fate / J. E. Purvis [et al.] // Science. – 2012. – Vol. 336, No 6087. – P. 1440–1444.

УДК 533.9.01

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ИСТОЧНИКОВ УФ ИЗЛУЧЕНИЯ С РАЗРЯДАМИ В КСЕНОНЕ И КРИПТОНЕ, СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ ИЗЛУЧАЮЩЕ-ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ОБОЛОЧКОЙ

**С. В. Гавриш[1], В. М. Градов[2], Д. Н. Кугушев[1], Д. Ю. Пугачев[1]**

*[1]Научно-производственное предприятие «Мелитта»*
*[2]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

**Аннотация.** В работе рассматривается математическая модель неоднородных сильно излучающих разрядов в инертных газах со сложными спектрами излучения и с поглощением ограничивающей разряд кварцевой оболочки, решаются задачи моделирования процессов в плазменном канале, когда допустимо термодинамическое равновесие. В результате вычислительного эксперимента по разработанной математической модели приводятся расчетные спектральные и энергетические характеристики ультрафиолетового излучения импульсных ксеноновых и криптоновых разрядов, стабилизированных кварцевой оболочкой.
**Ключевые слова:** математическая модель, вычислительный эксперимент, газоразрядная лампа, плазма, импульсный разряд, ксенон, криптон, кварцевая оболочка, спектральное распределение, УФ излучение.

## Введение

Математическое моделирование (вычислительный эксперимент) как методология, призванная дополнить, а иногда и заменить экспериментальные исследования, в настоящее время получила общее признание при выполнении разнообразных сложных многофакторных задач. Применительно к газоразрядным источникам интенсивного ультрафиолетового (УФ) излучения с широкой номенклатурой конструктивных параметров и плазмообразующих сред данная методология развивалась в работах [1–3].

## 1. Описание математической модели и алгоритма ее реализации

При построении нестационарной модели системы, работающей в импульсно-периодическом режиме, существенными считаются теплофизические процессы в плазме разряда, взаимодействующих с ней кварцевой оболочке и влияния на разряд режимов работы источника электрического питания. Для разряда и оболочек принимается вариант азимутальной симметрии. В плазме важная роль принадлежит процессам переноса тепла за счет селективного по спектру излучения, теплопроводности, конвекции. Перенос излучения рассматривается с учетом того, что плазма имеет по спектру произвольную оптическую плотность. Дополнительно учитывается, что кварцевая оболочка находится в радиационном поле излучения плазмы и вследствие высоких температур сама является излучающей средой. Ее внутренняя поверхность подвергается воздействию тепловых кондуктивных потоков из разряда, объемно поглощаемому излучению плазмы в спектральной области более 4 мкм и поверхностных лучистых потоков в ИК- и УФ-областях непрозрачности кварцевого стекла. Блок питания моделируется электротехнической цепью, включающей лампу, конденсатор фиксируемой емкости, индуктивность (проводов и импульсного трансформатора), активное сопротивление контура. Конденсатор разряжается на лампу до определенного момента времени, когда он мгновенно отключается, формируя импульс тока заданной длительности с крутым задним фронтом, определяемым индуктивностью и активным сопротивлением цепи электрического питания. При моделировании импульсного разряда фиксируется начальное давление инертного газа, т. е. в установившемся режиме количество атомов в разрядном объеме в течение всей серии импульсов считается неизменным.

Математическая модель процессов в плазме в наиболее полном описании (рис. 1) строится с использованием следующих групп уравнений [1, 3]: нестационарного уравнения энергии, уравнений газодинамики (неразрывности, движения), переноса излучения (в диффузионном приближении), закона Ома.

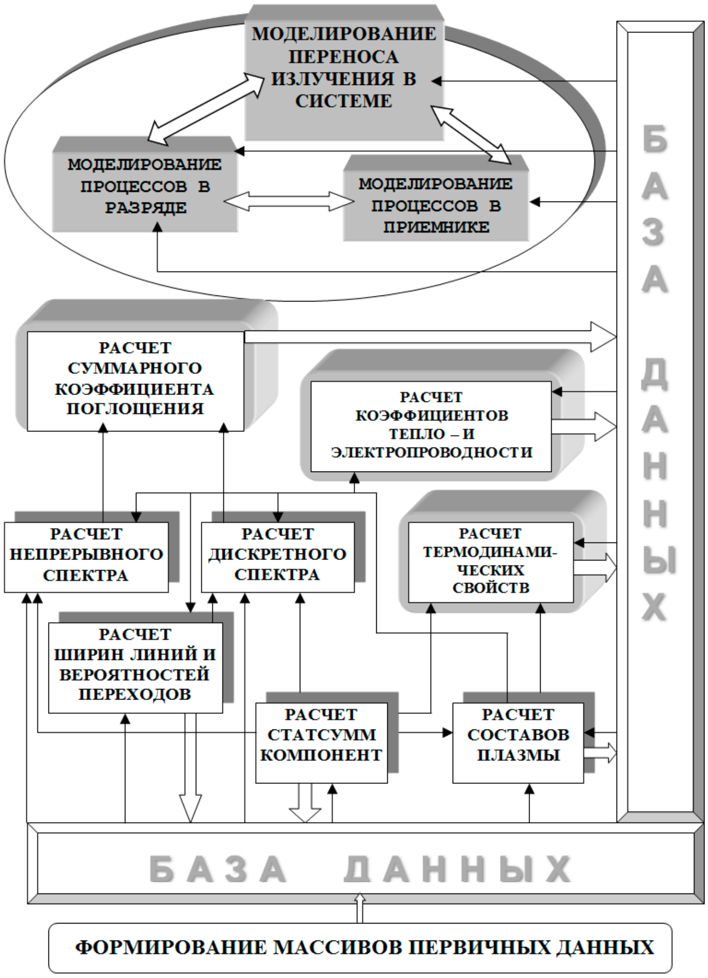



*Рис. 1. Схема полного цикла моделирования*

Процессы в оболочке рассматриваются на основе нестационарного уравнения энергии, в котором учитываются радиационные источники тепла, и уравнений переноса излучения (в приближении Шустера – Шварцшильда) [3]. Внешняя электрическая цепь описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейным сопротивлением, каковым является разряд лампы. Учитывается работа цепи с дежурной дугой в лампе. К системе уравнений подключаются необходимые начальные и граничные условия.

Решение сформулированных систем уравнений осуществляется численными методами. Алгоритм решения систем дифференциальных уравнений строится на основе метода последовательных прогонок, применяемых к разностной схеме, аппроксимирующей каждое исходное уравнение. Задачи о переносе излучения в приближении Шустера – Шварцшильда и развитии процессов в разрядном контуре ставятся как задачи Коши. В этом случае применяются методы типа предиктор-корректор, Рунге – Кутта второго и четвертого порядков точности. При реализации нестационарной модели разряда используется неявная схема Гира, в которой она применяется для электротехнических уравнений внешней цепи, т. к. система этих уравнений на переднем фронте импульса тока из-за большого омического сопротивления плазменного столба оказывается жесткой [1, 3].

## 2. Результаты вычислительного эксперимента

Результаты выполненного цикла вычислительных экспериментов представлены в виде сводных графиков (рис. 2 и 3), иллюстрирующих зависимость пиковой силы ультрафиолетового излучения разрядов от удельной электрической мощности $w$, вводимой в разряд, радиуса разрядного канала, начального давления наполнения $p_0$ (для ксеноновых разрядов) и рабочего давления в разряде (для криптоновых разрядов). При этом поглощение излучения в кварцевых оболочках ламп не учитывается.

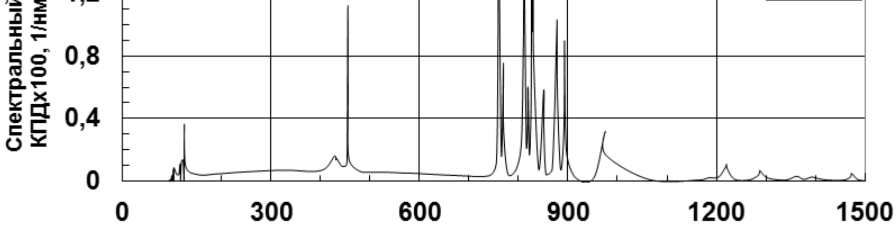
На рис. 1 в качестве примера показано, как зависит вид спектральных кривых излучения криптонового разряда от вкладываемой в разряд электрической мощности (или температуры в плазме).

Если при малых мощностях (рис. 2,а) в излучении преобладают уширенные атомные линии с очень слабым континуумом, то по мере ужесточения режима роль линий ослабевает, и при удельной мощности порядка $w = 170$ кВт/см³ и выше спектр становится практически сплошным (рис. 2, б). С ростом электрической мощности растет коротковолновая составляющая излучения, а линии в области 700–1000 нм «растворяются» на непрерывном фоне. При этом существенный вклад в энергетические потери на оболочке вносит УФ-излучение за границей пропускания материала стенок. Это излучение происходит в крыльях самообращенных линий Kr с основным нижним уровнем энергии.

Линии в плазме уширены различными механизмами, значимость каждого из которых отличается при разных параметрах плазмы и неодинакова для линий разных серий. Например, для линий, образованных переходами на основной уровень, во многих случаях определяющим при невысоких концентрациях электронов оказывается резонансный механизм уширения, по мере роста степени ионизации все большее значение приобретает штарковское ударное уширение электронами, а при значительной концентрации ионов на указанные механизмы накладывается квазистатическое уширение заряженными тяжелыми частицами.

Рис. 3 показывает, что пиковая сила излучения в УФ-области сильно зависит от $w$ и относительно слабо – от $p_0$, причем по мере роста удельной электрической мощности зависимость от $p_0$ становится все более слабой. Согласно расчетам в случае ксенона, при $w$ больше, чем $10^5$ Вт/см³ для $R = 0.25$ см (рис. 3) и $w$ больше, чем $(0{,}4–0{,}5)\cdot 10^5$ Вт/см³ для $R = 0.35$ см кривые для начальных давлений $p_0 =$ 100–400 мм рт. ст. практически сливаются.

Например, для ксенона при радиусе разрядного промежутка $R = 0.25$ см при $w = 10^3$ Вт/см³ изменение $p_0$ от 100 до 400 мм рт. ст. приводит к росту пиковой силы излучения $I$ от 8.8 Вт/ср до 11 Вт/ср, т.е. на 2 %, в то же время при $w = 0.12 \cdot 10^5$ Вт/см³ изменение $p_0$ в том же диапазоне приводит к снижению $I$ от 190 Вт/ср до 185 Вт/ср, т. е. изменение составляет всего примерно на 2.5 %.



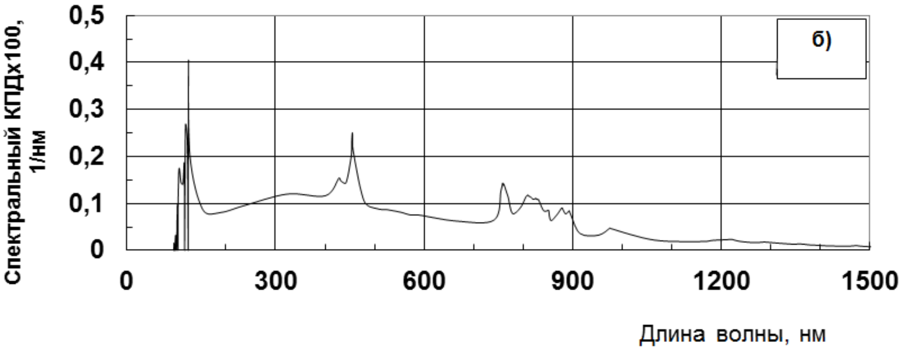



*Рис. 2. Спектральное распределение КПД излучения разряда в криптоне. Внутренний радиус разрядной трубки R = 0.3 см, рабочее давление в разряде p = 2.5 МПа а – ток I = 100 А, средняя удельная электрическая мощность <w>= 8.5 кВт/см³, осевая температура плазмы – $T_0$ = 9980 К; б – ток I = 800 А, <w>= 170 кВт/см³, $T_0$ = 12870 К*

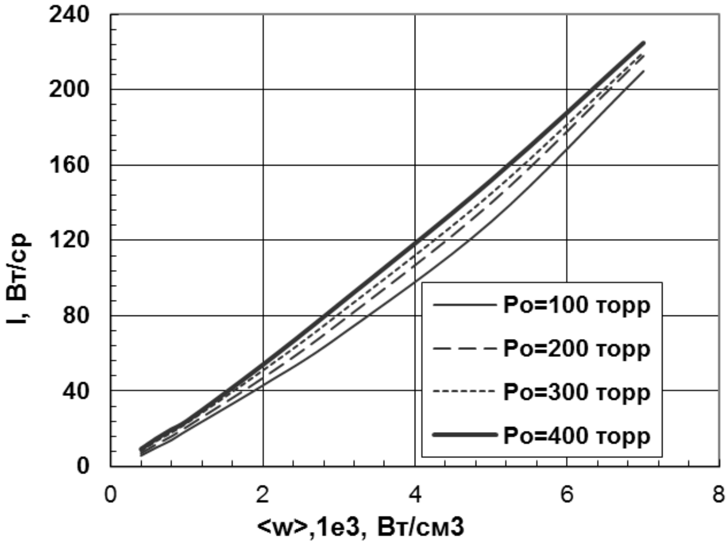



*Рис. 3. Зависимость пиковой силы излучения ксенонового разряда в УФ области от удельной электрической мощности и начального давления наполнения*

### Заключение

В работе выполнены численные эксперименты по исследованию спектральных характеристик и пиковой силы излучения импульсных разрядов в криптоне и ксеноне. В ходе экспериментов варьировались давление в разряде, диаметр разрядного канала, удельная электрическая мощность и средняя электрическая мощность, вводимые в разряд, частота следования импульсов.

Показано, что разряды в ксеноне и криптоне с диаметрами канала 5 и 7 мм и давлениями наполнения 100–400 мм рт. ст. в диапазоне средних электрических мощностей 100–300 Вт обеспечивают пиковую силу излучения в УФ-области выше 25 Вт/ср при частотах 10–50 Гц (25 Вт/ср) с большим запасом, а при частоте 1кГц – только при средней мощности около 290–300 Вт и выше.

Установлено, что пиковая сила излучения в УФ-области с ростом удельной электрической мощности w все меньше зависит от давления наполнения, и, если при малых w пиковая сила излучения растет с ростом давления, то при больших w данная зависимость сменяется на обратную.

**Литература**

1. Ультрафиолетовое излучение импульсно–периодических разрядов высокого давления в ксеноне / Градов В. М., Желаев И. А., Коробков С. С. и др. // Математика и математическое моделирование. 2017. – № 06. – С. 54–69

2. *Градов В. М., Щербаков А. А.* Расчет излучательных характеристик дуговых криптоновых и ксеноновых разрядов // Оптика и спектроскопия. – 1979. –Т. 47, № 4. – С. 635–642.

3. *Градов В. М.* Разработка методов расчета и исследования радиационных процессов в системах с разрядными источниками селективного излучения: Автореф. дис…. д-ра техн. наук. – М. : 2002. – 32 с.

УДК 004.891

# ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В БАЙЕСОВСКИХ СЕТЯХ ДОВЕРИЯ

**Ю. Е. Гагарин[1], У. В. Никитенко[1], М. А. Степович[2]**

*[1]Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана,*
*[2]Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского*

**Аннотация.** Рассмотрено интервальное оценивания условных вероятностей в байесовских сетях доверия при учете неопределенности исходных данных. Для учета ошибок в значениях функций и аргументов предлагается использовать методы конфлюэнтного анализа. Предполагается, что условные плотности вероятностей соответствуют нормальному закону распределения. Приведены формулы интервального оценивания условных плотностей вероятностей с учетом погрешностей их параметров. Показаны результаты математического моделирования получения точечных и интервальных оценок условных и апостериорных вероятностей байесовской сети доверия.
**Ключевые слова:** интервальное оценивание, байесовская сеть доверия, условная вероятность, нормальный закон распределения, погрешности исходных данных, конфлюэнтный анализ.

В байесовских сетях доверия вершинами являются события, описываемые случайными величинами. Случайные величины могут иметь несколько состояний и определяется априорными вероятностями. При этом вершины графа связаны условными вероятностями.

Пусть для набора событий, соответствующих вершинам графа – $A_j$, $j=\overline{1,M}$, определены априорные вероятности $P\left(A_j\right)$ и в результате эксперимента получено событие $X$, для которого определены условные вероятности $P\left(X\middle|A_j\right)$. По формуле Байеса определяются апостериорные вероятности:

$$P\left(A_j\middle|X\right)=\frac{P\left(X\middle|A_j\right)P\left(A_j\right)}{\sum\limits_{j=1}^{M}P\left(X\middle|A_j\right)P\left(A_j\right)}.$$

Значения $P\left(X\middle|A_j\right)$ получены из условных плотностей вероятностей $p\left(x\middle|A_j\right)$, параметрический вид которых известен. Рассмотрим случай, когда условная плотность вероятностей $p\left(x\middle|A\right)$ соответствует нормальному закону распределения с параметрами $\left(\mu,\sigma\right)$. Обозначим $f(x,\mu,\sigma)=p\left(x\middle|A\right)$.

Оценки параметров $\left(\mu,\sigma\right)$ определяются исходя из экспериментальных значений, содержащих случайные ошибки. Процесс получения несмещенных оценок параметров функциональных зависимостей с учетом погрешностей в значениях функций и аргументов рассмотрен в [1, 2]. Методами конфлюэнтного анализа несмещенные оценки параметров определяются из системы нелинейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i-f(x_i,\mu,\sigma)}{\sigma^2(y)}f(x_i,\mu,\sigma)\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}\right)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i-f(x_i,\mu,\sigma)}{\sigma^2(y)}f(x_i,\mu,\sigma)\left(\frac{\left(x_i-\mu\right)-\sigma^2}{\sigma^3}\right)=0.$$

Значения оценок параметров $\left(\mu,\sigma\right)$ в каждом конкретном эксперименте могут отличаться от значений параметров $\left(\mu,\sigma\right)$ и, следовательно, остается еще известная доля неопределенности [3]. Величину этой неопределенности можно найти из дисперсий параметров $\left(D\left(\mu\right),D\left(\sigma\right)\right)$.

Функциональные зависимости $f(x,\mu,\sigma)$ имеют некоторую неопределенность $f(x,\mu,\sigma) \pm \Delta f(x,\mu,\sigma)$. Зная точечные оценки параметров $(\mu,\sigma)$ и их дисперсии $\left(D(\mu), D(\sigma)\right)$ можно определить интервальные оценки функций $f(x,\mu,\sigma)$:

$$P\left( f(x,\mu,\sigma) - t_\gamma \sqrt{D\left(f(x,\mu,\sigma)\right)} \le f(x,\mu,\sigma) \le f(x,\mu,\sigma) + t_\gamma \sqrt{D\left(f(x,\mu,\sigma)\right)} \right) = \gamma ,$$

где $\gamma$ – доверительная вероятность, $t_\gamma$ – квантиль распределения Стьюдента, $D\left(f(x,\mu,\sigma)\right)$ – дисперсия значения функции $f(x,\mu,\sigma)$, которая в случае некоррелированности параметров $(\mu,\sigma)$ может быть вычислена по формуле:

$$D\left(f(x,\mu,\sigma)\right) = f^2(x,\mu,\sigma)\left[\frac{x-\mu}{\sigma^2}D(\mu) + \frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sigma^3}D(\sigma)\right].$$

С определенной доверительной вероятностью $\gamma$, можно получить интервальные оценки функций $f(x,\mu,\sigma)$ и для значения $X$ найти интервальные оценки условных вероятностей $P_H\left(X\middle|A_j\right) \le P\left(X\middle|A_j\right) \le P_B\left(X\middle|A_j\right)$. Апостериорные вероятности также будут иметь некоторую неопределенность и изменяться в некоторых пределах:

$$P_H\left(A_j\middle|X\right) \le P\left(A_j\middle|X\right) \le P_B\left(A_j\middle|X\right).$$

$$P\left(A_j\middle|X\right) \pm \Delta P\left(A_j\middle|X\right) = \frac{P\left(X\middle|A_j\right) \pm \Delta P\left(X\middle|A_j\right)P\left(A_j\right)}{\sum\limits_{j=1}^{M} P\left(X\middle|A_j\right) \pm \Delta P\left(X\middle|A_j\right)P\left(A_j\right)}.$$

Определим интервальные оценки условных вероятностей байесовской сети доверия, имеющей два возможных состояния $A_1$ и $A_2$, для которых априорные вероятности равны $P(A_1) = P(A_2) = 0,5$. В таблице 1 приведены значения оценок параметров условных плотностей вероятностей $p\left(x\middle|A_j\right)$, полученных методами конфлюэнтного анализа [4].

Таблица 1

*Значения оценок параметров*

| | $\mu_1$ | $\sigma_1$ | $\mu_2$ | $\sigma_2$ |
|---|---|---|---|---|
| Методы конфлюэнтного анализа | $406 \pm 26$ | $104 \pm 4,5$ | $585 \pm 32$ | $79 \pm 2,9$ |

По оценкам параметров с вероятностью 0,95 были получены интервальные оценки условных плотностей вероятностей $p\left(x\middle|A_j\right)$. Для значения $X = 450$ рассчитаны условные вероятности: $P\left(X\middle|A_1\right) = 0,035$ и $P\left(X\middle|A_2\right) = 0,0012$. Кроме точечных оценок, для $X = 450$ получены интервальные оценки условных вероятностей:

$$0,031 \le P\left(X\middle|A_1\right) \le 0,036,$$

$$0,0006 \le P\left(X\middle|A_2\right) \le 0,0021.$$

При $X = 450$, получим следующие значения апостериорных вероятностей: $P\left(A_1\middle|X\right) = 0,75$ и $P\left(A_2\middle|X\right) = 0,25$.

С учетом интервальных оценок условных вероятностей $P\left(X\middle|A_j\right)$ определим интервальные оценки апостериорных вероятностей:

$$0,74 \le P\left(A_1\middle|X\right) \le 0,78,$$

$$0,23 \le P\left(A_2\middle|X\right) \le 0,27.$$

Предлагаемый подход позволяет с учетом погрешностей исходных данных, получить точечные и интервальные оценки условных и апостериорных вероятностей и тем самым повысить достоверность принятия решения в байесовских сетях доверия.

**Благодарности**

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

**Литература**

1. *Гагарин Ю. Е., Никитенко У. В., Степович М. А.* Учет неопределенности информации при оценивании риска в байесовских сетях доверия // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: труды Международной научной конференции. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2019. С. 732–735.

2. *Гагарин Ю. Е., Никитенко У. В., Степович М. А.* Использование конлюентного анализа для интервального оценивания функции Гаусса // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. – Саратов: ООО Изд-во Научная книга, 2020. С. 105–107.

3. *Гагарин Ю. Е., Гагарина С. Н.* Интервальное оценивание объемов потребления ресурсов при стохастических исходных данных // Вестник университета. – М. : ГУУ, 2018. – № 12. – С. 64–70.

4. *Gagarin Y. E., Nikitenko U. V., Stepovich M. A.* Considering information uncertainty when assessing risk in bayesian belief network // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. – 2020. – С. 012054.

УДК 539.4

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ГРУНТОВЫХ СООРУЖЕНИЯХ ТИПА ПЛОТИНЫ

**С. М. Гайназаров, А. М. Полатов, А. М. Икрамов, С. И. Пулатов**

*Национальный университет Узбекистана*

**Аннотация.** В данной статье рассматривается компьютерное моделирование процессов в грунтовых сооружениях типа плотины с учетом нелинейных свойств грунта. Большие вертикальные и плановые перемещения грунта в теле плотины формируются вследствие изменения плотности грунта либо в результате развития пластических деформаций сдвига. В работе исследуется применение гипотез Мизеса – Боткина и Кулона на развитие пластических деформаций.

**Ключевые слова:** грунтовые плотины, плотность грунта, пластические деформации сдвига, устойчивость откосов, водопроницаемость, сжимаемость.

Расширение строительства подземных и наземных сооружений, а также освоение грунтового пространства в сейсмоактивных районах, а также на территориях, где развиты оросительные системы и велика опасность наводнений, обуславливает получение достоверного прогноза о фактическом состоянии дамб, плотин, подземных и наземных сооружений, насыпи автомобильных и железных дорог, посадочные площадки самолетов в чрезвычайных ситуациях и (или) при длительной эксплуатации.

В работах [1, 2] на основе комплексных георадарных и сейсмотомографических исследований разработана геомеханическая модель ограждающего насыпного гидротехнического сооружения-плотины. Модель исследована в упругопластической постановке методами компьютерного моделирования, в результате чего установлены закономерности деформирования и смещения тела сооружения, а также формирование кривой депрессии в теле в зависимости от свойств слагающих его грунтов и уровня внешней водной нагрузки. Полученные данные представляют собой основу для обоснования мероприятий по снижению рисков локальных разрушений ограждающих дамб.

Накопленный опыт эксплуатации грунтовых плотин [3] показывает, что их аварии, а также состояния, недопустимые с точки зрения нормальной эксплуатации, могут наступать в результате развития следующих процессов:

- большие вертикальные и плановые перемещения грунта в теле плотины вследствие изменения плотности грунта либо в результате развития пластических деформаций сдвига. Остаточные перемещения грунта могут вызвать появление на откосах и гребне плотины системы трещин, параллельных оси плотины с раскрытием до нескольких десятков сантиметров, глубиной до нескольких метров, а также оперяющих трещин, направленных под углом к оси плотины и особенно опасных с точки зрения повреждений противофильтрационного элемента;
- нарушение монолитности противофильтрационного элемента, а также его контакт с основанием, бортами каньона и водопропускными сооружениями;
- размыв плотины переливающимся через гребень потоком из-за нарушения работы водопропускных сооружений при наводнении и землетрясении, из-за резкого понижения отметки гребня в результате осадок тела плотины или потери устойчивости ее откосов, образования волны в руслах рек и каналов, а также водохранилищ вследствие обрушения больших масс грунта береговых склонов.

Анализ аварий и повреждений плотин показывает [4], что характер нарушений напорного фронта сооружения может быть различным. Возможно резкое, непосредственно связанное с воздействием понижения гребня плотины либо вследствие осадки грунта, либо вследствие потери устойчивости и обрушения откоса по кривой скольжения, захватывающей гребень плотины.

Выявление причин возникновения перечисленных выше факторов обуславливает необходимость глубокого анализа реальных свойств грунтов, которые обусловлены сжимаемостью, водопроницаемостью, контактной сопротивляемостью сдвигу и структурно-фазовой деформированностью, и определяющих соотношений между компонентами тензоров напряжений и деформаций. Устанавливаемые экспериментально определяющие соотношения в [3–5, 9] названы моделями грунтов и они непосредственно зависят от характера и скорости приложения внешних сил и физико-химического состава самого грунта, т.е. невозможно описать их единым законом связи между напряжениями и деформациями. Поэтому в механике грунтов в качестве характеристик выделены 4 вида закономерностей, доминирующих в практических приложениях:

1) сжимаемость, при расчете осадок фундаментов;

2) водопроницаемость в процессе прогнозирования скорости осадок водонасыщенных грунтовых оснований;

3) контактная сопротивляемость – при определении предельной прочности, устойчивости и давления на ограждения;

4) структурно-фазовая деформируемость – в процессе определения напряжений и деформаций грунтов, а при расчете уникальных сооружений следует решать их совместно с учетом взаимовлияния всех характерных свойств грунтов.

Для некоторых практических важных классов задач статики целесообразно решать совместно уравнения групп (3) и (4)

$$\sigma_u = \Phi(e_u, e_{cp}, \sigma_{cp}) \tag{1}$$

и

$$\sigma_{cp} = \Psi(e_u, e_{cp}, \sigma_u) \tag{2}$$

соответственно, которые получаются из приведенных в работах [6–7] соотношений при $\dot{e}_u = \dot{\sigma}_u = \dot{e}_{cp} = \dot{\sigma}_{cp} = 0$. Конкретный вид функции $\Phi$ и $\Psi$ непосредственно зависит от реальных свойств грунтов [4, 5].

При однократном нагружении связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций можно записать в виде:

$$\sigma_{ij} = \left(\sigma_{cp} - \frac{2\sigma_u}{3e_u} e_{cp}\right)\delta_{ij} + \frac{2\sigma_u}{3e_u} e_{ij} \tag{3}$$

где

$\sigma_{ij}$ и $e_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций;

$\sigma_u$ и $e_u$ – интенсивности напряжений и деформаций;

$\sigma_{cp}$ и $e_{cp}$ – средние напряжения и деформации;

$\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$;

связь между деформациями и перемещениями принимаются в следующем виде

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \qquad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Уравнения равновесия

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0 \tag{5}$$

решаются совместно с соотношениями (1)–(4), при граничных условиях:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\delta u_i \Big|_{s_1} = 0, \tag{6}$$

и условиями закрепления на части поверхности:

$$u_i\Big|_{S_2}=0$$

где $\sigma_{ij}^*$ – заданные значения $\sigma_{ij}$, $\delta$ – знак вариации.

В процессе решения задач равновесия грунтовых сооружения при определении функции $\Phi$ апробированы модели Мизеса – Боткина [5]:

$$\tau_u = G\gamma_u - tg\psi\ \sigma_{cp}, \tag{7}$$

а при определении функции $\Psi$ – Кулона-Мора:

$$\tau_u = \tilde{n} - tg\varphi\ \sigma_{cp} \tag{8}$$

где

$\tau_u$ и $\gamma_u$ – интенсивности касательных напряжений и угловых деформаций,

$c$ – коэффициент сцепления,

$G$ – модуль сдвига, $\varphi$ и $\psi$ – углы внутреннего трения, соответственно, на площадке скольжения и на октаэдрической площадке.

В задачах предельного состояния вместо (7) и (8) используются соотношения:

$$\tau_u = \tau_s - tg\psi_s\ \sigma_{cp} \tag{9}$$

и

$$\tau_u = c - tg\varphi_s\ \sigma_{cp} \tag{10}$$

где

$\tau_s = G\gamma_s$, $\gamma_s$ – деформация текучести при сдвиге,

$\varphi_s$ и $\psi_s$ – предельные значения $\varphi$ и $\psi$,

Одним из центральных вопросов расчета грунтовых плотин с учетом пластической деформации является выбор определяющих уравнений грунта характеризующих связь между напряжениями и деформациями [10]:

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}=K(g_1e_{11}+g_2e_{22}+g_3e_{33});\ \sigma_{22}=K(g_2e_{11}+g_1e_{22}+g_3e_{33});\ \sigma_{33}=K(g_2e_{11}+g_2e_{22}+g_1e_{33});\\&\sigma_{12}=Kg_3e_{12};\ \sigma_{13}=Kg_3e_{13};\ \sigma_{23}=Kg_3e_{23};\end{aligned} \tag{11}$$

где

$K = E/(3(1-2\mu))$ – модуль объемного сжатия;

$g_1=\theta+2\beta/3; g_2=\theta-\beta/3; g_3=\beta/2;$

$\theta=1$ – в случае $\sigma_{cp}=3Ke_{cp}$; $\theta = f_m + h_m/e_{cp}$; $(m=\overline{1,m_0})$ – в случае $\sigma_{cp}=3\tilde{\Phi}(e_{cp})$,

где $\Phi$ заменяется сплайнами $\tilde{\Phi}=f_m e_{cp}+h_m$;

в случае учета дилатансии $e_{cp,cd}$: $\theta=(1\mp e_{cp,cd}/e_{cp})f_m + h_m/e_{cp}$; величина $e_{cp,cd}$ определяется из соотношения $e_{cp,cd}=\sigma_u/(\delta_1-(3/\sqrt{2})\delta_2\sigma_{cp})$, где $\delta_1=3Ge_u$, $\delta_2=tg\psi$ для модели Мизеса –Боткина; $\delta_1=c$, $\delta_2=tg\varphi$ – для Кулона – Мора.

Коэффициент $\beta$ в модели Мизеса Боткина определяется в виде $\beta=3(1-2\mu)/(1+\mu)-\sqrt{2}tg\psi\theta(e_{cp}/e_u)$, а в случае Кулона Мора $\beta=\sqrt{2}(c/(Ke_u)-tg\varphi\theta(e_{cp}/e_u)$.

Учитывая сложность геометрической формы рассматриваемых грунтовых сооружений, к решению задачи (5)–(6) с учетом соотношений (7)–(11), применяется метод конечных элементов (МКЭ) [8]. В работах [6–7] рассмотрены нелинейные нестационарные задачи пространственных конструкций сложной компоновки методом конечных разностей с учетом влияния скоростей интенсивностей напряжений и деформаций, а также средних напряжений и деформаций.

В приведенных ниже тестовых примерах изучен характер перераспределения напря-женно-деформированного состояния грунтовой плотины Туполанг (Узбекистан) (высота плотины $h=180$ м; длина и ширина плотины на основании 712 м и 380 м; ширина гребня $b=16$ м, ширина на основании створа $L_0=250$ м, верхний и нижний откосы приняты в соотношениях

1.0:2.0 и 1.0:1.9; ядро – суглинок; упорные призмы – галечник; $\sigma_{cp} = 5$ кг/см²; $E = 9798$ кг/см²; $\mu = 0.3633$; $c = 0.3$ кг/см², $\gamma_s = 2.2$ кг/см³ [10]) в зависимости от использованных моделей: Мизеса – Боткина, т. е. при $\theta = 1$ и $\theta = f_m + h_m / e_{cp}$ и варианта модели Кулона – Мора, т. е. при $\theta = 1$.

На рис. 1 и 2 приведены графики значений интенсивности напряжений по Мизесу без и с учетом нелинейности (порядок системы уравнений $n = 7488$ в случае использования квадратичных изопараметрических шестигранных конечных элементов). Учет влияния нелинейности связи между $\sigma_{cp}$ и $e_{cp}$ увеличивает значения интенсивности напряжений на 37.4 %.

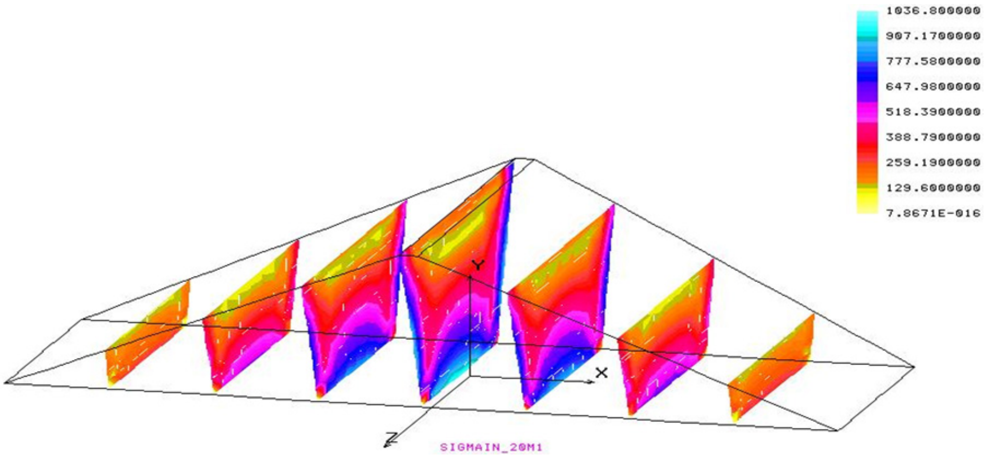



*Рис 1. График интенсивности напряжений по Мизесу*

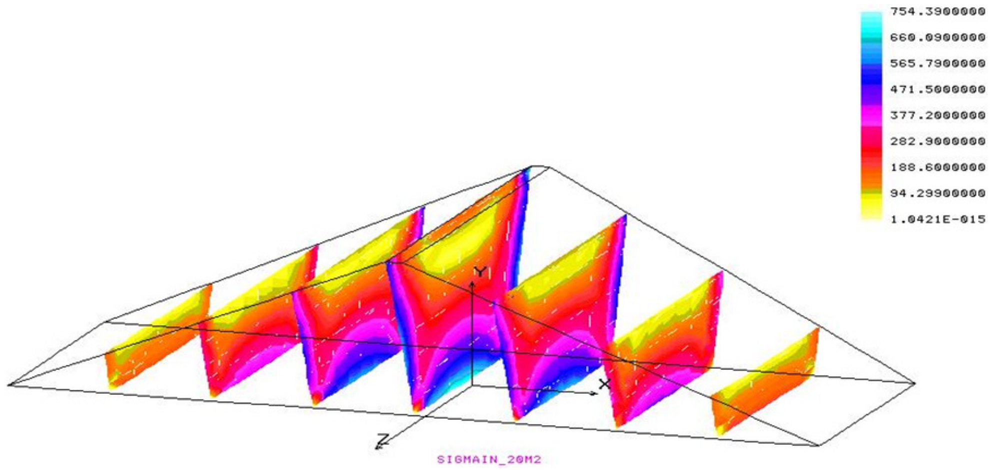



*Рис 2. График интенсивности напряжений по Мизесу с учетом нелинейности*

Результаты, полученные по моделям Мизеса – Боткина и Кулона – Мора (рис. 3 и 4) при $\theta = 1$, отличаются значительно, так как в модели Кулона – Мора использованы параметры, соответствующие предельным значениям грунта. На рис. 4 приведены значения $\sigma_{cp}$. Установлен характер сходимости МКЭ в зависимости от формы элементов (пирамида с 4 и 10 узлами, изопараметрический шестигранник с 8 и 20 узлами) и неявной схемы итерационного процесса. При использовании элементов в форме пирамиды (4 узла, $n$=1998) и шестигранника (8 узлов, $n$=1400) разница максимальных значений $\sigma_u$ в случае модели Мизеса – Боткина ($\theta = 1$) составляет 3,7 %.

В случае модели Мизеса – Боткина за три итерации достигается точность $\varepsilon_{otn} = 0.01$, а в случае модели Кулона – Мора для достижения этой точности необходимо в 3–4 раза больше итераций. Причина связана с тем, что модели Кулона – Мора используются предельные значения грунта.

Таким образом, в статье рассматривается компьютерное моделирование процессов в грунтовых сооружениях типа плотины с учетом нелинейных свойств грунта по моделям Мизеса –

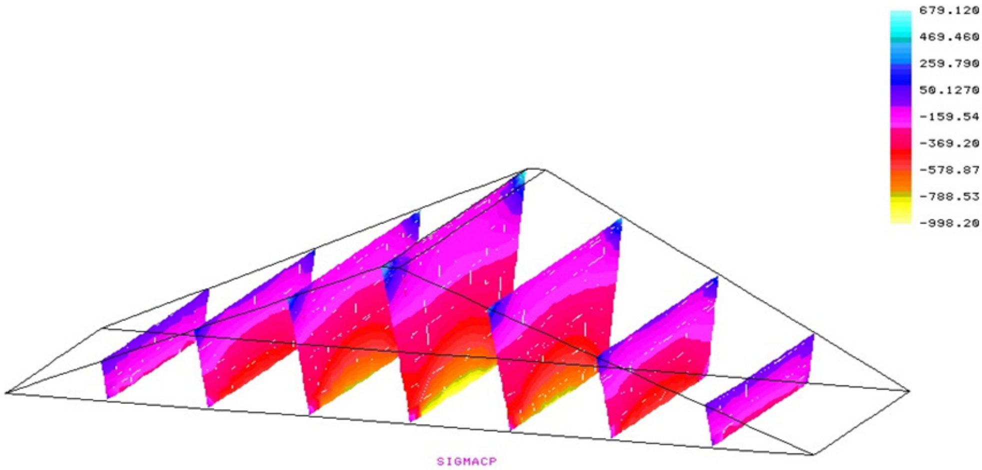



*Рис. 3 График среднего напряжения по модели Мизеса – Боткина*

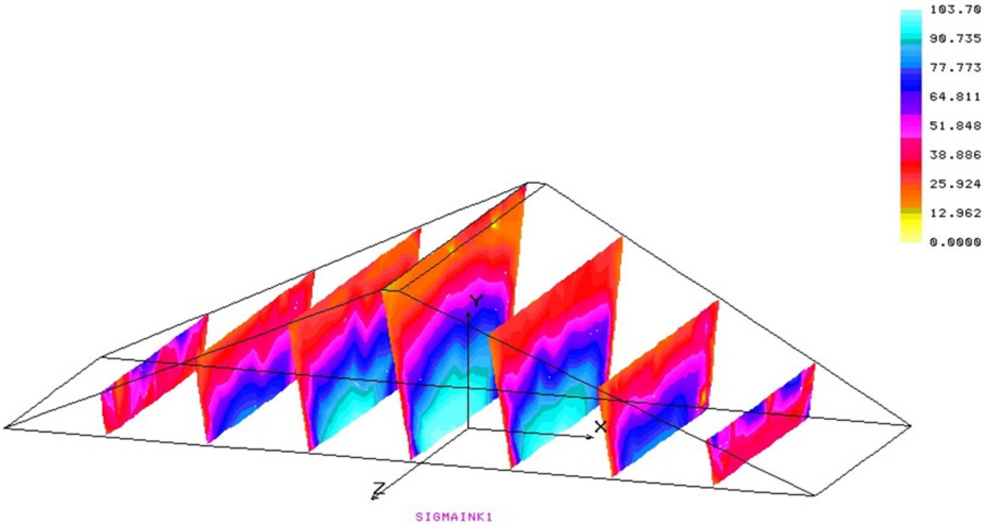



*Рис 4. Графики среднего напряжения по модели Кулона – Мора*

Боткина и Кулона – Мора. На основе разработанного программного обеспечения, посредством приведения вычислительного эксперимента, изучен характер перераспределения напряженно-деформированного состояния грунтовой плотины Туполанг (Узбекистан). Установлено, что учет влияния нелинейности связи между $\sigma_{cp}$ и $e_{cp}$ увеличивает значения интенсивности напряжений на 37.4 %.

**Литература**

1. *Калашник Н. А.* Компьютерное моделирование насыпной земляной плотины как прототипа ограждающей дамбы хвостохранилища // НАУКИ О ЗЕМЛЕ. – Выпуск Сентябрь 2012. – 54–55 с.

2. *Калашник А. И., Калашник Н. А.* Исследования ограждающего насыпного гидротехнического сооружения как прототипа дамбы хвостохранилища горно-обогатительного предприятия // Вестник Кольского научного центра РАН. – 2013. – № 1 (12). – С. 27–30.

3. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений. Под ред. Лихтера В. М., Яковлева К. С. –М. : Энергия, 1976. –391 с.

4. *Лихтер В. М., Ивашенко И. Н.* Сейсмостойкость грунтовых плотин. – М. : Наука, 1986. – 280 с.

5. *Вялов С. С.* Реологические основы механики грунтов. – М. : Высшая школа, 1978. – 447 с.

6. *Буриев Т.* Разработка математических моделей и алгоритмов расчета на сейсмостойкость пространственных конструкций сложной компоновки с учетом монолитности стыковых соединений, податливости стыков и взаимодействия окружающей средой // Материалы II Международной конференции «Проблемы и перспективы автоматизации производства и управления» 7–9 октября 1999 г. Ташкент, 1999. – Т. 1. – С. 72–78.

7. *Буриев Т.* О моделях распространения упругопластических и температурных деформации в несущих элементах пространственных конструкции сложной компоновки // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – 2001. – Выпуск 109. – С. 53–67.

8. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

9. *Цытович Н. А.* Механика грунтов. – М. : Высшая школа, 1973. – 280 с.

10. *Буриев Т., Гайназаров С. М.* Численное исследование адекватности математических моделей деформирования материалов грунтовых плотин и характера сходимости конечных элементов // Проблемы информатики и энергетики. – 2006. – № 2–3. – С. 3–10.

УДК 519.63, 519.7

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИСЛОТНОЙ ОБРАБОТКИ УПРУГОГО ГРУНТА

**О. В. Гальцев**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет*

**Аннотация.** Работа посвящена рассмотрению начально-краевой задачи, описывающей процесс очистки призабойной зоны нефтяной скважины раствором кислоты. Предполагается, что каркас грунта представляет собой упругое твердое тело, а поровое пространство имеет двойную пористость. Физический процесс описывается на микроскопическом уровне уравнениями Стокса для жидкой компоненты, уравнением диффузии-конвекции для концентраций кислоты и продуктов химической реакции и уравнениями Ламе для твердого каркаса. Из-за растворения грунта поровое пространство имеет неизвестную (свободную) границу. Для компьютерного моделирования используются решеточный метод Больцмана (LBM), метод погруженных границ (IBM) и метод конечных элементов (FEM). Представлена дискретизация систем уравнений и результаты их численного решения.

**Ключевые слова:** кислотная обработка, упругий грунт, диффузия-конвекция, задача со свободной границей.

В настоящее время кислотная обработка грунта применяется в такой экономически важной отрасли, как нефтедобыча для повышения фильтрационных характеристик призабойной зоны пласта нефтяной скважины и уменьшения скин-фактора с целью увеличения производительности добывающих и приемистости нагнетательных скважин [1]. Наиболее часто используется способ растворения пород смесями на основе соляной кислоты [2], который, в свою очередь, с определенными условиями может применяться при кислотном гидравлическом разрыве пласта. В результате образуется сеть микроканалов, позволяющая поддерживать запланированный уровень добычи нефти продолжительное время [3].

Не смотря на большой опыт применения упомянутой технологии и преимущества, которыми она обладает, можно уверенно говорить, что в некоторых случаях процесс распространения кислотных составов непредсказуем [4]. Даже при, казалось бы, тщательном составлении дизайна выщелачивания. Объяснение этому могут дать анализы кернов, указывающие на неоднородность геологичесих свойств (пористость, проницаемость) даже внутри одного месторождения. Недостаточный учет неоднородности на стадии планирования может привести к тому, что закачиваемый в грунт кислотный раствор оказывается далеко от предполагаемого места. Помимо этого сильное влияние оказывают такие факторы, как концентрация подаваемой кислоты, режим нагнетания и др. Поэтому снова и снова приходится предлагать новые модели и уточнять старые.

Для описания процесса растворения грунта существует довольно широкий спектр математических моделей, описывающих рассматриваемый физический процесс на макроскопическом уровне. В макроскопических моделях характерными размерами рассматриваемой области являются метры или десятки метров. В силу этого указанные модели не различают структуру пор (микроструктуру), поскольку в них присутствует как матрица грунта, таких и жидкость в порах этого грунта. Все такие модели строятся по одному принципу. Динамика жидкости, как правило, управляется системой уравнений фильтрации Дарси или какой-нибудь ее модификацией [5]. Уравнения, описывающие миграцию кислоты и продуктов химических реакций постулируются и являются так называемыми уравнениями конвекции-диффузии-реакции. Главным в этих постулатах является вид коэффициентов уравнений, которые и вызывают такое разнообразие описаний от автора к автору.

Формулировка задачи на микроскопическом уровне используется, в основном, при численном моделировании физического процесса с целью выяснить, какие параметры потока влияют на проницаемость и пористость среды.

Почти всегда за основу выбирается уравнение Навье – Стокса для несжимаемой жидкости и уравнение конвекции-диффузии [6]. Затем с помощью различных граничных и начальных условий выясняется зависимость скорости протекания реакции от чисел Пекле и Дамкелера.

Окончательного способа связать изменения свойств среды с изменениями структуры при растворении не существует. Все авторы используют полуэмпирические соотношения, которые служат для связи с локальной пористостью, что в своих работах и подтверждают сами исследователи (см., например, [7]) при описании физического процесса в масштабе пор.

В предлагаемом исследовании рассматривается намного более сложная задача кислотной обработки (выщелачивания) непериодического упругого твердого каркаса грунта с двойной пористостью, где за малый безразмерный параметр принимается величина $\varepsilon = l/L,$ равная отношению характерного размера пор $l$ и характерного размера рассматриваемой физической области $L.$ В отличии от существующих постановок [8–10], наряду с порами размером $\varepsilon$ рассматриваются трещины $\delta = \varepsilon^{\nu},\ \ 0 < \nu < 1.$ Ограничимся случаем слабо-вязкой жидкости [13] в упругом каркасе грунта (**модель Био**).

На микроскопическом уровне поры моделируются системой цилиндрических каналов радиуса $\varepsilon r_p(\mathbf{x},t),\ \ 0 < r_p < 1/2,$ оси которых параллельны осям координат, находящихся на расстоянии $\varepsilon$ друг от друга. Трещины моделируются шарами радиуса $\delta r_c(\mathbf{x},t),\ \ 0 < r_c < 1/2,$ находящихся на расстоянии $\delta$ друг от друга.

Вывод макроскопических математических моделей должен основываться на как можно более точной математической модели физического процесса на микроскопическом уровне, описываемой законами классической механики сплошных сред. В данной работе это уравнения Стокса для скорости $\mathbf{v}^{\varepsilon}$ и давления $p^{\varepsilon}$ вязкой несжимаемой жидкости в области $\Omega_f^{\varepsilon}(t)$ с безразмерной вязкостью $\alpha_{\mu}$, уравнения Ламе для перемещения $\mathbf{w}^{\varepsilon}$ упругого твердого каркаса грунта $\Omega_s^{\varepsilon}(t)$, уравнение диффузии-конвекции для концентрации кислоты $c^{\varepsilon}$ и условия на сильном разрыве (искомой свободной границе) $\Gamma^{\varepsilon}(t)$ «каркас грунта – поровое пространство» [11].

Задача дополняется краевыми условиями на свободной границе, разделяющей поровое пространство и каркас грунта, вытекающими из законов сохранения классической механики в их интегральной форме, краевыми условиями на заданных границах, начальными условиями и дополнительным условием на свободной границе

$$D_N^{\varepsilon} = \alpha c^{\varepsilon},\ \ \alpha = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

вытекающим из законов теоретической химии [12] и позволяющим определить эту границу.

Здесь $D_N^{\varepsilon}$ – скорость границы $\Gamma^{\varepsilon}(t)$ в направлении единичной нормали $\mathbf{N}$ к границе $\Gamma^{\varepsilon}(t),$ $c^{\varepsilon}$ – концентрация кислоты в жидкости, $\alpha$ – заданная постоянная.

Структура порового пространства $\Omega_f^{\varepsilon}$ в микроскопической задаче $\mathbb{A}^{\varepsilon}$ задается характеристической функцией $\chi^*(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и определяется, в свою очередь, функциями $r_p^*(\mathbf{x},t) = r_p^*(\mathbf{x},0) + r^*(\mathbf{x},t)$ и $r_c^*(\mathbf{x},t) = r_c^*(\mathbf{x},0) + r^*(\mathbf{x},t)$, где функция $r^*(\mathbf{x},t)$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$.

Для фиксированного $r \in \mathfrak{M}$ рассматривается вспомогательная начально-краевая задача $\mathbb{A}^{\varepsilon}(r)$ с заданной границей раздела областей $\Omega_f^{\varepsilon}(t)$ и $\Omega_s^{\varepsilon}(t),$ которая определяется функцией $r(\mathbf{x},t),\ \ r \in \mathfrak{M}.$ Задача $\mathbb{A}^{\varepsilon}(r)$ является исходной задачей $\mathbb{A}^{\varepsilon}$ без дополнительного краевого условия (1). При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ поровое пространство $\Omega_f^{\varepsilon}$, в котором находится фильтрующаяся жидкость, представляет собою систему каналов параллельных осям координат переменного сечения радиуса $\varepsilon r_p(\mathbf{x},t)$ и шаров переменного радиуса $\delta r_p(\mathbf{x},t),$ зависящих от положения в пространстве и от времени.

Для получения дифференциальных уравнений макроскопической математической модели, усреднялась микроскопическая математическая модель, зависящая от малого параметра усреднения. Следуя известной схеме [13], в первую очередь исходная задача была записана в эквивалентной форме соответствующих интегральных тождеств так, чтобы условия на свободной границе вошли в интегральные тождества. При этом предполагалось, что все функции достаточно гладкие и возможно интегрирование по частям возникающих выражений.

Затем, в предположении о существовании обобщенного решения микроскопической математической модели с использованием метода двух-масштабной сходимости Габриэла Нгуетсенга [14] и обозначений, принятых в [15], была выведена макроскопическая математическая модель очистки призабойной зоны нефтяных скважин кислотной обработкой упругого пласта грунта с двойной пористостью (характерный размер метры). Внимание при этом уделяется и усреднению граничного условия на сильном разрыве, разделяющем поровое пространство и упругий твердый каркас грунта. Таким образом происходит полное согласование микроскопической и макроскопической моделей.

Для понимания, каким должно быть усреднение $\mathbb{H}(r)$ задачи $\mathbb{A}^{\varepsilon}(r)$, предварительно производится формальное усреднение этой задачи. Если $r^{*}(\mathbf{x},t)$ определяет структуру порового пространства в задаче $\mathbb{A}^{\varepsilon}$, то усреднение $\mathbb{H}(r^{*})$ задачи $\mathbb{A}^{\varepsilon}(r^{*})$ должно совпадать с усреднением $\mathbb{H}$ задачи $\mathbb{A}^{\varepsilon}$ без усреднения краевого условия (1). Усреднение условия (1) с заданной структурой порового пространства $r(\mathbf{x},t)$ формирует оператор задачи, единственная неподвижная точка которого $r^{*}(\mathbf{x},t)$ определяет требуемое единственное усреднение $\mathbb{H}$ задачи $\mathbb{A}^{\varepsilon}$.

В качестве основных численных методов решения поставленной задачи в масштабе пор и трещин использовались такие методы, как решеточный метод Больцмана(LBM), метод интерполяции сглаженных точек (S-PIM), метод погруженной границы (IBM) для отслеживания границы «жидкость-твердое тело» и метод конечных элементов (FEM) для решения уравнения Ламе в упругом твердом теле. Для повышения стабильности вычислений использовалась схема множественной релаксации по времени (MRT).

Использование LBM и FEM для жидкостно-структурного взаимодействия осуществлялось в шахматном порядке. Другими словами, LBM применялся к жидкой компоненте с использованием скорости, полученной на границе раздела с помощью FEM. Этот цикл продолжался, пока не следовало выполнение условия на границе контакта кислоты и упругого тела. К точкам свободной границы применялась схема обратного хода.

Чтобы сохранить непрерывность скоростей на границе «жидксть – упругое тело», локальное распределение частиц было дополнительно модифицировано. После этого следовал анализ методом конечных элементов.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект № 19-71-00105).

## Литература

1. *Ибрагимов, Л. Х.* Интенсификация добычи нефти / Л. Х. Ибрагимов, И. Т. Мищенко, Д. К. Челоянц; М.: Наука, 2000. – 414 с.

2. *Минлибаев, М. Р.* Конечно-разностное исследование кислотной обработки карбонатосодержащего нефтегазового пласта соляной кислотой / М. Р. Минлибаев, Р. Р. Исхаков // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело», 2012. – № 5. – С. 153–159.

3. *Бабалян, Г. А.* Разработка нефтяных месторождений с применением поверхностно-активных веществ / Г. А. Бабалян, Б. И. Леви, А. Б. Тумасян, Э. М. Халимов. – М. : Недра, 1983. – 216 с.

4. *Hung, K. M.* A Mechanistic Model of Wormhole Growth in Carbonate Matrix Acidizing and Acid Fracturing / K. M. Hung, A. D. Hill, K. Sepehrnoori // Journal of Petroleum Technology. – 1989. – No 41(1). – P. 59–66.

5. *Kalia, N.* Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates / N. Kalia, V. Balakotaiah // Chemical Engineering Science. – 2009. – V. 64. – P. 376–390.

6. *Varloteaux, C.* Reactive transport in porous media: Pore-network model approach compared to pore-scale model / C. Varloteaux, M. T. Vu, S. Bekri, P. M. Adler // Physical Review E. – 2013. – 87(2): 023010.

7. *Golfier, F.* A discussion on Darcy-scale modeling of porous media dissolution in homogeneous and heterogeneous systems / F. Golfier, B. Bazin, D. Lasseux, R. Lenormand, M. Quintard // Developments in Water Science. – 2002. – P. 615–622.

8. *Мейрманов, А. М.* Несколько задач со свободной границей, возникающих в механике горных пород / А. М. Мейрманов, О. В. Гальцев, О. А. Гальцева // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2018. – Т.64, № 1. – С. 98–130.

9. *Гальцев, О. В.* Математическое моделирование процесса подземного выщелачивания на макроскопическом уровне / О. В. Гальцев, О. А. Гальцева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2018. – Т.50, № 4. – С. 478–486.

10. *Гальцев, О. В.* Двумерная задача подземного выщелачивания / О. В. Гальцев, О. А. Гальцева // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2019. – Т. 7, № 1(44). – С. 100–104.

11. *Овсянников, Л. В.* Введение в механику сплошных сред. Части I и II / Л. В. Овсянников. – Новосибирск : Новосибирский Государственный Университет, 1977.

12. *O'Dea, R. D.* A multiscale analysis of nutrient transport and biological tissue growth in vitro / R. D. O'Dea // Mathematical Medicine and Biology. – 2015. – P. 1–23.

13. *Meirmanov, A.* Mathematical models for poroelastic flow / A. Meirmanov. – Paris : Atlantis Press, 2014. – 239 p.

14. *Nguetseng, G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization / G. Nguetseng // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1989. – V. 20, I. 3. – P. 608–623.

15. *Ладыженская, О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М. : Наука, 1967. – 736 с.

УДК 004.89:75.02

# АНАЛИЗ ЦВЕТОВОЙ ГАММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВИНСЕНТА ВАН ГОГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

**А. М. Гельдыева, И. В. Замятин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья посвящена вопросам применения современных технологий анализа данных в задачах искусствоведческого анализа. Рассмотрена задача проверки истинности гипотезы об особенностях цветовой палитры в произведениях художника Винсента Ван Гога. Предложен подход к решению подобных задач средствами машинного обучения. Описан программный конвейер обработки оцифрованных изображений для формирования исходной выборки. Сформулированы два вида задач машинного обучения для проверки рассматриваемой гипотезы. Приведены результаты построения моделей. Описаны возможные применения предлагаемого подхода.

**Ключевые слова:** машинное обучение, кластерный анализ, живопись, Винсент Ван Гог, цветовая палитра, Python, OpenCV.

## Введение

Винсент Ван Гог — один из величайших художников-постимпрессионистов. От многих других художников его картины отличают яркие, насыщенные цвета и особенный контраст цветовой гаммы [4]. Эта отличительная черта его произведений, а также особая техника письма является неповторимым стилем художника. Многие искусствоведы соглашаются с гипотезой об отличительных чертах в палитре картин Винсента Ван Гога [5]. В них чаще всего встречаются пять цветов — жёлтый, красный, зелёный, чёрный и синий. При этом большую часть работ характеризует преобладание какого-либо одного или двух цветов. Например, на рис. 1 приведены его картины, в которых преобладает зеленый цвет:

*Рис. 1. Картины Ван Гога с преобладанием зелёного цвета*

Предположение искусствоведов заключается в том, что преобладание определенных цветов в работах Винсента Ван Гога связано с определенными периодами его творчества, а также с его психоэмоциональным состоянием. Например, в начале творчества художник использует черты старой голландской традиции. Его картины этого периода отличаются более тёмной цветовой гаммой, преобладанием черного и темно-коричневого цветов. После переезда художника в Париж в 1886 году, под влиянием импрессионистов, палитра его художественных картин заметно меняется — цвета становятся светлее. В последние пять лет своей жизни Ван Гог пишет огромное количество картин и полностью отдаёт себя творчеству. В эти годы ухудшается здоровье художника, как психическое, так и физическое. Многие считают, что именно в эти годы в его картинах появляется насыщенный синий цвет.

Данные гипотезы по сути представляют собой индивидуальные, а потому — *субъективные* мнения различных специалистов в области изобразительного искусства. Несмотря на определенный консенсус касательно вышеуказанных особенностей творчества конкретно Винсента Ван Гога, нельзя назвать такие гипотезы доказуемыми. Безусловно, это является следствием того, что искусствоведение само по себе не может считаться «строгой» наукой в смысле применения инструментов формальной логики и математического аппарата. Однако возможность применения таких инструментов нам представляется достаточно важной, особенно учитывая интерес, проявляемый к произведениям искусства, в том числе с точки зрения их ценности и использования их в качестве объектов инвестирования.

В настоящей статье приведены основные результаты исследования, в ходе которого была предпринята попытка проверки вышеупомянутых искусствоведческих гипотез с помощью моделей машинного обучения. Основной задачей исследования было построение моделей, позволяющих классифицировать изображения на основе определения схожих сочетаний преобладающих цветов. Данные модели были использованы для проверки гипотезы о зависимости цветовой гаммы от творческого периода Винсента Ван Гога.

## 1. Подготовка исходных данных

Так как речь идет об анализе особенностей цветовой палитры художественных произведений, логично принять в качестве объектов, составляющих исходную выборку, отдельные картины художника. Для целей исследования были использованы оцифрованные изображения картин Винсента Ван Гога. Для большей однородности данных все картины были взяты из одного источника http://vangogh-vincent.ru/. Это позволило снизить вероятность попадания в выборку изображений, оцифрованных с разными параметрами, влияющими на цветовую температуру. Для проверки гипотез о зависимости цветовой гаммы от творческого периода художника было отобрано 835 изображений, представленных на указанном ресурсе. Все исходные изображения представлены в графическом формате jpeg.

В настоящее время существует несколько цифровых графических форматов, отличающихся друг от друга структурой цветового пространства и составом описывающих его параметров. Для целей исследования был необходим анализ параметров, определяющих цветовую палитру изображений. В частности, формат jpeg предполагает использование цветовой кодировки RGB, в которой конкретный цвет определяется сочетанием трех параметров: R («red» — красный), G («green» — зеленый) и B («blue» — синий). Такое представление цвета фактически соответствует системе генерации цвета в пиксельных изображениях, в которых каждый оттенок формируется как сочетание трех основных «чистых» цветов разной интенсивности. Однако, использовать такую систему для оценки преобладания определенных оттенков неудобно, так как человек воспринимает цветовые оттенки не в виде трехмерной модели, а в виде непрерывной палитры, в которой все основные цвета расположены в «радужной» последовательности («**К**аждый **о**хотник **ж**елает…»), непрерывно «перетекая» из одного в другой через полутона различной интенсивности. В этой связи для целей исследования была выбрана цветовая модель HSV, т. к. именно эта кодировка цвета используется в компьютерном зрении и дизайне, так как позволяет точнее передать цвет, его оттенки и полутона, и наиболее близка к тому, как цвет воспринимается человеком. В модели HSV оттенок представлен одним отдельным параметром $H$ (за исключением чистого чёрного и белого цветов, для задания которых используются координаты $S$ и $V$) [3].

Весь набор изображений был преобразован из кодировки RGB в кодировку HSV с помощью функций, предоставляемых средствами языка Python и пакета OpenCV [2].

Вся шкала оттенков $H$ цветового пространства HSV была разбита на отрезки, приблизительно соответствующие человеческому восприятию цвета. Для описания «чистых» чёрного и белого цвета использовались определенные интервалы по координатам $S$ и $V$. Указанные интервалы были взяты в качестве признакового описания изображений. Процесс обработки каждого изображения заключался в подсчёте доли пикселей, попадавших в заданные интервалы оттенков.

Для обработки изображений был создан программный конвейер, математическая постановка которого описана ниже.

Конвейер обработки изображений описан функцией

$$P(h,s,v): I_q \to x_q, \tag{1.1}$$

где $I_q = (w_{ij})$ — матрица, которая описывает цветовое пространство HSV для $q$-го изображения, а $w_{ij} = (h_{ij}, s_{ij}, v_{ij})$ — координаты в кодировке цвета, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Таким образом, матрица $I_q$ представляется в виде:

$$I_q = \begin{pmatrix} (h_{11}, s_{11}, v_{11}) & \dots & (h_{1n}, s_{1n}, v_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (h_{m1}, s_{m1}, v_{m1}) & \cdots & (h_{mn}, s_{mn}, v_{mn}) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $m$ и $n$ — размер изображения.

$I = \{I_q\}$ — набор изображений в формате HSV (размером $m_q \times n_q$ пикселей каждое);

$Pix_q = \{(i,j) \mid i = \overline{1,m_q}, j = \overline{1,n_q}\}$ — множество индексов пикселей $q$-го изображения;

$I_q = ((h_{ij}, s_{ij}, v_{ij}) : (i,j) \in Pix_q)$, где $h_{ij} \in H = [0,360]; s_{ij}, v_{ij} \in [0,255]$;

$Pix_q^{white} = \{(i,j) \mid s_{ij} \le 15, v_{ij} \ge 200\}$ — множество индексов пикселей, близких к белому цвету;

$Pix_q^{black} = \{(i,j) \mid v_{ij} \le 40\}$ — множество индексов пикселей, близких к черному цвету.

Пусть заданы $K$ цветовых интервалов $H_k$, таких что: $\bigcup_{k=1}^{K} H_k = H$, $\bigcap_{k=1}^{K} H_k = \varnothing$, конвейер обработки изображений $P: I \to X = [0,1]^{K+2}$:

$$P(I_q) = \begin{cases} x_{qk} = \dfrac{1}{mn} \cdot |\{(i,j) \in Pix_q \setminus (Pix_q^{white} \cup Pix_q^{black} : h_{ij} \in H_k\}|, k = \overline{1,K} \\ x_{qK+1} = \dfrac{1}{mn} \cdot |Pix_q^{white}| \\ x_{qK+2} = \dfrac{1}{mn} \cdot |Pix_q^{black}| \end{cases}, \tag{1.3}$$

Таким образом, в результате применения конвейера (1.3) каждое изображение описывается вектором, состоящим из $K+2$ элементов. Эти значения аппроксимируют цветовую палитру данной конкретной картины. Экспериментально было установлено оптимальное количество интервалов $K = 25$, которое позволяет с достаточной степенью точности различать цветовые оттенки, не перегружая при этом исходный датасет.

Как результат, каждая картина представляется последовательностью частот, которая состоит из долей пикселей, попавших в заданный интервал цвета. Эту последовательность можно визуально представить в виде гистограммы, как показано на рис. 2.

График имеет всплески на тех интервалах, цвет которых преобладает на изображении.

Таким образом, в результате обработки исходного набора оцифрованных изображений картин с помощью программного конвейера был получен исходный датасет, в котором каждая картина описана в виде числового *вектора цветовых интенсивностей* $x_q = (x_{q0}, x_{q1}, \dots, x_{q27}) \in [0,1]^{27}$, где каждая координата представляет собой долю пикселей, попадающих в соответствующий цветовой интервал.

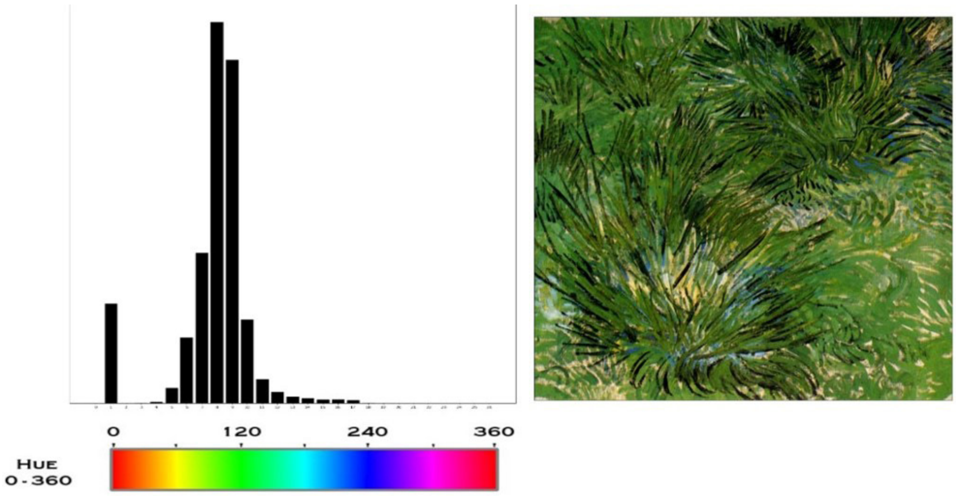



*Рис. 2. Представление цветовой палитры картины*

## 2. Постановка задачи

Для проверки вышеописанной гипотезы были сформулированы задачи машинного обучения следующим образом:

Пусть вектор $x_q = (x_{q0}, x_{q1}, ..., x_{qK+2})$ описывает цветовую палитру так, что каждая координата вектора $x_{qi}$ является долей пикселей, цвет которых определён в заданном интервале $[a_i, b_i]$. Все векторы $x_{iq}$, определяющие цветовую гамму каждой картины, составляют множество $X$.

*Задача 1. Задача классификации.*

В каждый вектор $x_q$ добавляется ещё одна координата $c_q$, обозначающая класс изображения:

$$c_q \in C = \{c_0, ..., c_l\}, \tag{2.1}$$

где $l$ — количество классов. При этом в качестве класса принимается рассматриваемые искусствоведами периоды творчества Винсента Ван Гога, а именно:

$$C = \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}, \tag{2.2}$$

где $c_0$ — ранний период творчества художника, $c_1$ — Нюэнен, $c_2$ — Париж, $c_3$ — Арль, $c_4$ — Сен-Реми и $c_5$ — Овер.

При этом вектор, описывающий каждое изображение, представляется в виде:

$$x_q = (x_{q0}, x_{q1}, ..., x_{qK+2}, c_q), \tag{2.3}$$

Тогда задача состоит в построении классификатора $f : X \to C$, который будет способен по вектору цветовых интенсивностей картины определять творческий период, в течение которого она была написана. Для оценки моделей используется стандартная метрика *accuracy*.

*Задача 2. Задача кластеризации.*

На заданном множестве картин необходимо объединить объекты в кластеры так, чтобы схожие по цветовой гамме объекты (изображения) были помещены в один кластер, а различные — в разные кластеры. При этом, если итоговое разделение на кластеры совпадет с разделением картин по творческим периодам, то можно говорить о зависимости цветовой гаммы от периода создания картины. Для оценки качества кластеризации в этом случае удобно использовать метрики *ARI* (Adjusted Rand Index) и *AMI* (Adjusted Mutual Information). При этом в качестве истинных классов используется множество классов $C$ (2.2).

### 3. Построение моделей и результаты

Для решения задач были построены несколько моделей машинного обучения, реализованные средствами языка Python, а также пакетов Scikit-Learn и OpenCV.

Для решения Задачи 1 были использованы метод опорных векторов *SVM*, случайный лес *RandomForest*, а также наивный байесовский классификатор NaiveBayes [1]. Полученные результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Результаты построения моделей для Задачи 1*

| Метод | Accuracy |
|---|---|
| *SVM* | **0,833** |
| *Random Forest* | **0,792** |
| *Naive Bayes* | **0,563** |

Наилучший результат получен методом опорных векторов. Прогностическая способность модели оказалась средней. Это означает, что моделью выявлена определенная взаимосвязь между цветовой гаммой картин Винсента Ван Гога и его общепризнанными творческими периодами. Однако более подробный анализ полученных результатов показал, что существует достаточно много примеров, когда картины определенной цветовой гаммы были написаны художником не в один единственный период его жизни.

Для решения Задачи 2 были использованы методs агломеративной кластеризации *AgglomerativeClustering*, k-средних *K-means*, а также метод *DBSCAN* [1]. Полученные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

*Результаты построения моделей для Задачи 2*

| Метод | *ARI* | *AMI* | *Силуэт* |
|---|---|---|---|
| *AgglomerativeClustering* | **0,031** | **0,073** | **0,138** |
| *K-means* | **0,039** | **0,070** | **0,188** |
| *DBSCAN* | **0,035** | **0,064** | **0,314** |

Полученные результаты, к сожалению, не позволили подтвердить, либо опровергнуть рассматриваемую гипотезу.

### Заключение

Несмотря на то, что результаты построенных моделей не позволили подтвердить, либо опровергнуть гипотезу об особенностях цветовой гаммы произведений Винсента Ван Гога в различные периоды его творчества, разработанный подход и техника использования моделей машинного обучения могут быть использованы в различных задачах, связанных с решением искусствоведческих задач.

Развитие в последние годы технологий компьютерного зрения и машинного обучения может предоставить в распоряжение специалистов эффективный инструмент для аналитической работы. Появление библиотек распознавания образов, детекции объектов и многих других уже произвели революцию в таких областях, как системы видеонаблюдения, системы визуального контроля качества, системы медицинской диагностики. Однако, появление таких инструментов пока практически не затронуло сферу искусствоведения. Во многом это связано с природой творчества, которое носит сугубо субъективный характер и трудно поддается строгому анализу. Тем не менее, и в этой сфере возникает все больше ситуаций и проблем, которые могли бы решаться с применением современных технологий обработки цифровых изображений и анализа данных. Это представляется возможным в таких задачах как установление авторства и подлинности художественных произведений, восстановление и реставрация, определение возраста (даты написания) картин. Сегодня такие задачи, как правило, решаются привлечением экспертов, которые выносят хоть и профессиональные, однако субъективные суждения.

Технологии способны видоизменить методы проверки подлинности картин, их денежной оценки, также могут помочь в восстановлении предметов искусства и других различных процессах. Анализ особенностей художественных произведений достоин отдельного внимания исследователей в области машинного обучения и искусственного интеллекта, так как именно современные методы работы с данными способны увеличить скорость процессов в этой области, а также улучшить точность применяемых методов. Не говоря уже о чисто исследовательском интересе познания художников, эпох, стилистик.

**Литература**


1. *Жерон О.* Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn и TensorFlow: концепции, инструменты и техники для создания интеллектуальных систем / Пер. с англ. – СПб. : ООО «Альфа-книга», 2018. – 688 с.
2. *Келлер А., Брэдски Г.* Изучаем OpenCV 3. / Пер. с англ. – М. : ДМК Пресс, 2017 – 826 с.
3. *Клетте Р.* Компьютерное зрение. Теория и алгоритмы / Пер. с англ. А.А. Слинкина. – М. : ДМК Пресс, 2019 – 506 с.
4. *Котляр Е. Р., Эмирусеинова Ф. С.* Особенности уникальной технологии живописи Винсента Ван Гога / Е. Р. Котляр, Ф. С. Эмирусеинова // Таврический научный обозреватель. – октябрь 2017. – № 10. – С. 85–89.
5. Сидельникова Е. Пять оттенков Ван Гога: абсент, ангелы и пагубные страсти. – Режим доступа: https://artchive.ru/en/publications/1128~Pjat'_ottenkov_Van_Goga_absent_angely_i_pagubnye_strasti (дата обращения 29.10.2020).

УДК 519.6:544.4

# О ПОСТРОЕНИИ БАЗИСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОЦЕСССОВ БЕЗОБРЫВНОЙ ПОЛИМЕРИЗАЦИИ ДИЕНОВ

**Э. Р. Гиззатова[1], А. С. Исмагилова[2], С. Л. Подвальный[3]**

*[1]Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета*
*[2]Башкирский государственный университет*
*[3]Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Приводится математическое описание процесса полимеризации диеновых углеводородов на неодимсодержащей каталитической системе Циглера – Натта. Полученная система дифференциальных уравнений из бесконечного числа сведена методом моментов к конечному виду. Для нее применен метод поиска базиса нелинейных параметрических функций, позволяющий получить выражения, отражающие кинетику полимеризационного процесса. Выявленный базис из двух функций дает возможность конструировать поверхность, содержащую локальные области минимума целевой функции, определяющие нулевые точки поиска оптимальных значений кинетических констант.
**Ключевые слова:** катализаторы Циглера – Натта, кинетика, полимеризация, математическое моделирование, нелинейный параметрический базис, обратная кинетическая задача.

## Введение

Исследование сложных многостадийных процессов, к которым относятся процессы полимеризации, сочетает в себе экспериментальный анализ и теоретическое обоснование получаемых молекулярных характеристик. Последнее неотделимо от этапа математического моделирования, который позволяет провести адекватное описание кинетики процессов и дать объективную оценку определяемым кинетическим параметрам [1]. Поиск их значений ведется как статистическими [2], так и кинетическими методами [3]. Однако результативнее вести поиск не отдельно для каждой константы, а искать интервалы неопределенности для соотношений констант, поскольку именно они являются определяющими для кинетических закономерностей, характеризующих исследуемый процесс [4].

## 1. Математическое описание полимеризационного процесса

В работе рассматривается модель процесса полимеризации бутадиена на неодимсодержащем катализаторе Циглера – Натта, предполагающего три элементарные стадии: рост цепи, передача на мономер и передача на алюминийорганическое соединение (АОС) [1]. Выстраивая математическую модель процесса на основе законов химической кинетики, в рассмотрение предлагается система из бесконечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых характеризует скорость изменения реагентов процесса во времени. Применяя метод моментов [5], система преобразуется к конечному виду:

$$\frac{dM'}{dt} = -M'(R_1+\mu_0)(k_p+k_M)$$
$$\frac{dA'}{dt} = -A'k_A(R_1+\mu_0)$$
$$\frac{dR_1}{dt} = -k_pM'R_1 + k_MM'\mu_0 + k_AA'\mu_0 \qquad (1)$$

$$\frac{d\mu_0}{dt} = k_p M' R_1 - k_M M' \mu_0 - k_A A' \mu_0$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = k_M M'(\mu_0 + R_1) + k_A A'(\mu_0 + R_1)$$

с начальными данными:

$$M'^{(0)} = M'(0),\ A'^{(0)} = A'(0),\ R_1^{(0)} = R_1(0),\ \lambda^{(0)} = \mu_0^{(0)} = 0. \quad (2)$$

## 2. О методе поиска базиса

Для перехода к поиску базисной поверхности, необходимо сделать предварительное допущение. Так как $R_1$ и $\mu_0$ фактически носят радикальный характер, их обоих можно принять за промежуточные вещества и получить уравнение материального баланса из третьего уравнения системы (1)–(2):

$$k_p M R_1 = k_M M \mu_0 + k_A A \mu_0. \quad (3)$$

Поскольку исходными веществами являются $M$ и $A$, то на них накладывается предположение об их изменении:

$$\begin{aligned} M' &= M(1+\varepsilon_1), \\ A' &= A(1+\varepsilon_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ – величина изменения концентраций реагентов $M$ и $A$ по отношению к исходной концентрации. В рамках подхода [4], определяются функции:

$$f_1 = (M', A', \lambda),\ f_2 = (R_1, \mu_0) = y$$

и вектор констант $k' = (k_p, k_M, k_A, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Реализация подхода осуществляется поиском матриц:

$$\frac{\partial f_1}{\partial k'},\quad \frac{\partial f_1}{\partial y},\quad \frac{\partial f_2}{\partial k'},\quad \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad (5)$$

и матрицы $U$:

$$U = \frac{\partial f_1}{\partial k'} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\left[\frac{\partial f_2}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial f_2}{\partial k'}. \quad (6)$$

## 3. Результаты

В работе [4] были найдены все требуемые элементы (5)–(6), а также базисные функции для процесса:

$$\rho_1(k') = k_A(1+\varepsilon_2), \quad (7)$$

$$\rho_2(k') = k_p(1+\varepsilon_1)k_M(1+\varepsilon_1). \quad (8)$$

Полученный результат, основанный на аналитических выводах, полностью совпадает с физико-химической особенностью исследуемого процесса, а найденные функции (7)–(8), в свою очередь, являются базисом пространства, которое может быть построено на соответствующих векторах.

Тогда базисная поверхность будет представлять собой сеточную функцию, рассчитываемую как:

$$Z(k_p^i, k_M^j, k_A^u) = \left(\frac{W_p(t_k)}{W_M^O(t_k) + W_A^O(t_k)} - P_N(t_k)\right)^2 \quad (9)$$

с областью определения $(k_p \cdot k_M) \times k_A$, где среднечисленная степень полимеризации рассчитывается как:

$$P_N = \frac{W_P}{W_M^O + W_A^O}. \tag{10}$$

Следующий рис. 1 показывает изменение сеточной функции на всей области определения констант. Появляющиеся пиковые значения характеризуют разрыв поверхности в точках, и здесь важен вопрос о допустимости значений кинетических констант для самого процесса.

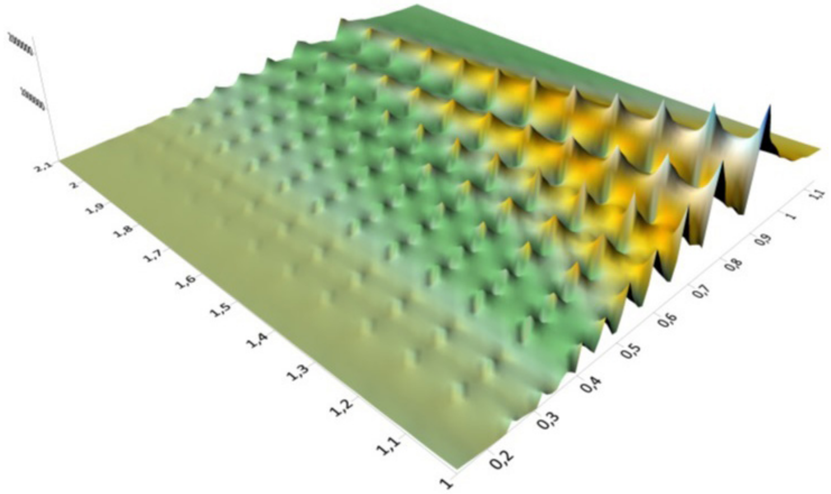



*Рис. 1. Сеточная функция Z, полученная на области* $\left([10;30]\cdot[0,014;0,0,038]\right) \times [1,0;2,1]$

Рис. 2 характеризует эту же поверхность, но с границей по верхнему пределу изменения функции.

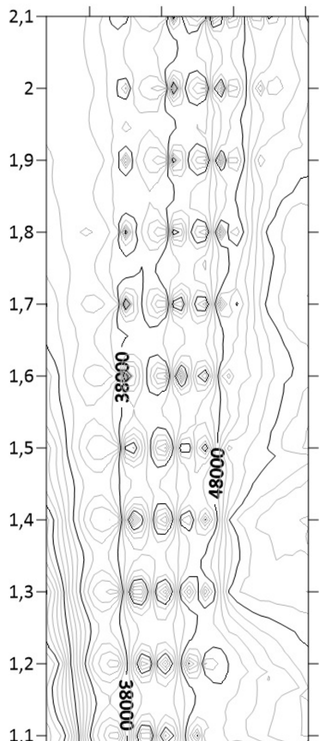



*Рис. 2. Сеточная функция Z, ограниченная верхним значением в* $6\times10^4$

По рис. 2 видно, что часть исходных значений функции потеряна, однако проявились точки локального минимума, которые могут быть использованы в качестве стартовых наборов для вычислительных экспериментов.

## Заключение

Таким образом, использование подхода, описанного в работе [4], может являться предварительным этапом при решении обратных задач поиска значений кинетических констант скоростей процесса. Зачастую основным методом, используемым при их решении, становится метод многократного решения прямой кинетической задачи с применением численных методов прямого поиска оптимальных значений. Условие «качественного» задания начальной точки становится главным критерием адекватности получаемого оптимума и, следовательно, установления истинных механизмов самого процесса.

## Литература

1. *Гиззатова Э. Р.* Обратные задачи химической кинетики для кинетически неоднородных реакций полимеризаций: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 02.00.04, 05.13.18 / Гиззатова Эльвира Раисовна; Уфа, 2015. – 32 с.

2. *Grigoryev I.* Mathematical modelling of the copolymerization of styrene with maleic anhydride in a homogeneous environment / I. Grigoryev., E. Miftakhov., S. Mustafina.// International Journal of Chemical Sciences. – 2016. – Т. 14, № 1. – С. 381–386.

3. *Гиззатова Э. Р.* Математическое моделирование кинетической неоднородности констант скоростей бимолекулярного обрыва радикальной полимеризации / Э. Р. Гиззатова, С. И. Спивак, С. В. Колесов // Системы управления и информационные технологии. – 2015. №1.1(59). – С. 126–129.

4. *Гиззатова Э. Р.* О методе поиска базиса нелинейных параметрических функций для полимеризационных процессов / Э. Р. Гиззатова, А. С. Исмагилова, С. И. Спивак, С. Л. Подвальный // Химическая физика – 2018. – Т. 37, № 12. – С. 58–62.

5. *Подвальный С. Л.* Моделирование промышленных процессов полимеризации / С. Л. Подвальный, Химия. – Москва : Изд-во Химия, 1979. – 350 с.

УДК 519.63

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПАКТНЫХ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ АКУСТИКИ

**В. И. Голубев[1,2], А. В. Шевченко[2], Н. И. Хохлов[2], И. С. Никитин[1], Б. А. Стратула[1]**

[1]*Институт автоматизации проектирования РАН*
[2]*Московский физико-технический институт (НИУ)*

**Аннотация.** Сейсмическая разведка остаётся основным методом поиска и разведки месторождений углеводородов – нефти и природного газа. В виду того, что задача расчёта распространения сейсмических волн является вычислительно ресурсоёмкой, актуальной является разработка более робастных вычислительных алгоритмов. В настоящей работе рассмотрено акустическое приближение, которое позволяет описать распространение продольных волн в геологическом массиве. Для двумерного случая описана компактная расчётная схема, обеспечивающая повышенный порядок аппроксимации на нерасширенном пространственном шаблоне. Для её построения использован метод расщепления по координатным направлениям и дифференциальные продолжения исходной системы уравнений. Проведён ряд численных тестов, подтверждающих повышенный порядок аппроксимации.
**Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, гиперболические уравнения, акустическое приближение, компактный шаблон.

## Введение

Нефть и природный газ являются основой энергетического комплекса России. В связи со значительным истощением разведанных запасов актуальной является задача поиска новых месторождений. Наиболее распространённым геофизическим методом является сейсмическая разведка, основанная на распространении сейсмических волн в неоднородном геологическом массиве. Для описания его динамического поведения может быть использован ряд математических моделей, от простейшего «лучевого» приближения до сложных моделей, учитывающих неупругие процессы. На практике, ввиду разумной вычислительной сложности задачи, широко используется акустическое приближение. Для численного решения определяющей системы уравнений используются: метод конечных элементов, конечно-разностные схемы и др. [1]. Заметим, что исходная система уравнений в частных производных первого порядка в переменных давление-скорость является гиперболической, т. е. обладает полным набором собственных векторов. Математическим свойством таких систем является наличие характеристических кривых. В 1950-е годы был предложен прямой сеточно-характеристический метод, позволяющий проводить расчёт вдоль них [2]. Основным его недостатком являлось сгущение решения в области сгущения характеристик. Впоследствии была предложена его модификация – построение обратных характеристик с последующей интерполяцией значений на текущем временном слое [3]. В группе чл.-корр. РАН Петрова Игоря Борисовича в МФТИ был разработан программный комплекс, позволяющий проводить расчёт сеточно-характеристическим методом на треугольных, тетраэдральных, параллелепипедных, криволинейных структурных и гексаэдральных сетках [4]. При этом рассмотрены случаи акустической, линейно-упругой изотропной, анизотропной среды и двух-континуального приближения [5].

Для повышения точности расчётов могут быть использованы схемы на расширенных шаблонах, однако, они требуют модификации вблизи границ. Альтернативным подходом является использование дифференциальных следствий исходных уравнений. В работе [6] был достигнут третий порядок точности на компактном шаблоне для уравнения переноса. Далее, в работе [7] была построена схема для уравнений акустики. Настоящая работа является развитием идей, сформулированных в работе [7]. Рассмотрена динамическая задача однородной акустической среды. На прямоугольных расчётных сетках исследована компактная сеточно-характеристическая схема. Проведена численная оценка порядка аппроксимации, выполнено сравнение результатов моделирования с полученными по схеме Русанова.

### 1. Компактная сеточно-характеристическая схема

В акустическом приближении динамическое поведение однородной среды может быть описано системой дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\boldsymbol{A}_x\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x}+\boldsymbol{A}_y\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial y}=\boldsymbol{f}(t), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{q}$ – вектор неизвестных, включающий давление и две компоненты вектора скорости смещений, а матрицы $\boldsymbol{A}_x$ и $\boldsymbol{A}_y$ зависят от физических параметров среды (скорости распространения продольных волн и плотности среды). С использованием метода покоординатного расщепления, система (1) может быть сведена к последовательному решению одномерных гиперболических систем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\boldsymbol{A}_x\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial x}=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\boldsymbol{A}_y\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial y}=\boldsymbol{0}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}=\boldsymbol{f}(t). \tag{4}$$

Переходя в инварианты Римана, определяемые собственными векторами соответствующей матрицы системы, получим набор независимых линейных уравнений переноса:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial w_i}{\partial \xi}=0, \quad \xi=x,y, \tag{5}$$

где $\lambda_i$ – соответствующее собственное число матриц $\boldsymbol{A}_x$ или $\boldsymbol{A}_y$. Уравнение (5) сводится к задаче интерполяции на заданном шаблоне, которая может быть решена, например, с третьим порядком точности на трёхточечном шаблоне. Полученная расчётная схема получила название «схема Русанова». С другой стороны, можно продифференцировать уравнение (5) для матрицы $\boldsymbol{A}_x$ по $x$, что приведёт к дифференциальному следствию

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)+\lambda_i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)=0, \tag{6}$$

которое также является уравнением переноса для величины $\dfrac{\partial w_i}{\partial x}$. При этом, уравнения (5)–(6) могут быть решены совместно с использованием кубического интерполяционного полинома Эрмита, построенного по значениям $w_i$ и $\dfrac{\partial w_i}{\partial x}$, хранимых в узлах расчётной сетки, на двухточечном шаблоне. Для обеспечения возможности выполнить аналогичную процедуру на шаге по $Y$, потребуется дополнительно использовать вторые дифференциальные следствия и хранить в узлах перекрестные производные. Построенная таким образом схема называется «компактной».

### 2. Результаты тестовых расчётов

Для тестовых расчётов рассматривалась квадратная область размерами 17 на 17 м. Скорость распространения продольных волн была равна 10 м/с, плотность – 20 кг/м$^3$. В качестве начального возмущения использовалась аналитически заданная продольная плоская волна единичной амплитуды, с пространственным распределением $\sin^4(\xi)$, что обеспечивает необходимую гладкость решения. Известно, что аналитическим решением данной задачи является распространение волны с постоянной скоростью перпендикулярно заданному волновому фронту. Так как численный алгоритм имеет выделенные направления вдоль осей расщепления, для объективизации оценок волна задавалась под углом 30° к вертикальной оси. В виду того, что при данной геометрии не представляется возможным поставить периодические граничные условия, расчётная область была увеличена так, чтобы численные артефакты, возникающие вблизи границ, можно было не учитывать при расчёте (рис. 1). В табл. 1 и табл. 2 представлены результаты оценки порядка сходимости алгоритмов, использующих схему Русанова для решения отдельных уравнений переноса и компактную трёхточечную схему. Видно, что они оба демонстрируют достижение второго порядка аппроксимации, что, по-видимому, объясняется использованием метода расщепления.

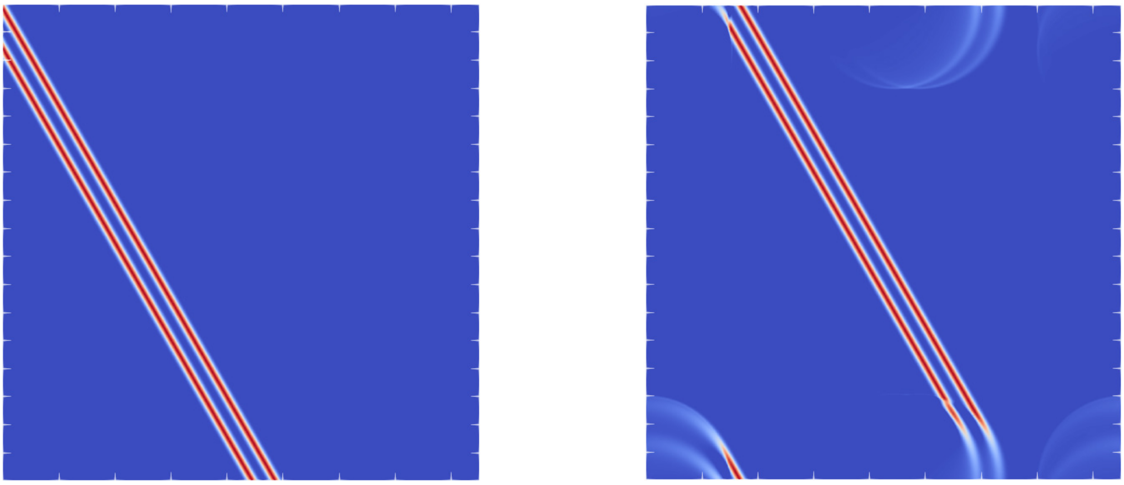


*Рис. 1. Начальное возмущение (слева) и момент оценки ошибки численного решения (справа)*

Таблица 1

*Ошибка вычислений по схеме Русанова*

| **Шаг расчётной сетки** | **Оценка по норме $L_1$** | | **Оценка по норме $L_{inf}$** | |
|---|---|---|---|---|
| | Ошибка | Порядок | Ошибка | Порядок |
| 0.1 | 3.28670781e+02 | – | 4.49962984e+01 | – |
| 0.05 | 9.56356852e+01 | 1.78 | 1.26520512e+01 | 1.83 |
| 0.025 | 1.82658263e+01 | 2.39 | 2.37998063e+00 | 2.41 |
| 0.0125 | 3.63791180e+00 | 2.33 | 4.74958312e-01 | 2.33 |

Таблица 2

*Ошибка вычислений по компактной схеме*

| **Шаг расчётной сетки** | **Оценка по норме $L_1$** | | **Оценка по норме $L_{inf}$** | |
|---|---|---|---|---|
| | Ошибка | Порядок | Ошибка | Порядок |
| 0.1 | 2.12211046e+02 | – | 2.64577140e+01 | – |
| 0.05 | 5.34897174e+01 | 1.99 | 6.89439816e+00 | 1.94 |
| 0.025 | 1.28673818e+01 | 2.06 | 1.67601044e+00 | 2.04 |
| 0.0125 | 3.15720816e+00 | 2.03 | 4.13079675e-01 | 2.02 |

## Заключение

В настоящей работе рассмотрено акустическое приближение, которое позволяет описать распространение продольных волн в геологическом массиве. Для двумерного случае описана компактная расчётная схема, обеспечивающая повышенный порядок аппроксимации на нерасширенном пространственном шаблоне. Для её построения использован метод расщепления по координатным направлениям и дифференциальные продолжения исходной системы уравнений. Проведён ряд численных экспериментов, подтверждающих порядок аппроксимации. Подтверждено достижение повышенного порядка аппроксимации на компактном шаблоне.

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10060).

## Литература

1. *Virieux J.* A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging / J. Virieux, H. Calandra, R. E. Plessix // Geophysical Prospecting. – 2011. – V. 59 (5). – P. 794–813.

2. *Massau J.* Memoire sur l'integrationgraphique aux derives partielles / J. Massau. – F. : Meyer-van Loo, 1899.

3. *Магомедов К. М.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений / К. М. Магомедов, А. С. Холодов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9 (2). – С. 383–396.

4. *Muratov M. V.* Application of fractures mathematical models in exploration seismology problems modeling / M. V. Muratov, I. B. Petrov // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2019. – V. 133. – P. 120–131.

5. *Голубев В. И.* Об учёте водонасыщенности донных осадков в задаче морской сейсмической разведки / В. И. Голубев, А. В. Шевченко, И. Б. Петров // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 488(3). – С. 248-252.

6. *Khokhlov N. I.* On the class of compact grid-characteristic schemes / N. I. Khokhlov, V. I. Golubev // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2019.– V. 133. – P. 64–77.

7. *Golubev V. I.* Application of compact grid-characteristic schemes for acoustic problems / V. I. Golubev, N. I. Khokhlov, I. S. Nikitin, M. A. Churyakov // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – V. 1479 (1). – No. 012058.

УДК 621.486

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЦЕВОГО ЧЕТЫРЁХСТУПЕНЧАТОГО ТЕРМОАКУСТИЧЕКОГО ДВИГАТЕЛЯ СТИРЛИНГА ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

**И. Б. Горшков**

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского*

**Аннотация.** Термоакустический двигатель с бегущей волной является одним из вариантов конструкции двигателя Стирлинга. В данной работе рассмотрена наиболее эффективная на данный момент конструкция двигателя – кольцевой четырёхступенчатый двигатель. Основным элементом данного двигателя, является теплообменный аппарат. Был проведён численный расчёт двигателя в программе Delta EC. Было показано, что оптимальный гидравлический радиус пор регенератора не зависит от геометрических параметров теплообменников и определяется длиной регенератора. Также было показано, что при увеличении расстояния между пластинами теплообменников в 10 раз с 0,2 мм до 2 мм, мощность теплообменников уменьшается лишь в 2 раза, а общая эффективность двигателя только лишь на 26 %. Это позволяет увеличить расстояние между пластинами теплообменников для упрощения конструкции теплообменников.
**Ключевые слова:** термоакустика, цикл Стирлинга, бегущая волна, многоступенчатый кольцевой двигатель, теплообменный аппарат, Delta EC, регенератор, акустический колебательный контур, тепловой двигатель, термоакустический генератор.

## Введение

Термоакустический двигатель с бегущей волной является устройством, реализующим термодинамический цикл Стирлинга [1], и является вариантом конструкции двигателя Стирлинга. Тепловая энергия в таком двигателе преобразуется в акустическую энергию, а затем акустическая энергия может быть использована для выработки электрической энергии или для работы термоакустического холодильника [2, 3].

Колебания давления и скорости газа в теплообменном аппарате поршневого двигателя Стирлинга (ДС) можно рассматривать как акустическую волну высокой интенсивности. При помощи поршней можно создать как бегущую, так и стоячую волну, и воссоздать условия работы теплообменного аппарата любого термоакустического устройства. В термоакустическом двигателе свойства акустической волны в теплообменном аппарате задают не поршни, а корпус – акустический резонатор. При этом конструкция теплообменного аппарата и температура составляющих его частей также определяют свойства волны [4]. По этой причине важно исследовать влияние геометрических размеров теплообменного аппарата на характеристики двигателя.

Теплообменный аппарат термоакустического ДС, также как и поршневого ДС, состоит из двух теплообменников – горячего, холодного и регенератора между ними. Теплообменники подводят и отводят тепловую мощность, а регенератор благодаря наличию температурного градиента является усилителем акустических колебаний. Теплообменники как поршневых ДС, так и термоакустических ДС могут иметь пластинчатый, штыревой, трубчатый и другой тип конструкции. В данной работе рассматривается только пластинчатый тип теплообменников. Теплообменник с одной стороны должен обеспечивать подвод или отвод как можно большей тепловой мощности, а с другой стороны создавать как можно меньшее гидравлическое сопротивление. Это противоречивое требование, так как конструктивно увеличить тепловую мощность теплообменника возможно либо путём уменьшения расстояния между пластинами, либо путём увеличения площади пластин (увеличения их количества), что в свою очередь приводит к увеличению гидравлического сопротивления. Таким образом, существует некоторое оптимальное значение длины пластинчатого теплообменника и расстояния между пластинами.

Чем меньше расстояние между пластинами теплообменника, тем сложнее изготовить такой теплообменник. Поэтому важно выяснить зависимость характеристик двигателя от расстояния между пластинами теплообменника, чтобы узнать оптимальное расстояние между пластинами с точки зрения технологичности производства.

## 1. Расчётная модель двигателя в Delta EC

Математическое моделирование работы четырёхступенчатого кольцевого двигателя с бегущей волной производилось в программе Delta EC, предназначенной для расчёта акустических и термоакустических процессов [5]. Схема моделируемого устройства представлена на рис. 1(б). Двигатель состоит из 4-х абсолютно одинаковых каскадов. Каждый из каскадов в свою очередь состоит из ступени, термальной буферной трубки, акустической нагрузки и концевой части резонатора. Ступень включает в себя корпус ступени, теплообменники – горячий и холодный и регенератор.

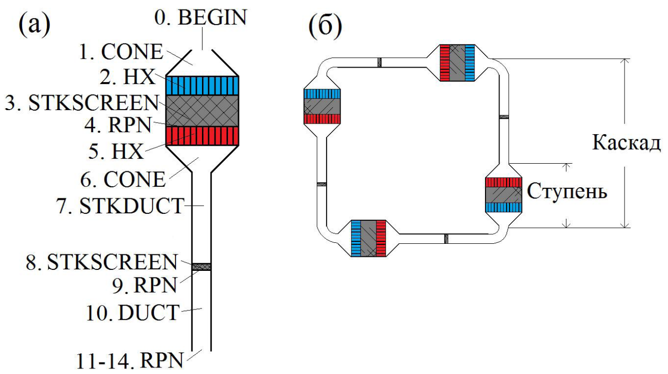



*Рис. 1. Схема расчётной модели в Delta EC. (а) Расчётные блоки в Delta EC: 0. BEGIN – входные параметры акустической волны, 1. CONE – холодный конус, 2. HX – холодный теплообменник, 3. STKSCREEN – регенератор, 4. RPN – расчёт мощности горячего теплообменника, 5. HX – горячий теплообменник, 6. CONE – горячий конус, 7. STKDUCT – термальная буферная трубка (ТБТ), 8. STKSCREEN – акустическая нагрузка, 9. RPN – контроль температуры газа на выходе из расчётной части, 10. DUCT – концевая часть резонатора, 11–14. RPN – контроль параметров акустической волны на выходе из расчётной части. (б) Схема 4-х ступенчатого двигателя*

Так как все 4 каскада одинаковые, то достаточно рассчитать в Delta EC только один из каскадов, чтобы смоделировать работу всего двигателя целиком [6]. Более того, при попытке смоделировать сразу все 4 каскада Delta EC не может найти решение из-за слишком высокой сложности модели. Для того чтобы рассчитать работу одного из каскадов в составе двигателя, необходимо добиться равенства амплитуд колебаний давления $|P_1|$, объёмного расхода $|U_1|$, разности фаз между колебаниями давления и объёмного расхода $\Delta\varphi_{PU}$, а также средней за период колебаний температуры газа $T_m$ в начале и в конце каскада. Это требование вытекает из идентичной конструкции всех каскадов. Вместе с тем, по причине того, что длина 4-х каскадов равна длине волны, а длина одного каскада равна четверти длины волны, разность фаз между колебаниями давления на входе и на выходе из каскада $\Delta\varphi_P$ должна быть равна 90 градусов (четверть от полного периода колебаний – 360 градусов). Аналогично и разность фаз между объёмным расходом на входе и на выходе каскада $\Delta\varphi_U$ должна быть равна 90 градусов [7]. Для достижения данных условий в модели в программе Delta EC были заданы математические блоки: 9. RPN, 11–14. RPN.

Длина каждого из каскадов составляла 2,1315 м, соответственно длина кольцевого корпуса-резонатора 8,526 м. Рабочее тело – аргон под давлением 1,5 МПа. Частота акустических колебаний во всех экспериментах была около 35 Гц. Основные параметры исследуемых моделей занесены в табл. 1.

В ходе расчётов задавались различные значения: длины регенератора $L_r$ и расстояния между пластинами горячего и холодного теплообменников $h$. Затем производилась оптимизация длин теплообменников, гидравлического радиуса пор регенератора и величины акустической нагрузки, для достижения максимального общего КПД. Общий КПД рассчитывался по формуле (1):

$$\eta_m = \frac{W_l}{W_h}. \quad (1)$$

Здесь $W_l$ – акустическая мощность нагрузки, $W_h$ – тепловая мощность горячего теплообменника.

Таблица 1

*Основные параметры исследуемых моделей*

| Часть двигателя | Длина, мм | Диаметр, мм | Пористость | Гидравлический радиус или расстояние между пластинами, мм | Температура, °С |
|---|---|---|---|---|---|
| Холодный конус | 30 | 41,2–160 | 1 | 10,3–40 | П. П.*** |
| Холодный теплообменник | П. О.** | 160 | 0,5 | З. П.* | 40 |
| Регенератор | З. П.* | 160 | 0,7 | П. О.** | П. П.*** |
| Горячий теплообменник | П. О.** | 160 | 0.5 | З. П.* | 300 |
| Горячий конус | 30 | 41,2–160 | 1 | 10,3–40 | П. П.*** |
| Термальная буферная трубка | 400 | 41,2 | 1 | 10,3 | П. П.*** |
| Акустическая нагрузка | 1,5 | 41,2 | 0,75 | П. О.** | П. П.*** |
| Концевая часть резонатора | П.П.*** | 41,2 | 1 | 10,3 | П. П.*** |

*З. П.* – заданный параметр расчётов. П. О.** – параметр, по которому проводилась оптимизация двигателя для достижения максимального общего КПД. П. П.*** – переменный параметр, который изменялся по причине изменения расчётной модели.*

## 2. Результаты расчётов

Основными величинами, характеризующими взаимодействие акустической волны с частями теплообменного аппарата, являются глубины термического $\delta_k$ и вязкостного проникновения $\delta_v$. Глубина термического проникновения показывает толщину слоя газа, активно участвующего в теплообмене с твёрдым телом, а глубина вязкостного проникновения показывает толщину слоя газа, активно участвующего в вязком трении о твёрдое тело. В теплообменном аппарате должен быть хороший термический контакт между газом и твёрдыми поверхностями теплообменников и регенератора.

$$\delta_v = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega \cdot \rho_m}}, \tag{2}$$

$$\delta_k = \sqrt{\frac{2k}{\omega \cdot \rho_m \cdot c_p}}. \tag{3}$$

Глубина вязкостного проникновения $\delta_v$ зависит от коэффициента динамической вязкости $\mu$ газа, круговой частоты акустических колебаний $\omega$ и средней плотности газа за период колебаний $\rho_m$. Глубина термического проникновения $\delta_k$ зависит от коэффициента теплопроводности $k$, теплоёмкости при постоянном давлении $c_p$ и также от $\omega$ и $\rho_m$.

Плотность газа зависит от его температуры, поэтому $\delta_k$ и $\delta_v$ в холодном теплообменнике отличается от $\delta_k$ и $\delta_v$ в горячем. Численные значения данных величин в точке между холодным теплообменником и регенератором составили $\delta_k = 0{,}125$ мм и $\delta_v = 0{,}1$ мм, а в точке между горячим теплообменником и регенератором $\delta_k = 0{,}2$ мм и $\delta_v = 0{,}16$ мм. Коэффициенты, входящие в уравнения (2), (3), также как плотность и частота колебаний изменялись слабо в ходе экспериментов, поэтому изменения $\delta_k$ и $\delta_v$ в рассматриваемых точках также были незначительными.

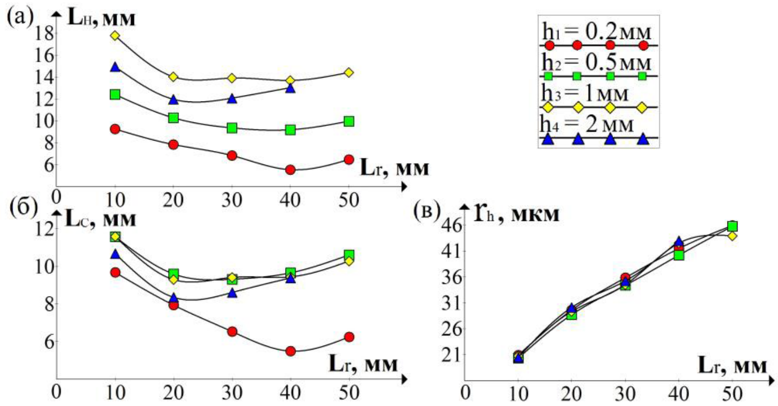



*Рис. 2. Зависимость оптимальных размеров теплообменного аппарата от длины регенератора $L_r$: (а) длины горячего теплообменника $L_H$, (б) длины холодного теплообменника $L_C$, (в) гидравлического радиуса пор регенератора $r_h$. Графики приведены для различных расстояний между пластинами теплообменников $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$*

На рис. 2. представлена зависимость тепловой мощности теплообменников от длины регенератора при различных расстояниях между пластинами теплообменников, а также аналогичная зависимость для акустической мощности теплообменного аппарата и акустической мощности нагрузки. Графики оптимального гидравлического радиуса пор регенератора $r_h$ практически сливаются в одну линию (рис. 2. (в)), что ярко свидетельствует о том, что оптимальная величина $r_h$ не зависит от конструкции теплообменников. Оптимальная величина $r_h$ зависит от длины регенератора. Чем больше длина регенератора $L_r$, тем больше должен быть $r_h$. Это может быть связано с тем, что при увеличении $L_r$ увеличивается гидравлическое сопротивление регенератора, а соответственно и гидравлические потери, значит для того чтобы уменьшить гидравлические потери необходимо увеличить размер пор в регенераторе. Таким образом, не существует единого оптимального гидравлического радиуса пор регенератора для данного среднего давления газа в двигателе и температур теплообменников. Оптимальный радиус $r_h$ необходимо выбирать с учётом длины регенератора.

В поршневых ДС в большинстве конструкций амплитуда смещения порции газа из положения равновесия $\xi_A$ настолько большая, что одна и та же порция газа, находясь изначально в горячем теплообменнике, проходит через регенератор и попадает в холодный теплообменник, а затем возвращается обратно в горячий. Оптимальная амплитуда смещения $\xi_A$ в большинстве термоакустических устройств меньше, чем в поршневых ДС, что может быть связано с меньшей степенью сжатия в цикле. Элементарная порция газа в термоакустическом ДС, находясь изначально в горячем теплообменнике, только заходит на определённую глубину в регенератор и затем возвращается обратно, так и не доходя до холодного теплообменника [8].

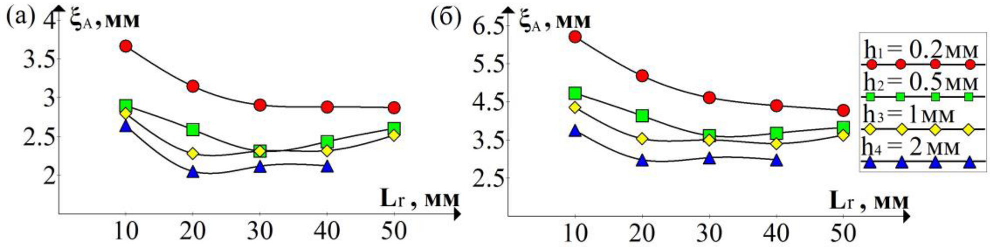



*Рис. 3. Зависимость амплитуды смещения элементарной порции газа из положения равновесия $\xi_A$ от длины регенератора $L_r$: (а) на холодном конце регенератора, (б) на горячем конце регенератора. Графики приведены для различных расстояний между пластинами теплообменников $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$*

На рис. 3. показано сравнение величины амплитуды смещения $\xi_A$ и длины регенератора. При длине регенератора $L_r = 50$ мм размах колебаний газа, равный удвоенной амплитуде смещения $\xi_A$ примерно в 5,5 раза меньше, чем длина регенератора $L_r$ даже на горячем конце регенератора. На холодном конце регенератора размах колебаний примерно в 9 раз меньше, чем $L_r$. При длине регенератора $L_r = 10$ мм размах колебаний газа на холодном конце становиться уже сопоставимым по величине с длиной самого регенератора $L_r$, а на горячем конце размах колебаний превышает $L_r$. Таким образом, при длине регенератора $L_r = 10$ мм, большая часть элементарных порций газа в волне совершает перемещения между горячим и холодным теплообменником, аналогично тому, как это происходит в поршневом ДС.

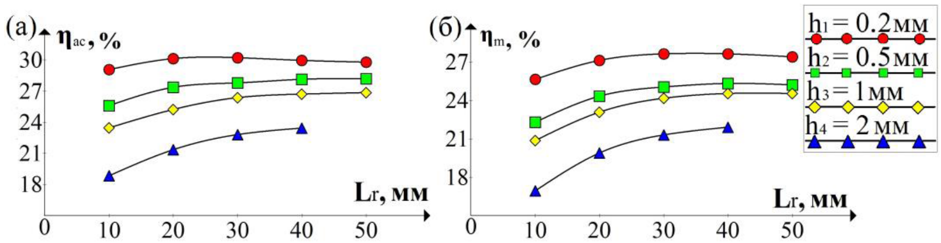



*Рис. 4. Зависимость КПД от длины регенератора $L_r$: (а) акустического КПД $\eta_{ac}$, (б) общего КПД $\eta_m$. Графики приведены для различных расстояний между пластинами теплообменников $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$*

Максимум эффективности работы двигателя $\eta_m$ наблюдается при длине регенератора 40 мм (рис. 4. (б)). При уменьшении длины до 10 мм общий КПД $\eta_m$ начинает снижаться. Уменьшение расстояния между пластинами теплообменников в 10 раз с 2 мм до 0,2 мм даёт увеличение общего КПД всего лишь на 26 % при длине регенератора 40 мм.

Видно, что при уменьшении длины регенератора возрастает, как акустическая, так и тепловая мощность двигателя. В линейной теории термоакустики величина усиления акустической волны зависит от параметра усиления или затухания объемного расхода $e$:

$$e = \frac{\left(f_k - f_v\right)}{\left(1 - f_v\right)\left(1 - \sigma\right)} \frac{1}{T_m} \frac{dT_m}{dx}. \tag{4}$$

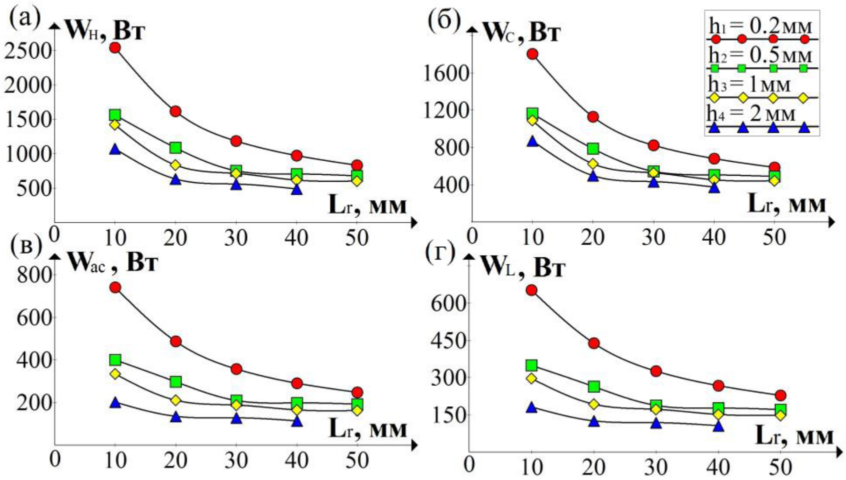



*Рис. 5. Зависимость мощности от длины регенератора $L_r$: (а) тепловой мощности горячего теплообменника $W_H$, (б) тепловой мощности холодного теплообменника $W_C$, (в) акустической мощности ступени $W_{ac}$, (г) акустической мощности нагрузки $W_L$. Графики приведены для различных расстояний между пластинами теплообменников $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$*

Здесь $f_k$ и $f_v$ – это комплексные функции, которые отражают тепловые и вязкостные свойства газа при взаимодействии с регенератором. Конкретный вид этих функций зависит от геометрических параметров регенератора. $\sigma$ – число Прандтля, $T_m$ – средняя за период температура газа, $x$ – координата, имеющее коллинеарное направление с направлением распространения акустической волны. Параметр $e$ определяет коэффициент усиления колебаний объёмного расхода при прохождении волны через регенератор. Чем больше градиент температуры в регенераторе, тем больше его акустическая мощность. Так как при уменьшении длины регенератора градиент температуры в нём возрастает, то, следовательно, возрастает и его акустическая мощность. В ходе расчётов длина регенератора уменьшалась в 5 раз с 50 мм до 10 мм, однако акустическая мощность при этом увеличивалась лишь в 3 раза при расстоянии между пластинами теплообменников $h_1 = 0{,}2$ мм и лишь в 2 раза при расстоянии $h_3 = 1$ мм. Всё дело в том, что разность температур на краях регенератора $\Delta T_r$ меньше, чем разность температур между теплообменниками $\Delta T_t$. С уменьшением длины регенератора разность температур $\Delta T_r$ также уменьшалась, несмотря на постоянную разность температур между теплообменниками $\Delta T_t$. С этим и связано отклонение зависимости изменения акустической мощности от длины регенератора от закона прямой пропорциональности. При увеличении расстояния между пластинами теплообменников термический контакт газа и поверхности теплообменников ухудшается, что приводит к увеличению разницы между температурами теплообменников и торцов регенератора. Поэтому при большом расстоянии между пластинами теплообменников в 1 мм, при уменьшении длины регенератора в 5 раз акустическая мощность возрастает всего лишь в 2 раза, а при расстоянии между пластинами в 0,2 мм мощность возрастает в 3 раза.

## Заключение

Было показано, что оптимальный гидравлический радиус пор регенератора зависит от его длины и не зависит от геометрических характеристик теплообменников. При длине регенератора $L_r = 10$ мм оптимальный гидравлический радиус $r_h$ в 7,6 раза меньше, чем глубина термического проникновения $\delta_k$ в середине регенератора, а при $L_r = 50$ мм оптимальный гидравлический радиус $r_h$ в 3,7 раза меньше, чем $\delta_k$ в середине регенератора. Зависимость $r_h$ от $L_r$ близка к линейной.

Также важным результатом моделирования является то, что при увеличении расстояния между пластинами теплообменников в 10 раз, с 0,2 до 2 мм тепловая мощность теплообменников уменьшается не в 10 раз, а на гораздо меньшую величину. При длине регенератора $L_r = 10$ мм мощность уменьшается в 2,37 раза, а при длине регенератора $L_r = 40$ мм лишь в 2 раза, что связано с тем, что мощность двигателя по большей части определяется параметрами регенератора и нельзя рассматривать теплообменники отдельно от всего двигателя.

Эффективность работы двигателя увеличивается, при уменьшении расстояния между пластинами теплообменников с 2 мм до 0,2 мм, однако увеличивается только лишь на 26 % при длине регенератора $L_r = 40$ мм.

Оптимальная длина теплообменников увеличивается с уменьшением длины регенератора и с уменьшением расстояния между пластинами теплообменников, что связано с увеличением акустической мощности. Оптимальная длина горячего теплообменника лежит в диапазоне 5,5 мм – 17,8 мм, а холодного в диапазоне 5,5 мм – 11,6 мм. Для сравнения диапазон значений размаха колебаний газа из положения равновесия составил 6 мм –13 мм в горячем теплообменнике и 4 мм – 7,4 мм в холодном теплообменнике. Таким образом, оптимальная длина теплообменника и размах колебаний газа имеют близкие друг к другу значения в данной конструкции двигателя. Аналогичный вывод был представлен в работе [9].

Результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что жертвуя эффективностью и выходной мощностью можно сделать теплообменники более технологичными в производстве значительно увеличив расстояние между пластинами относительно величины 0,2 мм. При увеличении расстояния между пластинами теплообменников в 10 раз мощность уменьшается лишь в 2 раза, а эффективность только лишь на 26 %.

## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-32-90127.

## Литература

1. *Swift G. W.* Thermoacoustic engines and refrigerators: a short course / G.W. Swift; Los Alamos: Los Alamos National Laboratory, 1999. – 179 p. – URL: https://www.osti.gov/servlets/purl/756947 (дата обращения: 20.08.2018).

2. *Timmer M. A.* Review on the conversion of thermoacoustic power into electricity / M. A. Timmer, K. Blok, T. H. Meer // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2018. – Vol. 143. – P. 841-857. – DOI: https://doi.org/10.1121/1.5023395

3. *Jingyuan X.* Theoretical analysis of two coupling modes of a 300-Hz three-stage thermoacoustically driven cryocooler system at liquid nitrogen temperature range / X. Jingyuan, Y. Guoyao, Z. Limin, D. Wei, L. Ercang // Appl. Energ. – 2016. – Vol. 185. – P. 2134–2141. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2016.04.055

4. *Горшков И. Б.* Численное моделирование кольцевого четырехступенчатого термоакустического двигателя с бегущей волной / И. Б. Горшков, В. В. Петров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. – 2018. – №. 18, вып. 4. – С. 285–296. – DOI: https://doi.org/10.18500/1817-3020-2018-18-4-285-296

5. *Ward B.* Design environment for low-amplitude thermoacoustic energy conversion, version 6.4b27, users guide / B. Ward, G. Clark, G. Swift; Los Alamos: Los Alamos National Laboratory, 2012. – P 288. – URL: https://www.lanl.gov/org/ddste/aldps/materials-physics applications/condensed-matter-magnet scence/thermoacoustics/_assets/docs/UsersGuide.pdf (дата обращения: 18.08.2020)

6. *Hamood A.* Model and Design of a Four-Stage Thermoacoustic Electricity Generator with Two Push-Pull Linear Alternators / A. Hamood, A.J. Jaworski, X. Mao // In: Proceedings of ASEE17. International conference on advances in energy systems and environmental engineering (ASEE17). – 2017, Wroclaw, Poland. URL: http://eprints.whiterose.ac.uk/116886/

7. *Abduljalil A. S.* Investigation of thermoacoustic processes in a travelling-wave looped-tube thermoacoustic engine/ A.S. Abduljalil; A thesis submitted to The University of Manchester for the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering and Physical Sciences. – Manchester, 2012. – P. 180.

8. *Jacobs J.G.B.* Design, construction and experimental observation of a thermoacoustic prime mover / J.G.B. Jacobs; Master of Science Sustainable Process and Energy Technologies at the Delft University of Technology. – Delft, 2014. – P. 45.

9. *Piccolo A.* Estimation of heat transfer coefficients in oscillating flows: the thermoacoustic case / A. Piccolo, G. Pistone // Int. J. Heat Mass Tran. – 2006. – Vol. 49. – P. 1631–1642. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.11.009

УДК 330.131.7

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В ПОРТФЕЛЬНОМ ИНВЕСТИРОВАНИИ

**Н. В. Гринева**

*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации*

**Аннотация.** Обсуждена задача управления с позиции применения математического инструментария, сформулированы экономическая постановка и математическая модель задачи оптимизации, представлена последовательная реализация цели исследования – механизма формирования оптимальной стратегии управления портфелем ценных бумаг. Результаты динамической оптимизации принимаемых на каждом шаге решений образуют оптимальный закон управления портфелем. Этот закон и будет представлять собой оптимальную стратегию управления портфельными инвестициями.
**Ключевые слова:** портфельные инвестиции, управление ценными бумагами, динамическая система, принятие решений, дифференциальные уравнения, оптимизация.

## Введение

Рынок ценных бумаг – это *динамическая* система. Можно построить модель функционирования рынка в виде стохастической дифференциальной системы. Дифференциальные уравнения являются, по сути, математическими моделями динамических систем, их решения описывают случайные процессы изменения координат подвижного объекта на траектории. Математической моделью таких систем могут служить так называемые формирующие фильтры. *Формирующими фильтрами* называются разностные уравнения, имеющие в правой части (на входе) случайные процессы типа белого шума, а в левой (на выходе) статистически окрашенный случайный процесс, являющийся их решением.

Если в планируемом периоде задача оптимизации портфеля решается $N$ раз и $N$ раз принимаются решения, то реализуется стратегия дискретного динамического управления портфелем (увеличивая число управлений, в пределе при $N \to \infty$ можно получить непрерывный процесс управления в виде некоторой траектории управляющих воздействий). Остановимся на рассмотрении *дискретной* стратегии как более реалистичной.

Процедура переформирования портфеля, как правило, связана с наличием дополнительных трансакционных расходов. При операциях с ценными бумагами инвестор выплачивает бирже комиссионные сборы. Комиссия взимается с каждого акта – и продажи, и покупки, что необходимо принимать во внимание при определении стоимости продажи и покупки. При решении вопроса о ротации (переразмещении) финансовых инструментов необходимо учитывать издержки (соизмерять прогнозируемое приращение стоимости финансовых инструментов и неизбежные затраты, связанные с их ротацией).

Для достижения наилучших результатов на некотором отрезке времени все принимаемые в любой момент времени решения должны быть оптимальными относительно будущего развития событий, т. е. для выполнения поставленной задачи на каждом шаге следует наилучшим образом прогнозировать будущие значения доходностей обращающихся на рынке финансовых инструментов и принимать окончательные решения для любого момента времени по результатам динамической оптимизации относительно будущего развития рыночных событий.

Задача управления, в рамках которой при принятии решений не используется информация о текущем состоянии системы на момент принятия решения, т. е. оптимальное управление может быть определено заранее, называется *задачей оптимального управления по разомкнутому* *контуру* [3]. Между тем, в условиях рынка информация обновляется и дополняется постоянно, и, к счастью, по отношению к управлению портфелем ценных бумаг объективно существует возможность формирования стратегий более эффективных, т. е. предполагающих учет текущей информации. Ее использование позволяет достигать более высокого качества управления. Поэтому в данной работе внимание сфокусировано на задаче оптимизации управления динамической системой с использованием обратной связи.

## 1. Задача оптимизации стратегии управления портфелем инвестиций

Рассмотрим управление портфелем ценных бумаг на интервале времени $[0, N-1]$, где индекс $i \in [0, N-1]$ соответствует номеру торговой сессии. Будем считать, что в период времени $[0, N-1]$, на рынке обращаются $Q$ видов бумаг. Каждой бумаге $j$-го вида на шаге $i$ будем сопоставлять значение цены $X(i, j)$. Изменение цен от сессии к сессии описывается марковским процессом с дискретным временем. Величины $X\left(i, j\right)$ принимают дискретные значения. Вектор цен на шаге $i$ будем обозначать как $X(i)$. В любой момент времени $i \in [0, N-1]$ участнику рынка доступны все $Q$ видов бумаг. Если некоторая бумага $j$ первые появилась на торгах в сессию $i,$ то ее цена для всех предшествующих сессий $i' < i$ определяется как $X\left(i', j\right) = 0$. Если $i$ – последняя из торговых сессий, предшествующих погашению $j$-й бумаги, то для всех $i' > i$ $X\left(i', j\right) = 0$. Бумаги типа $j$ могут быть проданы или куплены на шаге $i$ по цене $X(i, j)$. Текущее состояние находящегося в управлении портфеля ценных бумаг моделируется вектором $\left(U_{i,1}, U_{i,2}, ..., U_{i,Q}\right)$, где $U_{i,j}$ – количество бумаг $j$-го вида в портфеле в момент времени $i$. Обозначим за $S\left(i, j\right)$ стоимость входящих в портфель бумаг $j$-го вида на шаге $i$:

$$S(i, j) = X\left(i, j\right) \cdot U_{i,j}. \tag{1}$$

Для произвольной сессии $i$ обозначим через $u'_{i,j}$ количество (по цене $X(i, j)$) бумаг вида $j,$ находящихся в портфеле до начала операций купли-продажи, через $u''_{i,j}$ – количество бумаг этого же вида после этих операций, при этом $u'_{i,j} \geq 0,$ $u''_{i,j} \geq 0$ и, очевидно, $u''_{i,j} = u'_{i+1,j}$. Управление на шаге $i$ определяется выбором $\dfrac{u''_{i,j}}{\sum_{k=1}^{Q} u''_{k,j}}$. Набор таких функций управления $U_i$ назовем стратегией управления, а множество подобных стратегий обозначим за $\Psi$.

Через $S'_i$ и $S''_i$ обозначим стоимость портфеля до и после управления в сессии $i$ соответственно. Тогда $S'_i = \sum_{j=1}^{Q} S'_{i,j}$, $S''_i = \sum_{j=1}^{Q} S''_{i,j}$. Выигрыш (т. е. доходность портфеля) по результатам сессии равен

$$w_i = \sum_{j=1}^{Q} S''_{i,j} - \sum_{j=1}^{Q} S'_{i,j}\ . \tag{2}$$

Совокупный выигрыш $W = \sum_{i=1}^{N} w_i$ при любом управлении останется случайной величиной, поэтому следует выбирать такой вектор управлений, при котором среднее значение случайного выигрыша $W$ будет максимальным: $\bar{W} = M\left[W\right] = \sum_{i=1}^{N} \bar{w}_i$, где $\bar{w}_i$ – средний выигрыш на $i$-м шаге. Цель управления – выбрать такое оптимальное управление $U^*$, состоящее из оптимальных управлений $U_1^*$, $U_2^*$, …, $U_N^*$ каждого шага, чтобы аддитивный критерий дохода от вложений $\bar{W}$ за период времени $[0, N-1]$ обратился в максимум.

Иными словами *требуется* найти такую динамическую последовательность принимаемых решений по инвестированию в финансовые инструменты, при реализации которой на отрезке времени от начала планируемого периода до момента его завершения инвестором была бы получена максимальная доходность. Искомая стратегия должна давать однозначный ответ на то, в каких пропорциях в какие моменты времени и в какие финансовые инструменты необходимо вкладываться. Она представляет собой алгоритм принятия оптимальных инвестиционных решений.

*Обратная связь* – это информация, поступающая в управляемую систему по каналам измерений и объективно содержащая «шумы», или ошибки измерений. *Канал измерений* – это текущие сведения о котировках курсов ценных бумаг.

В работе рассмотрена линейная модель рынка в виде систем разностных уравнений. В качестве координат вектора состояния рынка будем использовать доходности инструментов. Схема решения задачи оптимального управления выглядит так:

1. Определение математической модели системы, по отношению к которой осуществляется управление – т. е. модели рыночного портфеля инвестора (в виде модели стохастической дифференциальной системы).

2. Использование оптимальных алгоритмов прогнозирования случайных процессов (т. е. будущего состояния рынка, а, значит, и искомого инвестиционного портфеля) для того, чтобы оптимальным (по некоторому критерию) образом обработать информацию обратной связи для получения оптимальных (по некоторому критерию) оценок текущего – на момент принятия решения – состояния системы.

3. Динамическая оптимизация решений относительно будущего развития событий на рынке с помощью применения алгоритмов динамического программирования (выработка управляющих воздействий на систему с учетом информации о ее текущем состоянии).

*Общая постановка задачи оптимального управления* динамической системой с использованием обратной связи: требуется найти оптимальную траекторию управления динамической системой, исходя из условия достижения экстремума целевой функции (в виде так называемой задачи Больца)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} I\left(X, U, t\right) dt + F\left(X_1, t_1\right) \to \underset{U\left(t, X(t)\right)}{extremum}, \tag{3}$$

условия описания динамики системы в виде векторно-матричного дифференциального уравнения вида

$$\dot{X} = f\left[X, U\left(\hat{X}(t)\right), t\right], \tag{4}$$

начальных условий

$$t_0, X\left(t_0\right) = X_0 \tag{5}$$

и ограничений на управление вида

$$\left\{U\left[t, \hat{X}(t)\right]\right\} \in U. \tag{6}$$

## 2. Построение математической модели задачи

Алгоритм построения математической модели случайных процессов, с которыми связана динамика состояний инвестиционного портфеля, таков:

• Статистическое исследование рынка, предполагающее получение оценок математических ожиданий случайных процессов, автоковариационных и взаимно-ковариационных функций (смешанных моментов) отдельных финансовых инструментов.

• Определение параметров разностных уравнений формирующих фильтров, генерирующих случайные процессы, и их построение. Достаточно ограничиться разностными уравнениями формирующих фильтров не выше 2-го порядка.

*Автономные стохастические дифференциальные системы* – это системы, коэффициенты разностных уравнений которых не зависят от времени, а являются постоянными. Будем рассматривать модель в дискретном времени в форме автономной стохастической дифференциальной системы. Векторно-матричное дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\dot{X} = AX + B \cdot m_X(t) + V(t)$$
$$X = X(t_0) \text{ при } t = t_0. \tag{7}$$

Векторная величина $X$ имеет размерность $(N \times 1)$ и описывает состояние динамической системы. Матрица А коэффициентов разностного уравнения (7) имеет размерность $(N \times N)$; ниже будет показано, как определяется ее вид. Структура и значения элементов матрицы $B$ выбираются так, чтобы выполнялось условие астатизма воспроизведения функции $m_X(t)$. $m_X(t)$ – векторная функция математического ожидания векторного случайного процесса $X(t)$. $V(t)$ – векторный нормальный случайный процесс белого шума с математическим ожиданием, равным нулю. Векторное дифференциальное уравнение эквивалентно системе скалярных дифференциальных уравнений.

Значения вектора состояния рынка для двух следующих друг за другом моментов времени связаны формулой для общего решения этого уравнения. Если $\Phi$ – переходная матрица для матрицы $A$, то для двух следующих друг за другом моментов времени получим:

$$X\left(t_{i+1}\right) = \Phi\left(t_{i+1}, t_i\right) X\left(t_i\right) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi\left(t_{i+1}, \tau\right)\left[B(\tau)U(\tau) + V(\tau)\right] d\tau. \tag{8}$$

Управляющее воздействие будем считать кусочно-постоянным: $U(t) = U(t_i)$, $t_i \le t \le t_{i+1}$. Для простоты обозначим $X(t_i) = X(i)$, $\Phi(t_{i+1}, t_i) = \Phi(i+1, i)$. Так как управление является кусочно-постоянным, можно вынести $U(t_i) = U(i)$ из-под знака интеграла и положить $B(i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) B(\tau) d\tau$. Положим, кроме того, что $V(i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) V(\tau) d\tau$, чтобы получить дискретный вариант случайного процесса белого шума.

В итоге, с учетом того, что $\Phi(i+1, i) = A(i)$, получим:

$$X\left(t_{i+1}\right) = X(i) = \Phi\left(t_{i+1}, t_i\right) X\left(t_i\right) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi\left(t_{i+1}, \tau\right)\left[B(\tau)U(\tau) + V(\tau)\right] d\tau =$$

$$= A(t_i) X\left(t_i\right) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\Phi\left(t_{i+1}, \tau\right) B(\tau) U(\tau) + \Phi\left(t_{i+1}, t_i\right) V(\tau)\right) d\tau = A(i)X(i) + B(i)U(i) + V(i). \tag{9}$$

Это *разностное уравнение формирующего фильтра*, описывающее процесс функционирования рынка в дискретном времени.

Построим, далее, математическую модель рынка ценных бумаг, предполагая, что процесс его функционирования полностью определяется через обращающиеся на рынке ценные бумаги, котировки курсов всех инструментов осуществляются регулярно, а изменения котировок инструментов при их рассмотрении в функции времени представляют собой реализации случайных процессов. Каждый из финансовых инструментов характеризуется собственным случайным процессом, поэтому результирующий процесс, характеризующий рынок в целом, будет векторным.

Целевая функция имеет вид

$$J = M \sum_{i=0}^{N-1} W(X_{i+1}, U_i), \tag{10}$$

где $M$ – оператор математического ожидания; $W\left(X_{i+1}, U_i\right)$ – действительная функция, вид которой зависит от экономического смысла решаемой задачи; вектор управления $U_i$ – величина пропорциональных долей включаемых в портфель финансовых инструментов с учетом присутствующих в формулировке задачи ограничений. Последовательность решений о значениях пропорциональных долей $U_j$ образует инвестиционную стратегию на интервале времени $j = 0,1,\ldots,N-1$.

## 3. Оценка и прогнозирование состояний рынка

Задача выбора оптимальной стратегии управления может решаться итерационно в два самостоятельных этапа: оптимальное оценивание и прогноз вектора состояний системы, а затем динамическая оптимизация с использованием оптимальных оценок вектора текущего и будущего состояний рынка.

Алгоритм, носящий название *фильтра Калмана*, признанно является оптимальным по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценивания состояния системы. Структура и параметры этого алгоритма предварительно настраиваются на статистический портрет оцениваемой системы. Уравнения фильтра Калмана для несмещенной оценки текущего состоянии рынка записываются так:

$$\begin{gathered} X'(i+1) = A(i)\hat{X}(i) + B(i)m(i), \\ X'(i_0) = \xi, \\ \hat{X}(i) = X'(i) + K(i)\left[Y(i) - X'(i)\right], \end{gathered} \tag{11}$$

где $m(i)$ – оценка вектора математического ожидания случайного процесса рыночной доходности; $K(i)$ – матрица ковариации ошибок оценивания (матрица усиления фильтра), определяемая из рекуррентных уравнений

$$\begin{gathered} P'(i+1) = A(i)\tilde{P}(i)A^T(i) + Q(i) \\ K(i) = P'(i)\left[P'(i) + R(i)\right]^{-1} \\ \tilde{P}(i) = P'(i) - K(i)P'(i) \end{gathered} \tag{12}$$

с начальными условиями $P'(i) = P(i_0)$; $P(i_0)$ – матрица ковариации начального вектора $X(i_0)$, содержащая априорную информацию о рынке.

Оптимальный по критерию минимума среднеквадратической ошибки предсказания линейный многошаговый экстраполятор – предиктор – определяется решением разностного уравнения (11). Оптимальная оценка будущего значения вектора состояния рынка определяется так:

$$\hat{X}(t) = \varphi(t,i+1)\hat{X}(i+1) + \sum_{\tau=i+1}^{t-1} \varphi(t,\tau)m(\tau), \tag{13}$$

где $\varphi$ – фундаментальная матрица решений однородного разностного уравнения, соответствующего уравнению (11); $\hat{X}(i+1)$ – оптимальная оценка вектора текущего состояния рынка, полученная с помощью фильтра Калмана.

Одношаговый предиктор, реализуемый фильтром Калмана, имеет вид

$$\hat{X}((i+1)/i) = A(i)\hat{X}(i/(i-1)) + B(i)m(i) + K'(i)\left[Y(i) - \hat{X}(i/(i-1))\right], \tag{14}$$

где матрица усиления фильтра $K'(i)$ получается из уравнения $K(i) = P'(i)\left[P'(i) + R(i)\right]^{-1}$. Ковариационная матрица для ошибки экстраполяции является решением разностного уравнения

$$P'(i+1) = A(i)P'(i)A^T(i) - A(i)P'(i)\left[P'(i) + N(i)\right]^{-1} P'(i)A^T(i) + Q(i)\,,\; P'(i_0) = P(i_0). \tag{15}$$

Доопределить недостающие оценки $m(\tau)$, $\tau = i+1,\ldots,t-1$ в формуле многошаговой экстраполяции (13) можно, последовательно применяя одношаговый предиктор (14).

Таким образом, алгоритмы оптимального оценивания и прогнозирования вектора состояния рынка полностью определены. Результатом их применения является последовательность векторов предсказаний состояний рынка $\hat{X}(i/i)$, $\hat{X}((i+1)/i)$, $\hat{X}((i+2)/i),...,$ $\hat{X}(t/i)$. Эта последовательность векторов и есть исходная информация для динамической оптимизации принимаемых инвестиционных решений.

### 4. Алгоритм динамической оптимизации

Существуют два базовых алгоритма принятия оптимальных инвестиционных решений. Первый основан на использовании одношагового предиктора. Применительно к задаче управления портфелем с целью максимизации приращения его стоимости за определенный период времени он состоит из следующих шагов:

1. Одношаговое прогнозирование будущего значения доходностей всех обращающихся на рынке финансовых инструментов.

2. Принятие инвестиционных решений. Из рыночной совокупности финансовых инструментов в оптимальный портфель *заранее* включаются те, что имеют максимальную прогнозируемую доходность.

3. Последовательность этих шагов повторяется по итерационной схеме для каждого шага принятия решений вплоть до момента завершения процесса управления портфелем.

Второй реализует оптимальное стохастическое управление по замкнутому контуру. Глубина прогноза должна простираться от любого текущего момента времени до момента завершения процесса управления портфелем. Однако прогнозирование в этом случае теряет практический смысл, поскольку ошибка прогнозирования будет равна дисперсии оцениваемого процесса.

Поэтому в качестве алгоритма «золотой середины» лучше использовать краткосрочный статистический прогноз вектора состояний рынка в каждый текущий момент времени – на 3–5 торговых сессий вперед. На основе этого прогноза формируется оптимальная последовательность решений, из которой принимается только первое. К моменту открытия следующей торговой сессии поступает новая статистическая информация по рынку, которая, теоретически, может девальвировать сделанный ранее прогноз. Поэтому последовательность оптимальных инвестиционных решений формируется заново, при этом из нее опять принимается только первое решение. Итерационная схема продолжается до момента завершения инвестиционной деятельности.

Для любого текущего момента времени оптимальная инвестиционная стратегия определяется на основе стандартного алгоритма динамической оптимизации. Оптимизация осуществляется от последнего шага к первому по итерационной схеме. Первый шаг соответствует текущему моменту времени принятия решения.

Максимизация приращения стоимости портфеля представляется в виде последовательности процедур вида:

$$\max_{U(t-1)}\left\{W\left[\hat{X}(t),U(t-1)\right]|\,\hat{X}(t-1),U(t-2)\right\}$$

$$\max_{U(t-2)}\left\{\max_{U(t-1)}W\left[\hat{X}(t),U(t-1)\right]|\,\hat{X}(t-1),U(t-2)\,|\,\hat{X}(t-2),U(t-3)\right\} \tag{16}$$

$$\cdots$$

$$\max_{U(1)}\left\{\ldots\max_{U(t-2)}\left\{\max_{U(t-1)}W\left[\hat{X}(t),U(t-1)\right]|\,\hat{X}(t-1),U(t-2)\,|\,\hat{X}(t-2),U(t-3)\,|\ldots\right\}\right\}$$

На полученной траектории функция $J = M\sum_{i=0}^{N-1}W(\hat{X}_{i+1},U_i)$ достигает максимально возможного значения при заданных ограничениях, поэтому ее принято называть *экстремалью рынка ценных бумаг*. Задача оптимизации управления портфелем, таким образом, решена.

Необходимо заметить, что решения может не существовать, либо оно может быть не единственным (тогда необходимо провести дополнительное исследование, позволяющее выяснить, какое из имеющихся решений может претендовать на роль решения исходной задачи оптимального управления). Но, даже если уравнение имеет гладкое решение, управление, найденное из этого уравнения, еще не является оптимальным, поскольку оно может не быть допустимым. Кроме того, в заданном классе допустимых управлений не всегда существует такое, при котором достигается точная нижняя или верхняя грань критерия. В ряде случаев данные трудности удается преодолеть и получить решение в аналитическом либо приближенном виде.

## Заключение

В результате выполнения работы был сформирован обобщенный подход к формированию оптимального портфеля ценных бумаг, отличающийся тем, что в нем учитывается реальная неполнота исходных данных о процессах изменения доходностей ценных бумаг; отсутствует необходимость построения множества эффективных портфелей и кривых безразличия, характеризующих склонность инвестора к риску; в качестве основного критерия, определяющего структуру оптимального портфеля ценных бумаг не используются частные характеристики доходности: риск (дисперсия доходности) и ожидаемая доходность (математическое ожидание доходности); заложена, по всей вероятности, желательность применения вычислительных и программных средств – предложенный алгоритм реализуем «вручную», однако разработка соответствующего программного обеспечения способна существенно упростить решение оптимизационной задачи.

Необходимо отметить следующее. Определение эффективного направления управляющего воздействия на инвестиционный процесс в рамках портфельного инвестирования должно, так или иначе, основываться на признании следующего факта: при работе на развивающихся рынках, к числу которому, без сомнений, можно отнести российский фондовый рынок, не всегда целесообразно основываться на общепринятых положениях портфельной теории, таких, как оценивание вариантов инвестирования только на основе только лишь ожидаемой доходности и риска, понимание управленческого процесса как последовательности независимых статичных мероприятий, непринятие во внимание операционных издержек.

## Литература

1. *Андрианова Л. Н., Крылова К. Е.* Анализ применения стратегий управления портфелем инвестиционных фондов на рынке США // Финансовые рынки и банки. –2019. – № 2. – С. 45–51.

2. *Диго С. Н., Соколова А. М.* Формирование фондового портфеля методом инвестиционного рейтинга // Вестник Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова. – 2018. – № 1 (97). – С. 75–89.

3. *Жижилев В. И.* Оптимальные стратегии извлечения прибыли на рынке FOREX и рынке ценных бумаг / В. И. Жижилев. – М. : Финансовый консультант, 2002. – 150 с.

4. *Мошкова Т. А.* Портфель динамических стратегий инвестиционного развития сложных корпоративных систем // Фундаментальные исследования. – 2019. – № 3. – С. 64–72.

5. *Хасаншин И. И., Саватнеев А. А., Нарбаев Т. Р.* Формирование и основы анализа инвестиционного портфеля предприятия // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2018. – Т. 80. – № 1 (75). – С. 331–334.

УДК 517.53

# НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ БЕРНШТЕЙНОВСКОГО ТИПА

**В. И. Данченко, Д. Г. Чкалова**

*Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых*

**Аннотация.** Методом амплитудно-фазовых операторов получены неравенства для производных второго порядка тригонометрических многочленов. Неравенства имеют экстремальный характер: существуют соответствующие экстремальные многочлены, на которых достигаются равенства.

**Ключевые слова:** амплитудно-фазовый оператор, неравенство Бернштейна.

## Введение

При натуральном $n$ положим

$$T_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\tau_k(t),\qquad \tau_k(t):=a_k\cos kt+b_k\sin kt,\quad t,\ a_k,\ b_k\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

В [1–3] изучались амплитудно-фазовые операторы (АФО) вида:

$$H(T_n,\{X_j\},\{\lambda_j\};t):=\sum_{j=1}^{n}X_jT_n(t-\lambda_j),$$

где $\lambda_j$, $X_j$ – свободные вещественные параметры. Обозначим через $\mathcal{M}=\{\mu_1,\dots,\mu_\mu\}$, $1\le\nu\le n$, набор попарно различных натуральных чисел $1\le\mu_k\le n$. Введем вещественные веса $\mathcal{V}:=\{v_l\}\subset\mathbb{R}$, $l\in\mathcal{M}$, и суммы взвешенных гармоник вида

$$\mathcal{T}(T_n,\mathcal{M},\mathcal{V}):=\sum_{l\in\mathcal{M}}v_l\tau_l(t).$$

Рассмотрим задачу о представлении взвешенных сумм в виде АФО:

$$\omega a_0+\mathcal{T}(T_n,\mathcal{M},\mathcal{V})=H(T_n,\{X_j\},\{\lambda_j\};t), \tag{2}$$

где $X_j$, $\lambda_j$ – искомые вещественные параметры, $a_0=a_0(T_n)$ – свободный член многочлена $T_n$. При этом должно выполняться равенство $\omega=\sum_{j=1}^{n}X_j$. Несложно показать, что задача (2) равносильна следующей задаче дискретных моментов

$$X_1z_1^l+\ldots+X_nz_n^l=\sigma_l,\qquad l=\overline{1,n},\quad X_j\in\mathbb{R},\quad z_j=e^{-i\lambda_j}, \tag{3}$$

с неизвестными вещественными $X_j$ и $\lambda_j$, где выполнены условия

$$\sigma_l=v_l\quad\text{при}\quad l\in M,\quad \sigma_l=0\quad\text{при}\quad l\notin M, \tag{4}$$

причем некоторые $X_j$ могут быть нулевыми, а $z_j$ все различны. Действительно, при вещественных

$$s_k:=\sum_{j=1}^{n}X_jz_j^k$$

и вещественных $T_n$ имеем $\tau_k(t)=2\cdot\operatorname{Re}\left(\alpha_ke^{ikt}\right)$, где $2\alpha_k=a_k-ib_k$. Следовательно,

$$H(T_n,\{X_j\},\{\lambda_j\};t)=a_0\omega+2\cdot\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}X_jz_j^k\right)\alpha_ke^{ikt}\right)=a_0\omega+\sum_{k=1}^{n}s_k\tau_k(t), \tag{5}$$

где $\omega:=\sum_{j=1}^{n}X_j$. Значит, при выполнении (3) и (4) из (5) получаются равенства (2). Верно и обратное: при вещественных $s_k$ равенства (3) и (4) получаются из (2) как равенства коэффициентов равных многочленов (подробнее см. в [1]).

По классической теореме Каратеодори [4] система (3) всегда имеет (единственное) решение с условием $X_j \ge 0$, $z_j = e^{i\lambda_k}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ (при произвольных фиксированных правых частях $\sigma_l \in \mathbb{C}$). Важную роль при анализе систем (3), (4), играет матрица Теплица $G_{n+1}(\omega) = \{g_{i,j}\}$ порядка $n+1$ со следующей структурой: на главной диагонали находится переменная $\omega$, а на параллельных ей диагоналях симметрично расположены нули и веса $v_k$, $k \in \mathcal{M}$, причем $g_{i,j} = v_k$ только при $|i-j| = k$ и $k \in \mathcal{M}$ (см. пример ниже).

Известно [5–7], что для решения задачи Каратеодори (т. е. при $X_j \ge 0$) значение параметра $\omega = X_1 + \ldots + X_n$ равно наибольшему корню $\omega^+_{\mathcal{M}}$ ($\omega^+_{\mathcal{M}} = \omega^+_{\mathcal{M}}(n) > 0$) определителя матрицы Теплица $\det G_{n+1}(\omega)$. Отсюда, очевидно, следует, что для решения задачи (3), (4) с неположительными $\{X_j\}$ и вещественными $\{\lambda_j\}$ значение $\omega = X_1 + \ldots + X_n$ равно наименьшему корню $\omega^-_{\mathcal{M}}$ ($\omega^-_{\mathcal{M}} = \omega^-_{\mathcal{M}}(n) < 0$) определителя той же матрицы Теплица $G_{n+1}(\omega)$ (достаточно рассмотреть задачу (3) с заменой $X_j$ на $X'_j = -X_j$ и $\sigma_l$ на $\sigma'_l = -\sigma_l$). Значит, равенства (2) справедливы с $\omega = \omega^+_{\mathcal{M}} > 0$ и $\omega = \omega^-_{\mathcal{M}} < 0$, причем в первом случае все $X_j \ge 0$, а во втором все $X_j \le 0$.

**Применение АФО в тригонометрических неравенствах бернштейновского типа**

Рассмотрим один пример применения представления (2). При $\mathcal{M} = \{1,\ldots,n\}$ и $\mathcal{V} = \{v_k = k^2 : k = 1,\ldots,n\}$, для многочлена (1) имеем

$$-T''_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \tau_k(t) = \mathcal{T}(T_n, \mathcal{M}, \mathcal{V}).$$

Поэтому из (2) получаем

$$\omega^{\pm}_{\mathcal{M}} a_0 - T''_n(t) = \omega^{\pm}_{\mathcal{M}} a_0 + \mathcal{T}(T_n, \mathcal{M}, \mathcal{V}) = \sum_{j=1}^{n} X^{\pm}_j T_n(t - \lambda^{\pm}_j), \qquad \sum_{j=1}^{n} X^{\pm}_j = \omega^{\pm}_{\mathcal{M}}, \tag{6}$$

где $\omega^{\pm}_{\mathcal{M}} = \omega^{\pm}_{\mathcal{M}}(n)$ – наибольший и наименьший корни определителя Теплица $\det G_{n+1}(\omega)$ ($\omega^+_{\mathcal{M}} > 0$, $\omega^-_{\mathcal{M}} < 0$). Например, при $n = 3$ имеем

$$\begin{vmatrix} \omega & 1 & 4 & 9 \\ 1 & \omega & 1 & 4 \\ 4 & 1 & \omega & 1 \\ 9 & 4 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \omega(\omega - 10)(\omega^2 + 10\omega - 16), \quad \omega^-_{\mathcal{M}} = -11.403.., \quad \omega^+_{\mathcal{M}} = 10.$$

**Теорема.** *При* $\omega^{\pm}_{\mathcal{M}} = \omega^{\pm}_{\mathcal{M}}(n)$ *и всех* $t \in \mathbb{R}$ *справедливы двусторонние неравенства*

$$\omega^+_{\mathcal{M}}(a_0 - \max_x T_n(x)) \le T''_n(t) \le \omega^-_{\mathcal{M}}(a_0 - \max_x T_n(x)). \tag{7}$$

$$\omega^-_{\mathcal{M}}(a_0 - \min_x T_n(x)) \le T''_n(t) \le \omega^+_{\mathcal{M}}(a_0 - \min_x T_n(x)), \qquad a_0 = a_0(T_n). \tag{8}$$

*В частности, если* $T_n$ *– положительный многочлен, то из (8) следует*

$$\omega^-_{\mathcal{M}} a_0 \le T''_n(t) \le \omega^+_{\mathcal{M}} a_0, \qquad a_0 > 0.$$

*Эти неравенства точные: существуют экстремальные неотрицательные многочлены* $\mathcal{S}_{\pm}(t)$ *степени* $n$ *со свободными членами* $a^{\pm}_0(\mathcal{S}_{\pm}) > 0$ *такие, что достигаются равенства*

$$\mathcal{S}''_{\pm}(0) = \omega^{\pm}_{\mathcal{M}} \cdot a^{\pm}_0(\mathcal{S}_{\pm}). \tag{9}$$

**Доказательство (7), (8).** Учитывая, что все $X^+_j \ge 0$, $X^-_j \le 0$, (6) получаем

$$\omega^+_{\mathcal{M}} a_0 - T''_n(t) = \sum_{j=1}^{n} X^+_j T_n(t - \lambda^+_j) \le \omega^+_{\mathcal{M}} \max_x T_n(x),$$

$$-\omega^-_{\mathcal{M}} a_0 + T''_n(t) = \sum_{j=1}^{n} (-X^-_j) T_n(t - \lambda^-_j) \le -\omega^-_{\mathcal{M}} \max_x T_n(x),$$

откуда следуют двусторонние неравенства (7). Аналогично двусторонние неравенства (8) получаются из оценок

$$\omega_{\mathcal{M}}^{+} a_0 - T_n''(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j^{+} T_n(t-\lambda_j^{+}) \geq \omega_{\mathcal{M}}^{+} \min_x T_n(x),$$

$$-\omega_{\mathcal{M}}^{-} a_0 + T_n''(t) = \sum_{j=1}^{n} (-X_j^{-}) T_n(t-\lambda_j^{-}) \geq -\omega_{\mathcal{M}}^{-} \min_x T_n(x).$$

**Замечания.** Методы построения многочленов, на которых достигаются экстремальные значения АФО, предложены в [2, 3]. Здесь мы ограничимся двумя примерами равенств (9), соответствующими приведенной выше матрице $G_4(\omega)$.

$$\mathcal{S}_{+}(t) = 0.0385 + 0.0313\cos(3t) + 0.0300\cos(2t) + 0.0373\cos(t),$$

$$\mathcal{S}_{-}(t) = 0.0347 - 0.0312\cos(3t) - 0.0208\cos(2t) + 0.0174\cos(t).$$

В рассматриваемой задаче можно оценить значения $\omega_{\mathcal{M}}^{\pm}$, пользуясь теоремой Адамара о невырожденности матриц со строго доминирующей диагональю (см., например, [8]). Именно, если модуль диагонального элемента $|\omega|$ в каждой строке матрицы $G_{n+1}(\omega)$ больше суммы модулей остальных элементов этой же строки, то $\det G_{n+1}(\omega) \neq 0$. В рассматриваемом случае это означает, что

$$|\omega_{\mathcal{M}}^{\pm}(n)| < \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Вычисления показывают, что, скорее всего, порядок роста $\mathrm{const}\, n^3$ для $|\omega_{\mathcal{M}}^{\pm}(n)|$ является точным. Этим, в частности, рассматриваемый тип неравенств отличается от классических неравенств $\|T_n''\| \leq n^2 \|T_n\|$ (С. Н. Бернштейн, М. Рисс, С. Б. Стечкин).

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4) и РФФИ (в рамках научного проекта No 20-31-90010).

**Литература**

1. *Danchenko V. I.* Extraction of Pairs of Harmonics from Trigonometric Polynomials by Phase-Amplitude Operators / V. I. Danchenko, D. Ya. Danchenko // J. of Math. Science. – 2018. – Vol. 232, № 12. – P. 322–337.

2. *Васильченкова Д. Г.* Выделение гармоник из тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами / Д. Г. Васильченкова, В. И. Данченко // Алгебра и анализ. – 2020. – Vol. 32, № 2. – P. 21–44.

3. *Васильченкова Д. Г.* Выделение нескольких гармоник из тригонометрических многочленов. Неравенства типа Фейера / Д. Г. Васильченкова, В. И. Данченко // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. – 2020. – Т. 308. – С. 101–115.

4. *Grenander U.* Toeplitz forms and their applications / U. Grenander, G. Szegö – New York : Chelsea Publishing Company, 1984. – 245 p.

5. *Pisarenko V. F.* The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function / V. F. Pisarenko // Geophys. J. R. Astr. Soc. – 1973. – № 33. – P. 347–366.

6. *Beylkin G.* On Generalized Gaussian Quadratures for Exponentials and Their Applications / G. Beylkin, L. Monzón // Applied and Computational Harmonic Analysis. – 2002. – № 12. – P. 332–373.

7. *Egervari E. V.* Einige Extremalprobleme im Bereiche der Trigonometrischen Polynome / E. V. Egervari, O. Szasz // Mathematische Zeitschrift. – 1928. – Vol. 27, № 1. – P. 641–652.

8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 559 с.

УДК 51-72:538.913:519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ЗА СЧЕТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИСЛОКАЦИИ В РЕЛЬЕФЕ ПАЙЕРЛСА БЕЗДИССИПАТИВНОГО КРИСТАЛЛА

**В. В. Дежин**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В данной работе рассмотрено излучение упругих волн (акустическая эмиссия) бесконечной дислокацией, совершающей малые изгибные колебания под действием внешних воздействий. Торможение дислокационных колебаний средой не учитывалось. Исследовались краевая и винтовая дислокации. Для решения задачи записана обратная обобщенная восприимчивость бесконечной дислокации с учетом влияния рельефа Пайерлса. Установлено, что условие излучения упругих волн дислокацией выполняется для двух диапазонов значений компонент волнового вектора вдоль линии дислокации. Получены выражения для среднего значения энергии, излучаемой в единицу времени на единицу длины дислокации. Найдено внутреннее трение, вызванное радиационными потерями при изгибных колебаниях дислокации. Проведен численный расчет и построены соответствующие графики на примере кристалла алюминия.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, дислокация, рельеф Пайерлса, бездиссипативный кристалл, обобщенная восприимчивость, изгибные колебания, излучение упругих волн, дислокационное внутреннее трение.

## Введение

Торможение прямолинейной винтовой дислокации, связанное с излучением упругих волн колеблющейся дислокацией, впервые было исследовано Эшелби в статьях [1, 2]. В работах [3, 4] рассмотрено излучение упругих волн колеблющимся дислокационным перегибом. В статьях [5, 6] получены общие соотношения, связывающие поля излучения с потоком дислокаций, найдена формула для полной энергии упругих волн, излучаемых системой движущихся дислокаций. В работе [7] рассмотрено колебание дислокации по синусоидальному закону и получены выражения для скорости излучения энергии на единицу длины краевой и винтовой дислокаций. Но в этой статье амплитуда смещения дислокации считалась постоянной. Дислокационные колебания также рассматривались в работах [8–10]. В них получено уравнение движения дислокации, содержащее мнимый член, соответствующий радиационному трению. Задача расчета силы радиационного торможения дислокационной петли произвольной формы решена Нациком в статье [11]. В дальнейших исследованиях [12–17] были получены выражения для излучения системы прямолинейных параллельных дислокаций, излучения при аннигиляции прямолинейных дислокаций противоположного знака, излучения дислокаций, выходящих на поверхность кристалла, излучения при аннигиляции круговых призматических дислокаций, излучения источника Франка-Рида. В обзоре [18] приведены более поздние результаты изучения дислокационных колебаний и излучения упругих волн. Однако в рассмотренных исследованиях не исследовались произвольные изгибные колебания дислокации, возникающие под действием внешней силы. В работе [19] на основе лагранжевого формализма получены уравнения, описывающие малые колебания дислокации. Используя эти результаты, были изучены изгибные колебания и затухание дислокаций [20–23]. В данной статье с использованием результатов [19–23] найдем энергию излучения упругих волн при изгибных колебаниях бесконечной дислокации и получим выражение для дислокационного амплитудно-независимого внутреннего трения. Для проверки найденных результатов проведем численный расчет и построим соответствующие графики на примере кристалла алюминия.

## 1. Излучение упругих волн и внутреннее трение за счет изгибных колебаний краевой дислокации

Рассмотрим бесконечную краевую дислокацию, совершающую малые изгибные колебания в долине Пайерлса под действием внешних воздействий. Вдоль линии дислокации проведем ось $Oz$. Сопротивление среды (фононное и электронное торможение) не учитываем. Используя результаты работ [19, 23], запишем обратную обобщенную восприимчивость краевой дислокации с учетом влияния рельефа Пайерлса:

$$\alpha^{-1}(k_z,\omega)=\pi\sigma_P-\frac{\mu b_e^2}{8\pi}\left[-(1+\gamma)k_z^2+\frac{\omega^2}{c_t^2}\ln\frac{k_m^2}{k_z^2-\omega^2/c_t^2}+\gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2}-2k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{k_z^2-\omega^2/c_l^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{k_z^2-\omega^2/c_t^2}{k_z^2-\omega^2/c_l^2}\right]. \qquad (1)$$

Здесь $k_z$ – составляющая волнового вектора вдоль линии дислокации, $\omega$ – частота колебаний дислокации, $\sigma_P$ – напряжение Пайерлса, $\mu$ – модуль сдвига, $b_e$ – величина вектора Бюргерса краевой дислокации, $c_t$ и $c_l$ – скорости поперечных и продольных звуковых волн, $k_m$ – максимальное волновое число, $\gamma=c_t^2/c_l^2$. Излучение упругих волн дислокацией приводит к появлению мнимой части в выражении (1). Видно, что мнимая часть в (1) возникает при выполнении условий $|k_z|<\omega/c_l$ или $\omega/c_l<|k_z|<\omega/c_t$. Рассмотрим оба случая по отдельности.

### *1.1. Нахождение выражений, описывающих излучение упругих волн и внутреннее трение при $|k_z|<\omega/c_l$*

В этом случае формула (1) для обратной обобщенной восприимчивости бесконечной краевой дислокации примет вид

$$\alpha_1^{-1}(k_z,\omega)=-\frac{\mu b_e^2}{8\pi}\left[-8\pi^2\frac{\sigma_P}{\mu b_e^2}-(1+\gamma)k_z^2+\frac{\omega^2}{c_t^2}\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_t^2-k_z^2}+\gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2}-2k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_l^2-k_z^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{\omega^2/c_t^2-k_z^2}{\omega^2/c_l^2-k_z^2}\right]-i\frac{\mu b^2}{8}\left[\frac{\omega|\omega|}{c_t^2}+\gamma\left(\frac{\omega|\omega|}{c_l^2}-2k_z^2\right)\right]. \qquad (2)$$

Чтобы найти среднюю энергию, излучаемую в единицу времени на единицу длины краевой дислокации, воспользуемся формулой из книги [24] и выражением (2):

$$W_1=\frac{\omega}{2}\operatorname{Im}\alpha_1(k_z,\omega)|f_0|^2=\frac{4\pi^2\omega}{\mu}\sigma^2\left[\frac{\omega^2}{c_t^2}+\gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2}-2k_z^2\right)\right]\times$$

$$\times\left\{\left[-8\pi^2\frac{\sigma_P}{\mu b_e^2}-(1+\gamma)k_z^2+\frac{\omega^2}{c_t^2}\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_t^2-k_z^2}+\gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2}-2k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_l^2-k_z^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{\omega^2/c_t^2-k_z^2}{\omega^2/c_l^2-k_z^2}\right]^2+\pi^2\left[\frac{\omega^2}{c_t^2}+\gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2}-2k_z^2\right)\right]^2\right\}^{-1}, \qquad (3)$$

где $f_0=\sigma b$ – амплитуда переменной внешней силы, действующей на дислокацию. Излучаемая энергия за период колебаний составляет $\Delta W_1=(2\pi/\omega)W_1$. Полная энергия колебаний единицы объема $W_0=\sigma_0^2/2\mu$, $\sigma_0$ равна амплитуде переменного напряжения в кристалле. Используя выражение (3), получим внутреннее трение, вызванное радиационными потерями при изгибных колебаниях краевой дислокации

$$Q_1^{-1} = \frac{\Delta W_1}{2\pi W_0}\rho_d = 8\pi^2\rho_d\theta\left[\frac{\omega^2}{c_t^2} + \gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - 2k_z^2\right)\right]\times$$

$$\times\left\{\left[-8\pi^2\frac{\sigma_P}{\mu b_e^2} - (1+\gamma)k_z^2 + \frac{\omega^2}{c_t^2}\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_t^2 - k_z^2} + \gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - 2k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_l^2 - k_z^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{\omega^2/c_t^2 - k_z^2}{\omega^2/c_l^2 - k_z^2}\right]^2 + \pi^2\left[\frac{\omega^2}{c_t^2} + \gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - 2k_z^2\right)\right]^2\right\}^{-1}. \tag{4}$$

Здесь $\rho_d$ – плотность дислокаций, $\theta = \sigma^2/\sigma_0^2$ – фактор ориентации дислокации. Подобные расчеты для прямолинейной дислокации, колеблющейся в рельефе Пайерлса, были выполнены в работе [23].

### *1.2. Нахождение выражений, описывающих излучение упругих волн и внутреннее трение при* $\omega/c_l < |k_z| < \omega/c_t$

Для этого случая формула (1) для обратной обобщенной восприимчивости бесконечной краевой дислокации примет вид

$$\alpha_2^{-1}(k_z,\omega) = -\frac{\mu b_e^2}{8\pi}\left[-8\pi^2\frac{\sigma_P}{\mu b_e^2} - (1+\gamma)k_z^2 + \frac{\omega^2}{c_t^2}\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_t^2 - k_z^2} + \gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - 2k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{k_z^2 - \omega^2/c_l^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{\omega^2/c_t^2 - k_z^2}{k_z^2 - \omega^2/c_l^2}\right] - i\frac{\mu b^2}{8}\left[\frac{\omega|\omega|}{c_t^2} - \frac{k_z^4c_t^2}{\omega|\omega|}\right]. \tag{5}$$

Используя формулу (5), как и в разделе 1.1, находим среднюю энергию, излучаемую в единицу времени на единицу длины краевой дислокации

$$W_2 = \frac{\omega}{2}\operatorname{Im}\alpha_2(k_z,\omega)|f_0|^2 = \frac{4\pi^2\omega}{\mu}\sigma^2\left[\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\right]\times$$

$$\times\left\{\left[-8\pi^2\frac{\sigma_P}{\mu b_e^2} - (1+\gamma)k_z^2 + \frac{\omega^2}{c_t^2}\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_t^2 - k_z^2} + \gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - 2k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{k_z^2 - \omega^2/c_l^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{\omega^2/c_t^2 - k_z^2}{k_z^2 - \omega^2/c_l^2}\right]^2 + \pi^2\left[\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\right]^2\right\}^{-1}. \tag{6}$$

Излучаемая энергия за период колебаний составляет $\Delta W_2 = (2\pi/\omega)W_2$. Используя выражение (6), получим внутреннее трение, вызванное радиационными потерями при изгибных колебаниях краевой дислокации

$$Q_2^{-1} = \frac{\Delta W_2}{2\pi W_0}\rho_d = 8\pi^2\rho_d\theta\left[\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\right]\times$$

$$\times\left\{\left[-8\pi^2\frac{\sigma_P}{\mu b_e^2} - (1+\gamma)k_z^2 + \frac{\omega^2}{c_t^2}\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_t^2 - k_z^2} + \gamma\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - 2k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{k_z^2 - \omega^2/c_l^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{\omega^2/c_t^2 - k_z^2}{k_z^2 - \omega^2/c_l^2}\right]^2 + \pi^2\left[\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\right]^2\right\}^{-1}. \tag{7}$$

### *1.3. Расчет дислокационного внутреннего трения для кристалла алюминия*

Для примера применения найденных формул рассмотрим кристалл алюминия. Он имеет гранецентрированную кубическую (ГЦК) кристаллическую решетку. Как известно скольжение дислокаций происходит преимущественно в плоскостях легкого скольжения. Ими являются плоскости, в которых атомы расположены наиболее плотно и расстояния между которыми велики. В ГЦК решетке это кристаллографические плоскости (1 1 1). Вектор Бюргерса в кристаллах с ГЦК решеткой направлен вдоль плотноупакованного направления типа [1 1 0], длина его равна кратчайшему расстоянию между атомами. Линии дислокаций расположены преимущественно вдоль плотноупакованных направлений. Если расположить кристалл с ГЦК решеткой в первом октанте системы координат, то для краевой дислокации будем иметь: $x/a + y/a + z/a = 1$ – плоскость скольжения, $\mathbf{b}_e = (a/2)(-1, 1, 0)$ – вектор Бюргерса, $b_e = a/\sqrt{2}$, $a$ – параметр решетки, $\boldsymbol{\tau} = (1, 1, -2)/\sqrt{6}$ – единичный вектор касательной к линии дислокации. Использованы следующие значения для алюминия: $c_t = 3130$ м/с, $c_l = 6400$ м/с, $b_e = 2.86 \cdot 10^{-10}$ м, $\sigma_P/\mu \approx 5 \cdot 10^{-5}$. Для других величин взяты значения: $\rho_d = 10^{10}$ м$^{-2}$, $\theta = 0.5$, $k_m = 10^{10}$ м$^{-1}$. На рис. 1 показана зависимость внутреннего трения от частоты, определяемая по формуле (4). Видно наличие пика внутреннего трения резонансного типа. Из рис. 1 также видно, что при увеличении $k_z$ происходит сдвиг вправо начала кривой зависимости $Q_1^{-1}(\omega)$. Это соответствует условию излучения упругих волн $|k_z| < \omega/c_l$.

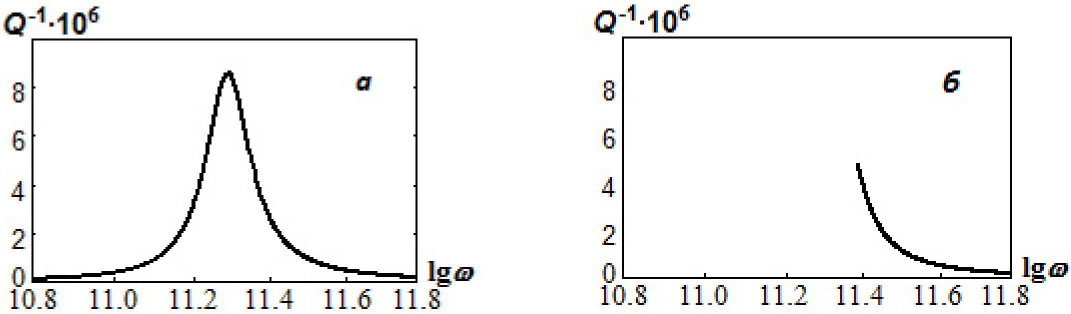



*Рис. 1. Частотная зависимость внутреннего трения за счет радиационного затухания изгибных колебаний краевой дислокации при условии $|k_z| < \omega/c_l$; а – $k_z = 10^3$ м$^{-1}$, б – $k_z = 10^{7.5}$ м$^{-1}$*

На рис. 2 показана зависимость внутреннего трения $Q_2^{-1}(\omega)$, определяемая по формуле (7). Из рис. 2 видно, что в соответствие с условием $\omega/c_l < |k_z| < \omega/c_t$ кривая зависимости $Q_2^{-1}(\omega)$ определена на некотором интервале значений частоты. При увеличении $k_z$ происходит сдвиг вправо этого интервала значений частоты и кривой зависимости. При определенных значениях $k_z$ наблюдается пик внутреннего трения резонансного типа.

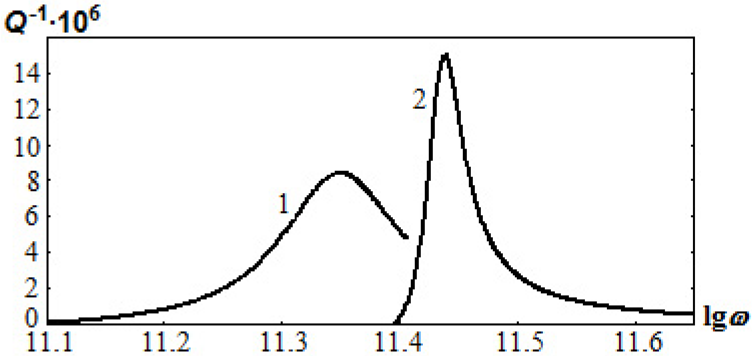



*Рис. 2. Частотная зависимость внутреннего трения при радиационном затухании изгибных колебаний краевой дислокации при условии $\omega/c_l < |k_z| < \omega/c_t$; 1 – $k_z = 10^{7.6}$ м$^{-1}$, 2 – $k_z = 10^{7.9}$ м$^{-1}$*

## 2. Излучение упругих волн и внутреннее трение за счет изгибных колебаний винтовой дислокации

Рассмотрим бесконечную винтовую дислокацию, совершающую малые изгибные колебания в долине Пайерлса под действием внешних воздействий. Вдоль линии дислокации проведем ось $Oz$. Сопротивление среды (фононное и электронное торможение) не учитываем. Используя результаты работ [19, 23], запишем обратную обобщенную восприимчивость винтовой дислокации с учетом влияния рельефа Пайерлса:

$$\alpha^{-1}(k_z,\omega)=\pi\sigma_P-\frac{\mu b_s^2}{8\pi}\left[-k_z^2+\left(\frac{\omega^2}{c_t^2}-3k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{k_z^2-\omega^2/c_t^2}+4\gamma k_z^2\ln\frac{k_m^2}{k_z^2-\omega^2/c_l^2}-\right.$$
$$\left.-4\frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{k_z^2-\omega^2/c_t^2}{k_z^2-\omega^2/c_l^2}\right]. \tag{8}$$

Здесь $b_s$ – величина вектора Бюргерса винтовой дислокации. Излучение упругих волн дислокацией приводит к появлению мнимой части в выражении (8). Видно, что мнимая часть в (8) возникает при выполнении условий $|k_z|<\omega/c_l$ или $\omega/c_l<|k_z|<\omega/c_t$ как и в случае краевой дислокации. Дальнейшее исследование проведем подобно краевой дислокации. В итоге получим для внутреннего трения при условии $|k_z|<\omega/c_l$:

$$Q_1^{-1}=\frac{\Delta W_1}{2\pi W_0}\rho_d=8\pi^2\rho_d\theta\left[\frac{\omega^2}{c_t^2}-(3-4\gamma)k_z^2\right]\times$$
$$\times\left\{\left[-8\pi^2\frac{\sigma_P}{\mu b_s^2}-k_z^2+\left(\frac{\omega^2}{c_t^2}-3k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_t^2-k_z^2}+4\gamma k_z^2\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_l^2-k_z^2}-4\frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{\omega^2/c_t^2-k_z^2}{\omega/c_l^2-k_z^2}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\pi^2\left[\frac{\omega^2}{c_t^2}-(3-4\gamma)k_z^2\right]^2\right\}^{-1}. \tag{9}$$

Для внутреннего трения при условии $\omega/c_l<|k_z|<\omega/c_t$ получим:

$$Q_2^{-1}=\frac{\Delta W_2}{2\pi W_0}\rho_d=8\pi^2\rho_d\theta\left[\frac{\omega^2}{c_t^2}-3k_z^2+4\frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\right]\times$$
$$\times\left\{\left[-8\pi^2\frac{\sigma_P}{\mu b_s^2}-k_z^2+\left(\frac{\omega^2}{c_t^2}-3k_z^2\right)\ln\frac{k_m^2}{\omega^2/c_t^2-k_z^2}+4\gamma k_z^2\ln\frac{k_m^2}{k_z^2-\omega^2/c_l^2}-4\frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\ln\frac{\omega^2/c_t^2-k_z^2}{k_z^2-\omega/c_l^2}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\pi^2\left[\frac{\omega^2}{c_t^2}-3k_z^2+4\frac{k_z^4c_t^2}{\omega^2}\right]^2\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Для примера применения найденных формул рассмотрим кристалл алюминия. Для винтовой дислокации в отличие от краевой будем иметь: $\mathbf{b}_s=(a/2)(-1,1,0)$ – вектор Бюргерса, $b_s=a/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{\tau}=(-1,1,0)/\sqrt{2}$ – единичный вектор касательной к линии дислокации, $\sigma_P/\mu\approx5\cdot10^{-4}$. На рис. 3 показана зависимость внутреннего трения от частоты, определяемая по формуле (9). Видно наличие пика внутреннего трения резонансного типа. Из рис. 3 также видно, что при увеличении $k_z$ происходит сдвиг пика вправо, а также начала кривой зависимости $Q_1^{-1}(\omega)$. Это соответствует условию излучения упругих волн $|k_z|<\omega/c_l$.

На рис. 4 показана зависимость внутреннего трения $Q_2^{-1}(\omega)$, определяемая по формуле (10). Из рис. 4 видно, что в соответствие с условием $\omega/c_l<|k_z|<\omega/c_t$ кривая зависимости $Q_2^{-1}(\omega)$ определена на некотором интервале значений частоты. При увеличении $k_z$ происходит сдвиг вправо этого интервала значений частоты и кривой зависимости. Наблюдается пик внутреннего трения резонансного типа.

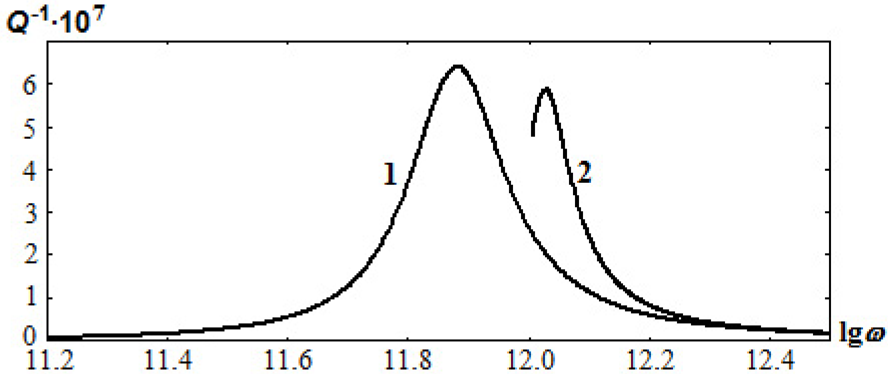



*Рис. 3. Частотная зависимость внутреннего трения за счет радиационного затухания изгибных колебаний винтовой дислокации при условии* $|k_z| < \omega/c_l$; *1 –* $k_z = 10^3$ *м*$^{-1}$, *2 –* $k_z = 10^{8.2}$ *м*$^{-1}$

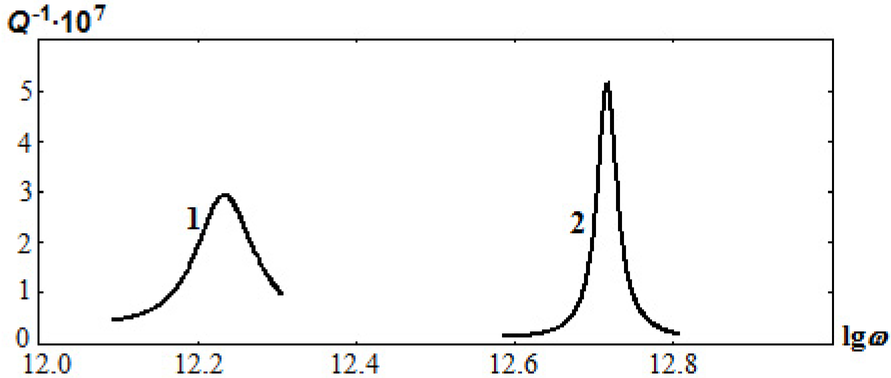



*Рис. 4. Частотная зависимость внутреннего трения при радиационном затухании изгибных колебаний краевой дислокации при условии* $\omega/c_l < |k_z| < \omega/c_t$; *1 –* $k_z = 10^{8.5}$ *м*$^{-1}$, *2 –* $k_z = 10^9$ *м*$^{-1}$

## Заключение

В результате математического моделирования и вычислительного эксперимента по расчету внутреннего трения получены следующие результаты.

1. Установлено наличие двух условий излучения упругих волн дислокацией.
2. Доказано существование пика внутреннего трения резонансного типа для краевой и винтовой дислокаций.
3. Для краевой дислокации при $|k_z| < \omega/c_l$ кривая зависимости $Q_1^{-1}(\omega)$ имеет одинаковый вид для различных значений $k_z$, но начало кривой смещается вправо. Для винтовой дислокации при $|k_z| < \omega/c_l$ пик внутреннего трения смещается вправо.
4. При $\omega/c_l < |k_z| < \omega/c_t$ с увеличением $k_z$ пик внутреннего трения возрастает и смещается вправо и для краевой и для винтовой дислокации.
5. В связи с более высоким значением напряжения Пайерлса для винтовой дислокации пик внутреннего трения наблюдается при более высоких частотах.
6. Пики внутреннего трения для краевой дислокации на порядок выше пиков внутреннего трения для винтовой дислокации.

## Литература


1. *Eshelby J. D.* Dislocations as a cause of mechanical damping in metals / J. D. Eshelby // Proceedings of the Royal Society. A. – 1949. – Vol. 197. – P. 396–416.
2. *Eshelby J. D.* The equation of motion of a dislocation / J. D. Eshelby // Physical Review. – 1953. – Vol. 90. – P. 248–255.

3. *Eshelby J. D.* The interaction of kinks and elastic waves / J. D. Eshelby // Proceedings of the Royal Society. A. – 1962. – Vol. 266. – P. 222–246.

4. *Lothe J.* Theory of dislocation mobility in pure slip / J. Lothe // J. Applied Physics. – 1962. – Vol. 33 – P. 2116–2125.

5. *Косевич А. М.* Поля деформаций в изотропной среде с движущимися дислокациями / А. М. Косевич // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1962. – Т. 42, № 1. – С. 152–162.

6. *Косевич А. М.* Динамическая теория дислокаций / А. М. Косевич // Успехи физических наук. – 1964. – Т. 84, № 4. – С. 579–609.

7. *Laub T.* The velocity of a wave along a dislocation / T. Laub, J. D. Eshelby // Philosophical Magazine. – 1966. – Vol. 14. – P. 1285–1293.

8. *Ninomiya T.* Dislocation vibration: effective mass and line tension / T. Ninomiya, Sh. Ishioka // J. Physical Society of Japan. – 1967. – Vol. 23 – P. 361–372.

9. *Ninomiya T.* Dislocation vibration and phonon scattering / T. Ninomiya // J. Physical Society of Japan. – 1968. – Vol. 25 – P. 830–840.

10. *Ninomiya T.* Eigenfrequencies in a dislocated crystal / T. Ninomiya // Fundamental aspects of dislocations theory. Vol. 1 / eds. J. A. Simmons, R. de Wit, R. Bullough. – New York: National Bureau of Standards Special Publication 317, 1970. – P. 315-357.

11. *Нацик В. Д.* Радиационное торможение дислокационных петель / В. Д. Нацик // Физика Твердого Тела. – 1966. – Т. 8, № 7. – С. 2244–2246.

12. *Нацик В. Д.* Излучение звука дислокацией, выходящей на поверхность кристалла / В. Д. Нацик // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1968. – Т. 8, № 6. – С. 324–328.

13. *Нацик В. Д.* Звуковое излучение при аннигиляции дислокаций / В. Д. Нацик, К. А. Чишко // Физика Твердого Тела. – 1972. – Т. 14, № 11. – 3126–3132.

14. *Нацик В. Д.* Динамика и звуковое излучение дислокационного источника Франка-Рида / В. Д. Нацик, К. А. Чишко // Физика Твердого Тела. – 1975. – Т. 17, № 2. – 342–345.

15. *Нацик В. Д.* Акустическая эмиссия дислокаций, выходящих на поверхность кристалла / В. Д. Нацик, К. А. Чишко // Акустический журнал. – 1982. – Т. 28, №3. – С. 381–389.

16. *Чишко К. А.* Переходное излучение звука винтовой дислокацией, выходящей на поверхность изотропной пластины / К. А. Чишко // Физика Твердого Тела. – 1989. – Т. 31, № 1. – С. 223–229.

17. *Чишко К. А.* Акустическая эмиссия винтовой дислокации, выходящей на внутреннюю границу раздела в кристалле / К. А. Чишко // Физика Твердого Тела. – 1993. – Т. 35, № 11. – С. 2901–2907.

18. *Виноградов А. Ю.* Природа акустической эмиссии при деформационных процессах в металлических материалах / А. Ю. Виноградов, Д. Л. Мерсон // Физика низких температур. – 2018. – Т. 44, № 9. – С. 1186–1195.

19. *Батаронов И. Л.* Влияние центров пиннинга и рельефа Пайерлса на обобщенную восприимчивость дислокаций в реальных кристаллах / И. Л. Батаронов, В. В. Дежин, А. М. Рощупкин // Известия РАН. Серия Физическая. – 1993. – Т. 57, № 11. – С. 97–105.

20. *Рощупкин А. М.* Обобщенная восприимчивость дислокации в диссипативном кристалле / А. М. Рощупкин, И. Л. Батаронов, В. В. Дежин // Известия РАН. Серия Физическая. – 1995. – Т. 59, № 10. – С. 12–16.

21. *Bataronov I. L.* On the natural small vibrations of dislocation in an isotropic medium / I. L. Bataronov, V. V. Dezhin // J. Physics: Conference Series. – 2017. – V. 936. – 012035.

22. *Dezhin V. V.* On damping of screw dislocation bending vibrations in a dissipative crystal: limiting cases / V. V. Dezhin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – V. 327, № 3. – 032017.

23. *Батаронов И. Л.* Обобщенная восприимчивость и колебания дислокации в рельефе Пайерлса / И. Л. Батаронов, В. В. Дежин // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2018. – Т. 15, № 4. – С. 500–505.

24. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Часть 1 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1976. – 584 с.

УДК 004.942; 519.6

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СПИНОВЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ ТРЁХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

**А. И. Денисенко, А. А. Крыловецкий, И. С. Черников**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается проблема распознавания трехмерных моделей методами глубокого обучения. Для описания трехмерных поверхностей предлагается использовать дескрипторы формы — интегральные спиновые изображения. Проведены вычислительные эксперименты на базе моделей Princeton Shape Benchmark, для исследования выбраны сверточные нейронные сети LeNet-5, AlexNet и ResNet. Показано, что представление трехмерных объектов с помощью спиновых изображений позволяет применять технологии глубокого обучения для их классификации. Однако при большом количестве классов точность классификации падает. Предполагается, что усовершенствование архитектуры сети наряду с расширением набора признаков для описания моделей может повысить точность классификации.

**Ключевые слова:** трёхмерная модель; классификация; распознавание; глобальные дескрипторы формы; спиновые изображения; интегральные спиновые изображения; нейронная сеть; глубокое обучение.

## Введение

В настоящее время, в связи с широким применением систем компьютерного зрения в самых различных сферах нашей жизни, актуальными являются задачи распознавания изображений различных объектов с максимально высокой точностью. Высокие требования к результатам идентификации элементов изображений предъявляются в системах управления автономными транспортными средствами, при анализе медицинских изображений. Современные системы компьютерного зрения, как правило, оснащены несколькими датчиками изображений в видимом диапазоне электромагнитных излучений, в дополнении к которым могут использоваться инфракрасные и ультразвуковые датчики. Такие системы способны строить монохромные трехмерные модели окружающего мира.

В медицине широко используются такие виды исследований, как магнитно-резонансная томография и ультразвуковое исследование, результатом которых являются монохромные трёхмерные изображения. Их анализ позволяет поставить диагноз пациента и успешно применяется для обнаружения различных злокачественных изменений [1]. В промышленности трёхмерные модели используются для контроля качества (расхождений в физических параметрах, недостающих элементов и т.п.) [2]. Технология лидар, используемая в системах управления автономными транспортными средствами [3], позволяет строить монохромные трёхмерные модели удаленных объектов с помощью активных оптических систем, использующих явления поглощения и рассеяния света. Распознавание трёхмерных изображений в данном случае позволит обнаруживать препятствия на пути движения автономных транспортных средств, светофоры, пешеходов и т.п.

Анализ рассмотренных выше областей применения методов распознавания трёхмерных моделей объектов позволяет выдвинуть к ним ряд требований. Прежде всего, это требование к быстродействию определения объекта. Во многих отраслях, прежде всего в производстве, данные должны обрабатываться в режиме реального времени. Другим требованием является требование точности, то есть уменьшения количества ошибок первого и второго рода при классификации объектов. Кроме того, методы распознавания должны быть инвариантны по отношению к размеру, расположению и углу поворота обрабатываемых объектов.

Существующие в настоящее время подходы к классификации трёхмерных моделей можно разделить на несколько групп в зависимости от используемого представления модели объекта. Первая группа методов [4, 5] использует для распознавания «сырые» данные — трёхмерную модель, представленную в виде облака точек. Такие данные получаются непосредственно оптическими сенсорами, однако их обработка может быть сложной из-за наличия шумов и отсутствия связей между точками. Другим подходом является представление модели в виде сплошного объекта с помощью вокселей или октодеревьев [6, 7]. В общем случае, эти структуры данных содержат для каждой точки пространства информацию о её принадлежности модели. Недостатком этого подхода является необходимость в использовании большого количества памяти для представления модели, что делает работу с данными высокого разрешения практически невозможной. Ещё одним подходом является использование полигональной сетки поверхности модели [8]. Это представление требует гораздо меньше памяти и меньше времени на обработку. Недостатком этого подхода является то, что сетки зачастую являются сложными и неравномерными, что усложняет обучение и требует дополнительной обработки модели.

В настоящее время становится популярным подход, в котором при решении задач компьютерного зрения используется не сама трёхмерная модель, а дескрипторы формы её поверхности. Одним из зарекомендовавших себя локальных дескрипторов поверхности являются спиновые изображения [9]. В работе [10] рассмотрены метод вычисления интегрального спинового изображения, которое может быть использовано в качестве глобального дескриптора поверхности, и его применения для решения задач автоматического совмещения поверхностей в системах компьютерного зрения [11] и поиска 3D моделей [12].

В данной работе рассматривается применимость интегральных спиновых изображений для решения задач классификации трёхмерных моделей с помощью нейронных сетей глубокого обучения. Работа системы классификации 3D моделей может быть разбита на два независимых этапа: онлайн и офлайн (рис. 1). На офлайн этапе происходит обучение нейронной сети с помощью моделей из обучающего множества данных. Онлайн этап – это непосредственное использование системы, при котором происходит вычисление дескриптора модели-запроса, предъявление его на вход обученному в офлайн фазе классификатору и получение результата в виде вероятностей принадлежности модели-запроса тому или иному классу.

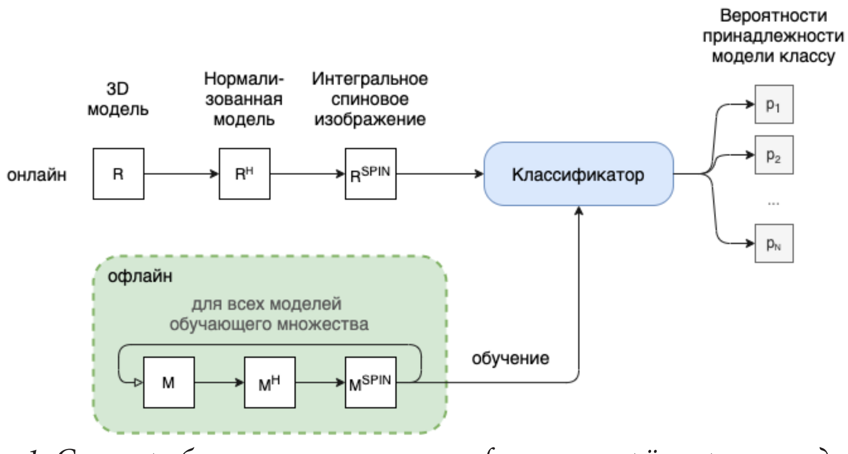



*Рис. 1. Схема работы системы классификации трёхмерных моделей*

Данная статья структурирована следующим образом. В разделе 1 описывается идея спиновых изображений и построение интегральных спиновых изображений для модели. Раздел 2 содержит описания ряда архитектур нейронных сетей глубокого обучения, успешно применяемых для классификации обычных двумерных изображений. В разделе 3 приводятся результаты экспериментов по классификации трёхмерных объектов, описанных с помощью спиновых изображений.

## 1. Вычисление глобального дескриптора поверхности модели

Первым этапом как в онлайн, так и оффлайн фазе обучения является обработка входного изображения, результатом которой является глобальный дескриптор поверхности, который предъявляется на вход нейронной сети. Глобальные дескрипторы поверхности являются расширением понятия локальных дескрипторов, которые используются для описания формы поверхности модели в окрестности выбранной точки. Одним из зарекомендовавших себя локальным дескриптором формы являются спиновые изображения.

### *1.1. Спиновые изображения*

Для построения спиновых изображений вводится цилиндрическая система координат без учета полярного угла [9]. В качестве начала координат выбирается опорная точка модели $O$, а в качестве оси — прямая, направленная вдоль нормали $\mathbf{n}$ к поверхности в опорной точке $O$. Тогда для произвольной точки $A$ координаты $(\alpha, \beta)$ в рассматриваемой системе координат (рис. 2) находятся следующим образом:

$$\alpha = \sqrt{\left\|\mathbf{r_A} - \mathbf{r_O}\right\|^2 - (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r_A} - \mathbf{r_O}))}, \qquad \beta = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r_A} - \mathbf{r_O}), \tag{1}$$

где $\mathbf{r_O}$ — радиус-вектор точки $O$ в первоначальной трехмерной системе координат, $\mathbf{r_A}$ — радиус-вектор точки $A$ в трехмерной системе координат.

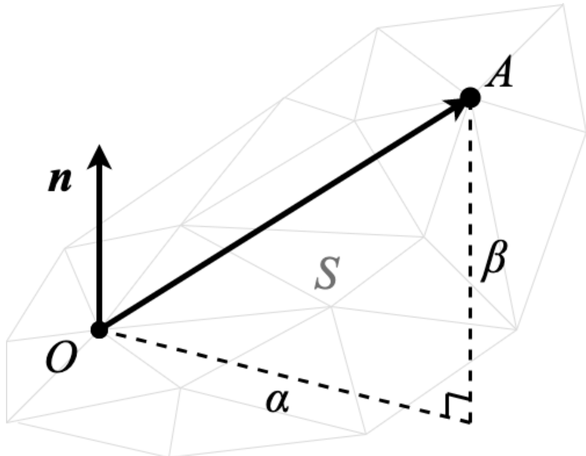



*Рис. 2. Относительные цилиндрические координаты $\alpha$ и $\beta$ точки A, принадлежащей поверхности $S$ трёхмерной модели, относительно опорной точки $O$*

Таким образом, точка $A(\alpha, \beta)$ лежит на окружности радиуса $\alpha$ с центром в точке $O$ на расстоянии $\beta$ от точки $O$ вдоль её нормали.

Окрестность опорной точки $O$ разбивается на так называемые корзины по значениям координат $\alpha$ и $\beta$. Получаемые корзины имеют форму трехмерных колец (рис. 3). В результате точки, имеющие близкие относительные координаты $\alpha$ и $\beta$, попадают в одну корзину. Количество точек, попавших в каждую корзину, можно представить в виде двумерной матрицы. Полученная матрица представляет собой спиновое изображение окрестности опорной точки.

Репрезентативность спинового изображения напрямую зависит от разрешения трехмерной модели. Разрешение модели определяется как среднее значение длин всех её рёбер. Если в рассматриваемой окрестности разрешение неравномерно, то в ячейках матрицы спинового изображения, соответствующим областям с тесным расположением точек, значение будет значительно больше, чем в ячейках, соответствующим разреженным областям. Поэтому перед вычислением спиновых изображений, необходимо унифицировать разрешение модели [9].

Для этого могут быть использованы различные алгоритмы, которые основываются на операциях разбиения и сворачивания рёбер модели. В результате получается модель, аналогичная исходной, в которой длины рёбер лежат строго в заданном диапазоне.

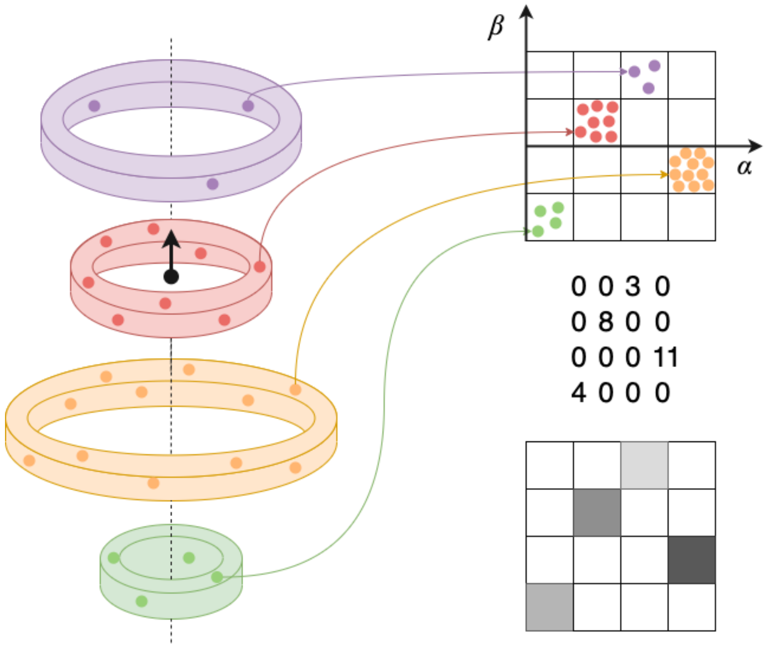



*Рис. 3. Корзины спинового изображения*

### *1.2. Интегральные спиновые изображения*

Идею спиновых изображений можно расширить для получения глобальных дескрипторов поверхности [12]. Для этого вместо точек в окрестности опорной точки следует рассматривать все точки модели.

Для построения обычного спинового изображения необходимо выбрать из всех точек модели опорную и определить координаты вектора нормали к поверхности модели в этой точке. В случае интегральных спиновых изображений также требуется определить опорную точку и вектор таким образом, чтобы спиновые изображения, вычисленные для идентичных моделей, были одинаковыми. Кроме того, интегральное спиновое изображение должно быть инвариантно масштабу модели, поэтому модель должна быть предварительно нормализована.

Нормализация модели включает в себя оптимальное масштабирование и унификацию разрешения модели. Унификация разрешения осуществляется таким же образом, как и для локальных спиновых изображений.

Две модели имеют одинаковый масштаб, если средние отклонения принадлежащих им точек будут равны единице. Поэтому оптимальное масштабирование будет иметь коэффициент:

$$w = \frac{1}{\sqrt{D}}, \tag{2}$$

где $D$ — среднее отклонение точек модели. При масштабировании модели с приведенным коэффициентом, среднее отклонение точек модели будет равно единице.

Опорная точка для каждой модели должна определяться одинаковым образом. Поэтому целесообразно в качестве опорной точки выбрать центр масс трёхмерной модели — среднее арифметическое координат всех точек модели. У похожих моделей центры масс расположены близко к другу, поэтому при правильном выборе опорных векторов спиновые изображения, построенные в этих точках, будут похожи. В связи с выбором опорной точки является целесообразным осуществить параллельный перенос модели на вектор трансляции, равный радиус-вектору центра масс модели.

Опорный вектор выбирается с помощью метода главных компонент (PCA). В данном методе определение главных компонент многомерных данных сводится к вычислению собственных значений и собственных векторов ковариационной матрицы этих данных. Элементами ковариационной матрицы $C$ для центрированного облака точек в трёхмерном пространстве будет

$$C_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} p_k^{(i)} \cdot p_k^{(j)}, \tag{3}$$

где $p_k^{(i)}$ и $p_k^{(j)}$ — $i$-я и $j$-я координаты точки $p_k$. Матрица $C$ в случае трёхмерной модели будет размерности три. Поэтому она имеет три собственных вектора и три собственных значения. В качестве опорного вектора удобно выбрать тот собственный вектор, которому соответствует наибольшее собственное значение.

## 2. Рассматриваемые архитектуры нейронных сетей

Свёрточная нейронная сеть состоит из одного или нескольких чередующихся между собой слоёв свёртки и слоёв субдискретизации, после которых следует один или несколько полностью соединенных слоя и выходной слой.

Существует множество различных архитектур свёрточных нейронных сетей. В данной статье мы рассмотрим применение для распознавания трёхмерных моделей следующих архитектур, хорошо зарекомендовавших себя в задачах распознавания двухмерных изображений: LeNet-5, AlexNet и ResNet.

### *2.1. LeNet-5*

LeNet-5 [13] является свёрточной нейронной сетью, состоящей из 7 слоёв обучения. Среди них три слоя свертки, два слоя субдискретизации по среднему и два полностью соединенных слоя (рис. 4).

| Слой | Форма выходных данных слоя | Количество параметров для обучения |
|---|---|---|
| Входное изображение | (512, 512, 1) | |
| Слой свертки (5 x 5, шаг 2) | (508, 508, 6) | 156 |
| Слой субдискретизации по среднему (2 x 2, шаг 2) | (254, 254, 6) | 0 |
| Слой свертки (5 x 5, шаг 2) | (250, 250, 16) | 2416 |
| Слой субдискретизации по среднему (2 x 2, шаг 2) | (125, 125, 16) | 0 |
| Слой свертки (5 x 5, шаг 2) | (121, 121, 16) | 6416 |
| Полностью соединенный слой (84) | 84 | 19677588 |
| Полностью соединенный слой (*35*) | 35 | 2975 |

*Рис. 4. Архитектура LeNet-5 применительно к задаче классификации монохромных изображений размером 512×512 пикселей по 35 классам*

### *2.2. AlexNet*

Нейронная сеть AlexNet была разработана в 2012 году под руководством Крижевского [14]. Её архитектура (рис. 5) состоит из 8 слоёв: 5 слоёв свертки и 3 полностью соединенных слоёв. Одной из особенностей архитектуры — использование функции усеченного линейного преобразования ReLU в качестве функции активации.

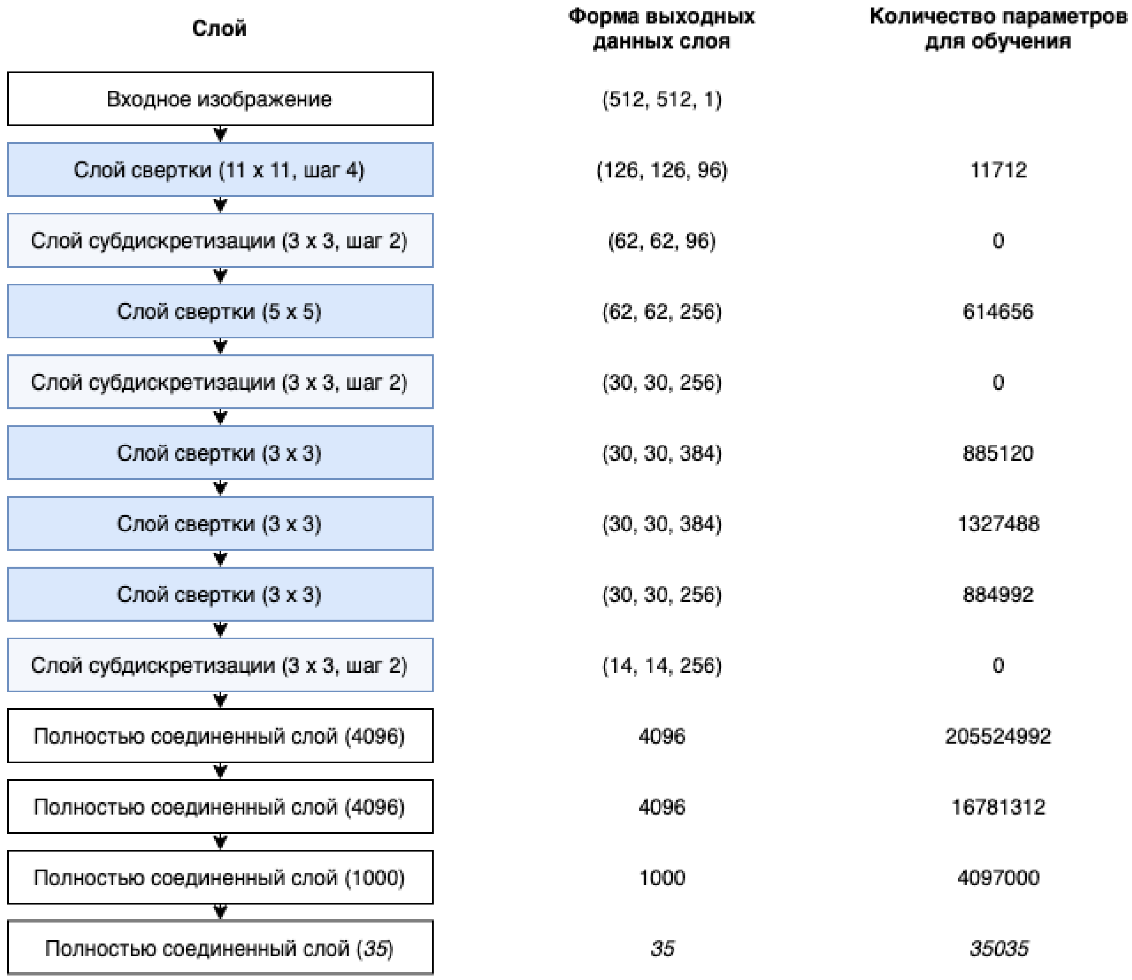



*Рис. 5. Архитектура AlexNet для классификации монохромных изображений размером 512×512 пикселей по 35 классам*

### *2.3. ResNet*

ResNet [15] — это сокращенное название для Residual Network — сети остаточного обучения. Была разработана Microsoft для решения проблемы уменьшения точности обучения при увеличении глубины свёрточной нейронной сети. В ResNet вводятся соединения быстрого доступа (рис. 6, а) которые пропускают один или несколько слоев и выполняют сопоставление идентификаторов. Сети архитектур ResNet состоят из повторяющихся остаточных слоёв (рис. 6, б).

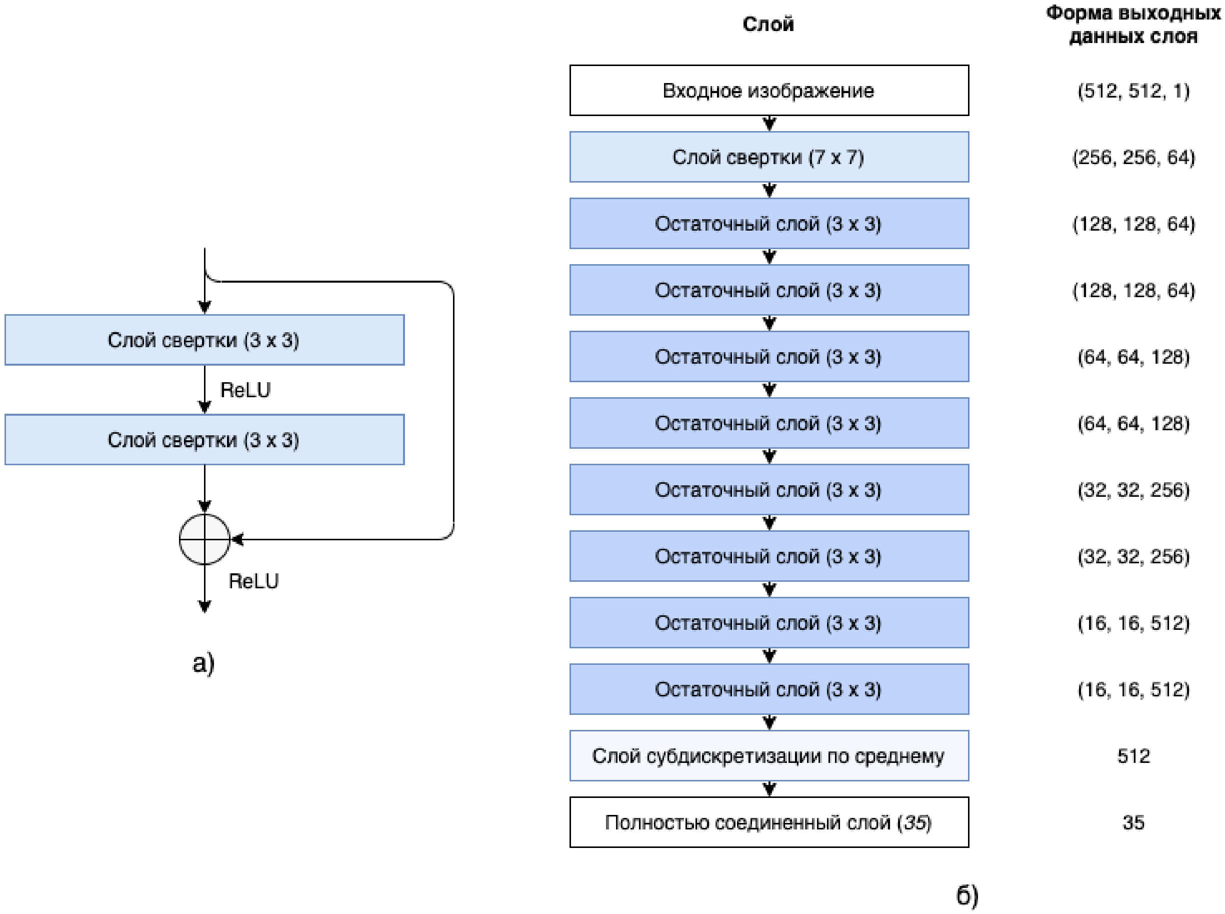



*Рис. 6. а) Архитектура остаточного слоя ResNet; б) архитектура ResNet-18 для классификации монохромных изображений размером 512×512 пикселей по 35 классам*

## 3. Экспериментальные исследования

В качестве исходных моделей для обучения была выбрана база Princeton Shape Benchmark [16], которая содержит 1814 трёхмерных моделей, которые могут быть использованы для обучения и верификации нейронной сети. Каждая модель в базе представляет собой описание поверхности модели в формате OFF. Для использования базы для обучения нейронной сети были проделаны следующие преобразования:

1. Для каждой модели был осуществлен её параллельный перенос на вектор трансляции, равный радиус-вектору центра масс модели. Таким образом, при построении спинового изображения для каждой модели можно использовать опорную точку в начале координат.

2. Каждая модель была оптимально масштабирована с использованием коэффициента, вычисленного по формуле (2).

3. Следующим шагом является унификация разрешения модели. Для всех моделей было выбрано единое разрешение, равное 0,01. В результате данной операции модели стали описываться большим количеством вершин, при этом все ребра модели имеют длину не больше, чем 0,01. Это преобразование позволяет построить репрезентативное спиновое изображение для модели.

4. Далее для каждой модели был вычислен опорный вектор способом, описанным в разделе 1.2, и построено интегральное спиновое изображение вдоль полученного вектора размером 512×512.

В результате был получен набор данных, состоящий из 1814 матриц, описывающих спиновые изображения трёхмерных моделей. Этот набор данных применялся для обучения нейронных сетей с архитектурами LeNet, AlexNet, ResNet, рассмотренными в разделе 2.

На рис. 7 представлен график изменения точности распознавания трёхмерных моделей по 2 классам в течение 20 эпох обучения с использованием архитектур LeNet, AlexNet и ResNet. Из графика видно, что лучшие результаты у сети AlexNet, немного хуже у ResNet, при использовании LeNet точность распознавания не превышает 80 %. Таким образом, не смотря на то, что результаты существенно зависят от архитектуры сети, спиновые изображения могут быть эффективно использованы для распознавания 2 классов с использованием нейронных сетей глубокого обучения.

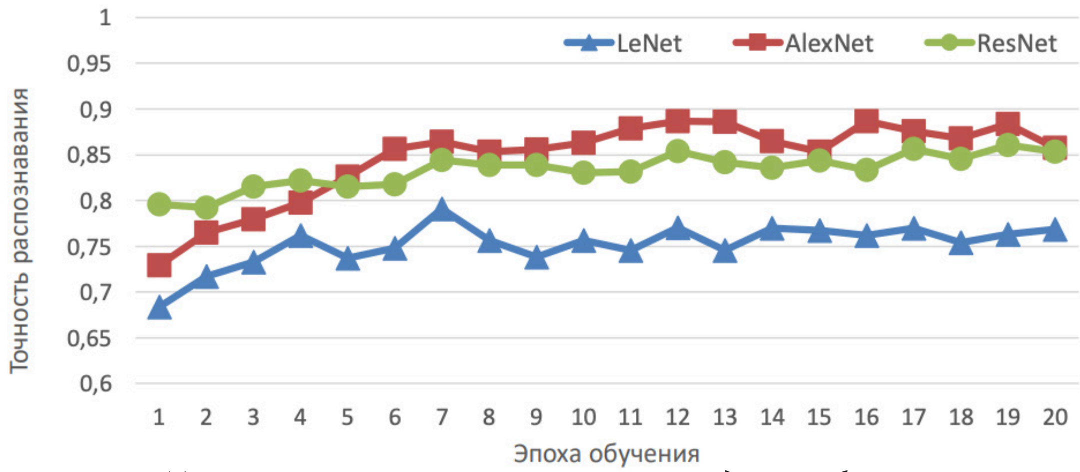



*Рис. 7. Точность распознавания трёхмерных моделей по k = 2 классам*

На рис. 8 представлены точности распознавания моделей по 6 классам для рассматриваемых архитектур. В этом случае, наилучшие результаты показывает сеть ResNet, у остальных двух архитектур результаты значительно хуже.

Можно сделать вывод, что точность распознавания существенно зависит от архитектуры сети и количества классов. С увеличением количества классов точность распознавания падает. Очевидно, это является следствием использования архитектур сетей, разработанных для других задач. Разработка сети походящей архитектуры представляется возможны способом повышения эффективности распознавания для большого числа классов. Кроме того, если дополнить описание модели другими признаками, например, информацией о цвете объекта, или глобальными дескрипторами формы, вычисленными в разных точках модели, можно ожидать значительного увеличения точности.

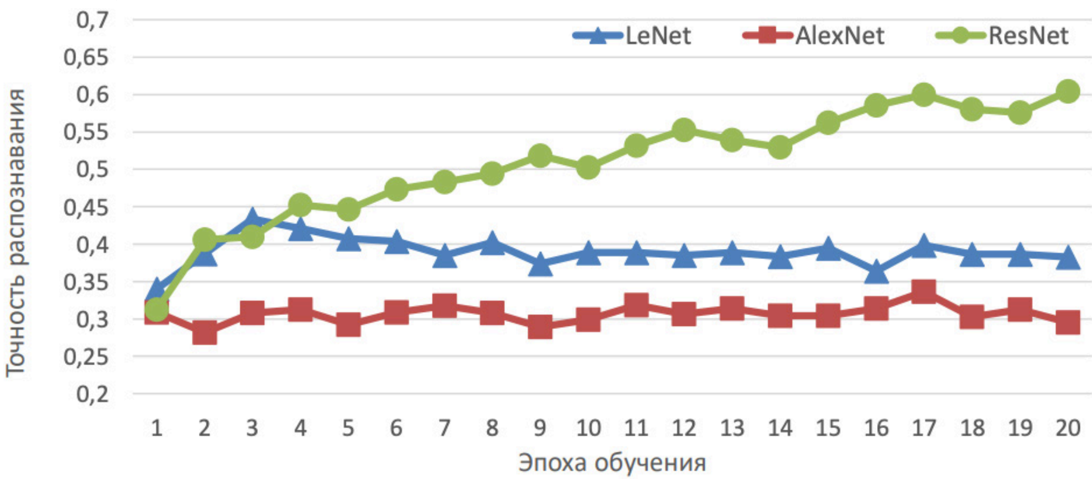



*Рис. 8. Точность распознавания моделей по k = 6 классам*

## Заключение

В настоящей работе были исследованы возможности применения интегральных спиновых изображений для задач классификации трёхмерных моделей с помощью нейронных сетей глубокого обучения существующих архитектур. Был проведён ряд вычислительных экспериментов, заключавшихся в обучении нейронных сетей с архитектурами, хорошо показавшими себя при распознавании двумерных изображений, для классификации трёхмерных моделей. Результаты экспериментов позволяют сделать вывод о том, что интегральные спиновые изображения при использовании существующих архитектур сетей позволяют с высокой точностью различать модели, относящиеся к 2-3 классам, но при увеличении количества классов точность распознавания начинает уменьшаться. Это означает, что спиновые изображения могут использоваться, в частности, как дополнительные признаки при решении задачи классификации. В дальнейших исследованиях планируется улучшить точность распознавания, расширив набор признаков трёхмерных моделей и усовершенствовав архитектуру нейронной сети глубокого обучения, что позволит эффективно проводить распознавание моделей для произвольного числа классов.

## Литература


1. *Svensson, C.-M.* Automated detection of circulating tumor cells with naive Bayesian classifiers / C.-M. Svensson, S. Krusekopf, J. Lücke, M. T. Figge // Cytometry Part A. – 2015. – Vol. 85(6). – P. 501–511.

2. *Asoudegi, E.* Computer vision for quality control in automated manufacturing systems / E. Asoudegi, Z. Pan // Computers & Industrial Engineering. – 1991. – Vol. 21. – P. 141–145.

3. *Lu, Y.* A survey on vision-based UAV navigation / Y. Lu, Z. Xue, G.-S. Xia, L. Zhang // Geo-spatial Information Science. – 2018. – Vol. 21, № 1. – P. 21–32.

4. *Charles, R. Q.* PointNet: Deep learning on point sets for 3D classification and segmentation / R. Q. Charles, H. Su, M. Kaichun, L. J. Guibas // Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR). – 2017. – Vol. 1. – P. 77–85.

5. *Erdogmus, N.* Spoofing in 2D face recognition with 3D masks and anti-spoofing with Kinect / N. Erdogmus and S. Marcel // Proc. IEEE 6th Int. Conf. Biometrics, Theory, Appl. Syst. (BTAS). – 2013. – Vol. 1. – P. 1–6.

6. *Wang, P.-S.* O-CNN: Octreebased convolutional neural networks for 3D shape analysis / P.-S. Wang, Y. Liu, Y.-X. Guo, C.-Y. Sun, X. Tong // ACM Trans. Graph. – 2017. – Vol. 36, № 4. – P. 1–11.

7. *Brock, A.* Generative and discriminative voxel modeling with convolutional neural networks / A. Brock, T. Lim, J. Ritchie, N. Weston // Proc. 3D Deep Learn. Workshop (NIPS). – 2016. – P. 1–9.

8. *Hanocka, R.* MeshCNN / R. Hanocka, A. Hertz, N. Fish, R. Giryes, S. Fleishman, D. Cohen-Or // ACM Trans. Graph. – 2019. – Vol. 38, № 4. – P. 1–12.

9. *Johnson, A. E.* Spin-Images: A Representation for 3-D Surface Matching. PhD thesis / A. E. Johnson; Carnegie Mellon University. – 1997. – 308 p.

10. *Крыловецкий, А. А.* Нормализация 3D-модели для вычисления интегрального спинового изображения / А. А. Крыловецкий, И. С. Черников // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – Таганрог, 2012. – № 6. – С. 135–139.

11. *Крыловецкий, А. А.* Автоматическое совмещение поверхностей: улучшенные спиновые изображения / А. А. Крыловецкий, И. С. Черников // Кибернетика и высокие технологии XXI века : XI Междунар. науч.-техн. конф., 12-14 мая 2010 г. – Воронеж, 2010. – Т. 2. – С. 781–790.

12. *Крыловецкий, А. А.* Интегральные спиновые изображения в системах поиска 3D моделей / А.А. Крыловецкий, И.С. Черников // ГрафиКон'2012 : труды 22-й Междунар. конф. по компьютерной графике и зрению, 1-5 окт., 2012 г., Москва. – Москва, 2012. – С. 214–217.

13. *Lecun, Y.* Gradient-based learning applied to document recognition / Y. Lecun, L. Bottou, Y. Bengio, P. Haffner // Proceedings of the IEEE. – 1998. – Vol. 86, № 11. – P. 2278–2324.
14. *Krizhevsky, A*. Imagenet classification with deep convolutional neural networks / A. Krizhevsky, I. Sutskever, G. E. Hinton // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2012. – Vol. 25. – P. 1097–1105.
15. *He, K.* Deep residual learning for image recognition / K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2016. – Vol. 1. – P. 770–778.
16. Princeton Shape Benchmark. – URL: http://shape.cs.princeton.edu/benchmark/ (дата обращения: 01.09.2020).

УДК 519.6

# ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ СЕТЕЙ НАРУЖНОГО ПРОТИВОПОЖАРНОГО ВОДОСНАБЖЕНИЯ В ГОРНОЙ МЕСТНОСТИ

**Е. В. Дмитриев[1], А. В. Калач[1,2], Е. А. Черепанов[2]**

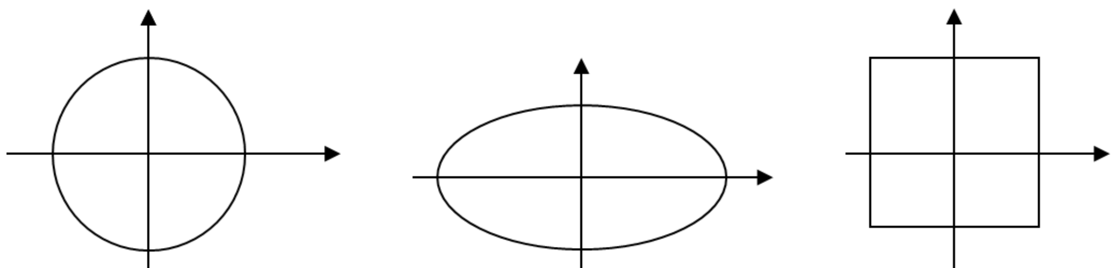
[1]*Воронежский институт ФСИН России*
[2]*Уральский институт государственной противопожарной службы МЧС России*

**Аннотация.** В работе предложены новые графические алгоритмы планирования, оптимального размещения насосов для сетей наружного пожаротушения и предложены математические модели оптимизации при построении различных сетей наружного противопожарного водоснабжения для микрорайонов, расположенных в горной местности (со значительными перепадами высот). Решение осуществляли путем построения точек Ферма-Торричелли-Штейнера для оптимизационной задачи построения пространственной тупиковой сети в трехмерном пространстве.
**Ключевые слова:** точка Ферма-Торричелли-Штейнера, оптимизация, алгоритм размещения, противопожарное водоснабжение.

## Введение

Рассматривались два способа водоотдачи — кольцевой и тупиковой сети наружного противопожарного водоснабжения (НППВ) в горной местности. Математически это означает, что все целевые функции должны содержать три переменные — $(x, y, z)$. А расположение конкретного ПГ определяется в пространстве тоже тремя координатами — $(x_k, y_k, z_k)$. При этом замена при проектировании реального рельефа на плоскую проекцию сверху не допустима в силу возможного существенного изменения длин проектируемых трасс.

Заметим, что в прикладных строительных и архитектурных задачах часто [1] возникает необходимость рассматривать ее в более обобщенных пространствах, чем пространство Эвклида. Например, если на плоскости (плоской местности) оптимальная зона обслуживания за фиксированное время из фиксированного центра — это круг фиксированного радиуса (рис. 1а).



*а* *б* *в*

*Рис. 1. Схематичное изображение зоны обслуживания системой наружного противопожарного водоснабжения*

Строительство коммуникаций и средств перемещения в горах сталкивается с проблемой, когда в вертикальном сечении плана по направлению вверх и вниз затраты одни (как правило больше) а по террасам (вправо и влево) другие (меньше). Оптимальной зоной может стать внутренность ромба или эллипса в зависимости от насыщенности объектов снабжения на периферии (рис 1 б, в). Фактически это означает целесообразность рассмотрения задачи оптимизации в координатных банаховых пространствах с различной, уже не эвклидовой метрикой. Метрикой порожденной различными единичными шарами.

## 1. Оптимизация кольцевого построения

Построение минимального по длине кольцевого соединения всех мест расположения ПГ в виде замкнутого графа, без циклов, в каждую точку которого входит и выходит одно ребре — это известная задача коммивояжера [2]. Эту задачу можно решать и в трехмерном пространстве. Граф без циклов проходящий через все точки по одному разу называется графом Гамильтона. Определение минимального по длине графа Гамильтона это задача коммивояжера. Эта задача может быть решена компьютерным перебором, или с помощью многих специальных известных алгоритмов [2]. Известно, что точное решение этой задачи для большого числа точек очень сложная задача. Оптимизационная постановка задачи относится к классу NP-трудных задач, впрочем, как и большинство её частных случаев. Задача коммивояжёра относится к числу трансвычислительных: уже при относительно небольшом числе вершин графа (66 и более) она не может быть решена методом перебора вариантов никакими теоретически мыслимыми компьютерами за время, меньшее нескольких миллиардов лет. Однако приближенное решение этой задачи доступно вычислительной технике. Вот некоторые примеры решения задачи. В марте 2005 года задача с 33 810 узлами была решена программой *Конкорд*: был вычислен путь длиной в 66 048 945 и доказано отсутствие более коротких путей. В апреле 2006 было найдено решение для экземпляра с 85 900 узлами. Используя методы декомпозиции, можно вычислить решения для случаев задачи с миллионами узлов, длина которых менее, чем на 1 % больше оптимальной. На практике, то есть в нашем случае число точек пропорционально числу строений в микрорайоне. То есть порядка 20–30. Эта задача решаема.

В нашем случае трассировка микрорайона состоящего из прямоугольных зданий расположенных достаточно близко друг к другу сводит на нет возможность проектирования в метрике Евклида (по прямой).

В этом случае задачу коммивояжера нужно решать не в метрике Евклида, а в метрике пространства $l_1^n$. И программу компьютерного решения задачи нужно писать, используя эту метрику. Расстояние между точками $M_k$ и $M_i$ в этой программе вычисляется с помощью формулы

$$\rho\left(M_k, M_i\right) = \left|x_k - x_i\right| + \left|y_k - y_i\right| + \left|z_k - z_i\right|. \tag{1}$$

Напомним метрику Евклида

$$\rho\left(M_k, M_i\right) = \sqrt{\left(x_k - x_i\right)^2 + \left(y_k - y_i\right)^2 + \left(z_k - z_i\right)^2}. \tag{2}$$

Однако компьютерная программа может работать с любой метрикой. А вычисление расстояния между точками в трехмерном пространстве определяет только весы задачи коммивояжера и совершенно не влияют на ее усложнение или решение. Математическая запись задачи: определить цикл Гамильтона минимальной длины или $\sum \rho\left(M_k, M_i\right) \to \min$, здесь точки $M_k$ и $M_i$ образуют определенный цикл Гамильтона.

## 2. Построение тупиковых сетей специального вида

Предположим, что нам разрешено строить насосную станцию нового типа. Эта станция специального действия, которая по сигналу избранно может осуществлять доставку ППВ в гидранты, которые расположены в непосредственной близости от очага возгорания и не посылать воду в остальные пункты тем самым, экономя все возможные затраты. Где должна находиться эта станция, что бы суммарная длина отрезков труб была наименьшей. Задача нахождения координат такой станции — это задача определения координат точки Ферма-Торричелли-Штейнера (ФТШ). В этом пункте в отличие от первой части работы планировка будет происходить в горной местности с достаточным перепадом высот.

Напомним общий вид задачи ФТШ: *в координатном банаховом пространстве определить координаты точки $M$ сумма расстояний, в метрике этого пространства, от которой до фиксированных $n$ точек $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ минимальна.*

Пространство можно предполагать любой размерности. Также возможно рассмотрение различных метрик для измерения расстояния.

Для трехмерного пространства и расстояния в метрике Евклида точки ФТШ (вернее их координаты) с помощью итерационных программ были найдены и графически проиллюстрированы в работах [3, 4].

Для полноты изложения приведем схемы алгоритма для этого случая.

Рассмотрим следующий алгоритм, который не будет зависеть от метрики, по которой будет происходить измерение расстояния и разобьем его на последовательные действия.

### 3. Алгоритм численного решения задачи в пространстве

Разобьем алгоритм на последовательные действия.

1. *Действие первое* — масштабирование исходных данных. Пусть $P_k = \left(x_k, y_k, z_k\right)$ $k = 1, 2, \ldots, n$ точки в трехмерном пространстве, исходные данные. Определим границы распространения этих точек. Пусть все точки лежат в первом квадранте и

$$\begin{aligned} &\min x_k = a, \quad \min y_k = b, \ \min z_k = c; \\ &\max\left(x_k - a\right) = A, \quad \max\left(y_k - b\right) = B, \quad \max\left(z_k - c\right) = C. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда преобразование координат

$$\hat{x} = \frac{x-a}{A}, \quad \hat{y} = \frac{y-b}{B}, \quad \hat{z} = \frac{z-c}{C}. \tag{4}$$

переводит все точки в единичный куб — $\left[0,1\right]^3$, в котором и будет строиться направленный поиск. Обратное преобразование даст координаты решения задачи. Обозначим точное решение задачи $M^* = (x^*, y^*, z^*)$.

2. *Действие второе* — вычисление значений целевой функции ( в зависимости от метрики — разной) в *узлах сетки* разбиения куба $\left[0,1\right]^3$. Каждую сторону куба разобьем на два равных интервалы длинной $|\Delta| = 0.5$, при этом сам куб разобьется на восемь равных кубиков. Узлами сетки разбиения куба будем называть центры этих восьми кубиков меньшего размера: $m_{i,j,k}(1) = \left(\frac{1}{4} + \Delta \times i, \frac{1}{4} + \Delta \times j, \frac{1}{4} + \Delta \times k\right)$, где $i = 0,1;$ $j = 0,1;$ $k = 0,1$. В этих точках мы последовательно вычисляем значение целевой функции $\Phi(m_{i,j}(1))$ и находим наименьшее значение. *На этом первый шаг закончен.*

Если точность вычисления, определение которой задается на местности, достаточна, то эта точка и признается решением. *Второй шаг начинается с третьего действия.*

3. *Действие третье* — поиск нужной нам точки теперь происходит в том из восьми квадратов, в центре которого целевая функция достигла своего минимума. По формулам (2) и (3) переходим к новому единичному кубу $\left[0,1\right]^3$ и повторяем действие второе. Узлами сетки разбиения нового куба будем называть центры новых кубиков еще меньшего размера — $m_{i,j,k}(2)$. В этих точках мы последовательно вычисляем значение целевой функции $\Phi(m_{i,j}(2))$ и находим наименьшее значение. Если точность достаточна, то эта точка и признается решением. Если нет, то все действия повторяются.

*Замечание.* Точность приближенного вычисления координат растет с показательной скоростью, как $\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^m}\right)$.

Для анализа возможности практического применения при трассировке в горной местности полученных в этих работах алгоритмов рассмотрим один из полученных в этих работах рисунков (рис. 2).

Предположим, что обслуженные точки — это расположенные рядом со зданиями в горной местности объекты водоснабжения (гидранты). Рассмотренный алгоритм не применим, так

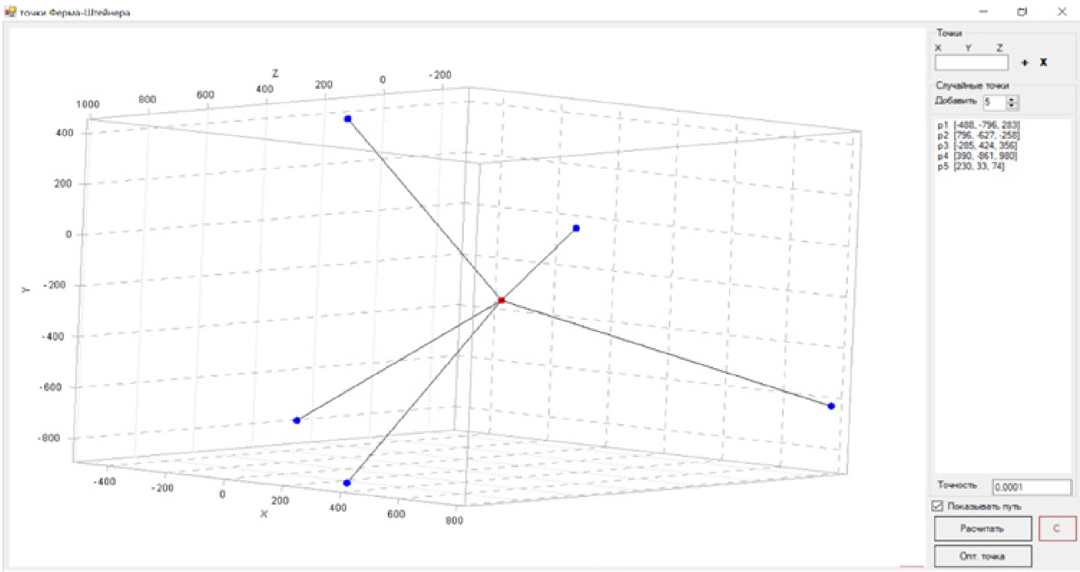


*Рис. 2 Схематичное изображение расположения объектов водоснабжения относительно зданий*

как рисунок показывает, что наилучшее расположение насосной станции (центральная точка) может оказаться в воздухе, так же как полностью или частично в воздухе окажутся трассы подачи воды (линии). Таким образом, данный алгоритм использования пространственных точек ФТШ для оптимизации размещения насосных станций в гонной местности в общем случае не подходит. В следующем пункте мы меняем алгоритм таким образом, что он будет работать в норной местности.

### 4. Алгоритм для оптимизационного размещения насосных станций в горной местности

Все известные авторам работы по оптимальному расположению точки ФТШ в качестве пространства поиска использовали все пространство или все пространство некоторого куба в пространстве. Практическая направленность данной работы выдвигает обязательные требования: 1) станция должна находиться на поверхности обслуживаемого ей района; 2) водоводные пути также должны прокладываться под поверхностью данного района. Эти ограничения диктуют изменения в предложенной выше алгоритме.

Таким образом, простое применение известных программ для определения места положения точки ФТШ в трехмерном пространстве (рис. 2) просто не подходит для решения нашей задачи.

Для построения нового алгоритма будем исходить из обязательного требования — насосная станция на поверхности района. В этом пункте мы предлагаем построение итерационного алгоритма, у которого в качестве пространства поиска будут не все точки пространства, а точки, принадлежащие прямоугольной сетки начертанной на плане исследуемой местности (рис. 3). Такое предположение гарантирует расположение насосной станции на поверхности.

Точка, из которой выходят стрелки — это точка $M^1(k, j)$. Точки, в которые входят стрелки — это точки потребителей воды $P_i$. Рассмотрим последовательные действия **алгоритма**:

1) Используя спутниковые снимки района, помещаем снимок исследуемого района в квадрат $A$ (рис. 4). В этом квадрате отмечены точки $M^1{}_k = (x_k, y_k, z_k)$ $k = 1, 2, \ldots, n$ пересечения равномерной сетки достаточно крупного размера (рис. 3) попавшие в снимок района. С реальными координатами в трехмерном пространстве — соответствующие горной местности расположения.

2) Обозначим эти точки $M^1(k, j)$. На сетке мы можем ввести две координаты соответствующие линиям в разных направлениях. В каждой из этих точек вычисляем значение целевой

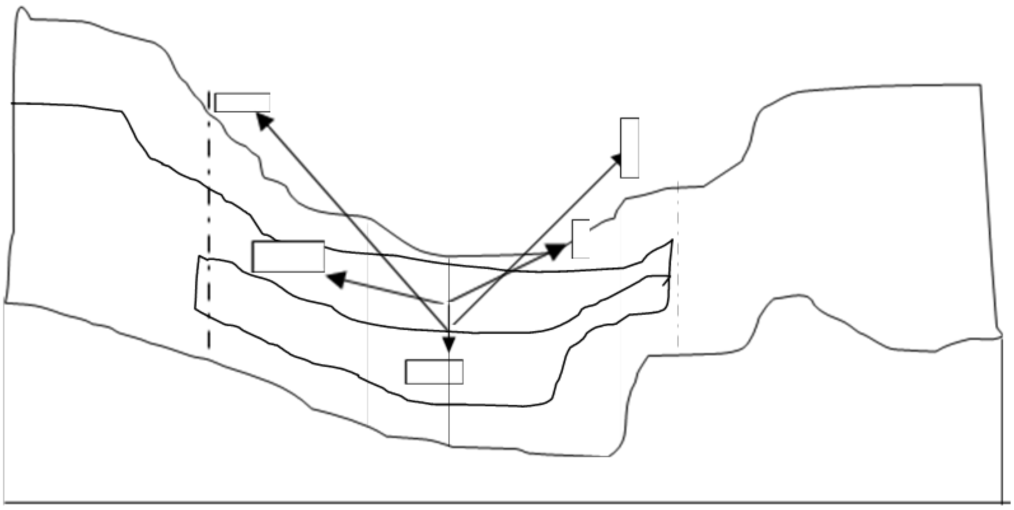


*Рис. 3. Схема расположения насосной станции*

функции (сумма расстояний от точки $M^1(k, j)$ до точек потребителей воды около зданий). Обозначим точки потребителей — $P_i$, пусть их будет $N$, $i = 1, 2, ..., N$. Они также имеют реальные горные координаты рис. 3. Для фиксированных параметров $(k, j)$ целевая.

Функция принимает значение:

$$\Phi^1_{k,j} = \sum_{m=1}^{N} \rho\Big(M^1(k, j), P_m\Big). \qquad (3)$$

В формуле (3) мы будем в этом пункте рассматривать метрику (2).

3) Из этой конечной последовательности выбираем минимальное значение. Предположим, оно реализуется на индексах — $(k_1^\bullet, j_1^\bullet)$.

4) Эта точка на рис. 4 обозначена кружком, в центре квадрата Б.

Итак, $\min \Phi^1_{k,j} = \Phi^1_{k^\bullet, j^\bullet}$. Первая итерация закончена.

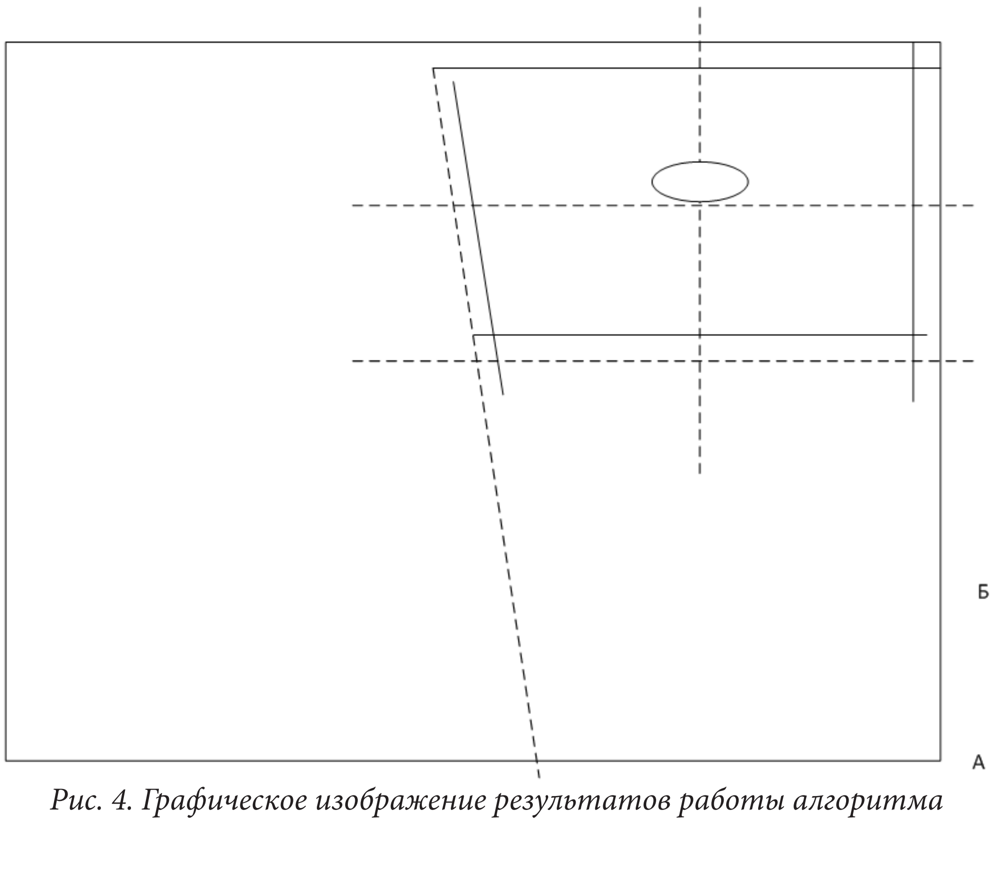



*Рис. 4. Графическое изображение результатов работы алгоритма*

4) По сетке выбирается наименьший квадрат с центром в точке с индексами $(k^{\bullet}, j^{\bullet})$. Квадрат Б линейным преобразованием переводится в квадрат размера А. В нем снова строится аналогичная прямоугольная сетка с точками. Снова вычисляются все значения целевой функции в точках $M^2(k, j)$. Из этой конечной последовательности выбираем минимальное значение. Предположим, оно реализуется на индексах — $(k_2^{\bullet}, j_2^{\bullet})$. И так далее до разумного с точки зрения практики значения. Так как последовательность $M^n(k_n^{\bullet}, j_n^{\bullet})$ не возрастает и ограничена снизу, то она имеет предел. Сам предел нам и не нужен достаточно разумного приближения, при котором последовательность мало изменяется.

Данный алгоритм позволяет определить место для оптимального размещения насосной станции.

Приведем структуру алгоритма, она отличается от известных работ [5, 6].

Структура алгоритма поиска оптимального размещения насосной станции в горной местности приведена на рис. 5. Однако расстояние до потребителей воды нами измерялось по прямой в метрике Евклида и может частично или даже полностью *висеть в воздухе*, наподобие канатной дороги в горах (рис. 6).

Пунктиром обозначены линии, полученные алгоритмом без учета особенностей рельефа. Сплошной линией размечена трассировка проектировщика в ручном или компьютерном режиме в метрике $l_1$.

Рассмотрим сложности, появляющиеся при трассировке в горном районе: 1) моделирование горного района сложная и не оправданная в данной ситуации задача; 2) простое проектирование на местность трасс, полученных в результате применения алгоритма, описанного выше, может не учитывать как сложный рельеф, так и возможность прохождения через другие здания; карта, полученная со спутника, не учитывает изгибы и ямы возможные на данном участке.


*Рис. 5. Структура алгоритма поиска оптимального размещения насосной станции в горной местности*

Учитывая перечисленные сложности, предлагаем следующие проектные действия. Так как точка расположения (координаты на местности) насосной станции уже определена и координаты потребителей воды (точки $P_i$) также известны то проектировщик в интерактивном режиме (вручную или на компьютере) проводит трассы соединяющие НС и точки $P_i$. При этом в зависимости от плотности застройки района он вправе использовать как метрику (1) так и метрику (2).

Более того, он может и должен использовать специфику местности (рис. 7).

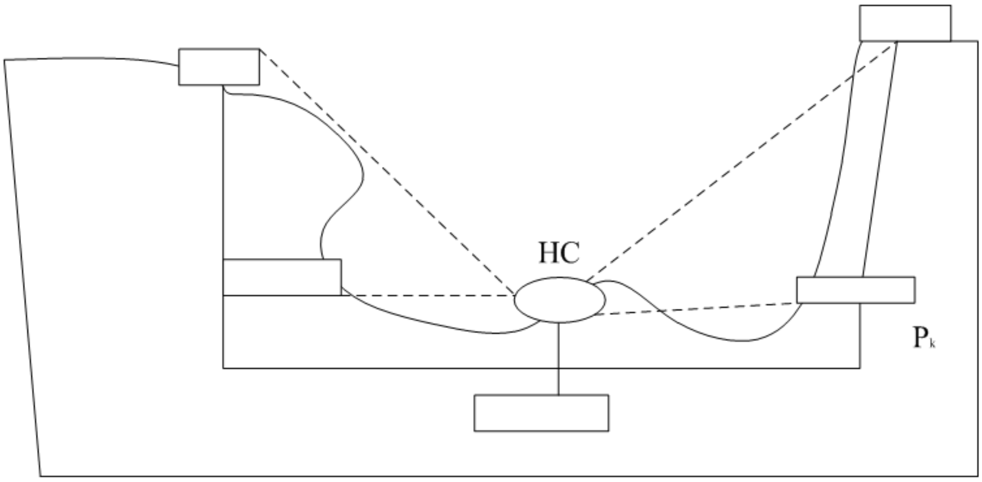



*Рис. 6. Схема расположения насосной станции (НС) относительно потребителей*

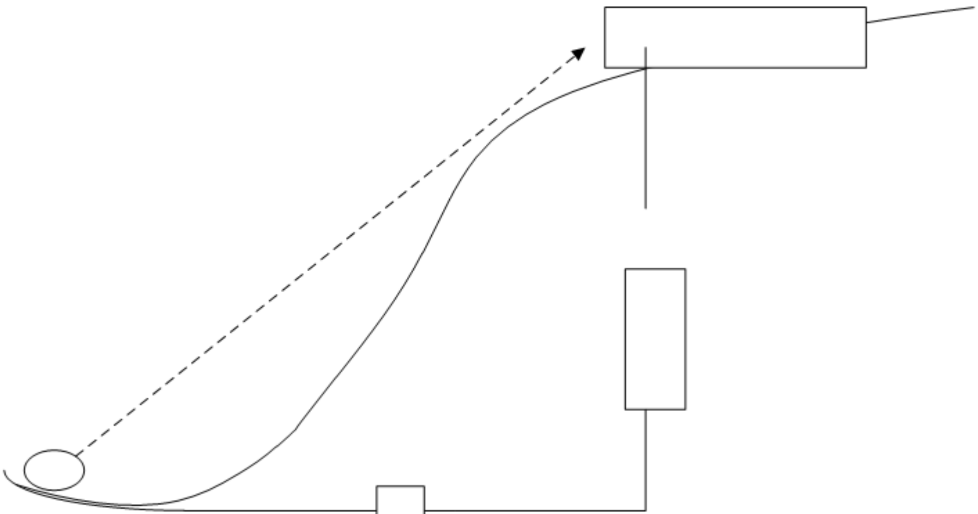


*Рис. 7. Схема трассировки системы наружного противопожарного водоснабжения разработанным алгоритмом*

Пунктиром обозначена линия, полученная визуализацией алгоритма, сплошная линия получена интерактивно проектировщиком с учетом расположения зданий и особенностями рельефа.

**Заключение**

Основное положение, отмеченное в работе, состоит в том, что современная планировка расположения зданий в современных микрорайонах и размеры строений делают невозможным применение существующих нормативных требований на радиальной основе для проектирования средств наружного противопожарного водоснабжения. Размещение пожарных гидрантов происходит без согласования с планировкой зданий. Измерения расстояния по прямой существенно затрудняют практические действия при организации пожаротушения. В нормативных требованиях отсутствует постановка задач по оптимизации.

Выполнено моделирование для планировки и трассировки систем наружного противопожарного водоснабжения в горной местности. Отмечены особенности этой работы, и ее отличие от трассировки на плоскости (равнинной местности).

**Литература**


1. *Родин В. А., Родина Е. В.* О точках Ферма-Штейнера в банаховых пространствах с различной метрикой. // Системы управления и информационные технологии. – 2016. – №1(63). – С. 17–20.

2. Математическая Энциклопедия. Т. 1. Ред. коллегия И. Н. Виноградов. – М. : 1977.

3. *Бондаренко Е. С., Гречаный С. А., Родин В. А.* Численное моделирование задач оптимального размещения обслуживающего объекта с использованием аналогов точек Ферма-Штейнера // Вестник ВИ МВД России. – 2017. – №2. – С. 154–161.

4. *Гришанов М. В., Родин В. А.* Численное моделирование задач оптимального размещения с использованием аналогов точек Ферма-Штейнера // Физ. мат. модел. систем. Материалы Межд. Семин. XVIII. – 2018. – С. 37–39.

5. *Родин А. В., Калач А. Ю., Акулов Е.А., Черепанов Е. А.* Алгоритмы оптимального расположения гидрантов наружного противопожарного водоснабжения // Вестник Воронежского института ФСИН России. – 2019. – № 4. – С. 124–131.

6. *Пивоваров Н. Ю., Таранцев А. А.* Моделирование водоотдачи кольцевых сетей наружного противопожарного водопровода // Пожаровзрывобезопасность. – 2014. – № 12. – С. 69–76.

УДК 539.3

# АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ИСХОДЯЩИХ ОТ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ СВМУ НАГРУЖЕНИИ

**А. О. Дубинец, А. Д. Никитин**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** В работе рассматривается проблема разрушения конструкционных материалов в области сверхмногоцикловой усталости (СВМУ). Установлено, что при СВМУ режиме нагружения в объеме материала формируется мелкозернистая область в окрестности внутреннего дефекта, которая потенциально может служить источником отраженных упругих волн при нагружении образцов. В работе проводится математическое моделирование режимов СВМУ нагуржения, определяются поля перемещений и деформаций, возникающих в образцах при наличии в них внутренних дефектов. Проводится оценка линейных размеров данных дефектов, при которых возможно формирование детектируемых отраженных волн. На основании проведенного анализа формируется предложение о методах фиксации момента зарождения внутреннего трещиноподобного дефекта.
**Ключевые слова:** сверхмногоцикловая усталость, теория упругости, механика прочности и разрушения, дефекты микроструктуры, математическое моделирование, трещиноподобный дефект, механизмы зарождения, усталостная трещина.

## Введение

С середины 1990-х началось активное развитие современных представлений об усталостном поведении металлических материалов в области больших долговечностей ($10^7$–$10^{10}$ циклов нагружения). Экспериментально было показано [1], что большинство конструкционных материалов, таких как стали, титановые и алюминиевые, никелевые сплавы могут систематически разрушаться при уровнях нагружения существенно ниже классического предела усталости. Кроме того, было обнаружено [2], что при разрушении в области больших долговечностей, названной областью сверхмногоцикловой усталости (СВМУ), происходит принципиальная смена механизма зарождения усталостной трещины. Так, если в области малоцикловой и многоцикловой усталости, рис. 1 зарождение трещин наблюдается на поверхности материала, образцов или изделий и связано либо с особенностями обработки поверхности, либо с формированием постоянных полос скольжения, то для области СВМУ свойственно подповерхностное зарождение. Подповерхностное зарождение усталостных трещин обычно происходит при уровнях напряжений, не позволяющих реализовывать объемное течение материала, свойственное области МЦУ, и формирование нескольких очагов на поверхности образца. Кроме того, уровни напряжений, при котором происходит зарождение трещины в области СВМУ оказываются недостаточными даже для формирования полос постоянного скольжения на поверхности образцов. Известно, что по существующим критериям текучести условие перехода к пластическому деформированию реализуются раньше в случае плоско-напряженно состояния, в сравнении с плоско-деформированным. Таким образом, первые экспериментальные результаты о подповерхностном зарождении были малообъяснимы.

Анализ поверхностей излома [3] для подобных случаев разрушения показал, что в подповерхностные усталостные трещины, как правило, зарождаются от внутренних дефектов микроструктуры, таких как неметаллические включения, поры, крупные зерна и т. д. в зависимости от материалов. Более того, для большинства конструкционных материалов оказалось свойственным формирования некоторой «мелкозернистой» области в окрестности внутреннего дефекта микроструктуры. Эту область принято называть «оптически-темной областью»

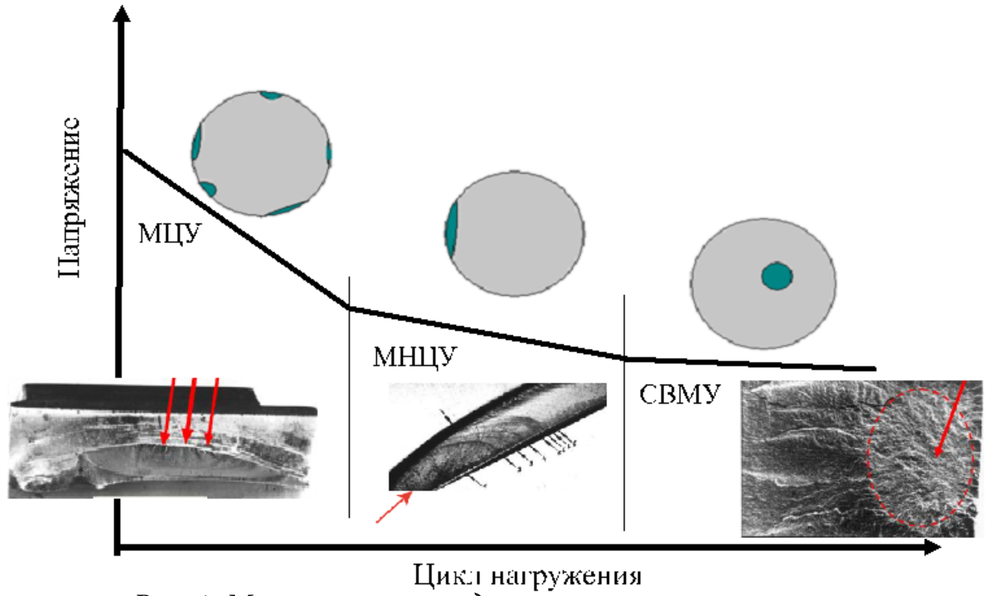



*Рис. 1. Механизмы зарождения усталостных трещин*

или «мелкозернистой областью». Наличие данной особенности говорит о продолжительном времени накопления усталостной повреждаемости в окрестности дефекта микроструктуры. Данный процесс может занимать от $10^7$ до более чем $10^9$ циклов нагуржения. Таким образом, накопление повреждаемости по механизму СВМУ разрушения не успевает себя проявить при испытании на меньшей базе (менее $10^6$–$10^7$) и наблюдаемая усталостная трещина имеет очаг на поверхности.

Тем не менее, проблема изучения начальной стадии роста усталостной трещины в области СВМУ является важной как научной, так и прикладной задачей современной науки о материалах. Практическую значимость ей придает нарастающее количество случаев разрушения элементов конструкций в эксплуатации с формированием подповерхностного очага. Очевидно, что при внутреннем положении усталостной трещины её детектирование методами визуального контроля оказываются неэффективными. Таким образом возникает сложный технический вопрос о разработке методов и методик проведения усталостных испытаний в режиме СВМУ с возможностью фиксации момента зарождения подповерхностной трещины. В настоящее время наиболее эффективный метод фиксации усталостной трещины в образце в процессе проведения исследования является применение инфракрасной термографии. Предполагается, что при формировании трещины у её вершины образуется зона пластической деформации, в которой протекают процессы, приводящие к активному тепловыделению и разогреву образца. Данный метод действительно способен оценивать эволюцию усталостной трещины и перемещение её фронта, но на более поздних этапах роста. Интегрирования данного метода в нагружающую схему и формирование критерия прекращения испытания на данный момент не представлены для режима СВМУ. Для понимания сути предлагаемого метода необходимо вкратце изложить концепт СВМУ испытаний на усталость.

### *Концепт СВМУ испытаний на усталость*

В основу концепта СВМУ нагуржения положена теория распространения упругих волн в материалах [2]. Предполагается, что в пределах образца формируется стоячая упругая волна, с узлом смещений в рабочей части. Для иллюстрации принципа удобно воспользоваться случаем прямого цилиндра, рис. 2. Длина цилиндра выбирается такой, чтобы при заданной резонансной частоте на ней укладывалась половина длины волны. При отражении такой волны от торца цилиндра она складывается с падающей и формирует устойчивую стоячую волну. Очевидно, что признаком правильно подобранной длины образца является полная симметрия относительно рабочего сечения, т.е. на обоих свободных концах амплитуда смещений должна оставаться одинаковой и иметь свои максимумы. В рабочей же части амплитуда смещения постоянно равна нулю и деформация имеет максимум.

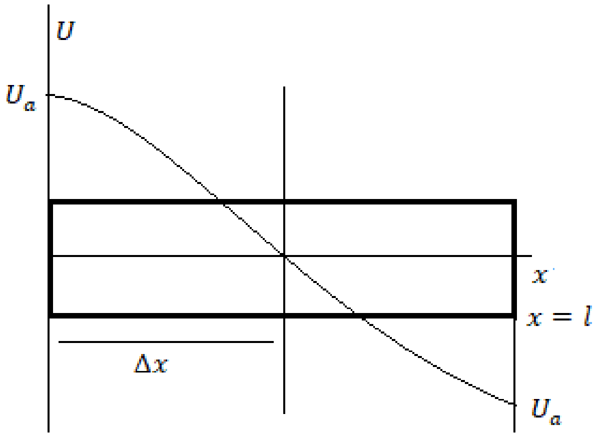
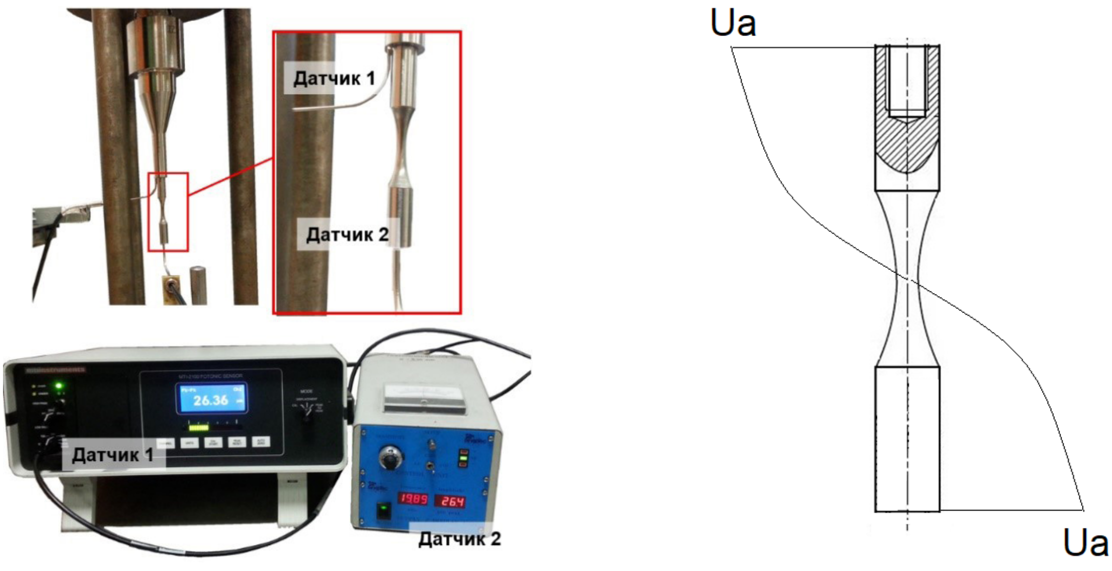



*Рис. 2. Схема рабочей зоны образца с перемещением упругой волны*

Для резонансной длины данного образца существует аналитическое выражение, которое зависит от выбранной частоты нагружения

$$L = \frac{1}{2f}\sqrt{\frac{E}{p}}.$$

Следуя аналогичным рассуждениям несложно получить выражения и для геометрических параметров образцов для проведения СВМУ испытаний. Пример геометрии образца для проведения СВМУ испытаний на частоте 20 кГц представлен на рис. 3б. Образец состоит из корсетной и цилиндрической части. На рис. 3а представлена схема установки с калибровочными датчиками. Оптические датчики фиксируют амплитуду смещений на верхнем и нижнем торце образца. Показано, что эти амплитуды совпадают, что соответствует установившемуся режиму СВМУ испытаний. Идея, предлагаемая в рамках данной статьи, заключается в исследовании условий нарушения устойчивого режима нагружения.




(а) (б)

*Рис. 3. Калибровочный датчик и геометрия образца для СВМУ испытаний*

### *Методы фиксации подповерхностных дефектов*

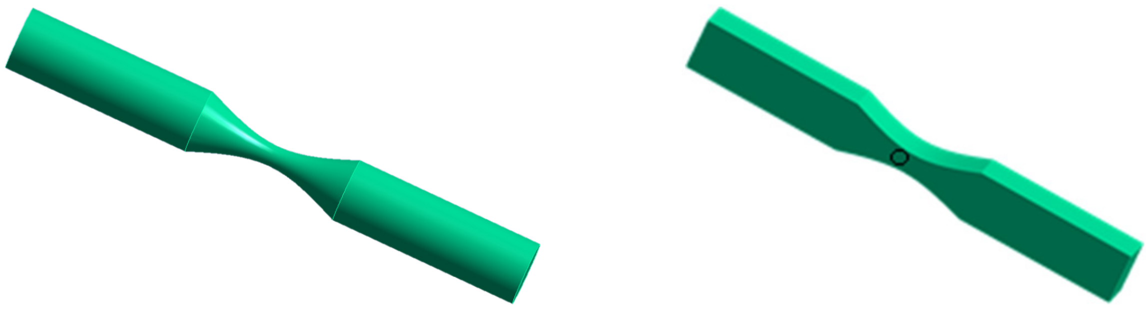
Для создания объединённой теории были исследованы факторы, которые могут влиять на усталостную прочность. Эти факторы включают такие вопросы, как размер и форма дефектов, адгезию включения к матрице, ориентацию неметаллических включений. Проблема заключается в методе отыскания данных внутренних дефектов, так как известные методы детектирования, обладают инертностью. Например, при использовании инфракрасной камеры [4], изменение температуры должно быть достаточно большим, чтобы записывать тепловые изображения с заметным тепловым эффектом, поэтому существует вероятность фиксации трещины, когда та уже достаточно развита. Другой метод контроля, например, акустическая эмиссия [5], где оценка поведения металла осуществляется в динамическом режиме, при нагружении в том состоянии конструкции, в котором она работает в эксплуатации. не может быть применен для СВМУ нагружения, в силу высокого диапазона прикладываемой частоты (около 20 кГц).

### *Волновые процессы*

Из вышесказанного следует, что традиционные теории не могут быть применены к мелким дефектам, проблема нуждается в существенном пересмотре. На данном основании выдвинута гипотеза, которая заключается в возможности детектирования существующих внутренних дефектов, при прохождении через образец упругой волны. На образец рис. 3а для отслеживания амплитуд волн с двух концов устанавливается датчик, который показывает разницу между начальной и прошедшей через некую среду волнами. Принцип работы подобных устройств основан на возбуждении упругих стоячих волн в образцах посредствам пьезоэлектрических конвертов, позволяющую обеспечить формирование стоячих волн на заданных частотах нагружения. При СВМУ нагружении предполагается, что амплитуды стоящей волны на обоих концах образца должны быть одинаковыми рис. 3б. Если в среде происходит нарушение сплошности, часть энергии подающее с волновода будет происходить диссипация на обратные отражённые волны. Это означает, что амплитуда на другом конце будет отличаться.

### *Математическое моделирование*

В данной работе будет представлено математический анализ волновых процессов. В программном комплексе ANSYS создана конечно — элементная модель образца из титанового сплава ВТ3-1 рис. 4 для определения перемещения, которые соответствуют усталостному нагружению.



*(а)* *(б)*

*Рис. 4. Геометрия образца: а) образец для СВМУ испытаний,*
*б) модель с внутренним включением*

Интерес вызывает середина образца, рабочая зона которого с целью упрощения эквивалента сечению прямоугольника. На первом этапе в ее окрестности нет ни трещины, ни дефекта, далее модель усложняется более жестким включением из стали, подобранным в результате модального и гармонического анализа, на основании изменении спектра собственных частот образца, что позволяет дополнительно выявить колебательные процессы, связанные с формированием внутренней свободной поверхности. Из-за изменения граничных условий, от поры будет исходить отраженные волны рис. 5 и задача сводится к фиксации амплитуды этих отраженных волн.

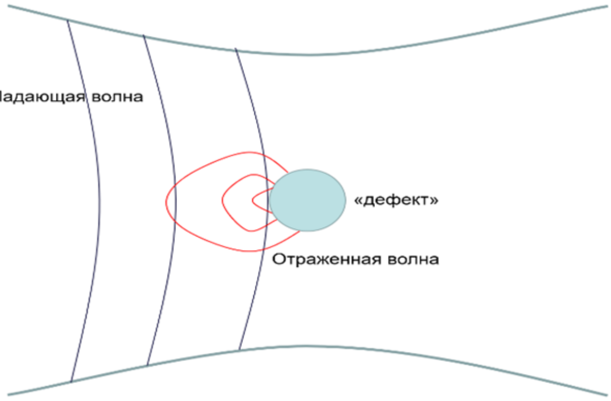



*Рис. 5. Принципиальная схема формирования отраженных волн от внутреннего дефекта, в том числе образовавшейся свободной поверхности*

## Заключение

Предложено математическое обоснование для обнаружения внутреннего дефекта на основе фиксации отраженных волн на ранних этапах зарождения трещины. А также оценка линейных размеров данных дефектов, при которых возможно формирование детектируемых отраженных волн. Возможность определения для СВМУ режима минимального размера включения, при котором отраженные значения могут быть детектированы на поверхности образца.

## Литература

1. *Murakami Y.* Metal Fatigue effects of small defects and nonmetallic inclusions. – UK : Elsevier, 2002.

2. *Bathias C., Paris P. C.* Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. – New York : Dekker, 2005.

3. *Witos M., Stefaniuk M.* Compressor blade farigue diagnostics and modelling with the use of modal analusis // Fatique of aircraft structures. – 2011. – DOI: 10.2478/v10164-010-0044-4.

4. *Gene F. SIRCA Jr., Hojjat ADELI.* Infrared thermography for detecting defects in concrete structures // Journal of Civil Engineering and Management. – 2018.

5. *Шанявский А. А., Банов М. Д., Беклемишев Н. Н.* Диагностика усталости авиационных конструкций акустической эмиссией. – М. : Изд-во МАИ, 2017. – 188 с.

УДК 004.02:004.06

# АНАЛИЗ МЕДИЦИНСКИХ ДАННЫХ, НАКОПЛЕННЫХ В ТРАНЗАКЦИОННОЙ МЕДИЦИНСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ, ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ШУМА И ВИБРАЦИЙ НА ПОКАЗАТЕЛИ КРОВИ

**Л. И. Евельсон[1], Э. В. Гегерь[2], И. Р. Козлова[3]**

*[1]Научно-инновационный центр информационных и дистанционных технологий*
*[2]Брянский клинико-диагностический центр*
*[3]Брянский государственный технический университет*

**Аннотация.** В статье описано применение метода бинарных выборок для определения зависимости количественных показателей анализа крови от наличия среди условий труда постоянного воздействия шума и вибраций. Исследование проводилось по медицинским данным, накопленным в медицинской информационной системе транзакционного типа. В процессе предподготовки данные подвергались деперсонализации. Бинаризация значений показателей производилась путем сопоставления с известными границами интервала медицинской нормы. Была разработана методика приведения выборок к однородности по признакам пола и возраста пациентов. Установлено, что постоянное воздействие шума и вибраций вызывает статистически значимое увеличение вероятности выхода содержания эритроцитов в крови за пределы нормы.
**Ключевые слова:** анализ данных, статистические методы, бинарные выборки, медицинские информационные системы, анализ крови, медицинская норма, однородность выборок, шум, вибрации, эритроциты.

## Введение

К настоящему времени в информационных системах (ИС) медицинских организаций накоплено уже много различных данных, связанных с медицинской помощью населению. Персональные данные, как медицинского (например, результаты анализа крови), так и общего (например, ФИО и адрес) характера, занесенные в ИС в ходе выполнения рутинных операций, хранятся там и, как правило, для исследовательских задач не используются. Между тем, они могли бы быть весьма полезны для выявления общих закономерностей. ИС медицинских учреждений относятся к типу OLTP (On-line Transaction Protocol) и предназначены для обеспечения текущих рабочих процессов учреждения. Для исследовательского анализа данных такие ИС не подходят, но накопленные в них данные могут быть консолидированы, обезличены (деперсонализованы), очищены от неизбежных шумов и дефектов и выгружены в аналитические системы, или в электронные таблицы MS Excel для дальнейших исследований. Ставящиеся при этом конкретные задачи могут быть весьма разнообразны.

В настоящей статье рассматривается проблема выявления зависимости между лабораторными показателями анализа крови и вредными производственными факторами, в частности, в условиях воздействия на работников шума и вибраций. Получение таких зависимостей с оценкой из значимости играет существенную практическую роль в планировании мероприятий по охране труда. Основной целью представляемой работы является выявление важных нюансов практического применения некоторых известных методов математической статистики, направленных на решение подобных реальных задач. Использованные методы и приемы можно считать характерными для ситуаций, возникающих при анализе данных, накапливаемых в медицинских информационных системах транзакционного типа.

## 1. Данные и методы анализа. Постановка задачи

### *1.1. Данные, использовавшиеся для анализа*

Лабораторные исследования (анализы крови), послужившие первичным источником данных, проводились в клинико-диагностической лаборатории Брянского клинико-диагностического центра (БКДЦ) и накапливались в медицинской автоматизированной информационной системе «МАИС ДЦ» (сертификат соответствия №12.0001.1200, свидетельство об аттестации ПО №АПП-013-1200 от 29.03.2013 г.). Эта информационная система относится к транзакционному типу (OLTP — On-line Transaction Protocol), она обеспечивает ежедневную работу медицинского учреждения. Первичные данные, автоматически сохраняющиеся в базе данных ИС «МАИС ДЦ», включают персональные данные общего характера (ФИО, паспортные данные, год рождения, пол, домашний адрес, место работы и должность и др.) и собственно медицинские данные, в частности, результаты анализа крови. Для лиц, условия труда которых заведомо включают вредные производственные факторы, имеется повышенный риск профессиональных заболеваний. Для них предусматриваются обязательные периодические медицинские осмотры и анализы крови, входящие, согласно Приказу МЗСР РФ № 302н [7], в обязательный перечень исследований при проведении медицинских осмотров у лиц, занятых на работах с вредными и (или) опасными условиями труда. В частности, проводится общий анализ периферической крови (ОАК), а также определяются показатели концентрации в крови глюкозы и общего холестерина. В то же время, такие анализы крови являются основой диагностики многих известных заболеваний и часто назначаются при проведении медицинских осмотров и не связанных с вредными условиями труда работников.

В описываемом исследовании использовались результаты анализов крови 149 лиц, работающих во вредных условиях труда, связанных с воздействием шума и вибраций (далее группа ШиВ), а также проходивших медицинские осмотры работников таможни (группа ТАМ), работников областной Администрации (группа АДМ). Были также использованы данные медицинских осмотров работников, условия труда которых связаны с электромагнитными излучениями промышленной частоты (группа ЭМИ). В процессе предобработки данных группы ЭМИ, ТАМ и АДМ были объединены в одну общую группу из 506 человек, обозначим ее $\text{ВО}_{\text{Ш}}$ («все остальные, кроме группы ШиВ»).

Биомедицинские исследования выполнялись в соответствии с соблюдением этических принципов медико-биологических исследований и в соответствии с Федеральным законом РФ «О персональных данных (152-ФЗ) [6].

### *1.2. Применявшиеся статистические методы*

В работе использовались методы математической статистики, направленные на сравнение двух выборок. Как будет показано ниже, выборки были двух видов: количественные и бинарные. Количественные включали непосредственно числовые действительные значения показателей анализа крови, а также значения возраста в годах (использовались целочисленные значения, вычисляемые как разность между датой расчета и датой рождения с последующим округлением до целого числа лет). Бинарные (да/нет, 1/0 и т. д.) получались с помощью операции сопоставления этих числовых значений с известным интервалом медицинской нормы (попадает / не попадает). Такой метод замены изначально количественных данных на бинарные для подобных задач описан в работе [3, 4]. Применение его для рассматриваемой задачи представлено ниже в следующем разделе. Другой класс бинарных данных, использовавшихся в описываемом исследовании, — это признак пола (мужской/женский). Метод сравнения бинарных выборок для общего случая, основанный на распределении Бернулли и теореме Муавра — Лапласа, подробно описан, например, в [2]. Основная конечная формула (1) для критерия $Q$ значимости разницы:

$$Q = \frac{p_1^* - p_2^*}{\sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}}, \tag{1}$$

где звездочками обозначены выборочные частоты, являющиеся оценками соответствующих вероятностей того, что величина принимает $i$-е значение:

$$p_i^* = m_i / n_i$$

$n_1$ — объем (число значений) выборки ШиВ

$n_2$ — объем выборки $\text{ВО}_\text{Ш}$

$m_1$ — число значений, выходящих за пределы нормы в выборке ШиВ

$m_2$ — число значений, выходящих за пределы нормы в выборке $\text{ВО}_\text{Ш}$

Для количественных выборок сравнение средних значений, а, точнее, оценка значимости разницы между ними, при разных неизвестных дисперсиях, называется задачей Беренса — Фишера, и она не имеет точного теоретического решения [1]. Для приближенного решения в данной работе использовался критерий $K$ Крамера — Уэлча [1], расчетное значение которого вычисляется по формуле (2). В нем фигурируют выборочные оценки среднеквадратических отклонений и дисперсий, определяемые по формулам (3)–(5).

$$K = \frac{1}{s}(\overline{x} - \overline{y}), \tag{2}$$

где

$$s = \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}} \tag{3}$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{4}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})^2, \tag{5}$$

где $\overline{x}$ — выборочное среднее арифметическое значение возраста выборки ШиВ

$\overline{y}$ — выборочное среднее арифметическое значение возраста выборки $\text{ВО}_\text{Ш}$

$n$ — количество значений в выборке ШиВ

$m$ — количество значений в выборке $\text{ВО}_\text{Ш}$

$s_1^2$ — несмещенная оценка дисперсия выборки ШиВ

$s_2^2$ — несмещенная оценка дисперсия выборки $\text{ВО}_\text{Ш}$

$s$ — несмещенная оценка дисперсии разности выборочных средних рассматриваемых выборок

Вышеназванные методы являются достаточно известными и апробированными. Отметим, что критерий Крамера — Уэлча относится к параметрическим методам математической статистики, которые предполагают наличие нормального закона распределения. Отличие реального распределения от нормального искажает картину, но вопрос, насколько велико это искажение, приходится решать в каждом конкретном случае. В описываемом исследовании критерий Крамера — Уэлча применялся только для проверки однородности сравниваемых выборок по признаку возраста. Ответственность при принятии такого решения не слишком велика, поскольку оно здесь является только одним и промежуточных действий, не требующим высокой точности. Поэтому применение выбранного критерия представляется достаточно правомерным.

### *1.3. Формирование и предварительная корректировка выборок*

Еще до непосредственного проведения анализа данных была произведена очистка от дефектов и шумов, которые неизбежно встречаются в реальных данных. Кроме того, производилась деперсонализация данных, т. е. удалялись (точнее, не включались в выборки), например, паспортные данные, сведения об адресе места проживания и иная информация, по которой можно было бы идентифицировать пациента. В выборки включались собственно медицинские данные (результаты анализа крови, выставленные диагнозы), а также бинарные значения пола (мужской / женский) и количественные значения возраста. Пол и возраст являются важными признаками, которые могут существенно влиять на заболеваемость и показатели крови.

Пара групп ШиВ и $ВО_Ш$, была проверена на однородность по признакам пола (путем сравнения бинарных выборок по критерию $Q$) и возраста (с помощью критерия Крамера —Уэлча).

Таблица 1

*Сравнение исходных выборок ШиВ и $ВО_Ш$ по признакам пола и возраста*

| Наименование выборки | Объем выборки (число записей) | Число мужчин в выборке | Число женщин в выборке | Средний возраст | Расчетное значение $Q$ (критерий по полу) | Расчетное значение $K$ (критерий по возрасту) | Критические значение критериев |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ШИВ | 149 | 139 | 10 | 51,7 | 6,72 | 11,1 | 1,96 |
| $ВО_Ш$ | 506 | 376 | 130 | 41,4 | | | |

Как видно из табл. 1, сравниваемые исходные группы оказались неоднородными, как по полу, так и по возрасту. Поэтому далее была произведена корректировка выборок с целью добиться однородности. Разработанная методика корректировки основывалась на принципах рандомизации и минимума потерь информации. В соответствии с первым принципом корректировка осуществлялась таким образом, чтобы порядок записей, проверяемых на предмет удовлетворения критерию удаления, был случайным. В соответствии со вторым принципом корректировка сразу же прекращалась, как только оба (по полу и по возрасту) расчетные значения критериев однородности становились меньше или равны критическим значениям, причем алгоритм корректировки был сформирован так, чтобы число удаляемых записей было минимальным (строго говоря, задача минимизации не ставилась, но использовались эвристические соображения). На рис. 1 показана схема алгоритма корректировки выборок.

## 2. Методика расчетов

Выполнявшийся алгоритм анализа данных можно условно разделить на следующие этапы:

1. Консолидация данных, выбираемых из транзакционной МИС в соответствии с поставленной задачей анализа, и выгрузка в MS Excel.
2. Очистка данных от дефектов и шумов и деперсонализация.
3. Для проведения каждого расчета, касающегося очередной группы – слияние данных всех остальных групп, кроме ШиВ, в группу $ВО_Ш$.
4. Корректировка группы $ВО_Ш$ с целью достижения однородности одновременно по признакам пола и возраста.
5. Вычисление средних значений и дисперсий по всем рассматриваемым выборкам количественных лабораторных показателей.
6. Бинаризация лабораторных показателей путем сопоставления их значений с интервалом нормы.
7. Сравнение частот с определением статистической значимости разницы по критерию $Q$ сравнения бинарных выборок.

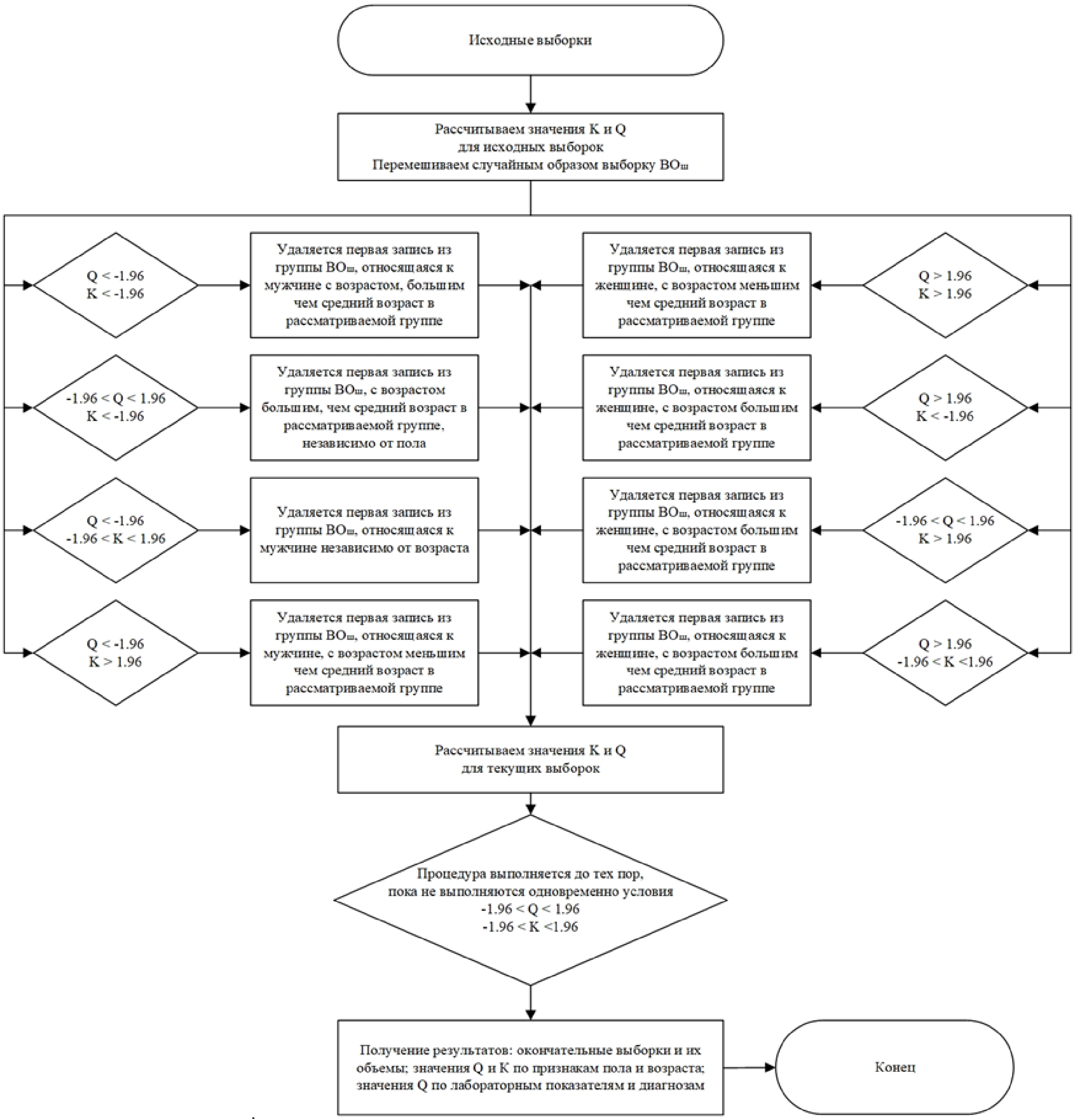



*Рис. 1. Схема алгоритма корректировки выборок*

## 3. Результаты расчетов

В табл. 2 приведены результаты корректировки выборок.

Таблица 2

*Результаты корректировки*

| Наименование выборки | Объем выборки (число записей) | Число мужчин в выборке | Число женщин в выборке | Средний возраст | Расчетное значение $Q$ (критерий по полу) | Расчетное значение $K$ (критерий по возрасту) | Критические значение критериев |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ШИВ | 149 | 139 | 10 | 51,7 | 1,834 | 1,896 | 1,96 |
| $ВО_Ш$ | 136 | 118 | 18 | 49,5 | | | |

Сравнение таблиц 1 и 2 показывает, что для достижения однородности по обоим признакам (полу и возрасту) пришлось очень существенно сократить выборку $ВО_{Ш}$, после чего объемы выборок стали мало отличаться друг от друга.

Результаты расчета по скорректированным и исходным выборкам показателей крови по критерию $Q$ представлены в табл. 3. Как уже было сказано выше, критические значения по $Q$ принимались равными 1,96, что соответствует уровню значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таблица 3

*Результаты сравнения частот выхода за пределы нормы по скорректированным выборкам показателей крови и мочи*

| | ШиВ | | $ВО_{ш}$ | | Расчетное значение $Q$ после корректировки | Расчетное значение $Q$ до корректировки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p_1$ | | $p_2$ | | | |
| Гемоглобин | 62 | 0,416 | 54 | 0,397 | 0,327 | 0,415 |
| Лейкоциты | 16 | 0,107 | 9 | 0,066 | 1,244 | 1,489 |
| Тромбоциты | 12 | 0,081 | 6 | 0,044 | 1,282 | 1,512 |
| Лимфоциты | 32 | 0,215 | 31 | 0,228 | −0,268 | −0,343 |
| Моноциты | 28 | 0,188 | 36 | 0,265 | −1,550 | −2,046 |
| Эритроциты | 74 | 0,497 | 34 | 0,250 | 4,461 | 5,450 |
| Ретикулоциты | 1 | 0,007 | 20 | 0,147 | −4,513 | −8,204 |
| Эозинофилы | 47 | 0,315 | 64 | 0,471 | −2,709 | −3,521 |
| Гематокрит | 53 | 0,356 | 45 | 0,331 | 0,441 | 0,558 |
| СОЭ | 21 | 0,141 | 27 | 0,199 | −1,293 | −1,715 |
| Общий холестерин | 90 | 0,604 | 75 | 0,551 | 0,898 | 1,148 |
| Глюкоза | 15 | 0,101 | 9 | 0,066 | 1,058 | 1,277 |

Как следует из табл. 3, значимо большие отклонения от нормы в группе ШиВ по скорректированным выборкам имеют место только по эритроцитам. Можно отметить, что значимо меньше отклонений в группе ШиВ по ретикулоцитам и эозинофилам, но трудно предположить, что шум и вибрации благотворно влияют на эти показатели.

Сравнение полученных расчетных значений $Q$ по скорректированным и исходным выборкам показывает, что, несмотря на количественные различия, качественно вывод о статистической (не) значимости разницы получился одинаковым, за исключением только моноцитов, где по исходным выборкам получилась значимая разница, а по скорректированным — незначимая.

## 4. Обсуждение результатов

Использованный для оценки статистической значимости разницы между показателями крови в группе ШиВ и в контрольной группе метод сравнения бинарных выборок позволил найти скрытую закономерность — влияние шума и вибраций в качестве постоянного вредного производственного фактора на уровень эритроцитов в крови. Интерпретация этой закономерности должна быть связана с дальнейшими медицинскими исследованиями. Однако и уже по накопленным данным в качестве следующего шага могло бы быть изучение взаимосвязи производственных факторов и уровня эритроцитов с диагнозами, устанавливаемыми врачами. Некоторый опыт такого исследования для другого производственного фактора — электромагнитных излучений описан нами ранее в работе [5].

Отметим, что прямое применение известных параметрических и непараметрических статистических методов сравнения двух количественных выборок для анализа взаимосвязи показателей крови и условий труда, не позволило бы сделать практически важный вывод, ведь без использования интервала нормы, результат, что, например, есть статистически значимая разница, не означал бы, что эта разница действительно существенна с точки зрения здоровья пациента. В то же время, применение таких методов совместно с методом сравнения бинарных выборок, возможно, придало бы еще большей убедительности полученным с его помощью результатов, а также оно было бы интересно само по себе с теоретической точки зрения. С другой стороны, очевидно, что конкретные значения границ интервала нормы влияют на результаты бинаризации. В связи с этим, целесообразно провести специальное исследование, посвященное данному вопросу.

Корректировка выборок для достижения однородности по признакам пола и возраста представляется необходимой, несмотря на то, что, как было указано выше, она повлияла на выводы только по относительно небольшому числу показателей.

**Заключение**

В результате проведенного исследования установлено, что наличие в производственной деятельности постоянного действия шума и вибраций вызывает статистически значимое увеличение вероятности выхода содержания эритроцитов в крови за пределы медицинской нормы.

Разработана методика корректировки исходных выборок для достижения их однородности по признакам пола и возраста, которая может применяться для аналогичных задач. Она дает возможность широкого проведения исследований на основе данных, содержащихся в медицинских информационных системах транзакционного типа. Это важно, поскольку, в отличие от специально проводящихся заранее планируемых экспериментальных медицинских исследований, здесь нет возможности изначально тщательно подбирать исследуемую и контрольную группу.

Предложенный вариант применения известного метода сравнения бинарных выборок можно рекомендовать для решения аналогичных задач анализа медицинских данных. Целесообразно проведение дальнейших исследований теоретических и практических нюансов использования этого метода для рассматриваемого круга задач. В частности, желательно изучить влияние вариабельности границ интервала нормы, а также сравнить результаты, получаемые методом бинарных выборок и известными параметрическими и непараметрическими статистическими методами.

**Литература**


1. *Кобзарь, А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. / А.И. Козбарь. – Москва : Физматлит, 2006. – 816 с.
2. *Орлов, А. И.* Прикладная статистика / А. И. Орлов. – Москва : Издательство «Экзамен», 2006. – 671 с.
3. Методика сравнения бинарных выборок при анализе медицинских данных для принятия управленческих решений / Э. В. Гегерь, И. Р. Козлова, О. Н. Юркова, Л. И. Евельсон // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Информатика, вычислительная техника, управление. – 2020. – Т.9, № 2(50). – С. 164–170.
4. Разработка метода оценки риска профессиональной заболеваемости, основанного на статистике нечисловых данных Перспективы науки / Э. В. Гегерь, С. И. Федоренко, Л. И. Евельсон // Перспективы науки. – 2017. – № 11(98). – С. 22–25.
5. Совершенствование методов обработки данных в информационных системах поддержки принятия управленческих решений / Э. В. Гегерь, Л. И. Евельсон, С. И. Федоренко, И.Р. Козлова // Современные наукоемкие технологии. – 2019. – № 12(ч.2)Б. – С. 276–281.

6. Федеральный закон от 27.07.2006 № 152-ФЗ (24 апреля ред. от 2020 г.) «О персональных данных» // Гарант : [сайт]. – 2020. – URL: http://base.garant.ru/5635295/ (дата обращения: 30.09.2020).
7. Приказ МЗСР РФ от 12.04.2011 № 302 н (ред. от 01.07.2020) «Об утверждении перечней вредных и (или) опасных производ. факторов и работ, при выполнении которых проводятся обязательные предварительные и периодические медосмотры (обследования), и Порядка проведения обязательных предварительных и периодических медосмотров (обследований)» // Гарант : [сайт]. – 2020. – URL: http://base.garant.ru/12191202/ (дата обращения: 23.09.2020).

УДК 512.643

# СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

**Е. Г. Жиляков[1], С. П. Белов[2], А. Н. Заливин[2]**

[1]*Белгородский государственный национальный исследовательский университет*
[2]*Белгородский университет кооперации, экономики и права*

**Аннотация.** Собственные числа и векторы симметричных матриц играют важную роль в задачах анализа и синтеза различных физических систем. В частности, можно отметить задачи квантования состояний гамильтонианов, исследования резонансов колебаний механических систем, анализ и синтез сигналов на основе базиса Карунена — Лоэва, функции правдоподобия и т.п. В связи с этим разработаны достаточно эффективные численные методы их определения. Однако, в некоторых случаях возникает необходимость быстрого определения собственных чисел и векторов симметричных матриц, которые получаются окаймлением некоторых исходных. В данной работе получены соотношения, позволяющие решать такие задачи.
**Ключевые слова:** симметричные матрицы, проблема собственных значений, рекуррентные вычисления собственных чисел и векторов.

## Введение

Пусть $A_N$ последовательность симметричных положительно определенных матриц следующего вида

$$A_N = \begin{pmatrix} A_{N-1}\vec{a}_N \\ \vec{a}'_N \,..a_{NN} \end{pmatrix},\ A'_{N-1} = A_{N-1}, \tag{1}$$

где штрих сверху справа означает транспонирование; $\vec{a}'_N = (a_{N1},...,a_{N,N-1})$.

Пусть теперь известна матрица $Q = (\vec{q}_1\vec{q}_2...\vec{q}_{N-1})$ собственных векторов левого верхнего блока, то есть выполняется равенство [1,2]:

$$A_{N-1}Q = QL, \tag{2}$$

где $L$ — диагональная матрица известных собственных чисел:

$$L = diag(\lambda_1,...,\lambda_{N-1}), \lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_{N-1} > 0, \tag{3}$$

а матрица собственных векторов является ортогональной:

$$Q'Q = QQ' = I = diag(1,...,1). \tag{4}$$

Необходимо вычислить собственные значения полной матрицы, которые удовлетворяют уравнению:

$$A_N G = GM, \tag{5}$$

где $M$ — диагональная матрица собственных чисел:

$$M = diag(\mu_1,...,\mu_N),\ \mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_N, \tag{6}$$

а $G$ — матрица соответствующих собственных векторов, которую для дальнейших преобразований целесообразно представить в блочном виде:

$$G = \begin{pmatrix} G_{11}\vec{g} \\ \vec{d}' \ \ d_N \end{pmatrix}, \tag{7}$$

причем и в данном случае матрица собственных векторов является ортогональной:

$$G'G = GG' = I = diag(1,...,1), \tag{8}$$

Отметим, что нижняя строка в матрице $G$ состоит из координат собственных векторов с максимальным индексом, а именно, для собственного вектора с максимальным индексом имеется в виду следующее соотношение:

$$\mu_N(\vec{g}', d_N) = (\vec{g}', d_N)A_N,$$

где собственное число удовлетворяет неравенству (6).

Представляет интерес выразить собственные значения (собственные числа и векторы) матрицы $A_N$ через собственные значения левого верхнего блока и элементов окаймляющих его строки и столбца в представлении (1). Это может позволить упростить алгоритмы их вычисления [3].

## Вычислительные соотношения

Так как совокупность столбцов матрицы $Q$ является базисом для векторов соответствующей размерности, то справедливо представление:

$$G_{11} = QV, \tag{9}$$

где предполагается, что матрица справа состоит из некоторых векторов — столбцов:

$$V = (\vec{V}_1 ... \vec{V}_{N-1}). \tag{10}$$

Тогда, подставив в уравнение (5) представление (7), с учетом представлений (9), (1) и равенства (2) нетрудно получить следующие равенства:

$$\vec{\alpha}\vec{d}^{'} = M_1V - LV; \tag{11}$$

$$\vec{\alpha}'V = \vec{d}'(M_1 - a_{NN}I); \tag{12}$$

$$(\mu_N I - A_{N-1})\vec{g} = d_N\vec{a}_N; \tag{13}$$

$$d_N(1-\mu_N) = -\vec{a}'_N\vec{g}, \tag{14}$$

где

$$M_1 = diag(\mu_1, ..., \mu_{N-1}); \tag{15}$$

$$\vec{\alpha} = Q'\vec{a}_N. \tag{16}$$

Имея в виду представление (10), из (11) получаем уравнения для отдельных столбцов матрицы $V$:

$$d_i\vec{\alpha} = (\mu_i I - L)\vec{V}_i, \quad i = 1, ..., N-1. \tag{17}$$

Предполагая, что собственные числа матрицы (1) не совпадают с собственными числами углового блока, отсюда получаем представление:

$$\vec{V}_i' = d_i(\mu_i I - L)^{-1}\vec{\alpha}, \quad i = 1, ..., N-1. \tag{18}$$

В соответствии с этим покомпонентная запись левой части равенства (12) принимает вид:

$$\vec{\alpha}'\vec{V}_i = d_i\vec{\alpha}'(\mu_i I - L)^{-1}\vec{\alpha}. \tag{19}$$

Так как повекторная запись равенства (12) имеет вид:

$$\vec{\alpha}'\vec{V}_i = d_i(\mu_i - a_{NN}),$$

то сопоставляя с ним представление (19), нетрудно получить уравнение, которому должны удовлетворять искомые собственные числа

$$\mu = a_{NN} + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k^2 / (\mu - \lambda_k). \tag{20}$$

Схема последовательного поиска корней этого уравнения на основе метода Ньютона — Рафсона имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n) / (dF(x)/dx) \,|\, \text{при } x = x_n, \tag{21}$$

где

$$F(x) = a_{NN} + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k^2 / (x - \lambda_k) - x; \tag{22}$$

$$dF(x)/dx = -\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k^2 / (x - \lambda_k)^2 - 1. \tag{23}$$

Отметим, что предположение о несовпадении собственных значений верхнего левого блока и всей матрицы в (1) гарантирует непрерывность, дважды дифференцируемость функции и ограниченность второй производной (22), то есть это является условием сходимости итерационного процесса Ньютона — Рафсона Если имеются одинаковые или близкие собственные числа, то следует на основе соотношения (18) модифицировать схему (21), так как тогда буде равна нулю соответсвующая компонента вектора (16).

Подстановка представлений (22) и (23) в (21) приводит к схеме:

$$x_{n+1} = x_n \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k^2 / (x_n - \lambda_k) / (1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k^2 / (x_n - \lambda_k)^2) +$$
$$+ (a_{NN} + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k^2 / (x_n - \lambda_k)) / (1 + \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k^2 / (x_n - \lambda_k)^2). \tag{24}$$

Начальные значения корней уравнения (20) следует выбирать вблизи собственных чисел углового блока, используя для поиска собственного числа $\mu_i$ начальное значение:

$$x_{0i} = \lambda_i + \varepsilon_{0i}. \tag{25}$$

Если параметр $\varepsilon_{0i}$ достаточно мал по абсолютной величине, то соответствующее слагаемое в правой части (20) будет превалирующим, так что можно положить:

$$\mu_i - a_{NN} = \alpha_i^2 / (\mu_i - a_{NN} + a_{NN} - \lambda_i) \quad .(26)$$

Представляется естественным одно из решений этого квадратного уравнения относительно $\mu_i$ принять за начальное приближение для искомого корня. Таким образом, получаем:

$$x_{0i} = \lambda_i + (\pm(4\alpha_i^2 / (\lambda_i - a_{NN})^2 + 1)^{1/2} - 1)(\lambda_i - a_{NN}) / 2. \tag{27}$$

Здесь знак перед квадратным корнем выбирается так, чтобы абсолютная величина параметра:

$$\varepsilon_{0i} = (\pm(4\alpha_i^2 / (\lambda_i - a_{NN})^2 + 1)^{1/2} - 1)(\lambda_i - a_{NN}) / 2 \tag{28}$$

была наименьшей.

Очевидно, что, определив собственные числа в соответствии с представлениями (18) и (9), можно вычислить блок $G_{11}$. После этого этапа можно вычислить нижнюю строку в представлении матрицы собственных векторов (7).

Положим:

$$C = \{c_{ik}\} = G'_{11} G_{11}. \tag{29}$$

Условие ортогональности (8) дает равенство:

$$C = I - \vec{d}\vec{d}'. \tag{30}$$

Умножая слева и справа на вектор $\vec{d}$, с учетом нормированности строк матрицы (7) нетрудно получить равенство:

$$C\vec{d} = d_N^2 \vec{d}, \tag{31}$$

которое показывает, что искомый вектор является собственным вектором матрицы (29), соответствующим минимальному собственному числу $d_N^2$. Остальные собственные числа матрицы $C$ равны единице и им соответствуют собственные векторы, ортогональные собственному вектору:

$$\vec{d} = (d_1, \ldots, d_{N-1})'. \tag{32}$$

Для получения соотношений, позволяющих вычислить этот вектор, в соответствии с представлением (18) матрицу (10) можно представить в виде:

$$V = V_1 D, \tag{33}$$

где

$$D = diag(d_1, ..., d_{N-1}); \tag{34}$$

$$V_1 = (\vec{V}_1^1 ... \vec{V}_{N-1}^1), \quad \vec{V}_i^1 = \vec{V}_i / d_i, i = 1, ..., N-1. \tag{35}$$

Тогда в соответствии с (9) и свойством ортогональности (4) матрица (29) может быть представлена в виде:

$$C = DWD, \tag{36}$$

где

$$W = \{w_{ik}\} = V_1' \, V_1. \tag{37}$$

Сопоставляя диагональные элементы матриц (36) и (30), нетрудно получить соотношения для компонент вектора (32):

$$d_i = \pm(1 - w_{ii})^{-1/2}, \quad i = 1, ..., N-1. \tag{38}$$

Очевидно, что из (30) для знаков компонент вектора следует уравнение:

$$sign(c_{ik}) = sign(d_i) * sign(d_k). \tag{39}$$

Поэтому можно конкретизировать знак любой компоненты вектора (32), например положив:

$$sign(d_1) = 1. \tag{40}$$

Тогда в соответствии с (39) получаем:

$$sign(d_k) = sign(c_{1k}), \quad k = 2, ..., N-1. \tag{41}$$

Наконец из условия нормировки следует равенство:

$$d_N = \pm(N - 1 - \sum_{k=1}^{N-1} c_{kk})^{1/2}. \tag{42}$$

В данном случае знак может быть выбран любым, например положительным.

Ясно также, что требование ортогональности собственных векторов (8) дает следующее представление:

$$\vec{g} = -d_N (G_{11}')^{-1} \vec{d}.$$

Подстановка сюда представления (31) с учетом (29) дает соотношение:

$$\vec{g} = -G_{11} \vec{d} / d_N, \tag{43}$$

которое не содержит обратной матрицы.

Наконец, в соответствии с определениями матрицы (1) и матрицы собственных векторов (5) получаем очевидное соотношение:

$$\mu_N = a_{NN} - \vec{a}_N G_{11} \vec{d} / d_N^2. \tag{44}$$

Отметим, что для положительности собственного числа должно выполняться неравенство:

$$a_{NN} \geq \vec{a}_N' G_{11} \vec{d} / d_N^2. \tag{45}$$

В зависимости от знака и абсолютной величины $a_{NN}$ это соотношение может потребовать одновременного изменения знака у всех компонент вектора (32).

### 3. Заключение

Таким образом, получены все соотношения, позволяющие вычислить собственные векторы и числа матрицы (1), если известны собственные векторы и числа верхнего углового блока в представлении (1). Этот результат позволяет осуществлять рекуррентные вычисления собственных векторов и чисел рассматриваемого класса симметричных матриц. Практическое значение полученных соотношений определяется тем, что собственные числа симметричных матриц часто используются в задачах анализа резонансных свойств различных систем, например, механических [4]. Собственные числа и векторы симметричных субполосных матриц представляют собой естественную математическую основу оптимальных методов субполосного анализа и синтеза сигналов [5,6]. Поэтому рекуррентные соотношения для собственных значений матриц, окаймляющих исходные, на основе собственных значений последних могут найти применение при решении многих задач.


**Благодарности**

Исследования выполнены при поддержке грантов РФФИ №№20-07-00215а и 20-07-00241а.


**Литература**


1. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Наука. – Москва : Изд-во Наука, 1967. – 575 с.

2. *Хорн, Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон ; Перевод с англ. Х. Д. Икрамова и др.; Под ред. Х. Д. Икрамова. – Москва : Мир, 1989. – 655 с.

3. *Парлетт, Б.* Симметричная проблема собственных значений : Числ. методы / Б. Парлетт ; Перевод с англ. Х. Д. Икрамова, Ю. А. Кузнецова. – Москва : Мир, 1983. – 382 с.

4. *Гантмахер, Ф. Р.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн ; Гос. изд-во технико-теоретической лит. – Изд. 2е, перераб. и доп. – Москва ; Ленинград : Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1950. – 359 с.

5 . *Жиляков, Е. Г.* Оптимальные субполосные методы анализа и синтеза сигналов конечной длительности / Е.Г. Жиляков // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 4. – С. 51–66; Autom. Remote Control. – 2015. – 76:4. – P. 589–602.

6. *Жиляков, Е. Г.* Построение трендов отрезков временных рядов / Е. Г. Жиляков // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 3. – С. 80–95 ; Autom. Remote Control. – 2017. – 78:3. – P. 450–462.

УДК 004

# РАЗРАБОТКА КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ТИПА КЕЛЬВИНА — ФОЙГТА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

**Е. А. Здоровцова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Работа посвящена реализации программного модуля для расчета и визуализации слабых решений математической модели, описывающей нестационарные течения вязкоупругих жидкостей типа Кельвина — Фойгта в плоском канале с учетом условия скольжения типа Навье на стенках канала.
**Ключевые слова:** неньютоновские жидкости, жидкости Кельвина — Фойгта, слабые решения, скорость течения, метод Фаэдо — Галеркина, проскальзывание на границе.

## 1. Постановка задачи

Математическое изучение различных задач о движении неньютоновских жидкостей типа Кельвина — Фойгта восходит к работам А. П. Осколкова [1, 2] и впоследствии было продолжено многими авторами. В данной работе рассматривается задача о течении жидкости Кельвина — Фойгта в плоском канале. Конфигурация течения представлена на рис. 1. Предполагается, что пространство между двумя параллельными пластинами заполнено жидкостью и задан перепад давления $-\xi$, который определяет направление течения жидкости (такие течения называют плоскими течениями Пуазейля).

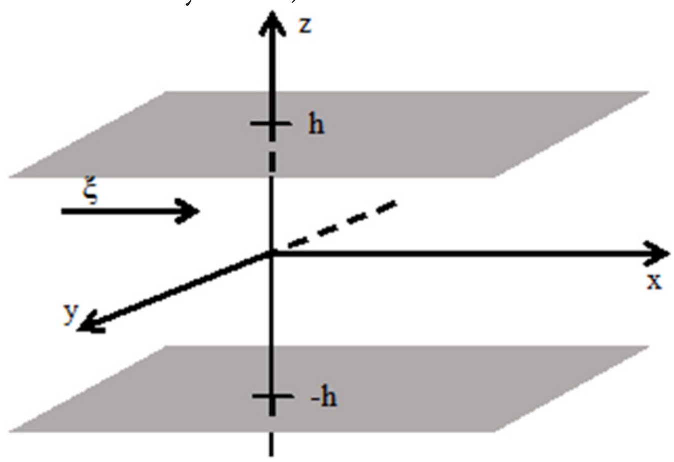



*Рис. 1. Конфигурация течения*

Целью работы является разработка программного модуля, позволяющего выполнять расчеты и визуализацию для рассматриваемой модели движения жидкости. Система должна обеспечивать нахождение скорости течения в плоском канале, сравнение модели с ньютоновской жидкостью и сохранение полученных результатов в таблицу Excel. Для реализации данной задачи использован программный пакет Maple, так как возможности данной среды позволяют выполнять сложные математические вычисления, а также предоставляют все необходимые инструменты для визуализации течения жидкости и построения таблиц решений.

Отметим, что движение жидкости Кельвина — Фойгта в плоском канале описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} = \xi, \quad z \in [-h, h], t \in [0, T]$$

$$-ku = \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}, \quad z = h,$$

$$ku = \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}, \quad z = -h,$$

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in [-h, h],$$

где $2h$ — толщина канала, $u_0$ — функция начального распределения скоростей, $\alpha$ — коэффициент релаксации, $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости, $k$ — коэффициент скольжения.

Требуется найти функцию $u = u(z,t)$, т. е. скорость течения. Будем предполагать, что начальное распределение скоростей $u_0$ — четная функция. Для построения решений рассматриваемой задачи будем использовать алгоритмы, предложенные в работах [3–5].

## 2. Программная реализация

Реализованный программный модуль позволяет пользователю задать необходимые параметры математической модели и получить динамический график изменения скорости жидкости в канале с течением времени при постоянном перепаде давления. Различные значения вводимых параметров будут соответствовать различным математическим моделям процессов.

Начальное окно для ввода параметров с заполненными полями представлено на рис. 2.

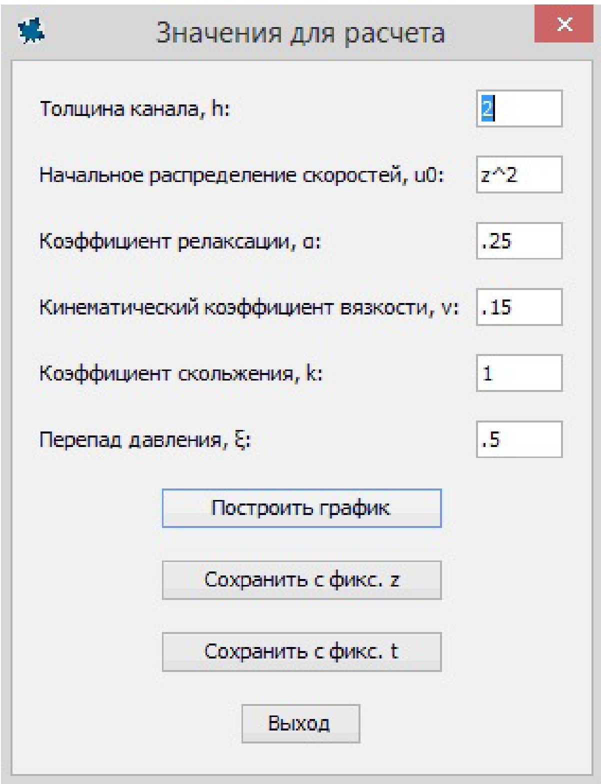



*Рис. 2. Главное окно программы с заполненными параметрами*

Когда функция, вычисляющая распределение скоростей по заданному алгоритму, отработала, появляется окно с построенным графиком, образец внешнего вида которого представлен на рис. 3.

Помимо графика неньютоновской жидкости, построенного на основе введенных пользователем данных, также строится график ньютоновской жидкости (параметр $\alpha = 0$). Таким образом, продемонстрировано сравнение двух типов жидкостей.

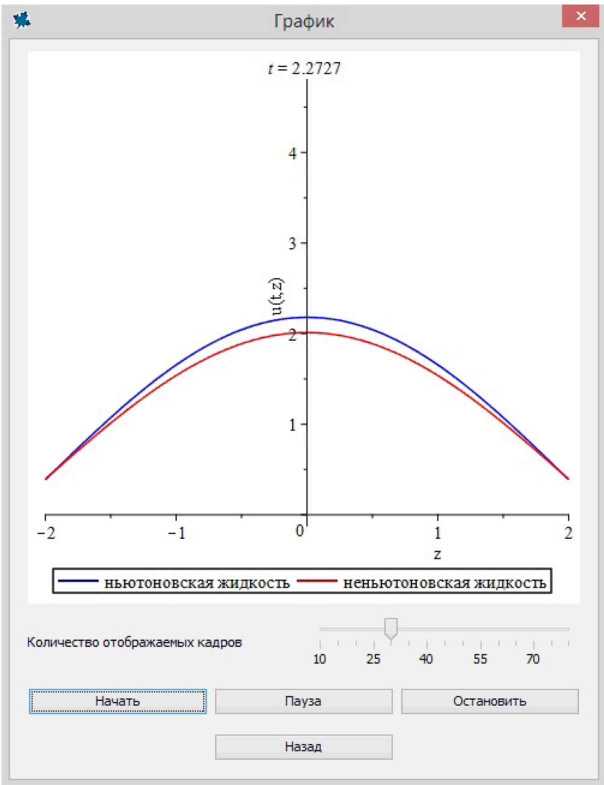



*Рис. 3. Окно с графиком изменения скорости течения*

Окно ввода параметров сохранения решения в файл Excel с фиксированным значением времени $t$ с заполненными полями продемонстрировано на рис. 4. Окно ввода параметров для сохранения с конкретным значением пространственной координаты $z$ выглядит аналогичным образом.

Образец полученного решения задачи, определенной набором параметров, указанных на рис. 2, после сохранения в файл типа Excel со значениями, показанными на рис. 4, приведен ниже (рис. 5).

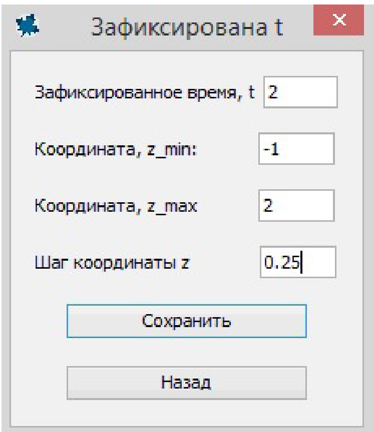
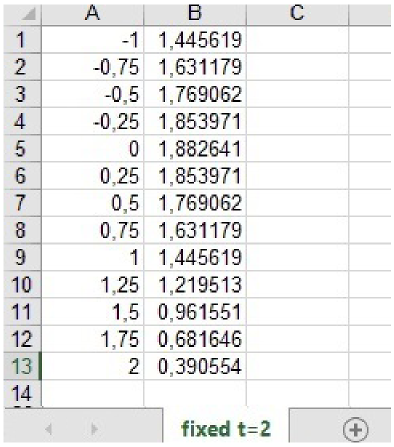



*Рис. 4. Окно ввода параметров сохранения для конкретного t после заполнения*



| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 1,445619 | |
| 2 | -0,75 | 1,631179 | |
| 3 | -0,5 | 1,769062 | |
| 4 | -0,25 | 1,853971 | |
| 5 | 0 | 1,882641 | |
| 6 | 0,25 | 1,853971 | |
| 7 | 0,5 | 1,769062 | |
| 8 | 0,75 | 1,631179 | |
| 9 | 1 | 1,445619 | |
| 10 | 1,25 | 1,219513 | |
| 11 | 1,5 | 0,961551 | |
| 12 | 1,75 | 0,681646 | |
| 13 | 2 | 0,390554 | |
| 14 | | | |

fixed t=2

*Рис. 5. Образец сохраненного решения в Excel*

Соответственно, в первом столбце отображено изменение координаты $z$ от $z_{min}$ до $z_{max}$ с определенным пользователем шагом, а во втором — значение функции скорости $u(t\_fixed, z)$, где $t\_fixed$ — зафиксированное значение времени.

## Заключение

В работе была рассмотрена математическая модель, описывающая течение неньютоновской жидкости Кельвина — Фойгта в плоском канале при условии проскальзывания Навье на границе. Разработан программный комплекс, позволяющий выполнять расчеты и визуализацию решений рассматриваемой модели жидкости. Построенные решения могут быть использованы при определении области применимости моделей неньютоновских сред, а также при тестировании различных приближенных аналитических, численных и асимптотических методов исследования гидродинамических систем со сложной реологией.

## Литература


1. *Осколков, А. П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1973. – Т. 38. – С. 98–136.

2. *Осколков, А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта / А. П. Осколков // Труды МИАН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.

3. *Артемов, М. А.* Граничные задачи для уравнений движения полимерных жидкостей с нелинейным условием проскальзывания вдоль твердых стенок / М. А. Артемов, Е. С. Барановский // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 14–24.

4. *Baranovskii, E. S.* Global solutions for a model of polymeric flows with wall slip / E. S. Baranovskii // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2017. – Vol. 40, № 14. – P. 5035–5043.

5. *Baranovskii, E. S.* Strong solutions of the incompressible Navier–Stokes–Voigt model / E. S. Baranovskii // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, № 2. – Article ID 181. – https://doi.org/10.3390/math8020181.

УДК 629.78:531.395

# РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИЛОВОГО ПРИВОДА ДЛЯ РАСКРЫТИЯ КРУПНОГАБАРИТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

**В. Н. Зимин, А. В. Крылов, А. О. Шахвердов**

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** Особый класс крупногабаритных космических систем образуют трансформируемые конструкции, имеющие различные конфигурации в транспортном и рабочем состояниях. Вопросы математического моделирования динамики раскрытия таких систем в настоящее время привлекают значительный интерес ученых. Для обеспечения плавного «управляемого» раскрытия трансформируемых конструкций, исключающего динамические нагрузки ударного характера на их составляющие элементы, предлагается использовать силовые приводы из материала с эффектом памяти формы. В результате проведенных теоретических и экспериментальных исследований предложена математическая модель функционирования силового привода.
**Ключевые слова:** трансформируемые крупногабаритные космические конструкции, раскрытие, привод, эффект памяти формы, модель, испытания.

## Введение

Трансформируемые крупногабаритные космические конструкции становятся ключевыми компонентами технологии современных систем. Усложнение конструктивных схем перспективных трансформируемых крупногабаритных космических систем вследствие повышения их эксплуатационных функциональных возможностей приводит к необходимости проектирования и создания все более сложных изделий. Создание таких систем в значительной степени опирается на математический эксперимент, целью которого является проверка заложенных в конструкцию проектных решений с точки зрения их соответствия заданию на разработку. Сложности, возникающие при моделировании в наземных испытаниях условий эксплуатации в космосе, а именно невесомости и отсутствия атмосферы, требуют создания дорогостоящих стендов обезвешивания конструкций и уникальных по размерам вакуумных камер. Поэтому важное значение при создании трансформируемых космических конструкций приобретает разработка математических моделей, адекватно описывающих динамику их раскрытия из транспортного положения в рабочее состояние при гарантированном обеспечении надежного последующего функционирования на орбите.

Процесс раскрытия представляется чрезвычайно ответственным и обеспечение его надёжности связано с решением сложных задач механики конструкций, так как размеры системы в сложенном и рабочем состояниях могут отличаться в десятки раз. Раскрытие конструкции происходит под воздействием силовых приводов. В качестве силовых приводов, способных обеспечить раскрытие трансформируемых крупногабаритных космических конструкций, могут быть использованы материалы с эффектом памяти формы (ЭПФ). Проволока из сплава типа никелида титана (нитинол) — типичный пример использования сплавов с ЭПФ в силовых приводах.

## 1. Математическая модель функционирования силового привода

Процесс нагрева привода из сплава с эффектом памяти формы (ЭПФ) электрическим током может быть описан с помощью уравнения термодинамического баланса.

В качестве первого приближения можно принять, что изменение тепловой энергии привода из сплава с ЭПФ равно теплу, поступившему за счет электрической энергии минус тепловые потери от излучения на орбите

$$cm\frac{dT}{dt} = RI^2 - \varepsilon\sigma_0 T^4 S, \qquad (1)$$

где $c$ — удельная теплоемкость; $m$ — масса привода; $T$ — температура привода; $t$ — время; $R$ — сопротивление; $I$ — сила тока; $\varepsilon$ — относительный коэффициент лучеиспускания (степень черноты); $\sigma_0$ — постоянная Стефана — Больцмана; $S$ — излучаемая площадь.

Электрическое сопротивление силового элемента $R$ определяется по формуле

$$R = \rho\,\frac{L}{A},$$

где $\rho$ — удельное электрическое сопротивление материала силового элемента; $A$ и $L$ — соответственно площадь и длина силового элемента.

Если в некоторый момент времени, принимаемый за начальный $(t = 0)$, температура $T_0$ привода отличается от значения равновесной температуры, то связь между $t$ и текущим значением температуры $T(t)$ следует из решения (1) в виде

$$t = \frac{1}{S}\int\limits_{T_0}^{T(t)} \frac{cmdT}{\left(\dfrac{RI^2}{S}\right) - \varepsilon\sigma_0 T^4}. \qquad (2)$$

Принимая, что

$$\frac{dT}{dt} = 0,$$

определим равновесную температуру

$$\overline{T}_1 = \sqrt[4]{\frac{RI^2}{\varepsilon\sigma_0 S}}. \qquad (3)$$

Для равновесной температуры

$$RI^2 - \varepsilon\sigma_0 \overline{T}_1^4 S = 0.$$

Тогда

$$cm\frac{dT}{dt} = \varepsilon\sigma_0 S\,(\overline{T}_1^4 - T^4).$$

Обозначим

$$\beta_1 = \frac{cm}{\varepsilon\sigma_0 S}.$$

Тогда уравнение примет следующий вид

$$\beta_1\frac{dT}{dt} = \overline{T}_1^4 - T^4.$$

Начальное условие $T = T_0$ $(t = 0)$.

При наземных испытаниях в качестве первого приближения можно принять, что изменение тепловой энергии привода из сплава с ЭПФ равно теплу, поступившему за счет электрической энергии минус тепловые потери от естественной конвекции

$$cm\frac{dT}{dt} = RI^2 - \alpha S\,(T - T_c), \qquad (4)$$

где $c$ — удельная теплоемкость; $m$ — масса простейшего привода; $T$ — температура привода; $t$ — время; $R$ — сопротивление простейшего привода; $I$ — сила тока; $\alpha$ — коэффициент теплообмена; $S$ — площадь поверхности теплообмена; $T_c$ — температура окружающей среды.

Если в некоторый момент времени, принимаемый за начальный $(t=0)$, температура $T_0$ привода отличается от значения равновесной температуры, то связь между $t$ и текущим значением температуры $T(t)$ следует из решения (4) в виде

$$t=\frac{1}{S}\int\limits_{T_0}^{T(t)}\frac{cmdT}{\left(\frac{RI^2}{S}\right)-\alpha(T-T_c)}. \tag{5}$$

Принимая, что

$$\frac{dT}{dt}=0,$$

определим равновесную температуру

$$\overline{T}_2=\frac{RI^2}{\alpha S}+T_c. \tag{6}$$

Обозначим

$$\beta_2=\frac{cm}{\alpha S}.$$

Тогда уравнение примет следующий вид

$$\beta_2\frac{dT}{dt}=\overline{T}_2-T. \tag{7}$$

Начальное условие $T=T_0\ \ (t=0)$.

Решение уравнения (7)

$$T(t)=\overline{T}_2-(\overline{T}_2-T_0)\exp(-t/\beta).$$

Для обеспечения приближенного подобия процессов на орбите и при наземных испытаниях необходимо, чтобы

$$\overline{T}_1=\overline{T}_2. \tag{8}$$

Учитывая соотношения (3) и (6) выражение (8) примет следующий вид

$$\overline{T}_1=\frac{\varepsilon\sigma_0}{\alpha}\overline{T}_1^4+T_c. \tag{9}$$

Преобразуем (9) к виду

$$\frac{\overline{T}_1}{T_c}=\frac{\varepsilon\sigma_0}{\alpha}T_c^3\left(\frac{\overline{T}_1}{T_c}\right)^4+1.$$

Окончательно получим

$$\frac{\overline{T}_1}{T_c}=N\left(\frac{\overline{T}_1}{T_c}\right)^4+1, \tag{10}$$

где $N=\dfrac{\varepsilon\sigma_0}{\alpha}T_c^3$.

Из (10) определяем $\overline{T}_1/T_c$ для различных $N$.

## Заключение

Численный эксперимент, использующий разрабатываемые математические модели в сочетании с наземными испытаниями и методами идентификации параметров конструкции часто является альтернативной возможностью проверки и обоснования функциональной пригодности создания таких систем.

**Литература**


1. Механика больших космических конструкций / Н. В. Баничук, И. И. Карпов, Д. М. Климов и др. – М. : Изд-во «Факториал», 1997. – 302 с.

2. *Лопатин А. В., Рутковская М. А.* Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (Часть 1) // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. – 2007. – № 2. – С. 51–57.

3. *Пономарев С. В.* Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2011. – № 4(16). – С. 110–119.

4. *Zimin V. N., Zikun Z., Krylov A. V., Churilin S. A.* Mathematical modeling of the deployment of a large transformable space structure. AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2171. – Art.no 030002 https://aip.scitation.org…bs/10.1063/1.5133168 DOI: 10.1063/1.5133168.

5. *Im, E., Thomson, M., Fang, H., Pearson, J., Moore, J., & Lin, J.* Prospects of large deployable reflector antennas for a new generation of geostationary Doppler weather radar satellites. In AIAA SPACE 2007 Conference & Exposition. – 2007, September. P. 9917.

6. *Likhachev, V. A., Razov, A. I., Cherniavsky, A. G., Kravchenko, Y., & Trusov, S. N.* Truss mounting in space by shape memory alloys. In Proceedings of the First International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies, California, USA. – 1994, March. – P. 245–248.

7. *Schiedeck F., Hemsel T., Wallaschek J.* The use of shape memory alloy wires in actuators // Solid state Phenomena. – 2006. – Vol. 113. – P. 195–198.

8. Методика проектирования силовых приводов из материала с эффектом памяти формы для ракетно-космической техники / В. А. Барвинок, В. И. Богданович, А. А. Грошев и др. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2013. – Т. 15, № 6. – С. 272–277.

УДК 550.388.2

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ

**С. А. Ишанов, Н. М. Кащенко, Е. В. Зубков, П. М. Каратаева, В. Н. Худенко**

*Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта*

**Аннотация.** На основе МГД-уравнений теоретической модели ионосферы и плазмосферы рассмотрены нестационарные задачи об эволюции возмущений в околоземной космической плазме, вызываемых природными и техногенными воздействиями. По результатам численного моделирования получены и проанализированы детальные пространственно-временные распределения основных параметров ионосферно-магнитосферной плазмы.
**Ключевые слова:** математическая модель, численные методы, численное моделирование, ионосфера, плазмосфера, концентрация, скорость, температура, химическая кинетика, гидродинамическое описание.

## Введение

Математическое моделирование ионосферно-плазмосферных взаимодействий важно как для изучения структуры ионосферы и физики протекающих в ней процессов, интерпретации и анализа наблюдаемых особенностей среды, так и для прогноза возможного поведения околоземной космической плазмы.

Целью работы является исследование динамики плазмы среднеширотной ионосферы и плазмосферы в возмущенных и спокойных условиях с учетом широкого спектра геофизических факторов, ответственных за образование этих структур: сложного состава ионосферной плазмы, диффузии электронно-ионного газа, фотохимии, дипольной геометрии геомагнитного поля, электрического дрейфа, ионосферно-плазмосферного обмена, кинетики сверхтепловых электронов [1–3].

Используемая в данной работе численная модель системы ионосфера-плазмосфера, основанная на системе уравнений магнитной гидродинамики, позволяет рассчитывать концентрации, температуры и скорости ионов $H^+$, $He^+$, $O^+$, $N^+$, $N_2{}^+$, $O_2{}^+$, $NO^+$ и электронов вдоль геомагнитной силовой трубки от высоты 125 км до нескольких радиусов Земли.

В модели также решаются уравнения диффузии для малых нейтральных и возбужденных компонент, в том числе и таких как $O(^1D)$, $N(^2D)$, $O_2(A^1\Delta q)$, $H_2O, N_2{}^{(v)}$.

В статье представлены полученные для средних широт результаты вычислительных экспериментов в различных гелиогеофизических условиях.

## 1. Описание математической модели

Полагаем, что макроскопическое движение плазмы происходит вдоль геомагнитного поля. Выбором дипольной системы координат сведем физическую задачу трехмерного движения плазмы к двумерной математической задаче в переменных $s$ (координата вдоль силовой линии) и $t$ (время).

Математическая модель основана на численном решении системы уравнений гидродинамики частично ионизированной плазмы для ионов и электронов. Система уравнений непрерывности, импульса и теплового баланса для заряженных компонентов может быть записана [2–3] в следующем виде:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\frac{1}{A}\frac{\partial (An_i v_i)}{\partial s}+\alpha_i n_i = Q_i\,, \qquad (1)$$

$$n_i m_i \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial s} \right] + \frac{\partial p_i}{\partial s} = -n_i m_i g \sin I + n_i \sum_{j=1}^{5} S_{ij}(v_j - v_i) + n_i R_i (v_{nx} \cos I - v_i) - \frac{n_i}{N_e} \frac{\partial p_e}{\partial s}, \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} k n_i \left( \frac{\partial T_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial s} \right) + \frac{p_i}{A} \frac{\partial (A v_i)}{\partial s} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left( A \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial s} \right) = P_{ie} + P_{in} + P_{ij}, \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} k N_e \left( \frac{\partial T_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial T_e}{\partial s} \right) + \frac{p_e}{A} \frac{\partial (A u_e)}{\partial s} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left( A \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial s} \right) = P_g + P_{ei} - P_{en}, \quad (4)$$

где индекс $n$ в величинах $v_{nx}$, $P_{in}$, $P_{en}$ связывает их с нейтральными частицами; индекс $e$ в величинах $N_e$, $p_e$, $P_{ie}$, $T_e$, $u_e$, $\lambda_e$, $P_{ei}$, $P_{en}$ — с электронами; $u_e$ — скорость электронов; $n_i$, $m_i$, $v_i$, $T_i$ — концентрация, масса, скорость и температура ионов $i$-го сорта соответственно ($i = 1 \Rightarrow O^+$, $i = 2 \Rightarrow H^+$, $i = 3 \Rightarrow O_2^+$, $i = 4 \Rightarrow NO^+$, $i = 5 \Rightarrow N_2^+$); $s$ — координата вдоль геомагнитной силовой линии, положительная в направлении от Северного полюса к Южному; $A$ — расходимость силовых линий магнитного поля; $I$ — магнитное наклонение; $g$ — ускорение силы тяжести; $v_{nx}$ — меридиональный компонент скорости нейтрального ветра; $Q_i, \alpha_i$ — скорость образования и вероятность потерь $i$-го иона; $N_e$ — электронная концентрация; $p_i$ — давление ионного газа, состоящего из частиц $i$-го сорта; $p_e$ — давление электронного газа; $T_e$ — электронная температура; $\lambda_e, \lambda_i$ — коэффициенты теплопроводности электронного и ионного газов соответственно; $k$ — постоянная Больцмана; $R_i$ — коэффициент силы трения между ионами $i$-го сорта и нейтральными частицами; $S_{ij}$ — коэффициенты силы трения между ионами $i$-го и $j$-го сортов; $P_g$ — скорость нагрева тепловых электронов сверхтепловыми фотоэлектронами; $P_{ei}$ — скорость теплообмена электронов с ионами; $P_{ie}$ — скорость теплообмена $i$-го иона с электронами; $P_{ij}$ — скорость теплообмена $i$-го иона с ионами $j$-го сорта; $P_{in}$ — скорость теплообмена $i$-го иона с нейтралами; $P_{en}$ — скорость охлаждения электронов на нейтральных частицах.

Положим справедливым условие квазинейтральности плазмы

$$u_e = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{7} n_i v_i .$$

Химические реакции, определяющие кинетику ионов, а также образующихся в результате их взаимодействия с нейтральными компонентами молекулярных ионов, представлены в [4–7].

Коэффициенты диссоциативной рекомбинации ионов [5] таковы:

$$NO^+ + e \to N + O, \quad \alpha_1 = 4.2 \cdot 10^{-7} (300 / T_e)^{0.85};$$

$$O_2^+ + e \to O + O, \quad \alpha_2 = 1.95 \cdot 10^{-7} (300 / T_e)^{0.7}, \quad при \ T_e \le 1200K,$$

$$\alpha_2 = 7.39 \cdot 10^{-8} (1200 / T_e)^{0.56}, \ при \ T_e > 1200K.$$

Реакции резонансной перезарядки, влияющие на существование плазмосферы Земли, имеют следующие коэффициенты [6]:

$$O^+ + H \to H^+ + O, \quad k_{12} = 2.5 \cdot 10^{-11} \sqrt{T};$$

$$H^+ + O \to O^+ + H, \quad k_{21} = 2.2 \cdot 10^{-11} \sqrt{T},$$

где $T$ — эффективная температура.

Учет взаимодействия плазмы с горизонтальным термосферным ветром на ионосферных высотах проводится так же, как в [2]. Члены $P_{ei}$, $P_{in}$, $P_{ie}$, $P_{en}$, $P_{ij}$, входящие в уравнения теплового баланса (3)–(4), которые учитывают упругие и неупругие процессы обмена энергией между заряженными частицами и нейтральными составляющими, взяты из [4]. Для расчета $P_g$, согласно [7], решалось кинетическое уравнение для сверхтепловых электронов. Нестационарные уравнения фотохимического равновесия для молекулярных ионов $O_2^+$, $NO^+$, $N_2^+$ записываются в виде

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = Q_i - \alpha_i n_i, \; i = 3,4,5. \tag{5}$$

Численное решение системы уравнений модели осуществлялось вдоль геомагнитной силовой линии с применением метода конечных разностей. Линеаризация разностных уравнений проводилась с использованием значений неизвестных функций, взятых с предыдущего временного слоя, с последующими итерациями по нелинейности и связанности уравнений. При решении системы уравнений (1)–(2) использован подход, приведенный в [8–9]. Сначала запишем уравнение (2) в дивергентной форме [2]:

$$\frac{\partial n_i v_i}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i^2}{\partial s} + \frac{\partial p_i}{\partial s} = F_i. \tag{6}$$

Здесь $F_i$ учитывает действие внешних сил:

$$F_i = n_i \gamma_i + v_i (Q_i - \alpha_i n_i),$$

$$\gamma_i = -g \sin I + \frac{S_{ij}}{m_i}(v_j - v_i) + \frac{R_i}{m_i}(v_{nx} \cos I - v_i) - \frac{1}{m_i N_e}\frac{\partial p_e}{\partial s}.$$

Используя метод суммарной аппроксимации [8, 10], можно разделить исходную систему уравнений на последовательно решаемую систему уравнений переноса

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial n_i v_i}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i^2}{\partial s} + \frac{\partial p_i}{\partial s} = 0; \tag{7}$$

и систему обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих элементарные процессы (фотохимию и столкновения)

$$\frac{dn_i}{dt} + \alpha_i n_i = Q_i, \quad \frac{dv_i}{dt} + \beta_i v_i = f_i, \tag{8}$$

где $\beta_i$ и $f_i$ учитывают силы взаимодействия (сила тяжести, электрическая сила, силы трения ион-ион, ион-нейтрал):

$$\beta_i = \frac{S_{ij}}{m_i} + \frac{R_i}{m_i}; \quad f_i = \gamma_i + \beta_i v_i.$$

Решение уравнений (8) дается формулами

$$\hat{n}_i = n_i e^{-\tau\alpha_i} + \frac{Q_i}{\alpha_i}(1 - e^{-\tau\alpha_i}); \quad \hat{v}_i = v_i e^{-\tau\beta_i} + \frac{f_i}{\beta_i}(1 - e^{-\tau\beta_i}),$$

где $n_i, v_i$ — концентрация и скорость, полученные решением системы (7); $\hat{n}_i, \hat{v}_i$ — результирующие значения концентрации и скорости, полученные за два шага: «перенос + элементарные взаимодействия».

Для решения системы уравнений переноса (7) применялся алгоритм, основанный на явной консервативной схеме [8, 10].

## 2. Результаты вычислительных экспериментов на высотах верхней ионосферы и плазмосферы

Для дальнейшего решения задач об эволюции геофизических плазменных возмущений в широком диапазоне высот ионосферы и магнитосферы были проведены усовершенствования численных методов и алгоритмов.

Для описания пространственно-временных вариаций температуры и концентраций нейтральных компонентов $O_2$, $N_2$, $O$, $H$, $He$, $N$ используется модель термосферы MSIS [11].

Проведем численное исследование влияния техногенного локализованного динамического возмущения температуры и плотности магнитосферной плазмы на поведение замкнутой системы ионосферы-плазмосферы.

Моделирование эффектов электронного нагрева и резкого изменения содержания заряженных частиц проводилось для геомагнитной силовой трубки с параметром Мак-Илвайна $h = 2$, средней солнечной активности (индекс $F_{10.7} = 140$), зимы в северном полушарии.

В магнитно-силовой трубке с установившимся режимом динамическое воздействие задавалось в $12.00\,LT$ в северном полушарии гауссоподобным возмущением электронной концентрации $N_e$ и температуры $T_e$ с максимумом на высоте 2310 км ($N_e[2310] = 1,5 \cdot 10^5\,см^{-3}$, $T_e[2310] = 1,1\,ЭВ$).

Размер области возмущения по высоте — 850 км. На рис. 1 приведены суточные вариации разности $\Delta N_T$ интегрального электронного содержания «возмущения — фон» в обоих полушариях.

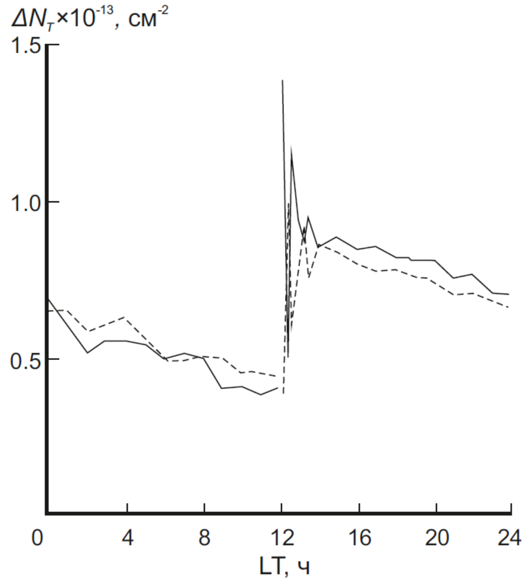



*Рис. 1. Временные вариации разности электронных интегральных содержаний («возмущение — фон»). Сплошные линии — северное полушарие, пунктирная — южное*

Значительное количество образовавшихся при дневном динамическом возмущении заряженных частиц накапливается в плазмосфере, при этом разность между возмущенным и фоновым интегральным содержанием $\Delta N_T$ составляет в $16.00\,LT$ в южном и северном полушариях $8 - 9 \cdot 10^{12}\,см^{-2}$, а к 4 часам утра $\Delta N_T$ уменьшается примерно вдвое.

Электронная концентрация — структурный параметр системы ионосфера-плазмосфера.

Особый интерес для ионосферных исследований представляет изменение концентрации электронов в области главного ионосферного максимума.

Суточные вариации максимальной электронной концентрации в F2-слое $N_mF2$ представлены на рис. 2.

При возмущении в северном полушарии величины $N_mF2$ начинают превосходить значения, соответствующие спокойным условиям уже с $20.00\,LT$.

Это увеличение электронной концентрации сохраняется в течение всей ночи и достигает 30 %. Механизм поддерживания повышенной электронной концентрации в максимуме F2-слоя иллюстрирует рис. 3.

Известно, что ночью давление плазмы в ионосфере падает и возникающие потоки заряженных частиц из плазмосферы поддерживают концентрацию электронов в F-области на определенном уровне, в зимний период роль протоносферных потоков в поддержании ночной ионосферы особенно велика.

Результаты, представленные на рис. 3, показывают, что при сохранении качественного характера высотных профилей потока наблюдается резкое увеличение направленных в ионосферу потоков плазмы в неосвещенный период.

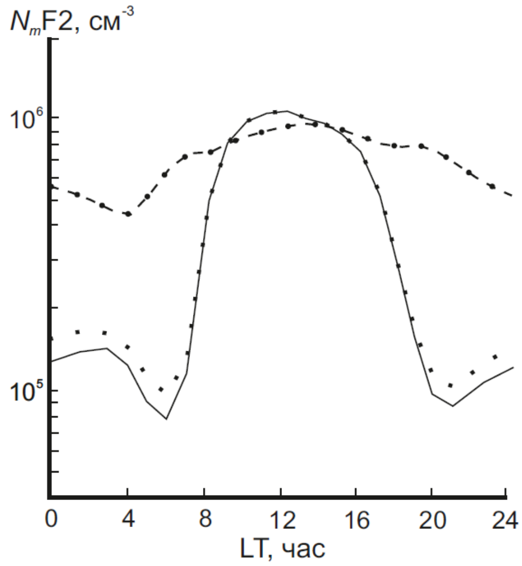



*Рис. 2. Суточный ход $N_mF2$ в северном (сплошная линия) и южном полушариях (пунктирная) в невозмущенных условиях, кружки и квадратики — при возмущении*

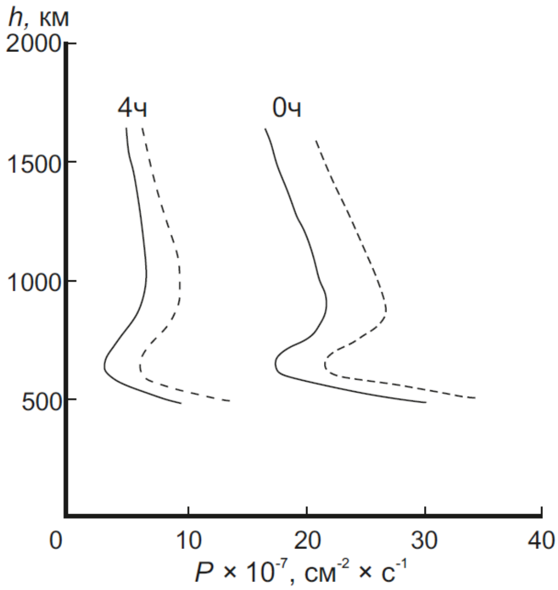



*Рис. 3. Высотно-временные вариации ионного потока в северном полушарии. Сплошные линии — фон, пунктирные — при возмущении. Поток направлен вниз*

В летний период из-за гораздо большей продолжительности дневной ионизации солнечным ультрафиолетовым излучением суточные вариации $N_mF2$ гораздо меньше, как это следует из сравнения кривых на рис. 2, и роль протоносферных потоков в поддержании ночной ионосферы невелика.

Одним из фундаментальных свойств плазмы является наличие в ней возбужденных частиц.

Благодаря запасу внутренней энергии и большим сечениям взаимодействия эти частицы играют заметную роль в кинетике микропроцессов ионосферной плазмы, приводя к возбуждению атмосферных эмиссий, увеличению скоростей некоторых важных аэрономических реакций.

Вычислительный эксперимент показал, что восстановление ионосферных параметров, таких как концентрация колебательно-возбужденного азота $N_2^{(v)}$, $T_e$, $N_e$ от возмущенных условий до фоновых значений происходит в среднем за 25 мин.

Из рис. 4 видно, что в начальные моменты времени и до 20 мин сохраняются достаточно высокие концентрации $N_2^{(1)}$ относительно фоновых значений (превышение составляет 1–2 порядка величины).

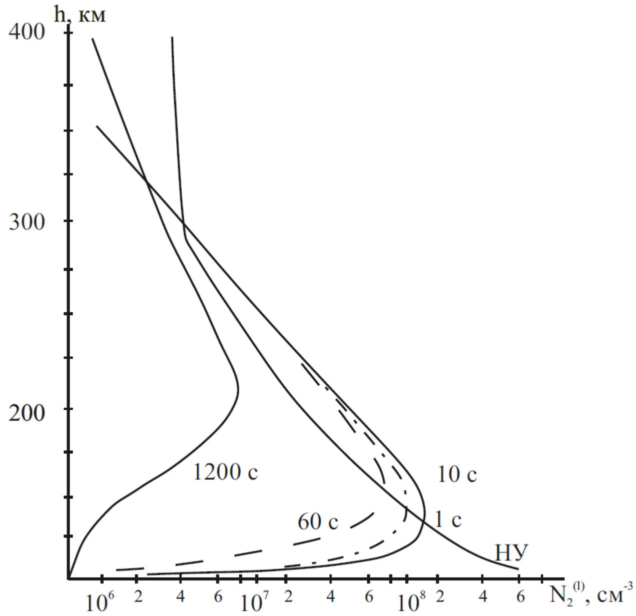
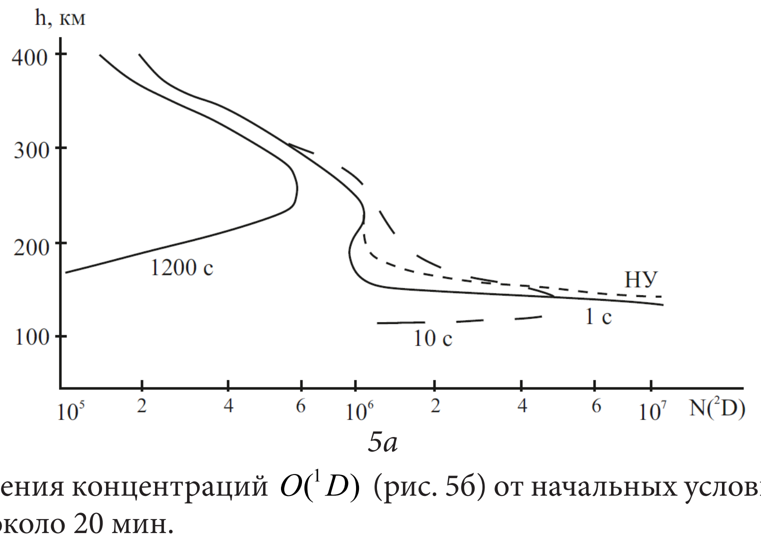



*Рис. 4. Рассчитанное высотно-временное поведение колебательно-возбужденного $N_2^{(1)}$ на первом колебательном уровне*

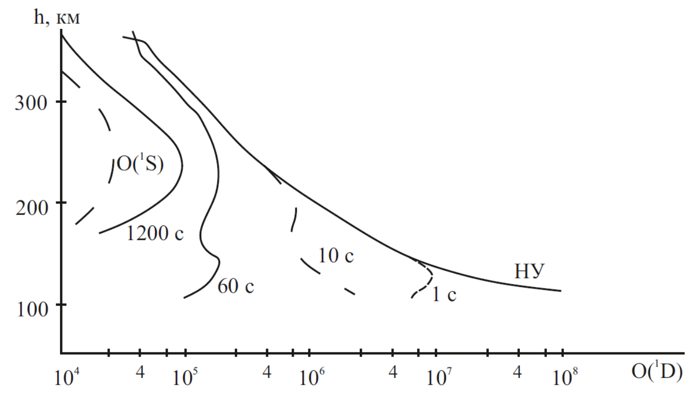
Показано, что колебательно-возбужденный азот существенно влияет на рекомбинацию ионосферной плазмы для возмущенных условий.

На рис. 5а приведены пространственно-временные распределения метастабильной компоненты $N(^2D)$.




*5а*

Время установления концентраций $O(^1D)$ (рис. 5б) от начальных условий до фоновых значений составляет около 20 мин.




*5б*

*Рис. 5. Высотно-временное поведение электронно-возбужденного атомарного азота $N(^2D)$ (а) и кислорода $O(^1D)$, $O(^1S)$ (б)*

## Заключение

В работе на основе МГД уравнений рассмотрены нестационарные задачи об эволюции динамических возмущений в ионосфере и магнитосфере Земли, вызываемых активными воздействиями на плазменную среду.

Вычислительные эксперименты проводились с использованием усовершенствованных численных методов и алгоритмов.

По результатам численного исследования получены и проанализированы пространственно-временные распределения основных параметров ионосферной плазмы.

Численная устойчивость построенный модели по входным данным, её работоспособность подтверждены результатами решений модельных задач.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00361).

## Литература

1. *Тащилин А. В., Романова Е. Б.* Численное моделирование диффузии ионосферной плазмы в дипольном геомагнитном поле при наличии поперечного дрейфа // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 1. – С. 3–17.

2. *Латышев К. С., Зинин Л. В., Ишанов С. А.* Математическое моделирование околоземной космической плазмы // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. – 2008. – Т. 7–1, Ч. 3. – С. 337–349.

3. *Ишанов С. А., Мацула П. В.* Вычислительный эксперимент при моделировании динамики антропогенных возмущений ионосферно-магнитосферной плазмы // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 6. – С. 128–136.

4. *Брюнелли Б. Е., Намгаладзе А. А.* Физика ионосферы. – М. : Наука, 1988. – 528 с.

5. *Richards P. G.* Reexamination of ionospheric photochemistry // J. Geophys. Res. – 2011. – V. 116, iss A8. – A08307.

6. *Barakat A. R., Schunk R. W., Moore T. E., Waite J. H.* Ion escape fluxes from the terrestrial highlatitude ionosphere // J. Geophys. Res. – 1987. – V. 92, № 11. – P. 12255–12266.

7. *Кринберг Н. А., Тащилин А. В.* Ионосфера и плазмосфера. – М. : Наука, 1984. – 189 с.

8. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений // ДАН СССР. – 1984. – Т. 279, № 1. – С. 80–83.
9. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.
10. *Chetverushkin B., D'Ascenzo N., Ishanov S., Saveliev V.* Hyperbolic type explicit kinetic scheme of magneto gas dynamics for high performance computing systems // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 2015. – 30(1). – P. 27–36.
11. *Hedin A. E.* Thermospheric model // J. Geophys. Res. – 1987. – V. 92, № A5. P. 4649–4662.

УДК 621.3

# МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ИНТЕРФЕЙСОВ СИСТЕМ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ ОТ НЕСАНКЦИОНИРОВАННОГО ДОСТУПА В АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ, ОСНОВАННЫЙ НА KEYSTROKE-LEVEL MODEL

**А. М. Каднова**

*Воронежский институт МВД России*

**Аннотация.** Статья посвящена решению практической проблемы оценки удобства использования систем защиты информации от несанкционированного доступа. Рассмотренный метод решения может применяться при оценке качества функционирования систем защиты информации несанкционированного доступа с точки зрения удобства использования пользователями различных категорий. Данная технология позволит получить количественную оценку характеристики «удобство использования» пользовательских интерфейсов.
**Ключевые слова:** система защиты информации, несанкционированный доступ, автоматизированная система, оператор, элементарное действие, система «человек–машина», технология, количественный анализ, количественная оценка, временной показатель, администратор безопасности.

## Введение

Одним из распространённых подходов к количественному анализу временного показателя качества функционирования систем защиты информации (СЗИ) от несанкционированного доступа (НСД) в автоматизированных системах (АС) является подход, основанный на использовании технологии Keystroke-Level Model, которая представляет собой быстрый и эффективный способ оценки времени выполнения типовой операции оператором в процессе работы с СЗИ от НСД [1]. Данная модель предполагает, что время необходимое для выполнения той или иной операции системой «человек-машина» есть сумма всех временных диапазонов, в течение которых эта система выполняла элементарные действия, составляющие данную операцию [2, 3]. С точки зрения оценки показателя «удобство использования» лучшим является тот интерфейс, при котором время выполнения типовой операции оказывается меньшим [4, 5].

## 1. Материалы и методы

В результате проведения лабораторных исследований было обнаружено, что несмотря на то, что для каждого оператора системы «человек-машина» время выполнения того или иного элементарного действия может быть индивидуально, проведение измерений для каждого отдельного оператора можно заменить использованием стандартных значений интервалов времени для каждого элементарного действия [6]. В соответствии с данной методикой любая операция, выполняемая оператором, состоит из шести элементарных действий. В табл. 1 приведены указанные элементарные действия, их описание и стандартные значения времени их выполнения.

Таблица 1

Элементарные действия оператора системы «человек-машина»: обозначение, описание и время выполнения

| № п/п | Обозначение элементарного действия | Описание | Время выполнения, сек |
|---|---|---|---|
| 1 | K | Нажатие на клавишу или кнопку. Данный параметр зависит от двигательных навыков оператора. | 0,2 |
| 2 | P | Время, необходимое для перемещения указателя мыши до элемента интерфейса. Данный параметр зависит от расстояния до элемента и его размера в соответствии с законом Фиттса. | 1,1 |
| 3 | H | Время, необходимое для перемещения руки оператора к устройству ввода данных. | 0,4 |
| 4 | M | Время, необходимое оператору для принятия решения о выполнении элементарного действия. | 1.35 |
| 5 | R | Время отклика системы. Данный параметр учитывается только в том случае, если оператор вынужден ждать реакцию системы. | |
| 6 | D | Время, затрачиваемое на рисование (вручную) $n_D$ отрезков прямых общей длиной $l_D$. | $0,9n_D + 0,16l_D$ |

Таким образом, время выполнения операции есть сумма времени, затраченного на выполнение элементарных действий:

$$T_{Общее} = T_K + T_P + T_H + T_M + T_R + T_D. \quad (1)$$

## 2. Результаты и их обсуждение

Используя рассмотренную выше методику Keystroke-Level Model проведем количественный анализ операции «Создание пользователя» выполняемой администратором безопасности СЗИ от НСД «Страж NT 3.0». Интерфейс программы «Менеджер пользователей» СЗИ от НСД «Страж NT 3.0», с помощью которой администратор безопасности выполняет операцию по созданию пользователя, представлен на рис. 1.

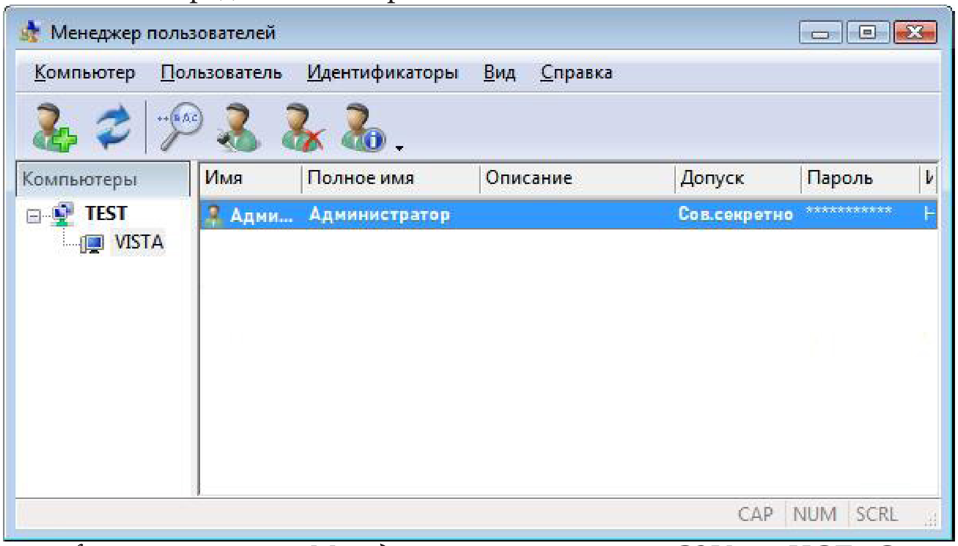



*Рис. 1. Интерфейс программы «Менеджер пользователей» СЗИ от НСД «Страж NT 3.0»*

Операция «Создание пользователя» состоит из следующих элементарных действий:

1. Перемещение руки к устройству ввода (мыши).
2. Перемещение курсора к объекту «Новый пользователь» интерфейса программы «Менеджер пользователей».
3. Нажатие на указанный объект. На экране появится диалоговое окно «Новый пользователь».
4. Перемещение курсора к объекту «Пользователь».
5. Нажатие на указанный объект.
6. Перемещение рук на клавиатуру.
7. Ввод в поле «Пользователь» символов «a», «b», «u», «k», «o», «v».
8. Перемещение рук к устройству ввода (мыши).
9. Перемещение курсора к объекту «Создать профиль пользователя на этом компьютере».
10. Нажатие на указанный объект (появится галочка).
11. Перемещение курсора к объекту «Допуск».
12. Нажатие на указанный объект.
13. Перемещение курсора к элементу «Секретно».
14. Нажатие на указанный элемент.
15. Перемещение курсора к полю «Пароль».
16. Нажатие на указанный объект.
17. Перемещение рук на клавиатуру.
18. Ввод в поле «Пароль» символов «b», «u», «k», «o», «v», «2», «0», «2», «0».
19. Перемещение руки к устройству ввода (мыши).
20. Перемещение курсора к полю «Подтверждение».
21. Нажатие на указанный объект.
22. Перемещение рук на клавиатуру.
23. Ввод в поле «Подтверждение» символов «b», «u», «k», «o», «v», «2», «0», «2», «0».
24. Перемещение руки к устройству ввода (мыши).
25. Перемещение курсора к объекту «Создать».
26. Нажатие на объект «Создать».

На рис. 2 представлен интерфейс диалогового окна «Новый пользователь» программы «Менеджер пользователей» СЗИ от НСД «Страж NT 3.0» в момент выполнения элементарного действия «Нажатие на объект «Создать».

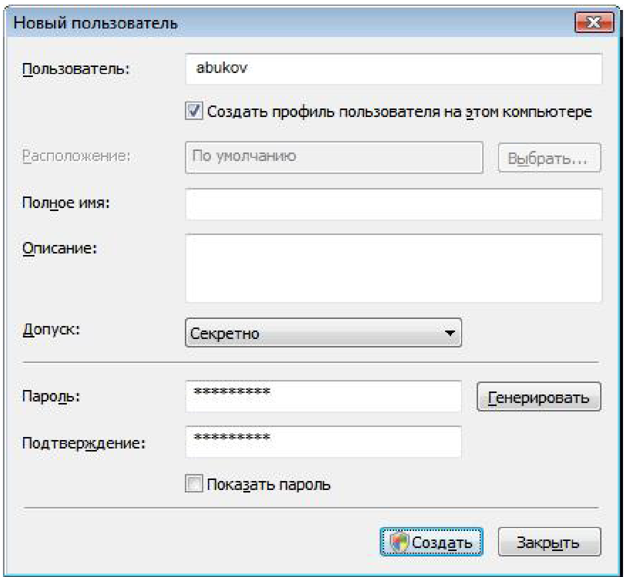



*Рис. 2. Интерфейс диалогового окна «Новый пользователь» программы «Менеджер пользователя» СЗИ от НСД «Страж NT 3.0» в момент выполнения элементарного действия «Нажатие на объект «Создать»*

Запись модели Keystroke-Level Model с учетом правил размещения элементарного действия М будет выглядеть следующим образом:

Н М Р К М Р К Н М К К К К К К К Н М Р К М Р К М Р К М Р К М Н К К К К К К К К К К Н М Р К М К К К К К К К К К К Н М Р К

В соответствии с выражением (1) получим время выполнения администратором безопасности СЗИ от НСД «Страж NT 3.0» операции «Создание пользователя»:

$$T_{Общее} = 11 \times 1,35 + 6 \times 0,4 + 8 \times 1,1 + 32 \times 0,2 = 32,45 \text{ сек}$$

## Заключение

Данная методика позволяет посчитать время выполнения одним и этим же администратором безопасности той или иной операции в различных СЗИ от НСД, и на основании полученных значений осуществить выбор СЗИ от НСД для проектируемой АС в защищенном исполнении. Таким образом, данная технология позволяет получить количественную оценку удобства использования программных интерфейсов.

## Литература


1. *Stuart C.* Psychology of Human Computer Interaction / C. Stuart, T. Moran, A. Newell. – USA : Lawrence Erlbaum Associates, 1983. – 312 с.

2. *Каднова А. М.* Методический подход к оценке вероятностного показателя своевременности выполнения типовых операций администратором системы защиты информации автоматизированной системы / А. М. Каднова // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2019. – Т. 46, № 3. – С. 87–96.

3. *Каднова А. М.* Способ оценки операционных характеристик систем защиты информации от несанкционированного доступа на основе эксперимента / О. И. Бокова, А. М. Каднова, Е. А. Рогозин, Н. С. Хохлов, О. Ю. Макаров // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. науч. тр. – Воронеж, 2020. – С. 656–659.

4. *Каднова А. М.* Показатели эффективности функционирования систем информационной безопасности в автоматизированных системах на объектах информатизации ОВД / А. М. Каднова // Актуальные вопросы эксплуатации систем охраны и защищенных телекоммуникационных систем : сб. науч. тр. – Воронеж, 2019. – С. 88–90.

5. *Каднова А. М.* Система показателей качества функционирования при создании системы информационной безопасности на объекте информатизации ОВД / О. И. Бокова, А. М. Каднова, Е. А. Рогозин, А. С. Серпилин // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2019. – № 1. – С. 32–39.

6. *Stuart C.* The Keystroke-Level Model for User Performance Time with Interactive Systems / C. Stuart, T. Moran, A. Newell // Communications of the ACM 23. – 1980. – С. 18–27.

УДК 519.688;517.958;51-4

# О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

**В. В. Калманович, А.А. Картанов, М. А. Степович**

*Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского*

**Аннотация.** Рассмотрены некоторые возможности решения нестационарного уравнения теплопроводности в осесимметричной многослойной среде. Задача решается путём совместного использования метода разделения переменных (метода Фурье) и матричного метода. Рассмотрены решения первой и третьей краевых задач. Приведены примеры расчётов по указанному методу.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, матричный метод, многослойная среда, метод Фурье.

## Введение

Многослойные материалы в виде пластин, оболочек, экранов находят всё большее практическое применение в технике. В процессе эксплуатации они подвергаются внешним тепловым воздействиям (в результате нагрева электромагнитным излучением и/или заряженными частицами) и часто работают в экстремальных условиях — например, в космосе, в ядерной энергетике и т.п. [1, 2]. Изучение тепловых режимов в многослойной оболочке позволяет предсказать поведение отдельных слоев и выявить условия, способствующие возможной деформации, плавлению и другим изменениям физического или химического характера отдельных слоёв. Для прогнозирования влияния внешних факторов на материалы и многослойные структуры необходимо иметь хорошие расчётные методы, позволяющие предсказать возможные нежелательные явления. В качестве одного из таких методов может быть использован матричный метод, предложенный нами ранее в ряде работ. Отметим, что подобная идея может быть использована не только для прикладных расчётов, но и в теоретических работах [3–5]. В ряде случаев могут быть учтены стохастические особенности и проведена оценка устойчивости решений для рассматриваемых процессов тепломассопереноса, обусловленного взаимодействием электромагнитного излучения и/или заряженных частиц с конденсированным веществом [6–8].

Ранее нами матричный метод использовался для решения стационарных задач [9–12], а также для построения нового вычислительного алгоритма [13, 14]. В данной работе этот метод совместно с методом Фурье применяется для моделирования нестационарной задачи в осесимметричной многослойной среде.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим процесс теплопроводности в осесимметричной многослойной среде (рис. 1), описываемый уравнением

$$\frac{1}{c(x)\rho(x)x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)x\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right)=\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}.$$

где $\lambda(x)$, $c(x)$, $\rho(x)$ — соответственно коэффициент теплопроводности, теплоёмкость и плотность среды. Поток направлен по оси $x$

$$J(x,t)=-\lambda(x)x\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}.$$

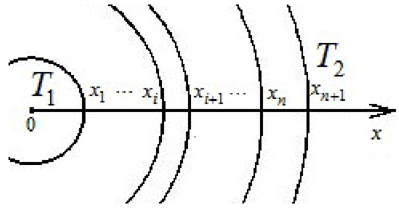



*Рис. 1. Схема осесимметричной многослойной среды*

Если на каждом слое многослойной среды физические параметры постоянны, то процесс теплопроводности можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{c^{(i)}\rho^{(i)}x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda^{(i)}x\frac{\partial T^{(i)}(x,t)}{\partial x}\right)=\frac{\partial T^{(i)}(x,t)}{\partial t},\ i=\overline{1,\ n}, \tag{1}$$

где $\lambda^{(i)}$, $c^{(i)}$, $\rho^{(i)}$ — соответственно коэффициент теплопроводности, теплоёмкость и плотность на $i$-м слое. Тогда поток на каждом слое определён формулой

$$J^{(i)}(x,t)=-\lambda^{(i)}x\frac{\partial T^{(i)}(x,t)}{\partial x},\ i=\overline{1,\ n}.$$

На границах между слоями среды примем условия идеального контакта

$$T^{(i)}(x_{i+1},t)=T^{(i+1)}(x_{i+1},t),\quad J^{(i)}(x_{i+1},t)=J^{(i+1)}(x_{i+1},t),\ i=\overline{1,n-1}. \tag{2}$$

Начальное распределение температуры задано

$$T^{(i)}(x,0)=g(x),\ x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где $g(x)$ — функция, которая может быть задана послойно, т. е. может иметь разрывы первого рода в точках контакта слоев.

В данной статье рассмотрим решение первой краевой задачи

$$T^{(1)}(x_1,t)=0,\ T^{(n)}(x_{n+1},t)=0, \tag{4}$$

и решение третьей краевой задачи

$$T^{(1)}(x_1,t)-T_1=-r^{(1)}J^{(1)}\left(x_1,t\right),\quad T_2-T^{(n)}(x_{n+1},t)=-r^{(n+1)}J^{(n)}\left(x_{n+1},t\right), \tag{5}$$

где $r^{(1)}$ и $r^{(n+1)}$ — коэффициенты термического сопротивления на границах многослойной среды, $T_1$ и $T_2$ — внешние температуры на границах среды.

## 2. Алгоритм аналитического решения посредством совместного применения матричного метода и метода Фурье

Решение поставленных задач (1)–(4) и (1)–(3), (5) будем искать классическим методом разделения переменных — методом Фурье.

Частное решение уравнений (1) запишем в виде

$$T^{(i)}(x,t)=u^{(i)}(x)e^{-\mu^2 t},\ i=\overline{1,n}.$$

Амплитудная функция $u^{(i)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{c^{(i)}\rho^{(i)}x}\frac{d}{dx}\left(\lambda^{(i)}x\frac{d}{dx}u^{(i)}(x)\right)+\mu^2u^{(i)}(x)=0,$$

условиям идеального контакта слоёв

$$u^{(i)}(x_{i+1})=u^{(i+1)}(x_{i+1}),\quad j^{(i)}(x_{i+1})=j^{(i+1)}(x_{i+1}),\quad i=\overline{1,n}\ ,$$

где $j^{(i)}(x)=-\lambda^{(i)}x\,du^{(i)}/dx$, и граничным условиям для первой краевой задачи (1, 2, 3, 4)

$$u^{(1)}(x_1)=0,\ u^{(n)}(x_{n+1})=0,$$

а для третьей краевой задачи (1)–(3), (5) условиям при нулевых внешних температурах

$$u^{(1)}(x_1)=-r^{(1)}j^{(1)}\left(x_1\right),\ u^{(n)}(x_{n+1})=r^{(n+1)}j^{(n)}\left(x_{n+1}\right).$$

Если внешние температуры $T_1$ и $T_2$ не нулевые, то предварительно, решается с соответствующими краевыми условиями стационарная задача для данной многослойной среды с помощью матричного метода [11–14], аналогично изложенному ниже, и решение задачи (1)–(3), (5) запишется в виде суммы решений стационарной и нестационарной задач.

Зададим на $i$-м слое задачу Коши

$$u^{(i)}(x)\Big|_{x=x_i} = u^{(i)}(x_i),\ j^{(i)}(x)\Big|_{x=x_i} = j^{(i)}(x_i),$$

тогда решение задачи Коши для каждого слоя имеет вид

$$u^{(i)}(x) = u^{(i)}(x_i)\cos\mu X_i(x,x_i) - \frac{1}{\mu} j^{(i)}(x_i)\sin\mu X(x,x_i),$$

$$j^{(i)}(x) = u^{(i)}(x_i)\mu\sin\mu\tilde{X}_i(x,x_i) + j^{(i)}(x_i)\cos\mu\tilde{X}(x,x_i).$$

Здесь решение записано в формализме Берса [15].

Введём обозначения

$$V^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} u^{(i)}(x) \\ j^{(i)}(x) \end{pmatrix},\ V^{(i)}(x_i) = \begin{pmatrix} u^{(i)}(x_i) \\ j^{(i)}(x_i) \end{pmatrix},\ K^{(i)}(x,x_i) = \begin{pmatrix} \cos\mu X_i(x,x_i) & -\dfrac{1}{\mu}\sin\mu X_i(x,x_i) \\ \mu\sin\mu\tilde{X}_i(x,x_i) & \cos\mu\tilde{X}_i(x,x_i) \end{pmatrix}$$

и запишем решение (15) задачи Коши на $i$-м слое в матричной форме

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x,x_i)V^{(i)}(x_i).$$

В случае осесимметричной среды при постоянных физических параметрах на слое элементы матрицы $K^{(i)}(x,x_i)$ могут быть выражены через функции Бесселя первого и второго рода и имеют вид

$$k_{11}^{(i)} = \frac{\pi\mu x_i}{2\alpha^{(i)}}\left(J_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - N_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{12}^{(i)} = -\frac{\pi}{2\alpha^{(i)}\beta^{(i)}}\left(N_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - J_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{21}^{(i)} = \frac{\pi\mu^2\beta^{(i)}x_i x}{2\alpha^{(i)}}\left(J_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - N_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{22}^{(i)} = \frac{\pi\mu x}{2\alpha^{(i)}}\left(N_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - J_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

где $\alpha^{(i)} = \sqrt{\lambda^{(i)}\left(c^{(i)}\rho^{(i)}\right)^{-1}}$, $\beta^{(i)} = \sqrt{\lambda^{(i)}c^{(i)}\rho^{(i)}}$.

Идеальный контакт слоев запишем в матричной форме

$$V^{(i)}(x_{i+1}) = V^{(i+1)}(x_{i+1}).$$

Решение для первого слоя имеет вид

$$V^{(1)}(x) = K^{(1)}(x,x_1)V^{(1)}(x_1),\ x_1 \le x \le x_2.$$

Для крайней точки первого слоя тогда получим

$$V^{(1)}(x_2) = K^{(1)}(x_2,x_1)V^{(1)}(x_1) = V^{(2)}(x_2),$$

и, учитывая условия идеального контакта, решение для второго слоя можем записать

$$V^{(2)}(x) = K^{(2)}(x,x_2)V^{(2)}(x_2) = K^{(2)}(x,x_2)K^{(1)}(x_2,x_1)V^{(1)}(x_1).$$

Выполняя далее по слоям последовательную подстановку, получим решение на $i$-м слое

$$V^{(i)}(x) = K^{(i,1)}(x,x_1)V^{(1)}(x_1),\ x \in [x_i, x_{i+1}],$$

где $K^{(i,1)}(x,x_1) = K^{(i)}(x,x_i)K^{(i-1)}(x_i,x_{i-1})...K^{(1)}(x_2,x_1)$.

Таким образом, в конечной точке системы слоев имеем

$$V^{(n)}(x_{n+1}) = K^{(n,1)}(x_{n+1}, x_1)V^{(1)}(x_1). \qquad (6)$$

Формула (6) связывает значения функции и потока в начальной и конечной точках, что дает возможность получить условие для определения собственных значений $\mu_k$ для различных краевых задач. Собственные значения для первой краевой задачи (1)–(4) находим из условия

$$k_{12}^{(n,1)} = 0,$$

а собственные значения для третьей краевой задачи (1)–(3), (5) при нулевых внешних температурах находим из условия

$$\det\begin{pmatrix} 1 & r^{(1)} \\ k_{11}^{(n,1)} - r^{(2)}k_{21}^{(n,1)} & k_{12}^{(n,1)} - r^{(2)}k_{22}^{(n,1)} \end{pmatrix} = 0.$$

Далее определяем нормированные собственные функции

$$f_k^{(i)}(x) = \frac{u_k^{(i)}(x)}{N_k},$$

где $u_k^{(i)}(x)$ — базисная функция, соответствующая собственному значению $\mu_k$, а условие нормировки имеет вид

$$N_k^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} c^{(i)}\rho^{(i)}x\left(u_k^{(i)}(x)\right)^2 dx.$$

Тогда коэффициенты в разложении Фурье

$$C_k = \frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(g(x)\right)c^{(i)}\rho^{(i)}xu_k^{(i)}(x)dx.$$

Таким образом получено решение поставленных задач

$$T^{(i)}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k^{(i)}(x)e^{-\mu_k^2 t}.$$

### 3. Результаты моделирования и их обсуждение

По данной методике были решены некоторые модельные задачи.

На рис. 2 представлен результат моделирования первой краевой задачи для трёхслойной осесимметричной системы с радиусами границ слоёв $x_1 = 0{,}1$ м, $x_2 = 0{,}2$ м, $x_3 = 0{,}3$ м и $x_4 = 0{,}4$ м с теплофизическими параметрами, характерными для резины (внешние слои) и меди (внутренний слой): $\lambda^{(2)} = 384$ Вт/м·К, $c^{(2)} = 390$ Дж/кг·К, $\rho^{(2)} = 8900$ кг/м$^3$, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = 0{,}2$ Вт/м·К, $c^{(1)} = c^{(3)} = 1370$ Дж/кг·К, $\rho^{(1)} = \rho^{(3)} = 1160$ кг/м$^3$.

В начальный момент времени нагрет только средний слой до 20°C, то есть начальные условия симметричные. Графики построены по 25 собственным значениям. Моделирование показывает, что остывание слоя с меньшим радиусом происходит быстрее, чем слоя с большим радиусом, и так как внешние слои имеют значительно более низкую теплопроводность, чем внутренний слой, температура на нем практически не изменяется по координате, что соответствует физическому протеканию процесса.

На рис. 3 представлено моделирование третьей краевой задачи в трёхслойном полом цилиндре с радиусами границ слоев $x_1 = 0{,}01$ м, $x_2 = 0{,}02$ м, $x_3 = 0{,}03$ м и $x_4 = 0{,}04$ м (слева) и $x_1 = 0{,}31$ м, $x_2 = 0{,}32$ м, $x_3 = 0{,}33$ м и $x_4 = 0{,}34$ м (справа).

Теплофизические параметры слоёв характерны для системы «резина-медь-резина». В начальный момент времени температура всюду равна нулю. Внешние температуры $T_1 = 10$°C, $T_2 = 20$°C, коэффициенты термического сопротивления на границах среды $r^{(1)} = r^{(4)} = 1$ К·м$^2$/Вт. Графики построены по 10 собственным значениям. Моделирование показывает, что при мень-

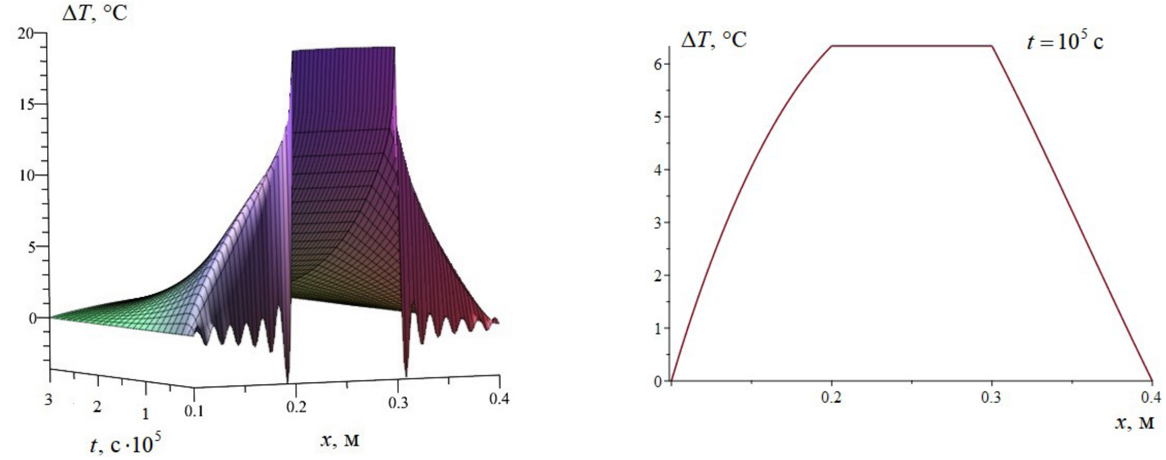



*Рис. 2. Результаты моделирования первой краевой задачи. Слева — график остывания трехслойного осесимметричного полого цилиндра (резина-медь-резина), построен по 25 собственным значениям. Справа — распределение температуры в момент времени 100000 с. В начальный момент времени нагрет до 20°С только средний слой, толщина каждого слоя 10 см*

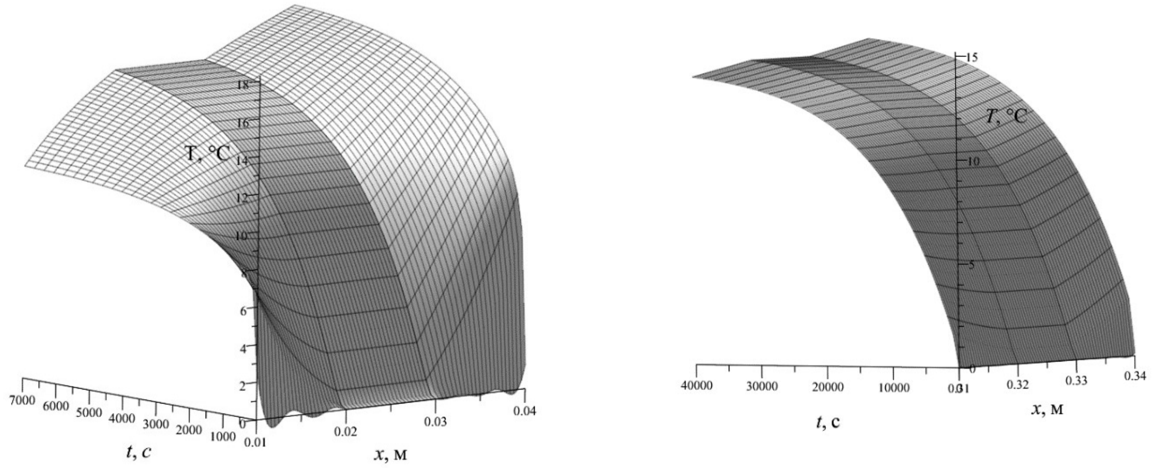



*Рис. 3. Результаты моделирования задачи третьего типа. Нагрев трёхслойного цилиндра (резина-медь-резина), толщина слоёв 1 см, начальная температура всюду равна нулю, построено по 10 собственным значениям. Внешние температуры $T_1 = 10°\text{C}$, $T_2 = 20°\text{C}$, $r^{(1)} = r^{(4)} = 1$ К·м²/Вт. Слева — внутренний радиус 1 см, справа — внутренний радиус 31 см*

шем радиусе процесс нагрева слоёв происходит быстрее и температуры в граничных точках меньше отличаются от внешних температур, чем при большем радиусе. Также график при больших радиусах цилиндрической системы уже практически не отличается от графика для плоских слоёв, что соответствует физическому смыслу моделируемого явления.

Отметим, что, как и ранее, результаты моделирования с использованием матричного метода, описанного в настоящей работе, хорошо коррелируют с результатами численного анализа рассматриваемых процессов тепломассопереноса [7, 8, 11–13, 15].

## Заключение

Изложен метод совместного использования аналитического матричного метода и метода Фурье решения задачи теплопроводности в осесимметричной многослойной среде. Рассмотрены некоторые возможности такого подхода для моделирования процесса теплопроводности при краевых условиях первого и третьего типов.

**Благодарности**

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

**Литература**

1. *Белоус, А. И.* Космическая электроника. В 2-х книгах / А. И. Белоус, В. А. Солодуха, С. В. Шведов. – М. : Техносфера, 2015. – 696 с. (1-я книга), 488 с. (2-я книга).

2. *Мамаев, А. И.* Функциональные наноструктурные неметаллические неорганические покрытия и слоистые материалы для космической техники. Материалы, теория, технология, оборудование / А. И. Мамаев, В. А. Мамаева, Ю. Е. Белецкая, А. К. Чубенко // Решетневские чтения. – 2014. – Т. 1. – С. 477–479.

3. *Голубков, А. А.* Обратная задача для операторов Штурма-Лиувилля в комплексной плоскости / А. А. Голубков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18. – № 2. – С. 44–156

4. *Гладышев, Ю. А.* Операторные методы при решении задачи переноса в многослойной среде / Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович // Прикладные задачи математики. Материалы XXIII международной научно-технической конференции. – Научный редактор С. О. Папков. – Севастополь: Севастопольский государственный университет, 2015. – С. 106–110.

5. *Гладышев, Ю. А.* Об использовании матричного метода решения задач теплопроводности в многослойной среде при наличии фазовых переходов / Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2019. – С. 105–107.

6. *Серегина, Е. В.* О возможности реализации стохастической модели распределения неравновесных неосновных носителей заряда в полупроводниковом материале / Е. В. Серегина, А. М. Макаренков, М. А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2009. – № 10. – С.75–86.

7. *Серегина, Е. В.* О модификации модели диффузии неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах, основанной на использовании рекурсивных тригонометрических функций, и оценка устойчивости решений для модифицированной модели / Е. В. Серегина, М. А. Степович, А. М. Макаренков // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2014. – № 9. – С. 72–74.

8. *Серегина, Е. В.* О проекционном методе нахождения моментных функций решения двумерного стохастического уравнения диффузии / Е. В. Серегина, М. А. Степович, А. М. Макаренков // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. – Саратов : ООО «Издательство «Научная книга», 2020. – С. 354–356.

9. *Гладышев, Ю. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией / Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович, Е. В. Серегина, М. А. Степович // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. – 2018. – № 3. – С. 158–167.

9. *Гладышев, Ю. А.* О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде / Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович, М. А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2017. – № 10. – С. 105–110.

10. *Калманович, В. В.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники / В. В. Калманович, М. А. Степович // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). – 2018. – № 3. – С. 194–201.

11. *Серегина, Е. В.* Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре / Е. В. Серегина, В. В. Калманович, М. А. Степович // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2019. – Т. 172. – С. 104–112.

12. *Kalmanovich, V. V.* On the Possibility of a Numerical Solution of the Heat and Mass Transfer Problem with the Combined Matrix&Generalized Powers of Bers Method / V. V. Kalmanovich, M. A. Stepovich, E. V. Seregina // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – V. 1163. – 012012.

13. *Калманович, В. В.* О численном решении задач тепломассопереноса с использованием матричного метода и метода обобщенных степеней Берса / В. В. Калманович, М. А. Степович, Е. В. Серегина // Теоретические основы и конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики: тезисы докладов XXII Всероссийской конференции, посвященной памяти К. И. Бабенко. – М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. – 2018. – С. 51–52.

14. *Bers, L.* On a class of functions defined by partial differential equations / L. Bers, A. Gelbart // Transactions of the American Mathematical Society. – 1944. – V. 56. – P. 67–93.

15. *Kalmanovich, V. V.* Comparison of analytical and numerical modeling of distributions of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of medium-energy electrons in a two-layer semiconductor structure / V. V. Kalmanovich, E. V. Seregina, M. A. Stepovich // Journal of Physics: Conf. Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. – 2020. – V. 1479. – 012116.

УДК 519.2: 551.578.4864

# МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЛАВИННОЙ ОПАСНОСТИ

**С. Л. Карпов[1], А. С. Соловьев[2], А. В. Калач[2,3], Н. В. Мартинович[4], Ж. С. Калюжина[4]**

*[1]Воронежский государственный технический университет*
*[2]Воронежский институт ФСИН России*
*[3]Уральский институт Государственной противопожарной службы МЧС России*
*[4]Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России*

**Аннотация.** В статье рассмотрены методы прогнозирования лавинной опасности. Показано, что для локальных прогнозов наиболее эффективным является моделирование снежной массы методом динамики частиц. На основе такой модели можно предсказать критические параметры для схода лавины характер движения снежной массы, силу и энергию воздействия на подвижные и неподвижные препятствия различной формы, а соответственно и разрушительную способность лавины.
**Ключевые слова:** снежная лавина, горный склон, прогноз, модель.

## Введение

Исследования снежных лавин, проводившиеся на протяжении многих лет, позволили выявить определенные модели процессов лавинообразования, оценить параметры данного природного явления, а также определить основные факторы, способствующие обрушению лавин [1]. Схождение снежной лавины возникает из-за нарушений устойчивости снежного покрова на склоне. Нарушения пласта происходят под влиянием не только внешних факторов, но и под влиянием внутренних процессов снежного покрова. Обвал снежной лавины может происходить на склонах с углом наклона 15° и при толщине снежного покрова 15 см. Однако, таких случаев зафиксировано крайне мало. Для выявления участков возможного схода лавин, при составлении карт среднего и мелкого масштаба их границы проводятся по контурам снежного покрова 30 см, а изолинии 70 см ограничивали районы, где лавины образуются часто и представляют значительную опасность [2]. Наиболее благоприятными для лавинообразования признаны склоны, угол наклона которых составляет 25–40° [3–5]. Для определения в регионах различных областей и участков, в которых происходят лавинообразующие процессы, особую роль сыграли крупномасштабные исследования, в ходе которых проводились детальные расчеты и натурные наблюдения. Также изучались геоморфологические, геоботанические, почвенные и гидрологические признаки.

К настоящему моменту времени наукой разработаны и применены на практике три вида прогнозов схождения снежной лавины — фоновый мелкомасштабный для горной территории, фоновый крупномасштабный для горного бассейна или группы лавиносборов и детальный для заданного лавиносбора или лавиноопасного склона (локальный прогноз).

## 1. Современные методы прогнозирования снежных лавин

Лавинный прогноз — заблаговременное нахождение определенного интервала времени, в течение которого процессы метаморфизма и накопления снежной массы несут за собой разрушения устойчивых связей снежного покрова и образование лавин. Лавинный прогноз находится в связке с прогнозом метеорологических условий, так как вид, интенсивность выпадения, количество атмосферных осадков, метелевый снегоперенос, температура и влажность воздуха и другие характеристики метеорологических условий оказывают непосредственное влияние на состояние снежного покрова и устойчивость его связей.

Назначение фонового прогноза состоит в оценке лавинной опасности в определенном горном районе и выдается в виде «лавиноопасно» или «нелавиноопасно». У данного прогноза есть ограничения, связанные с заблаговременностью прогнозов. Эти ограничения обуславливаются отсутствием количественных методов длительного прогноза интенсивности осадков, интенсивности и продолжительности оттепели и других, метеорологических показателей в горах. Зачастую прогноз выдается с «нулевой» заблаговременностью, т. е. дается лишь текущая оценка лавинной опасности.

Локальный прогноз предусматривает определение показателей устойчивости снежного покрова в зоне зарождения лавин конкретного лавиносбора и времени до предполагаемого самопроизвольного схода лавин, оценку вероятного объема и дальности выброса лавины, выбор оптимальных условий для ликвидации лавинной опасности путем искусственного спуска лавины. Среди всех прочих прогнозов наиболее освоен фоновый прогноз снежных лавин, вызываемых обильными снегопадами и метелями.

Наиболее разработан фоновый прогноз лавин, вызываемых снегопадами и метелями. Также некоторый прогресс был совершен в разработке фоновых прогнозов лавин из мокрого снега. Данный прогноз базируется главным образом на анализе снеговой обстановки, метеорологических условий и установленных статистических зависимостей между временем наступления лавинной опасности и изменением факторов, определяющих сход лавин. В данном прогнозе должна в полной мере учитываться информация о структуре, плотности и температурном режиме снежного пласта, а также локальные характеристики устойчивости его связей.

Методы локального прогнозирования еще недостаточно развиты из-за отсутствия методик и аппаратуры для получения надежной информации о состоянии и свойствах снежного покрова в зонах образования лавин. Вместе с этим очень мала точность существующих методов определения прочностных характеристик и показателей устойчивости снежного пласта. Из этого можно сделать вывод, что в ближайшие годы для развития точности методов локального прогноза крайне актуальной задачей является создание детального прогноза конкретного лавиносбора. В настоящее время для создания локального прогноза лавинной опасности используют несколько методов описания снежной массы. Рассмотрим самые актуальные. Следует отметить, что эмпирические модели используются для оперативного аналитического представления экспериментальных данных без целей изучения механизма процесса. Математическая статистика позволяет получить эмпирические зависимости, которые можно использовать для прогнозирования лавинной опасности по результатам обработки сотен задокументированных случаев схода снежных лавин. К настоящему времени множество эмпирических зависимостей уже прошли широкую апробацию, вошли в общее употребление и используются в нормативных документах. Так, в частности, для определения скорости $v$ лавины при выбеге со склона рекомендуется использовать формулу [6]:

$$v = \sqrt{\frac{9,8\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)S}{2}}, \tag{1}$$

где $\alpha$ — средний угол склона, градусы; $f$ — коэффициент трения, зависящий от покрытия склона (0,25 ... 0,30); $S$ — длина склона, м.

Известен ряд эмпирических зависимостей для описания действия лавины на препятствие. Так, сила воздействия лавины на сооружение $P_c$, кН, оказываемое на сооружение высотой $h_c$, м, и шириной $b_c$, м, рекомендуется определять по формуле [6]:

$$P_c = \frac{\gamma_л \cdot v^2 \cdot h_c \cdot b_c}{1,96\left(1 - \frac{\gamma_л}{0,917}\right)}, \tag{2}$$

где $\gamma_л$ = 0,05 ... 0,45 — средняя объемная плотность набегающей снежной массы, т/м$^3$; $v$ — скорость лавины, м/с.

Критическая толщина снежного покрова $h_{отр}$, м, по результатам обработки данных для более 100 сухих снежных лавин Швейцарских Альп и Кадастра лавин России может быть описана выражением [7]

$$h_{отр} = 1,83 \cdot \lg 3,36 \cdot h, \tag{3}$$

где $h$ — средняя высота снежного покрова на лавиноопасной площади, м.

Обработка данных о катастрофических лавинах Кабардино-Балкарской республики за период с 1970 по 2012 годы позволил получить ряд эмпирических формул для расчета основных показателей поражающего действия лавины [8]. В частности, объем сходящей снежной массы может быть рассчитан по формуле:

$$V(\alpha) = (168 \pm 77) + \frac{(1688 \pm 80) - (168 \pm 77)}{1 + e^{\frac{\alpha - (30,7 \pm 0,3)}{1,07 \pm 0,22}}}, \tag{4}$$

где $\alpha$ измеряется в градусах, $V$ измеряется в тысячах м$^3$.

Эмпирические модели позволяют не только рассчитать отдельные показатели лавин, но и описать пространственное распределение снежной массы лавины вдоль горного склона. Например, в зависимости от географического положения, параметров снега и склона снежная масса в процессе схода лавины может подчиняться не только степенному или логнормальному распределениям, но gev-распределению (generalized extreme value) или распределению Фречета (Frechet).

Общими недостатками эмпирических моделей является их усредненный и приближенный характер, невозможность выявления механизма процесса схода лавины, и необходимость большого количества экспериментальных данных для определения, как вида аналитического выражения, так и его параметров. Поэтому, несмотря на широкое распространение, ценность и надежность эмпирических моделей продолжается разработка более адекватных моделей лавин, учитывающих физику движения снежной массы, геометрию горного склона и препятствий, и позволяющих более точно прогнозировать параметры лавины и показатели ее поражающего действия.

Уже на первых этапах научного изучения лавин предпринимались попытки создания модели на основе базовых физических закономерностей. В наиболее простых моделях лавина рассматривалась, как единое тело в виде «снежной доски» или «снежной капли» (рис. 1). При этом масса движущегося снега приводилась к одной точке — центру тяжести (англ. Mass Point Model) [9].

В рамках таких допущений движение лавины обычно описывали одним уравнением, составленным на основе второго закона Ньютона:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \psi - \mu R, \tag{5}$$

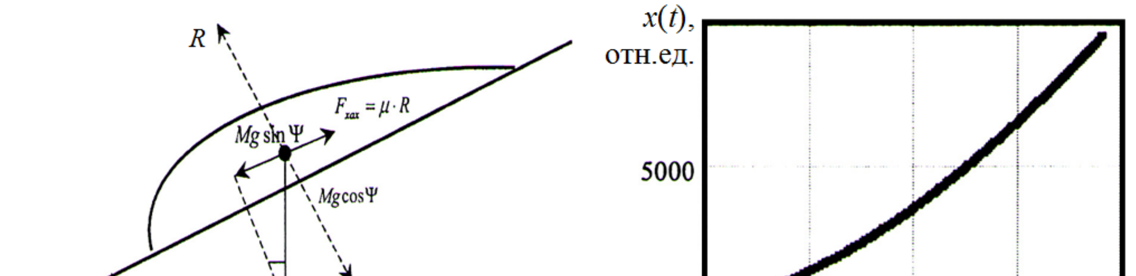



*Рис. 1. Моделирование лавины в рамках механики материальной точки: а — расчетная схема; б — результаты моделирования: зависимость смещения центра x тяжести от времени t [9]*

где $M$ — масса движущегося объема снега; $x$ — координата вдоль склона; $g$ — ускорение свободного падения; $\psi$ — угол склона; $R = Mg\cos\psi$ — нормальная сила реакции склона. При такой записи уравнения движения снежная масса двигается равноускоренно (рис. 1, *б*).

Несмотря на появившуюся возможность учитывать физику движения лавины, большим недостатком данного класса моделей является представление снежной массы как единого твердого тела. В реальности, в большинстве случаев только на начальных этапах движения лавины (менее 1 с) снежная масса сохраняет связность, после чего происходит существенная фрагментация снежной массы, и движение отдельных фрагментов. В результате этого физика движения фрагментов снега кардинально меняется, движение лавины становится похожим на течение жидкости, и использование приближения материальной точки может приводить к ошибкам моделирования порядка 50 ... 500 %. Поэтому актуальной оставалась разработка более адекватных моделей, более полно учитывающих физику схода лавины.

Модели на основе механики материальной точки наиболее применимы для описания удержания снежного покрова на склоне и оценке факторов, влияющих на срыв снежного покрова [10]. Также данный класс моделей широко используется для оценок к действиям лавины на объекты инфраструктуры [6] и даже подвижные объекты [11].

Объединение геоинформационных систем (ГИС) с моделями схода снежной значительно облегчает и ускоряет решение многих задач лавиноведения [11, 12]. Метод Монте-Карло — это численный метод, основанный на получении большого количества реализаций случайного процесса. Применительно к моделированию лавин метод Монте-Карло используется для многократного численного моделирования схода снежной лавины со случайными значениями коэффициентов или начальных условий, и последующей статистической обработкой результатов [11]. Серьезная проблема в моделировании снежных лавин заключается в том, что параметры моделей и входные данные определены с довольно низкой точностью. Например, многие коэффициенты модели лавины могут существенно зависеть от погодных условий и предыстории накопления снежного покрова и не могут быть измерены непосредственно в момент времени, в который необходимо выполнить моделирование. Однако известны интервалы изменения параметров и приблизительный закон распределения. Такая ситуация является типичной при описании широкого класса природных процессов и объектов. В этом случае целесообразно рассматривать параметры моделей и входные данные как случайные функции, а математическую детерминированную модель (например, гидродинамическую) — как некоторый оператор. Тогда выходные характеристики модели будут так же случайными, а модель приобретает вероятностное содержание [14].

В настоящее время для моделирования лавин одной из самых известных ГИС является RAMMS (аббревиатура от «rapid mass movements», что означает «быстрое движение масс»). Данная компьютерная программа создана Швейцарским институтом снега и лавин, при участии Швейцарского федерального института леса, снега и ландшафтных исследований (WSL Institute for Snow and Avalanche Research SLF) [15]. Базой этой программы является численное решение уравнения динамики второго порядка. Усреднение по глубине снежного потока предназначено для отображения на экране компьютера картины движения снежной лавины. Характеристики и параметры движения снежного потока рассчитываются на основе специально разработанных цифровых трехмерных моделях местности. Удобство использования данной компьютерной программы заключается в том, что в процессе пользования выводится важная обзорная информация. В рамках данной модели силы сопротивления движению потока снега принимаются двух типов: силы сухого кулоновского трения, с коэффициентом $\mu$, а также силы, пропорциональные квадрату скорости движения снежной массы, с коэффициентом $\xi$. Сопротивление трения при этом будет иметь вид [15]:

$$S = \mu\rho H \rho g \cos\varphi + \frac{\rho g U^2}{\xi}. \tag{6}$$

где $\rho$ — плотность потока; $g$ — ускорение свободного падения; $\varphi$ — средний угол склона в данной точке; $H$ — высота потока; $U$ — скорость потока.

В ходе проверки адекватности и определения коэффициентов разработчиками было выяснено, что модель наиболее адекватно описывает движение больших лавин, которые состоят из сухого снега. Для описания движения небольших влажных снежных лавин компьютерная программа RAMMS оказалась малоэффективной (при исследовании использовались статистические данные о снежных лавинах в районе Валле-де-ла-Сионне с 1999 по 2005 годы). Исследователями сделаны выводы, что ситуация может быть поправлена путем увеличения значений коэффициентов $\mu$ и $\xi$. Авторы предполагает, что таким образом появится возможность смоделировать небольшие лавины, но в таком случае есть необходимость в предварительной настройке модели. Еще одним недостатком является то, что в области небольших движущихся масс и больших коэффициентов сопротивления невозможно описать движение снега за фронтом лавины. Также доказано, что при моделировании селевых потоков программа RAMMS еще менее точна. Это обусловлено тем, что сели входят в состав многокомпонентных систем (жидкость, грязь, камни, ветки и др.).

По мнению авторов, должна проводиться модификация модели, которая в будущем даст возможность работать с разной плотностью снежной массы, а также более точно определять поражающе факторы лавины. Модификация может быть проведена путем включения в модель гранулированной снежной массы, флуктуирующей энергией по гранулам. Для повышения адекватности моделирования разработчики RAMMS видят это направление модификации одним из наиболее перспективных.

## 2. Прогнозирование снежных лавин с использованием метода сглаженных частиц

В современном мире самым физически-адекватным методом, с помощью которого происходит моделирование сложных сред, является метод сглаженных частиц. К данным средам как раз и относится лавинообразующая масса [16–21].

Суть данного этого метода состоит в том, что сложная среда представляется совокупностью взаимодействующих частиц (материальных точек). И движение этих частиц в пространстве базируется на законах классической механики. Метод сглаженных частиц — частный случай метода конечных элементов, и ориентирован данный метод на использование высокопроизводительных вычислительных технологий. С увеличением дискретизации среды — увеличением количества частиц — повышается физическая адекватность и точность моделирования. Метод обладает максимальной физической естественностью, это обусловлено тем, что в предельной дискретизации среда представляется совокупностью взаимодействующих атомов. Движение частиц описывается уравнениями следующего вида:

$$m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{n=1}^{N} \Phi\left(\left|\vec{r}_{kn}\right|\right)\vec{r}_{kn} + \sum_{n=1}^{N} \Psi\left(\left|\vec{r}_{kn}\right|, \left|\vec{v}_{kn}\right|\right)\vec{r}_{kn} + \vec{\varphi}\left(\vec{r}_k\right) + \vec{\psi}\left(\vec{r}_k, \vec{v}_k\right), \tag{7}$$

где $m_k$ — масса $k$-й частицы; $\vec{r}_k$ и $\vec{v}_k$ — векторы положения и скорости частицы,

$$\vec{r}_{kn} = \vec{r}_k - \vec{r}_n, \qquad \vec{v}_{kn} = \vec{v}_k - \vec{v}_n, \tag{8}$$

функции $\varphi$ и $\psi$ описывают внешнее консервативное и неконсервативное силовое поле. В данных уравнениях учитывается только парное взаимодействие между частицами, однако в ряде задач учитываются тройные взаимодействия, например, при моделировании гибких оболочек. С математической точки зрения моделирование, производящееся методом динамики частиц, является решением задачи Коши для уравнений (8). Начальные условия включают в себя координаты и скорости каждой частицы. Для численного интегрирования уравнений движения частиц используют методы Рунге-Кутта, Верле, Виньярда, Нордзика — в зависимости от правой части уравнения (7) и доступных вычислительных возможностей. Чтобы ускорить процесс расчетов используется метод, при котором происходит предварительное разбиение частиц по ячейкам кубической сетки. Неоспоримым достоинством метода динамики частиц является то, что данный метод допускает почти полное распараллеливание. Благодаря этому можно весьма эффективно применять метод на многопроцессорных вычислительных системах.

Однако, в то же время были выявлены некоторые недоработки метода динамики частиц. Основная часть результатов моделирования снежных лавин и других сложных сред представлены слишком упрощенно и не имеют никакой связи с реальными лавинами. В связи с этим появилось еще одна задача, решением и результатом которой должно быть повышение адекватности моделей данного класса. Одним из этапов этого решения является привязка к рельефу местности, учет большего количества параметров снежной массы, погодных условий предыстории накопления снега, верификация модели не с использованием лабораторных экспериментов, а с использованием данных по реальным лавинам. Кроме того, как правило, изучается или просто сход лавины, или как в приведенном примере, воздействие лавины на неподвижный неразрушаемый объект простейшей геометрической формы. Большую практическую ценность представляют модели воздействия снежной лавины на объекты, вовлекаемые лавиной в движение или разрушаемые под действием лавины.

Метод сглаженных частиц является наиболее подходящим для моделирования лавин. В настоящее время исследователи всего мира упорно разрабатывают и усложняют эти модели. В данной статье предлагается новая модель движения и взаимодействия с различными препятствиями лавиноопасной снежной массы, основанная на методе сглаженных частиц.

Масса снега, оседающая на склоне, в модели представляется, как совокупность большого числа отдельных круглых элементов. Процесс моделирования производится в двумерном пространстве $X-Z$, при этом ось $X$ — расположена в горизонтальном направлении вдоль наискорейшего спуска склона, а ось $Z$ — в вертикальном направлении. Исключение третьего измерения позволяет при заданном числе элементов (в расчетах использовали до 100000 элементов) увеличить линейные размеры моделируемой системы в направлениях $X$ и $Z$. Исключаемая ось $Y$ была бы расположена в горизонтальном направлении вдоль плоскости склона, и поэтому вдоль нее практически не происходило бы сколь-нибудь значимых явлений со снежной массой — с этой точки зрения исключение оси $Z$ также является обоснованным. Состояние каждого элемента снега $i$ определяется четырьмя переменными: декартовыми координатами его центра $(x_i,\ z_i)$ и двумя составляющими скорости $(v_{xi}, v_{zi})$.

Взаимодействие элементов снежной массы между собой, а также со склоном и препятствием, считается вязкоупругим. Соответственно, определенный элемент $i$ испытывает следующее силовое воздействие со стороны каждого из окружающих его элементов $j$:

$$F_i = \sum_{j=1}^{N_Э} (F_{ij}^У + F_{ij}^В), \tag{9}$$

где $F_{ij}^У$ и $F_{ij}^В$ — силы упругого и вязкого взаимодействия элементов снега $i$ и $j$; $N_Э$ — общее количество элементов снега в модели.

Упругие силы между элементами возникают в зависимости от расстояния между их центрами $S_i(x_i, z_i)$ и $S_j(x_j, z_j)$, определяемого по формуле:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \tag{10}$$

Если между элементами снежной массы существует прочная связность, то будем называть их связанными. Однако это возможно только при определенных погодных условиях, таких как мокрый снег или лёд. При удалении связанных элементов снежной массы друг от друга до некоторого расстояния, между этими элементами в модели, действует возвращающая сила. Физической интерпретацией этого является возникновение напряжения при отрыве снежных пластов друг от друга.

В зависимости от того, связаны или не связаны элементы между собой, а также от того, сильно или слабо связаны между собой, используются различные формулы для расчета силы:

1) Если элементы $i$ и $j$ не связанны, то

$$F_{xij}^{У} = \begin{cases} c_O(d_Э - r_{ij})(x_i - x_j)/r_{ij}, & если \ r_{ij} < d_Э; \\ 0, \ если \ r_{ij} \geq d_Э; \end{cases} \quad (11)$$

$$F_{zij}^{У} = \begin{cases} c_O(d_Э - r_{ij})(z_i - z_j)/r_{ij}, & если \ r_{ij} < d_Э; \\ 0, \ если \ r_{ij} \geq d_Э. \end{cases}$$

2) Если элементы $i$ и $j$ связаны и слабо взаимодействуют, то

$$F_{xij}^{У} = \begin{cases} c_O(d_Э - r_{ij})(x_i - x_j)/r_{ij}, & если \ r_{ij} < d_Э + d_O; \\ 0, \ если \ r_{ij} \geq d_Э + d \ ; \end{cases} \quad (12)$$

$$F_{zij}^{У} = \begin{cases} c_O(d_Э - r_{ij})(z_i - z_j)/r_{ij}, & если \ r_{ij} < d_Э + d_O; \\ 0, \ если \ r_{ij} \geq d_Э + d \ . \end{cases}$$

3) Если элементы $i$ и $j$ связаны и сильно взаимодействуют, то

$$F_{xij}^{У} = \begin{cases} c_C(d_Э - r_{ij})(x_i - x_j)/r_{ij}, & если \ r_{ij} < d_Э + d_C; \\ 0, \ если \ r_{ij} \geq d_Э + d_C; \end{cases} \quad (13)$$

$$F_{zij}^{У} = \begin{cases} c_C(d_Э - r_{ij})(z_i - z_j)/r_{ij}, & если \ r_{ij} < d_Э + d_C; \\ 0, \ если \ r_{ij} \geq d_Э + d_C. \end{cases}$$

Здесь $F_{xij}^{У}$ и $F_{zij}^{У}$ — декартовы составляющие силы $\boldsymbol{F}_{ij}^{У}$; $c_O$ и $c_C$ — жесткости упругого взаимодействия элементов, соответствующие слабому и сильному взаимодействию элементов. Для расчета силы вязкого трения $\boldsymbol{F}_{ij}^{B}$; выбрана общепринятая в механике прямо-пропорциональная зависимость вязкой силы от скорости движущегося в среде тела, при этом введен дополнительный коэффициент $(r_{ij} - (d_Э + d_m))$, характеризующий взаимное проникновение элементов снега друг в друга.

$$F_{xij}^{B} = k_m(r_{ij} - (d_Э + d_m))(v_{xi} - v_{xj}); \quad (14)$$

$$F_{zij}^{B} = k_m(r_{ij} - (d_Э + d_m))(v_{zi} - v_{zj}),$$

где $v_{xi}, v_{zi}$ и $v_{xj}, v_{yzj}$ — декартовы составляющие скоростей $i$-го и $j$-го элемента; $k_B$ — коэффициент демпфирования.

Во время моделирования очень важно отслеживать развитие снежной массы и определять общее (суммарное) влияние элементов этой массы на препятствие. Для этого необходимо рассчитать траекторию каждого из элементов снега. Траектории элементов определяются на основе решения систему уравнений движения отдельных элементов, которые можно записать в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$m_Э \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_Э} \left( F_{xij}^{У} + F_{xij}^{B} \right) + c_{Э-C} \cdot r_{вні} \cdot s_{xi} + k_v v_{xi}; \quad (15)$$

$$m_Э \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_Э} \left( F_{zij}^{У} + F_{zij}^{B} \right) - m_Э g + c_{Э-C} \cdot r_{вні} \cdot s_{zi} + k_v v_{zi},$$

где $m_Э$ — масса элемента снега; $t$ — время; $g$ — ускорение свободного падения; $c_{Э-C}$ и $k_v$ — коэффициенты жесткости и вязкости вязкоупругого взаимодействия $i$-го элемента с поверхностью склона; $r_{вні}$ — расстояние взаимного внедрения $i$-го элемента снега в поверхность склона; $s_{xi}$ и $s_{zi}$ — декартовы составляющие вектора единичной длины, указывающего направление действия силы на $i$-й элемент со стороны склона; $v_{xi}$ и $v_{zi}$ — декартовы составляющие вектора скорости $i$-го элемента;

Система уравнений вида (15) для всех $N_э$ элементов позволяет описать динамику снежной массы в любой момент времени.

## Заключение

При имитационном моделировании эксперимента элементы снежной массы появляются на определенной высоте над склоном. Координаты этих элементов задаются случайным образом в некоторой ограниченной области. Затем, на склоне элементы снежной массы под действием силы тяжести оседают и формируют снежный покров.

Данная модель прогнозирования лавинной опасности хороша тем, что она основывается на широком классе физических явлений (динамика эволюции снежной массы, аккумуляция снега на склоне, непосредственно сам процесс схода снежной лавины). Модель учитывает влияние внешних факторов и воздействий на снежную массу, геометрию склонов, механическое движение отдельных элементов снежной массы, их упруго-пластичное взаимодействие, термодинамические процессы, протекающие в толще снежной массы, приводящие к модификации свойств отдельных элементов снега.

Для небольших объемов снега возможно проведение моделирования в трехмерном пространстве $XYZ$. Состояние каждого элемента-шара $E_i$ задается шестью переменными: декартовыми координатами его центра $(x_i, y_i, z_i)$ и составляющими скорости $(v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})$. Механическое взаимодействие элементов между собой принято упруго-вязким, что позволяет заложить в модель основные механические свойства снега: модуль упругости, коэффициент внутреннего трения, предельную деформацию при испытании на разрыв.

## Литература


1. *Подрезов, Ю. В.* Особенности прогнозирования лавинной опасности на территории российской федерации / Ю. В. Подрезов // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2020. – № 1. – С. 88–93.

2. *Ыстыкул, К. А.* Картографирование лавиноопасных зон в высокогорной рекреационной зоне Иле Алатау по данным лазерного сканирования / К. А. Ыстыкул., В. А. Середович, Ж. Д. Байгурин // Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2016. – Т. 1, № 2. – С. 101–107.

3. *Зимин, М. И.* Методика оценки лавинной опасности при концептуальном проектировании дорог в горной местности / М. И Зимин // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. – 2013. – № 5 (33). – С. 98–104.

4. *Якимова, А. В.* Обеспечение безопасности при сходе снежных лавин на территории красноярского края / А. В. Якимова // Сибирский пожарно-спасательный вестник. – 2017. – № 3 (6). – С. 28–34.

5. Агеев, С. В. Особенности выполнения мероприятий по предупреждению чрезвычайных ситуаций природного характера / С. В. Агеев, Ю. В. Подрезов, А. С. Романов, З. В. Тимошенко // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. – 2020. – № 1. – С. 116–120.

6. ВСН 02-73 «Указания по расчету снеголавинных нагрузок при проектировании сооружений» // Москва: Гидрометеоиздат, 1973. – 14 с.

7. *Salm, B.* A short and personal history of snow avalanche dynamics / B. Salm // Cold Regions Science and Technology. – 2004. – V. 39. – P. 83–92.

8. *Соловьев, А. С.* Математическое моделирование чрезвычайных ситуаций, связанных с зарождением и сходом снежных лавин: Дисс. ... докт. техн. наук: 05.13.18 / – Соловьев Александр Семенович; ВИ ГПС МЧС РФ. – Воронеж, 2014. – 287 с.

9. *Обгадзе, Т. А.* Математическая модель снежных лавин / Т. А. Обгадзе, И. Г. Матиашвили // Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications. – 2006. – № 1 (8). – С. 101–105.

10. *Чернышов, А. Д.* Термоупругая модель схождения снежных лавин и грунтовых оползней / А. Д. Чернышов // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 159–167.

11. *Боброва, Д. А.* О возможности использования данных о вовлеченных в лавину объектах для оценки ее параметров / Д. А. Боброва, И. А. Кононов, Н. А. Казаков // Криосфера Земли. – 2014. – Т. XVIII, № 1. – С. 101–105.

12. *Погорелов, А. В.* Исследование микро- и мезомасштабной структуры поля снежного покрова в горах на основе технологии лазерного сканирования [Текст] / А. В. Погорелов, Е. С. Бойко // Лед и снег. – 2010. – № 2. – С. 35–42.

13. *Седова, А. С.* Цифровая модель рельефа как основа для исследования снежных лавин [Текст] / А. С. Седова, Ю. Г. Селиверстов, В. А. Тумасьева, Е. С. Клименко и др. // Лед и снег. – 2010. – № 2. – С. 43–49.

14. *Божинский, А. Н.* Вероятностная модель движения снежных лавин / А. Н. Божинский, А. Н. Назаров, П. А. Черноус // Вестник Московского ун-та. – Сер.5. Геогр. – 2000. – № 5.

15. *Christen, M.* RAMMS: Numerical simulation of dense snow avalanches in three-dimensional terrain / M. Christen, J. Kowalski, P. Bartelt // Cold Regions Science and Technology. – 2010. – V. 63. – P. 1–14.

16. *Ramos, O.* Avalanche Prediction in a Self-Organized Pile of Beads / O. Ramos, E. Altshuler, K. J. Maloy // Physical Review Letters. – 2009. – V. 102. – P. 078701-1–078701-4.

17. *Golubev, V. N.* Model of structure and mechanical properties of dry granular snow / V. N. Golubev // Annals of Glaciology. – 2000. – № 27.

18. *Богомолов, С. В.* Метод частиц для системы уравнений газовой динамики / С. В. Богомолов, К. В. Кузнецов // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10, № 3. – С. 93–100.

19. *Soloviev, A. S.* Information model of the impact of avalanche snow masses on the elements of the landscape infrastructure / A. S. Soloviev, A. V. Kalach, D. B. Desyatov, L. V. Rossihina // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – 1202(1), 12015.

20. *Soloviev, A. S.* Imitation Modelling of Influence of Relief of Mountain Slope on Destructive Ability of Snow Avalanches / A. S. Soloviev, A. V. Kalach, A. V. Botikov // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2019. – 272(2), 022097.

21. *Kalach, A. V.* Model and algorithms of interaction of the snow avalanche with the stirrable and destructible obstructions / A. V. Kalach, S. L. Karpov, A. S. Soloviev, L. D. Karpov, A. I. Sitnikov // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – 1479(1), 012064.

УДК 550.388.2

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГРАДИЕНТНО-ДРЕЙФОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА ФРОНТАХ ПЛАЗМЕННЫХ ПУЗЫРЕЙ

**Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Мациевский С. В., Е. П. Ставицкая**

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта*

**Аннотация.** Представлены результаты численных расчетов инкрементов градиентно-дрейфовой неустойчивости на границах множественных экваториальных ионосферных пузырей. Из-за сложностей одновременного учета развития неустойчивости Релея — Тейлора и градиентно-дрейфовой развитие последней оценивается с помощью линейного инкремента нарастания, рассчитываемого на основе фоновой электронной концентрации, распределение которой получено на двумерной модели неустойчивости Релея — Тейлора в приближении сильной вытянутости экваториальных плазменных пузырей вдоль силовых линий геомагнитного поля.

Получено, что градиенты электронной концентрации на фронтах развитых ионосферных пузырей могут быть эффективным механизмом развития градиентно-дрейфовой неустойчивости, инкремент нарастания которой может достигать значений 0,057 $с^{-1}$ с возможностью развития мелкомасштабных неоднородностей в вечернее и ночное время с характерными для условий экваториального F-рассеяния параметрами.

**Ключевые слова:** градиентно-дрейфовой неустойчивость, инкремент нарастания, F-рассеяние, неустойчивость Релея — Тейлора, ионосферные пузыри, геомагнитное поле.

## Введение

Данные спутниковых и наземных измерений и результаты численного моделирования процессов развития экваториальных плазменных пузырей (ЭПП) в ионосфере Земли показывают, что *долготные* градиенты логарифма электронной концентрации на вертикальных границах пузырей могут достигать значений $10^{-3}$ $м^{-1}$, а *высотные* — $10^{-4}$ $м^{-1}$. Такие градиенты создают условия для различных видов мелкомасштабных неустойчивостей градиентного типа, в частности градиентно-дрейфовой (ГДН), приводящих к формированию ионосферных плазменных неоднородностей с пространственно-временными масштабами, характерными для экваториального F-рассеяния. В данной статье представлены результаты расчетов инкрементов ГДН [1] на границах множественных ионосферных пузырей.

ЭПП в экваториальной F-области являются сильно неоднородными и нестационарными образованиями [1–5] и могут формироваться при развитии неустойчивости Релея — Тейлора (НРТ) [6–8].

Из-за сложностей одновременного учета развития НРТ и ГДН, в данной работе развитие последней оценивается с помощью линейного инкремента нарастания, рассчитываемого на основе фоновой электронной концентрации, распределение которой получено на двумерной модели НРТ в приближении сильной вытянутости ЭПП вдоль силовых линий геомагнитного поля [9, 10].

## Математическая модель неустойчивости Рэлея — Тейлора

Математическую основу численной модели составляют уравнения плазменной газодинамики: уравнения непрерывности ионов и электронов в предположении квазинейтральности ионосферной плазмы (1), уравнения движения ионов и электронов в диффузионном приближении (2), уравнения теплопроводности ионов и электронов (3), уравнения потенциальности электрического поля (4) и уравнения непрерывности электрического тока (5):

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla_\perp (n_j \mathbf{V}_j) = Q_j - L_j, \tag{1}$$

$$-\frac{\nabla p_j}{n_j m_j} + \frac{e_j}{m_j}(\mathbf{E} + \mathbf{V}_j \times \mathbf{B}) - \nu_{jn}(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_n) - \sum_{l \neq j} \nu_{jl}(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_l) + \mathbf{g} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{3}{2} n_j k \left( \frac{\partial T_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j \nabla) T_j \right) + p_j \nabla \mathbf{V}_j + \nabla q_j = G_j - P_j, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \mathbf{J} \equiv \nabla \sum e_j n_j \mathbf{V}_j = 0, \tag{5}$$

где $j$ — сорт заряженных частиц, ионов $O^+$, $H^+$, $NO^+$ и электронов; $\mathbf{V}_j$ — дрейфовая скорость; $Q_j$, $L_j$ — скорости образования и потерь ионов; $n_j$ — концентрация; $m_j$ — масса; $e_j$ — заряд; $p_j$ — давление газа; $\nu_{jn}$ — частоты соударений; $\nu_{jl}$ — частоты столкновений; $T_j$ — температура; $q_j$ — плотность теплового потока; $G_j$, $P_j$ — скорости нагрева и охлаждения заряженных частиц; $k$ — постоянная Больцмана; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{J}$ — плотность электрического тока.

В области исследования, находящейся в интервале высот от 250 км до 700 км, можно считать, что в силу сильной замагниченности ионосферной плазмы процессы переноса вдоль магнитного поля будут определяться столкновениями, а поперек поля — дрейфовым движением плазмы, поэтому выполнено условие $\nabla_\perp(\mathbf{V}_j) = 0$. Из-за сильной анизотропии, обусловленной магнитным полем Земли, процессы диффузионного переноса и теплопроводности в области F экваториальной ионосферы происходят в основном вдоль силовых линий геомагнитного поля, а благодаря условию электростатики (4) электрическое поле потенциально:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi, \tag{6}$$

где $\Phi$ — потенциал электрического поля.

Магнитное поле Земли будем считать постоянным по времени и дипольным, поэтому размерность уравнения для потенциала (5) может быть понижена до двух интегрированием вдоль силовых линий магнитного поля уравнения непрерывности электрического тока:

$$\nabla_\perp (\hat{\sigma} \nabla_\perp \Phi) = \nabla_\perp \mathbf{A}, \tag{7}$$

где $\hat{\sigma}$ — тензор интегральных проводимостей поперек магнитного поля, $\nabla_\perp$ — поперечная к магнитному полю Земли компонента оператора $\nabla$.

Достаточно развитые ЭПП вытянуты вдоль магнитного поля Земли [6, 9], что позволяет упростить модель ЭПП, используя двухмерное приближение: двумерные уравнения непрерывности ионов, движения ионов и электронов в диффузионном приближении, теплопроводности ионов и электронов и уравнения (6–7). Для вычисления параметров нейтральных частиц использовалась глобальная эмпирическая модель MSIS [11, 12]. Начальные значения вычисляемых переменных задавались путем решения низкоширотной модели ионосферы до получения периодического по суткам решения. Используется система координат: $y$ — горизонтальная, направленная на восток; $z$ — вертикальная, направленная вверх.

**Модель градиентно-дрейфовой неустойчивости**

В развитом ЭПП на его границах формируются большие поперечные геомагнитному полю градиенты концентрации плазмы как в горизонтальном направлении (вдоль $y$), так и в вертикальном (вдоль $z$). Эти градиенты способны порождать дрейфовые волны с возрастающей амплитудой при положительном инкременте нарастания. Обозначим через $N_0$ невозмущенную концентрацию электронов, через $V_{0y}$ и $V_{0z}$ — невозмущенные скорости дрейфа, через $\nu_r$ — скорость рекомбинации электронов, эти значения получены из решения модели НРТ. Через $N$ обозначим возмущение электронной концентрации, через $\Phi$ — возмущение потенциала электрического поля, обезразмеренного делением на индукцию магнитного поля $B$. Тогда система уравнений для $N$ и $\Phi$ имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t}+V_{0y}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}+V_{0z}\frac{\partial N}{\partial z}+\nu_r N+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial N_0}{\partial z}-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial N_0}{\partial y}=-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial N}{\partial y}, \tag{8}$$

$$\Delta\Phi+\frac{V_{0y}}{N_0}\frac{\partial N}{\partial z}+\frac{V_{0z}}{N_0}\frac{\partial N}{\partial y}=0. \tag{9}$$

Эта система имеет нелинейность в правой части (8). Решение (8–9) зададим в виде

$$\begin{gathered} N=N_1\exp(-i\omega t+ik_y y+ik_z z), \\ \Phi=\Phi_1\exp(-i\omega t+ik_y y+ik_z z). \end{gathered} \tag{10}$$

Подставляя это в линейную часть уравнений (8) и (9), получим систему двух однородных линейных уравнений для $N_1$ и $\Phi_1$. Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю, получаем дисперсионное соотношение:

$$\omega=k_yV_{0y}+k_zV_{0z}-i\nu_r+\frac{i}{k^2}(k_y^2V_{0z}L_z^{-1}-k_z^2V_{0y}L_y^{-1}+k_yk_z(V_{0y}L_z^{-1}-V_{0z}L_y^{-1})), \tag{11}$$

$L_y^{-1}=\dfrac{\partial\ln N_0}{\partial y}$, $L_z^{-1}=\dfrac{\partial\ln N_0}{\partial z}$. Коэффициент при $i$ в (11) равен инкременту, что согласуется с [1]:

$$\gamma_g=-\nu_r+\frac{1}{k^2L_yL_z}(V_{0z}k_y+V_{0y}k_z)(L_yk_y-L_zk_z).$$

Значение инкремента $\gamma_g$ зависит от соотношения $k_y$ и $k_z$ и максимальное значение его равно

$$\gamma_{g\max}=-\nu_r+\frac{1}{2L_yL_z}\left(L_yV_{0z}-L_zV_{0y}\right)+\frac{1}{2L_yL_z}\sqrt{\left(L_y^2+L_z^2\right)\left(V_{oy}^2+V_{0z}^2\right)}. \tag{12}$$

Это значение достигается при

$$\frac{k_z}{k_y}=\frac{-L_yV_{0z}-L_zV_{0y}\pm\sqrt{\left(L_y^2+L_z^2\right)\left(V_{oy}^2+V_{0z}^2\right)}}{L_yV_{0y}-L_zV_{0z}}. \tag{13}$$

Длины волн в описанной модели ограничены сверху размерами плазменных неоднородностей, на фронтах которых они развиваются, а снизу — длиной свободного пробега заряженных частиц. Получаем диапазон длин волн примерно от 10 м до 1000 м.

### Численная модель

Численное моделирование проводилось в экваториальной плоскости, в области, ограниченной снизу высотой 100 км и сверху 1700 км, по координате y протяженность области интегрирования принята равной 600 км. Благодаря таким большим размеры области уменьшилось влияние граничных условий на моделируемые процессы. Гелио-геомагнитные условия расчетов соответствовали среднему уровню солнечной активности с $F_{10.7}=150$ и низкому уровню геомагнитной активности $k_p=3$.

Для потенциала электрического поля граничные условия заданы через фоновое. Его восточная компонента задавалась модельно положительным значением 0,001 В/м, что соответствует вертикальному дрейфу вверх со скоростью 40 м/с. На нижней границе для концентраций заданы условия химического равновесия, а для температуры — равенство нейтральной температуре, вверху и на боковых границах задано условие равенства нулю потоков.

Начальные неоднородности электронной концентрации плазмы, в дальнейшем развивающиеся в ЭПП, в работе задавались модельно в виде

$$n_i = n_{i0}\left(1+\sum_k (a_k-1)\exp(-((y-y_k)/r_k)^2-((z-z_k)/r_k)^2)\right),$$

где $n_{i0}$ — фоновая концентрация ионов; $a_k$ — отношение концентрации *в центрах неоднородностей* к фоновому значению концентрации на этой высоте; $(y_k, z_k)$ — координаты центров начальных неоднородностей; $r_k$ — радиусы областей начальных неоднородностей. В расчетах было принято $r_k = 5$ км и $a_k = 0,5$.

Уравнения модели решались численно конечноразностными методами на квазиравномерных сетках, сгущающихся к центру области решения, с шагами в центральной области 1,2 км по координате $y$ и 1,6 км по координате $z$. Использованы конечно-разностные методы второго порядка точности. Двумерное приближение позволяет использовать подробные вычислительные сетки, что важно вследствие малых поперечных размеров элементов ЭПП.

Разностные схемы для уравнений переноса в задачах моделирования НРТ должны обладать достаточной точностью и монотонностью. Поэтому двумерные уравнения переноса решаются по схеме расщепления, симметрированной для получения второго порядка точности, а для решения одномерных уравнений выбран монотонный метод с нелинейной коррекцией потоков и выбором ограничителя minmod [13]. Для решения уравнения потенциала электрического поля применена W-схема многосеточного метода.

### Результаты численных экспериментов

Численная модель НРТ (1)–(7) была использована для нахождения долготно-высотных профилей ионосферной плазмы в системе ЭПП и их градиентов, определяющих величину инкремента нарастания ГДН.

На рис. 1–5 приведены зависимости инкремента $\gamma_{g\max}$ от времени с момента инициализации НРТ для системы *двух* плазменных пузырей, с начальным расстоянием между центрами 20 км, 40 км, 60 км, 80 км и 100 км соответственно.

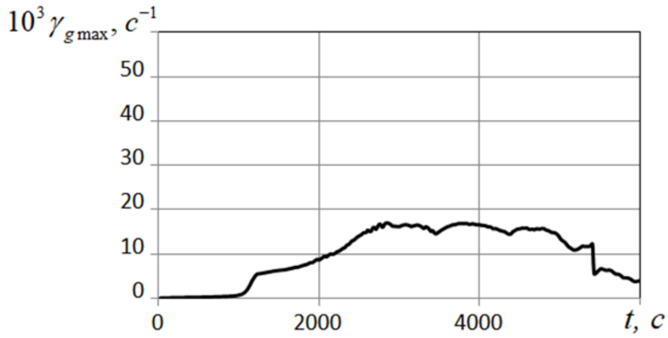



*Рис. 1. Рассчитанные зависимости инкремента $\gamma_{g\max}$ от времени с момента инициализации НРТ для системы двух плазменных пузырей с начальным расстоянием между центрами 20 км*

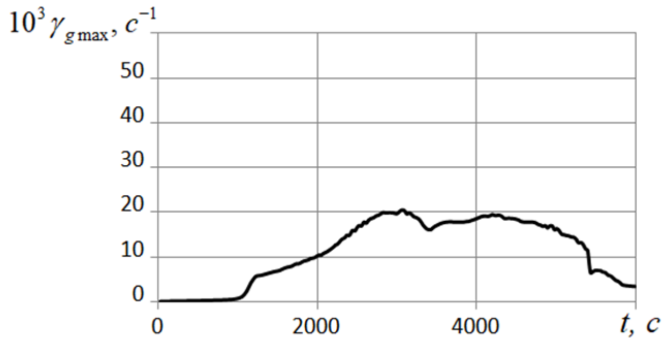



*Рис. 2. Рассчитанные зависимости инкремента $\gamma_{g\max}$ от времени с момента инициализации НРТ для системы двух плазменных пузырей с начальным расстоянием между центрами 40 км*

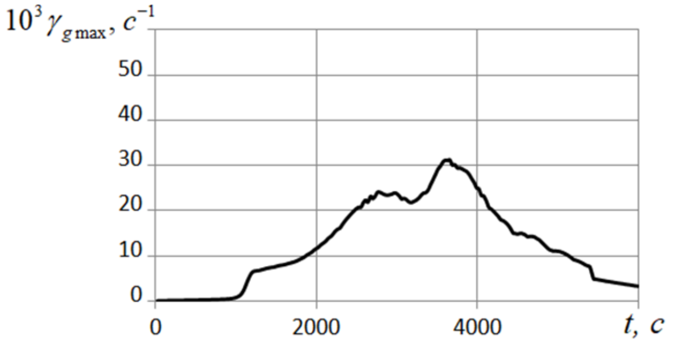



*Рис. 3. Рассчитанные зависимости инкремента* $\gamma_{g\max}$ *от времени с момента инициализации НРТ для системы двух плазменных пузырей с начальным расстоянием между центрами 60 км*

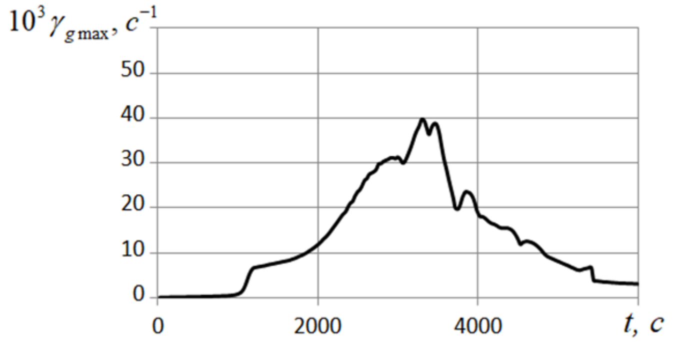



*Рис. 4. Рассчитанные зависимости инкремента* $\gamma_{g\max}$ *от времени с момента инициализации НРТ для системы двух плазменных пузырей с начальным расстоянием между центрами 80 км*

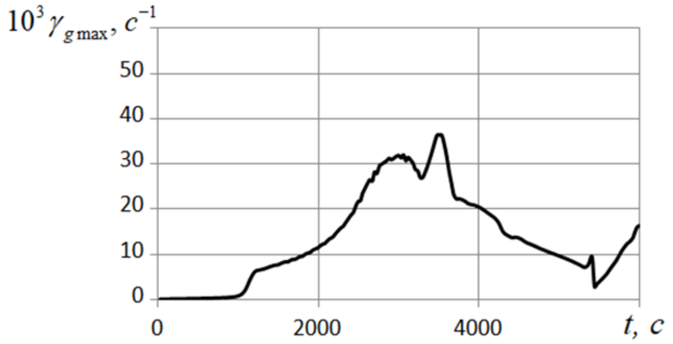



*Рис. 5. Рассчитанные зависимости инкремента* $\gamma_{g\max}$ *от времени с момента инициализации НРТ для системы двух плазменных пузырей с начальным расстоянием между центрами 100 км*

Наибольшее значение инкремента $\gamma_{g\max}$ в этой серии экспериментов получилось при начальном расстоянии между центрами плазменных пузырей 80 км и составило 0,040 с$^{-1}$.

На рис. 1 и 6–8 показаны зависимости инкремента $\gamma_{g\max}$ от времени с момента инициализации НРТ для системы *двух*, *трех*, *четырех* и *пяти* плазменных пузырей, с начальным расстоянием между центрами 20 км.

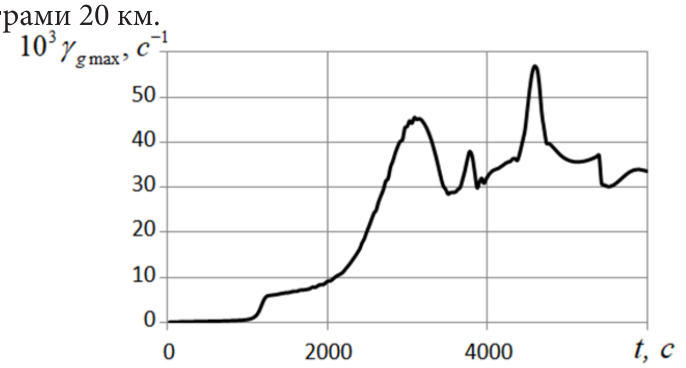



*Рис. 6. Рассчитанные зависимости инкремента* $\gamma_{g\max}$ *от времени с момента инициализации НРТ для системы трех плазменных пузырей с начальным расстоянием между центрами 20 км*

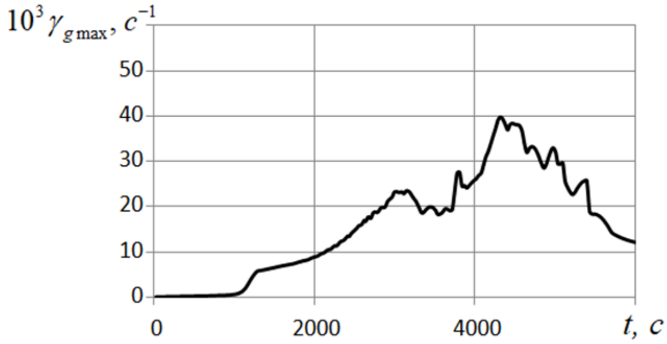



*Рис. 7. Рассчитанные зависимости инкремента $\gamma_{g\max}$ от времени с момента инициализации НРТ для системы четырех плазменных пузырей с начальным расстоянием между центрами 20 км*

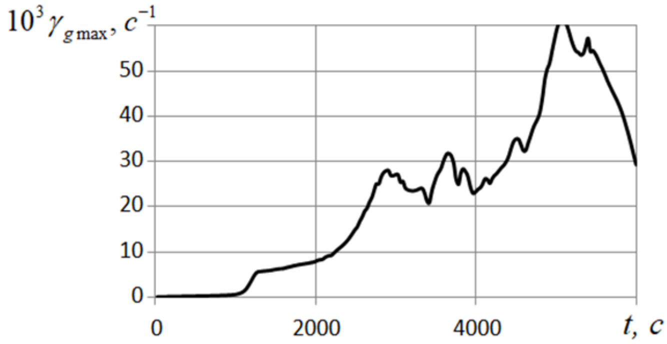



*Рис. 8. Рассчитанные зависимости инкремента $\gamma_{g\max}$ от времени с момента инициализации НРТ для системы пяти плазменных пузырей с начальным расстоянием между центрами 20 км*

Наибольшее значение инкремента $\gamma_{g\max}$ в этой серии экспериментов получилось для системы трех плазменных пузырей и составило 0,057 с$^{-1}$.

Во всех восьми численных экспериментах наблюдалась сложная немонотонная зависимость инкремента от времени. Это является следствием взаимодействия и перестройки системы двух и более пузырей, что косвенно подтверждается усложнением зависимости при увеличении количества плазменных пузырей.

В отличие от работы [1] в приведенных вычислениях получены значительно бóльшие инкременты ГДН, что связано со значительными градиентами электронной концентрации и большими дрейфовыми скоростями на фронтах плазменных пузырей.

## Заключение

Представленные выше результаты численных экспериментов, позволяют сделать следующие выводы.

1. Градиенты электронной концентрации на фронтах развитой системы ионосферных пузырей могут быть эффективным механизмом развития ГДН.

2. Инкремент нарастания ГДН может достигать значений 0,057 с–1, что дает возможность развития мелкомасштабных неоднородностей.

3. Модель описывает процессы развития неоднородностей с характерными размерами от нескольких десятков метров, таким образом, ГДН может являться причиной генерации мелкомасштабной структуры на фронтах ЭПП в вечернее и ночное время с характерными для условий экваториального F-рассеяния параметрами.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту 20-01-00361

**Литература**

1. *Суковатов Ю. А.* Теоретическое исследование нелинейной стадии градиентно-дрейфовой неустойчивости во внешней ионосфере // Известия АлтГУ. – 2012. – №1-1. – С. 222–225.

2. *Ossakow S. L., Chaturvedi P. K.* Morphological studies of rising equatorial spread F bubbles // J. Geophys. Res. – 1978. – V. 83. – P. 2085–2090.

3. *Reinisch B. W., Abdu M., Batista I., Sales G. S., Khmyrov G., Bullett T. A., Chau J. and Rios V.* Multistation digisonde observations of equatorial spread in South America // Ann. Geophys. – 2004. – V. 22. – P. 3145.

4. *Rottger J.* The macro-scale structure of equatorial spread-F irregularities // J. Atm. Terr. Phys. – 1976. – V. 38. – P. 97–101.

5. *Saito S., Maruyama T., Ishii M., Kubota M., Ma G., Chen Y., Li J., Duyen C. H., Truong T. L.* Observations of small- to large-scale ionospheric irregularities associated with plasma bubbles with a transequatorial HF propagation experiment and spaced GPS receivers // J. Geophys. Res. – 2008. – V. 113(A1). – P. 2313.

6. *Farley D. T., Balsley B. B., Woodman R. F., McClure J. P.* Equatorial spread F: Implications of VHF radar observations // J. Geophys. Res. – 1970. – V. 75. – P. 7199–7216.

7. *Huba J. D., Joyce G., Krall J.* Three-dimensional equatorial spread F modeling // Geophys. Res. Lett. – 2008. – V. 35. – P. L10102.

8. *Woodman R. F.* Spread-F – an old equatorial aeronomy problem finally resolved? // Ann. Geophys. – 2009. – V. 27. – P. 1915–1934.

9. *Кащенко Н. М., Мациевский С. В., Никитин М. А.* Ионосферные пузыри: ионный состав, скорости движения плазмы и структура // Известия вузов. Радиофизика. – 1989. Т. 32(11). – С. 1320–1326.

10. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Мациевский С. В.* Развитие неустойчивости Рэлея – Тейлора в экваториальной ионосфере и геометрия начальной неоднородности // Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30(9). – С. 21–32.

11. *Hedin A. E., Salah J. E., Evans J. E. et al.* A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data MSIS 1. N2 density and temperature // J. Geophys. Res. – 1977. – V. 82(A1). – P. 2139–2147.

12. *Hedin A. E., Reber C. A., Newton G. P. et al.* A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data MSIS 2. Composition // Ibid. – P. 2148–2156.

13. *Сафронов А. В.* Оценка точности и сравнительный анализ разностных схем сквозного счета повышенного порядка // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11(1). – С. 137–143.

УДК 532.546 +519.517.949.8

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ФЛЮИДОВ В СВЯЗАННЫХ ПЛАСТАХ

**Ш. Каюмов[1], Т. О. Хаитов[1], А. Б. Каюмов[2], А. П. Марданов[1]**

*[1]Ташкентский государственный технический университет*
*[2]Университет Инха в городе Ташкенте*

Исследование процесса фильтрации флюидов в гидродинамически связанных и несвязанных (разрабатываемой единой скважиной) пористых средах имеет важное значение при проектировании, анализа, прогнозировании и регулировании разработки месторождений содержащих флюидов (газ, нефть, вода, газоконденсат и т. д.) необходимый для функционировании народного хозяйства любого государства. Она связано с тем что пористая среда многослойная и является сложными геологическими строением. В реальных случаях иногда трудно определить границы между пропластками так как существует неоднородность по пространственным переменным, а иногда и по временными переменными. В последнем случаи пористая среда может быть заполнен флюидами обладающей структурными свойствами, а иногда сама пористая среда может быть структурированный. В этих случаях пластовые характеристики со временами меняется приспосабливаесь к скорости движуешого флюида. Началом исследования процеса фильтрации подземных вод в многослойных пористых средах в упрощенных постановках считается работы [1, 2]. При этом авторы пренебрегали вертикальной составляющей скорости в хорошо проницаемых пластах и тем самым течения считаться горизонтальным а в слабопроницаемых пластах пренебрегалось горизонтальной составляющей скорости и течения предпологалось вертикальным. Далее предлагалось уточненная схема [3, 4], где в хорошо проницаемых пластах учитывается вертикальная составляющая скорости, а влияние гидравлической связи между пластами учитывалось через граничные условие. В работе [5] была построена математический модель, учитывающая упругий запас флюида в слабопроницаемых пропластках. Дальнейшем в рамках этих моделей были решены многие задачи подземной гидродинамики. Так в работе [6] рассмотрено математической модель по схеме Хантуша для слоистых пластов.

Так как при интегрировании по переменным $z$ в продуктивным пласте в уравнения появляется слагаемые — коэффициенты перетока то для эффективный организации вычислительного процесса в работе [7] предложеной приближенный способ вычисления на каждом временном шаге которые авторы назвали промежуточным моделями.

Обобщение и обоснование этих работ для многопластовых месторождений нефти-газа исследована и в работе [8].

Изучение процесса фильтрации были посвященный еще многочисленные работы [9–12] с допущениями и предположениями относительно геометрии слоистого пласта и характеристики насышающего их флюида. Почти во всех этих исследованиях предпологалось что движения флюида происходить по линейному закону Дарси (нъютоновскими). Некоторые работы [6–8] рассматривали движения флюида как ненъютоновские и математические модели строилось с учетом этих предположений. Для структурированных флюидов исследование в научной литературе почти отсутствует особенно в многопластовых системах оно не рассмотрена. Известно что к структурированным флюидом относят те виды флюидов имеющие своеобразную фильтрации отличающиеся от других, как кинематическими, так и динамическими свойствами влияющие на их структурные строение в процессе фильтрации. Иногда строение самой пористой среды могут иметь структурные характеристики, не свойственные к обычным средам.

Влияния этих факторов суммарно могут приводит к тому что в процессе фильтрации начинает происходить физико-химические молекулярные и структурные преобразования, связанные с поверхностными силами натяжения и другими прочими действиями, которые в последствие могут быть причинами аномальности фильтрации структурированных флюидов.

Такие типы флюидов и среды при разрушенной и не разрушенной структуре ведут себя иначе, что влияет на подвижность и скорость фильтрации.

В процессе фильтрации флюидов такого типа в пласте образуется различные зоны подвижности с неизвестными подвижными границами, такие как: зона ползучести (где структура флюида практически не разрушена); зона средней (иногда аномальной) подвижности (где связь между скоростью и градиентом давления нелинейно); зона максимальной подвижности (где связь между скоростью и градиентом давления почти линейно). Между этими зонами могут существовать критические значение градиента давления [13–15].

Исследования связанным с математическим моделированием этого направления проводились и в работах [16–18], в одномерных и двухмерных случаях для однопластовых системы где предлагалось отдельные, а также многопараметрические математические модели включающие в себе различные виды аппроксимации функциональной зависимости между скоростью движения и градиента давления. Такое трактовка и способ конструрирование многопараметрической математической модели с соответствующими параметрическими граничными условиями позволяют в одной модели (краевой задачи) рассмотреть (объединит) все существующие математические модели соответствующие определенным законам движения. Изучение процесса фильтрации структурированных флюидов в многослойных пластах исследуется и в работах [19, 20] где рассмотрена слоистий пласт и причем в продуктивном пласте движение происходит по горизонтали а в перемычках по вертикали.

Пусть задан двухслойный пласт причем нижний продуктивный (область $\Omega_1$), с преобладающими горизонтальными характеристиками и другой верхний пласт (область $\Omega_2$) считающейся перемычкой и в нем преобладает вертикальные характеристики. Следовательно можно предположить что движения флюида в нижней области $\Omega_1$, происходить по горизонтали а верхней области $\Omega_2$ по вертикали. Предпологается область $\Omega_1$ насыщенно структурированными флюидами а верхней область $\Omega_2$ насыщенна неньютоновскими флюидами.

Предположим в начальный момент времени пластовое давления в обоих пластах постоянный и равной. Если с началом времени $t > 0$ из скважиный расположенной в начале координат (область $\Omega_1$) происходить отбор то процессе фильтрации пласта математически сформулируется так: Необходимо найти непрерывные функции $u(x,t)$ и $\upsilon(x,z,t)$ а также неизвестные границы $R_1(x,t)$, $R_2(x,t)$, $\Gamma(x,z,t)$ из следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_1\left(|\nabla u|,\beta_1\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\chi\left(|\nabla v|,\beta\right)\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=h_1}=M_1\frac{\partial u}{\partial t},\ x\in\left(0;R_1(t)\right),\ t>0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_2\left(|\nabla u|,\beta_2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\chi\left(|\nabla v|,\beta\right)\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=h_1}=M_2\frac{\partial u}{\partial t},\ x\in\left(R_1(t);R_2(t)\right),\ t>0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_3\left(|\nabla u|,\beta_3\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\chi\left(|\nabla v|,\beta\right)\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=h_1}=M_3\frac{\partial u}{\partial t},\ x\in\left(R_2(t);L\right),\ t>0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi\left(|\nabla v|,\beta\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=M\frac{\partial v}{\partial t},\quad z\in\left(h_1;\Gamma(x,z,t)\right),\ t>0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi\left(|\nabla v|,\beta\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=M\frac{\partial v}{\partial t},\quad z\in\left(\Gamma(x,z,t);h_2\right),\ t>0, \tag{5}$$

с начальными

$$u(x,0)=v(x,z,0)=u_0(x,z), \tag{6}$$

$$R_1(x,0)=R_2(x,0)=0,\ \ \Gamma(x,h_1,0)=0, \tag{7}$$

и граничными

$$\Phi_1(|\nabla u|,\beta_1)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=R_1-0}=\Phi_2(|\nabla u|,\beta_2)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=R_1+0}, \tag{8}$$

$$\Phi_2(|\nabla u|,\beta_2)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=R_2-0}=\Phi_3(|\nabla u|,\beta_3)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=R_2+0}, \tag{9}$$

$$\chi(|\nabla v|,\beta)\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=\Gamma-0}=\Phi(|\nabla v|,\beta)\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=\Gamma+0}, \tag{10}$$

а также краевыми условиями

$$\alpha_1\Phi_1(|\nabla u|,\beta_1)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\ z=h_1}}=q_0(t),\ \ t>0, \tag{11}$$

$$\alpha_2\Phi_3(|\nabla u|,\beta_3)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L}=0,\ \ t\geq 0, z=h_1, \tag{12}$$

$$\alpha_3\Phi(|\nabla v|,\beta)\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z=h_2}=0,\ \ t\geq 0, \tag{13}$$

Здесь функция $\Phi_l=\dfrac{K(x)}{\eta_l}A_l(|\nabla u|,\beta_l),\ l=\overline{1,3};$ $K(x)$ — проницаемость, $\eta_l$ — коэффициенты, динамической вязкости соответствующие к трем зонам фильтрации; $A_l(|\nabla u|,\beta_l)$ — функции выражающие подвижности флюида в этих зонах и принимает конкретный вид соответствующие к индикаторным кривым скорости флюида. $\beta_l$ — коэффициенты относительно критических значений градиентов сдвига.

$\chi(|\nabla v|,\beta)=\dfrac{K_1(z)}{\mu}\left(1-\dfrac{\beta\gamma_0}{|\nabla v|}\right)$ при $|\nabla v|>\beta,$ где $\mu$ — значение вязкости в аномальной зоне фильтрации. $\gamma_0=1-0,41142135\dfrac{\mu}{\nu},$ [21], $\nu$ — динамическая взякость флюида при малых градиентов $(|\nabla v|<\beta)$ давлений. $\Phi(|\nabla v|,\beta)=\dfrac{K_1(z)}{\nu}\ \dfrac{|\nabla v|}{\beta+|\nabla v|},$ при $|\nabla v|<\beta,$ описывается один из нелинейности движение в области малых градиентов давлений в перемычке.

$M_l=M_l(x,t,u),\ l=\overline{1,3},\ M=M(x,z,t,\upsilon)$ известные функции зависящие от режима фильтрации и типов рассматриваемых флюидов (вода, газ, нефть, конденсат, и. т. д.) а также от структуры самой пористой среды.

$\alpha_l\ \ (l=\overline{1,3})$ константы, зависящие от ширины и высоты (длины) в пластах балансирущие размерности уравнений.

Задача (1)–(13) в общем случае нелинейно и поэтому аналитические решение построить трудно и даже невозможно. При определенных предположений и допущений относительно параметров и функции можно построить приближенно аналитические решения [16].

Задача (1)–(13) решается потоковым вариантом метода конечных разностей [21–23].

Вводим обозначения

$$W_e(x,t)=\Phi_e(|\nabla u|,\beta_e)\frac{\partial u}{\partial x},\ \ e=\overline{1,3}; \tag{14}$$

$$\omega_r(x,z,t)=x(|\nabla v|,\beta)\frac{\partial v}{\partial z},\ \ r=\overline{1,2} \tag{15}$$

(при $r=1, \chi=\chi$, при $r=2,\ \chi=\Phi$).

Тогда задача (1)–(6) примет вид.

$$\frac{\partial W_e}{\partial x} - \omega_1\Big|_{z=h_1} = M_e \frac{\partial u}{\partial t}, \quad e = \overline{1,3}; \tag{16}$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial z} = M \frac{\partial v}{\partial t}, \quad r = \overline{1,2}; \tag{17}$$

Условия (8)–(10) запишется так

$$W_1(x,t)\Big|_{x=R_1-0} = W_2(x,t)\Big|_{x=R_1+0}, \tag{18}$$

$$W_2(x,t)\Big|_{x=R_2-0} = W_3(x,t)\Big|_{x=R_2+0}, \tag{19}$$

$$\omega_1(x,z,t)\Big|_{z=\Gamma-0} = \omega_2(x,z,t)\Big|_{z=\Gamma+0}. \tag{20}$$

Соотношения (11)–(13) примет вид:

$$\alpha_1 W_1(x,t)\Big|_{x=0} = q_0, \tag{21}$$

$$\alpha_2 W_3(x,t)\Big|_{x=L} = 0, \tag{22}$$

$$\alpha_3 W_2(x,z,t)\Big|_{z=h_2} = 0. \tag{23}$$

Задача (16)–(18) решается так:

Интегрируя (16) на интервале $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ и применяя теоремы о среднем для производной по времени получим

$$W\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t\right) - W\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t\right) = M_i \frac{\partial u_i}{\partial t} h_i + (\omega_r)_i h_i, \tag{24}$$

Соотношение (17) проинтегрируем на интервале $\left[z_{j+\frac{1}{2}}, z_{j-\frac{1}{2}}\right]$ и тоже проделывая те же операции что с (16) имеем

$$\omega\left(x_i, z_{j+\frac{1}{2}}, t\right) - \omega\left(x_i, z_{j-\frac{1}{2}}, t\right) = M\left(x_i, z_j, u_{ij}\right) \frac{\partial \nu_i}{\partial t} \overline{h_j}, \tag{25}$$

где $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad \overline{h_j} = z_{j+\frac{1}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}}$.

С целью экономии объема работы дальнейшем не записываем полностью полученное соотношение излагаем словесной форме проделанной работы. В выражении (24) переходя к разностным соотношениям по $t$ (что равносильно к интегрирование (24) по переменному $t$ на отрезке $[t_k, t_{k-1}]$) запишем (24) и (25) так

$$W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} - c_i u_i = -d_i, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad \omega_{j+\frac{1}{2}} - \omega_{j-\frac{1}{2}} - \tilde{c}_i \upsilon_{j,k} = -\tilde{d}_j, \quad j = 1,2,\ldots,N-1,$$

где $W_{i+\frac{1}{2}} = W\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t_k\right)$, $u_i = u(x_i, t_k)$.

В дальнейшем ход построенные вычислительных формулы изложит описательном виде.

Сначала интегрируем [23, 24] равенство (24) и (25) по переменному $t$ на интервале $[t_k, t_{k-1}]$ а также (14) на интервале $[x_{i-1}, x_i]$, (15) на $[z_{j-1}, z_j]$ получим систему сеточных разностных уравнений относительно потоков и искомых функций с соответствующими начальными и краевыми а также граничными условиями относительно потока.

Построенные поточно разностные краевые задачи решается с применением потокового варианта разностной прогонки [22, 8, 24].

Прогоночные коэффициенты определяются, используя соответствующие уравнения и краевые условия.

Полученные алгоритмы позволят вычислить значение искомых функций и потоков в узлах сеточной области.

На границах зон $R_i(t_k)$ и $\Gamma(z_j, t_k)$ используя условия равенства потоков определятся прогоночных коэффициенты и далее можно вычислить границы этих зон и подвижной неизвестной граница верхнего пласта. Точность вычислительных схем в пределе $o(h^2 + \tau)$.

Последовательность вычисление следующие: сначала относительно нелинейных членов проводится линеаризация используя метода итерации;

Так как в начало вычислений неизвестно величина перетока из перемычки в продуктивный пласт то в рамках одного шага по времени поступаем так: сначала считаем переток нет и решаем задачу в продуктивном пласте. Далее решается задача на перемычке и по известной величине перетока снова решается задача в продуктивном пласте. В дальнейших шагах по времени в процессе решение в области $\Omega_1$ величиной перетока из $\Omega_2$ берется значение из предедушего шага по времени. При этом в каждом временном шаге определяется положение границы зон в области $\Omega_1$ путем сравнением величины потоков слева и справа в каждой границе зон. В области $\Omega_2$ тоже при каждом шаге по $t_k$ определяется граница $\Gamma(t_k)$ путем сравнение потоков по направления переменного $z$. Для повышения точности значений границ возмущений предлагается использовать метод «челночных» итераций [21] или метод простой итерации. Для апробации модели и установление работаспособности вычислительных алгоритмов использован гипотетические данные вида: $q_0 = 50$ т/с; 100 т/с; $\mu = 0;\ 0,01;\ 0,1;\ 0,3$. $k = 0,005;\ 0,01;\ 0,02,\ v = 0,018,\ m_1 = 0,017,\ m_2 = 0,27,\ u_0 = 1$ (100 *атм*).

Отдельные фрагменты результатов приведены в рис 1–4 а также в табл. 1 и 2.

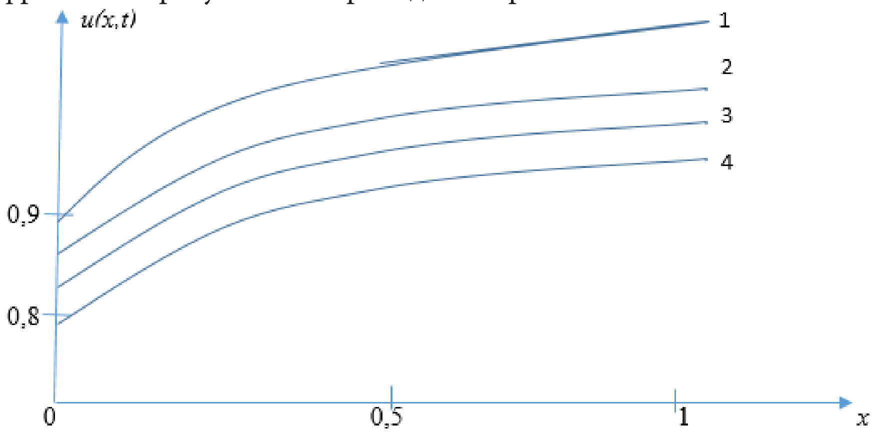



*Рис 1. Распределение давление в продуктивным пласт при $t = 0,1,\ t = 0,2,\ t = 0,3,\ t = 0,5$ для ньютоновских флюидов*

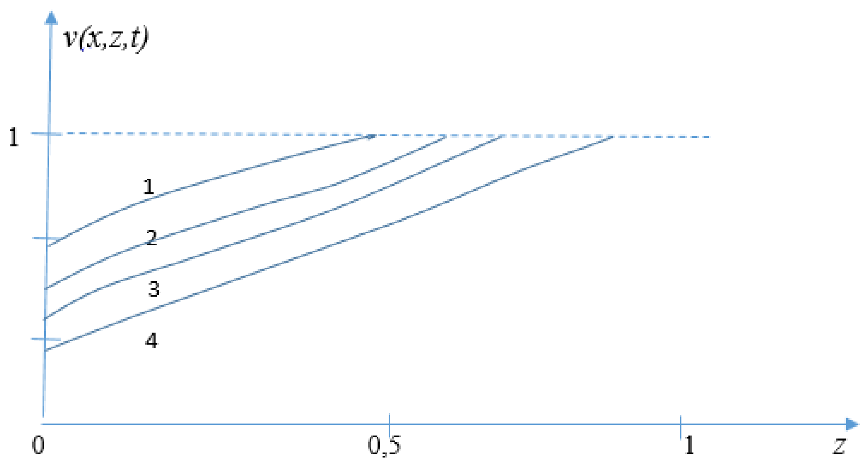



*Рис. 2. Распределение давление в перемычке при $t = 0,1,\ t = 0,2,\ t = 0,3,\ t = 0,4$*

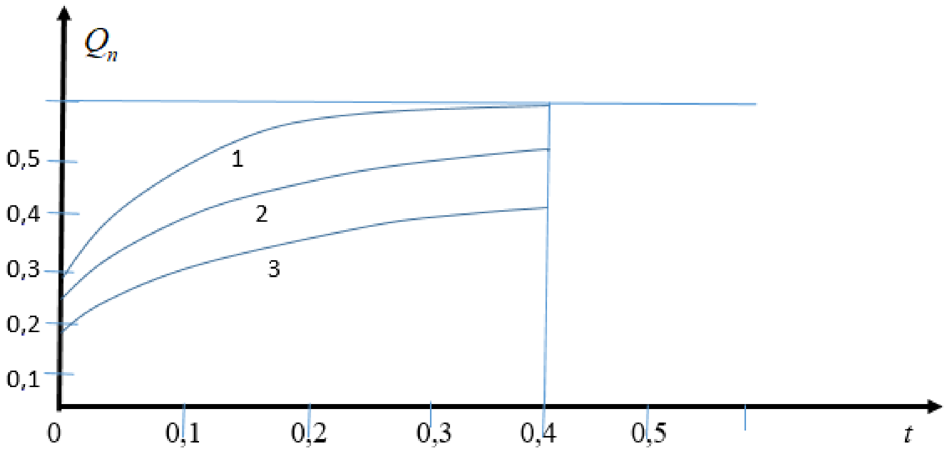



*Рис. 3. Изменение функции перетока при* $t = 0,1$, $t = 0,2$, $t = 0,3$

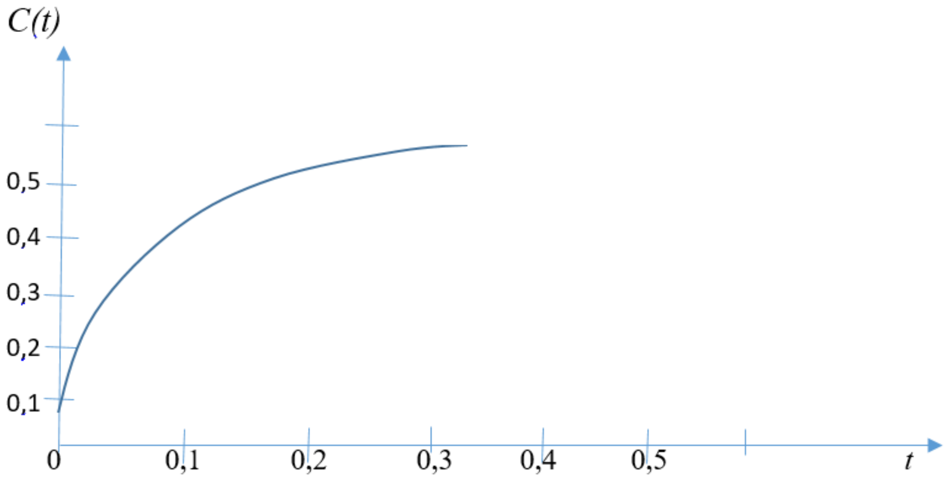



*Рис. 4. Изменение границы возмущения по времени* $t$ *в верхном пласте* $(\Omega_2)$
*при нелинейности закона движения*

В табл. 1, приведено изменение давление в хорошо проницаемом процессе пласта при фильтрации ньютоновского флюида, где $\beta_i = 0$, $q_0 = 50$ т/с $\mu = 0$, $m = 0,27$, $\mu = 0,01\, г/см^2\, сек = 1\, см.$

Таблица 1

| t \ x | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,8253 | 0.8043 | 0.9315 | 0.9605 | 0,9702 |
| 0,2 | 0,7614 | 0,8218 | 0,8721 | 0,9012 | 0,9171 |
| 0,3 | 0,7072 | 0,7615 | 0,8130 | 0,8615 | 0,8816 |

Ниже в табл. 2 для $m = 0,2$, $\beta = 0,5\cdot 10^{-5}$; $10^{-3}$, $\mu = 0,3$, $m = 0,18$, $x = 0,005$, $\alpha = 1$, $b = 5\, м$, $h = 80\, м$, $q = 50$ т/с, $u_0 = 1$ дано изменения давления и величина перетока в $\Omega$, для различных $\beta$ в точке $x = 0$ по времени.

Таблица 2

| $t$ | $\beta = 0$ | $\beta = 10^{-5}$ | $\beta = 10^{-2}$ |
|---|---|---|---|
| 0,01 | 0,98150 | 0,97502 | 0,92163 |
| 0,05 | 0,95261 | 0,93121 | 0,89121 |
| 0,2 | 0,92110 | 0,90422 | 0,87125 |
| 0,15 | 0,89216 | 0,87134 | 0,84786 |

| Значение перетока | | | |
|---|---|---|---|
| 0,01 | 0,12143 | 0,10346 | 0,08732 |
| 0,05 | 0,18314 | 0,16342 | 0,11425 |
| 0,1 | 0,21210 | 0,19121 | 0,16522 |
| 0,15 | 0,25146 | 0,22751 | 0,19344 |

Численные эксперименты показали что при $\frac{K_1}{K} < 10^{-4}$ отбор флюида из перемычки с помощью отбора из хорошо проницаемого пласта не дает желаемые эффекты.

При нелинейном законе фильтрации в области $\Omega_1$ для зоны, с большим градиентом давления характерно быстрое увеличение величины перетока из перемычки а для аномальную зоны эта величина напрямую зависеть от степени аномальности. Управляя величинами перетока а также градиентами возмущении в зависимости от темпа отбора из хорошо проницаемого пласта можно достичь наибольшую отбор разрабатываемого пласта. Таким образом построенная математическая модель фильтрации структурированных флюидов в двухслойном пласте а также разработанные вычислительные алгоритмы можно использовать для разработки месторождение флюидов с подобной геометрией предложенной данной модели.

**Литература**

1. *Мятиев А. Н.* Действие колодца в напорном бассейне подземных вод. –Ашхабад : Издательство «Туркмен. фил. Ан СССР», 1946. – № 3-4.

2. *Гиринский Н. К.* Некоторые вопросы динамики подземных вод // Вопросы гидрогеологии и инженерной геологии. – 1947. – № 9.

3. *Гусейнзаде М. А., Колосовская А. К.* Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. – М. : Недра, 1972.

4. *Шелкачев В. Н., Гусейнзаде М. А.* Влияние проницаемости кровли и подошвы пласта на движение в нем жидкости // Нефтяное хозяйство. – 1953. – № 12.

5. *Хантуш М. С.* Новое в теории перетекания. Сб. : «Вопросы гидрогеологических расчетов». – М. : Мир, 1964.

6. *Мукимов Н.* Исследование потоковым вариантом прогонки нелинейной фильтрации в слоистом пласте модели Хантуша // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. – 1977. – вып 47. – С. 76–90.

7. *Мухидинов Н. М., Мукимов Н.* Об одной приближенной модели теории линейной и нелинейной фильтрации в многослойных пластах // Численные методы механики сплошной среды. – 1978. – Т. 9, № 1. – Новосибирск, ВЦ СО АН СССР. – С. 125–130.

8. *Мухидинов Н. М.* Методы расчета позателли разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Ташкент : Издательство «Фан», 1978. – 117 с.

9. *Бегматов А.* К расчету неустановившейся фильтрации в многослойных пластах // В сб. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. – Ташкент : «ФАН», 1974. – № 4. – С. 182–188.

10. *Аббасов М. Т., Кулиев А. М.* Методы гидродинамических расчетов разработки многопластовых месторождений нефти и газа. – Баку : ЭЛМ, 1976.

11. *Абуталиев Э. Б., Сиддиков А. М.* Исследование нестационарной фильтрации в взаимодействующих гидродинамически связанных пластах жидкости и газа // Сб. Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент. ИК с ВЦ АН УзССР, 1974. – вып. 25. – С. 60–73.

12. *Закиров С. Н.* Определения показателей разработки многопластовых месторождений при наличии газодинамической связи между пластами // В сб. Разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений, ВНИНЭГАЗПРОМ. – 1970. – № 8.

13. *Каюмов Ш., Муродова Т.* К постановке задачи фильтрации структурированных флюидов // Тезисы докладов международной конференции «Интеллектуализация систем управления и обработки информации». Ташкент. – 1994. – С. 190–191.

14. *Каюмов Ш., Аванесов С.* Структурирование флюиды // Сб. докладов республиканское конф. «Молодёжь в развитии науки техники», Ташкент. – 2006. – С. 29–30.

15. *Каюмов Ш.* Численное решение двумерных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с двумя подвижными границами // Вестник ТашГТУ. 1999. – № 1-2. – С. 15–20.

16. *Каюмов Ш.* Приближенно-аналитическое решение одномерных задач теории фильтрации структурированных флюидов // Проблемы информатики и управления перспективы их решения. Сборник тезисов докладов АН РУЗ НПО «Кибернетика», Ташкент. – 1996. – С. 90–91.

17. *Каюмов Ш.* К вопросу о математическом моделировании структурированных флюидов // Вычислительные технологии. Труды международной конференции RDAAM-2001, Новосибирск. – 2001. – Т. 6., ч. 2. – С. 183–190.

18. *Каюмов Ш., Исканаджиев И., Нарзиев А.* Конструированное многопараметрических математических моделей задачи теории фильтрации неструктурированных и аномально структурированных флюидов (газа, газоконденсата, нефти и воды) // Материалы международной научно-технической конференции «Нефть и газ Западной Сибири» т. 1, Тюмень. – 2011. – С. 211–215.

19. *Каюмов Ш.* Об особенностях фильтрации структурированных флюидов в двухслойном пласте // Сборник докладов республиканской научно-практической конференции «Интеграция науки и образования-производства», Ташкент. – 2005. – Т. 1. – С. 309–312.

20. *Каюмов Ш., Исканаджиев И.* Математическое моделирование структурированных флюидов в многослойных средах // Тезисы докладов Всероссийский конференции «Проблемы механики сплошных сред и физика взрыва», Новосибирск. – 2007. – С. 98–99.

21. *Каюмов Ш.* Приближенно-аналитические методы решения задач теории фильтрации вязкопластических флюидов. – Ташкент : Издательство «ФАН», 1991. – 156 с.

22. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М. : Наука, 1977. – 592 с.

23. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. – М. : Наука, 1989. – 484 с.

24. *Каюмов Ш.* Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. – Ташкент : ТГТУ, 2017. – 274 с.

УДК 004.9

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И УСЛОВИЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ ПОЗИЦИЙ В МЕЖДУНАРОДНЫХ РЕЙТИНГАХ

**Ю. Д. Коткова, И. Л. Каширина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассмотрены показатели эффективности финансово-экономического обеспечения и условий функционирования университетов, и проанализирована их связь с улучшением позиций вузов в международных рейтингах. Предложено использовать алгоритм машинного обучения, а именно алгоритм градиентного бустинга, для построения модели определения рейтинга университетов, при изучении особенностей оценки их эффективности финансово-экономического обеспечения и условий функционирования; для обоснования методов повышения позиций вуза в рейтингах и инструментария проведения подобных исследований.
**Ключевые слова:** конкурентоспособность, научно-образовательная деятельность вузов, оценочные показатели, международный рейтинг, качество высшего образования, алгоритмы оценки, градиентный бустинг.

## Введение

Сравнительный анализ научной и образовательной деятельности российских вузов по международным критериям показывает, что отечественное образование уступает университетским системам экономически развитых стран, но имеет потенциал повышения конкурентоспособности. Эффективное использование инновационного потенциала университетов предполагает реформирование сфер образования и науки, прежде всего, создание условий для исследований, интеграции научной и образовательной деятельности, укрепления сотрудничества между академической, образовательной наукой, промышленностью и бизнесом на основе соответствующей инновационной инфраструктуры. Система показателей, по которым известные мировые рейтинги оценивают научную и образовательную деятельность вузов, достаточно мобильна: она постоянно совершенствуется и обновляется с учетом текущих тенденций в науке и образовании, постоянных изменений рыночной среды, возрастающих требований работодателей к специалистам, растущих требований к образованию. Это дает возможность всесторонне проанализировать научную и образовательную деятельность вузов, повысить объективность оценивания, наиболее обоснованно выделить сильные и слабые стороны национальной системы высшего образования, определить ее место в мировом научно-образовательном пространстве [1].

## Методы исследования

Современный системный подход к разработке новых алгоритмов исследования эффективности финансово-экономического обеспечения и условий функционирования университетов заключается не только в обеспечении мониторинга результативности финансового управления, но и в оценке эффективности этих алгоритмов. С быстрым развитием компьютерных технологий растет потребность в передаче больших объемов информационных ресурсов, что приводит к ужесточению требований к алгоритмам, особенно с точки зрения производительности и эффективности. На сегодняшний день не существует систематизированного набора показателей, которые могли бы характеризовать эффективность финансово-экономического обеспечения и условий функционирования университетов. Формализация модели оценки таких показателей позволяет разработчикам на ранних этапах проектирования сделать осознанный выбор алгоритма учета и аналитического управления этими объектами для эффективного осуществления учета и анализа.

В качестве инструментария такой оценки предлагается использовать методы машинного обучения. В частности, градиентный бустинг представляет собой мощное семейство методов машинного обучения, которое показало значительный успех в широком диапазоне практических применений. Например, один из представителей данного семейства XGBoost набрал большую популярность среди команд-победителей ряда конкурсов по анализу данных.

Основная идея градиентного бустинга заключается в последовательном построении композиции алгоритмов машинного обучения, когда каждый следующий алгоритм стремится компенсировать недостатки композиции всех предыдущих алгоритмов. Высокая гибкость алгоритма позволяет вводить различные изменения в дизайн метода, таким образом, делая метод подходящим для многих задач машинного обучения. Ниже представлено краткое описание метода.

Пусть $X = (x_i, ..., x_n)$ — обучающая выборка, где каждый объект описывается множеством признаков $F = (f_1, ..., f_d)$. Предположим, что каждый признак вещественный. $Y = (y_1, ..., y_n)$ — вектор ответов обучающей выборки. Будем искать зависимость $a_T(x): X \to Y$ в виде взвешенной суммы базовых алгоритмов:

$$a_T(x) = \sum_{t=0}^{T} y_t b_t(x), \tag{1}$$

где, каждый $b_t$ из некоторого множества базовых алгоритмов $A$.

Композицию будем строить путем «жадного наращивания», поэтапно увеличивая количество базовых алгоритмов. На каждом шаге $1 \le t \le T$ будем предполагать, что уже построен алгоритм $a_{t-1}(x)$, и хотим выбрать следующий базовый алгоритм $b_t(x)$ так, чтобы как можно сильнее уменьшить функционал ошибки $Q$:

$$a_t(x) = a_{t-1}(x) + \gamma_t b_t(x) \tag{2}$$

$$Q(a_t, X) = \sum_{t=1}^{n} L(y_t, a_{t-1}(x_t) + \gamma_t b_t(x_t)) \to \min, \tag{3}$$

где $L(y,z)$ — некоторая дифференцируемая функция потерь, которая выбирается в зависимости от типа задачи: в задачах регрессии это обычно квадратичная, а в случае классификации логистическая функция потерь. В итоге нам необходимо решить задачу минимизации в $n$-м пространстве для вещественного функционала $Q$, которая зависит от точек $\{a_T(x_i)\}$. Для решения сделаем один шаг градиентного спуска, двигаясь в сторону антиградиента $\{-g_t(x)\}$:

$$g_t(x) = [\frac{\partial L(y.f(x))}{\partial f(x)}]_{f(x)=a_{t-1}(x)}. \tag{4}$$

Таким образом, нашу оптимизационную задачу можно заменить на классическую задачу обучения по прецедентам с обучающей выборкой $\{(x_i, -g_t(x_i))\}_{i=1}^{n}$, которую можно решить с помощью метода наименьших квадратов:

$$b_t(x) = \arg\min_{b \ni A} \sum_{t=1}^{n} [-g_t(x_t) - b(x_t)]^2. \tag{5}$$

После того, как нашли новый алгоритм $b(x_t)$, линейным поиском можно подобрать коэффициент при нем:

$$\gamma_n = \arg\min_{\gamma \in R} \sum_{t=1}^{T} L(y_t, a_{t-1}(x_t) + \gamma b_t(x_t)). \tag{6}$$

В качестве базовых моделей в градиентном бустинге используются решающие деревья регрессии.

Обычно в качестве базовых алгоритмов используются так называемые «слабые» модели. К их числу относятся неглубокие деревья решений, строящиеся жадным способом. Одним из главных недостатков которого является необратимость ущерба, причиненного неправильным решением: как только был выбран признак для разделения объектов в определенном узле, не существует способа для возврата и выбора другого признака, то есть метод сходится к локально оптимальному решению в каждом узле. Кроме того, жадные алгоритмы требуют определенного количества времени и, если имеется возможность задействовать простаивающий вычислительный ресурс, не в состоянии произвести лучшее дерево.

Для практической реализации градиентного бустинга могут использоваться различные Python-библиотеки, которые отличаются друг от друга реализацией алгоритма построения деревьев. Метод XGBoost был первым, который попытался улучшить время обучения градиентного бустинга, а затем появились библиотеки LightGBM и CatBoost, каждая со своими собственными методами, в основном отличающиеся механизмами расщепления. В табл. 1 представлена сравнительная характеристика алгоритмов градиентного бустинга.

Таблица 1

*Сравнительная характеристика алгоритмов градиентного бустинга*

| | **XGBoost** | **LightGBM** | **CatBoost** |
|---|---|---|---|
| Основная характеристика | XGBoost обладает высокой предсказательной способностью и работает почти в 10 раз быстрее, чем другие методы машинного обучения. Он также включает в себя различные регуляризации, которые уменьшают переобучение и улучшают общую производительность. | Структура градиентного бустинга, выращивает дерево вертикально, в то время как XGBoost выращивает деревья горизонтально. То есть LightGBM растет по листьям дерева, а другой алгоритм растет по уровням. | Может автоматически обрабатывать категориальные переменные, при этом ненуждаться в обширной предварительной обработке данных, как другие алгоритмы машинного обучения. |
| Преимущества метода | • обработка разреженных данных: пропущенные значения или этапы обработки данных, такие как one-hot кодирование, делают данные разреженными. XGBoost использует алгоритм поиска разбиения с учетом разреженности для обработки различных типов паттернов разреженности в данных;<br>• блок-структура для параллельного обучения: для более быстрых вычислений XGBoost может использовать несколько ядер на CPU. Это возможно из-за блочной структуры в его системном проектировании. | • LightGBM использует алгоритмы на основе гистограмм, которые преобразуют непрерывные значения признаков в дискретные. Это ускоряет обучение, уменьшает расход памятии увеличивает эффективность;<br>• лучшая точность, чем любой другой алгоритм бустинга: создает намного более сложные деревья, следуя принципу разделения по листьям. Однако, иногда это может привести к переобучению. | • поддержка категориальных признаков;<br>• CatBoost не требует какой-либо предварительной обработки для преобразования категорий в числа.<br>• на маленьких наборах данных градиентный бустинг быстро переобучается. В Catboost есть специальная модификация для таких случаев;<br>• быстрое и простое в использовании обучение на GPU. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | • внеядерные вычисления: эта функция оптимизирует доступное дисковое пространство и максимизирует его использование при обработке огромных наборов данных, которые не помещаются в память. | • совместимость с большими наборами данных: способен одинаково хорошо работать с большими наборами данных при значительном сокращении времени обучения;<br>• поддерживается параллельное обучение. | |

**Результаты исследования**

Формализованная модель оценки эффективности экономического обеспечения и условий функционирования университетов может быть описана следующим образом: на основе статистических показателей эффективности деятельности вуза прогнозируется попадание вуза, входившего в программу 5-100, в международные рейтинги и анализируется, какие из показателей оказывают на это существенное значение.

Показатели оценки условий функционирования университетов взяты с сайта мониторинга эффективности деятельности образовательных организаций высшего образования (http://indicators.miccedu.ru/monitoring) и включают 64 различных показателя в динамике за 2014–2019 годы. Данный набор показателей дополнен значениями ежегодного субсидирования вуза по программе 5–100 за данный период.

Перед построением моделей проверим корреляцию между входными и выходными признаками. Нас интересует отрицательная корреляция показателей эффективности с рейтингами, так как в этом случае чем выше значение показателя, тем меньше номер позиции вуза в рейтинге (то есть тем выше его рейтинг). На рис. 1 представлена корреляция между финансированием вуза из программы 5–100 и его позицией в двух наиболее важных рейтингах — QS и QS: BRICS.

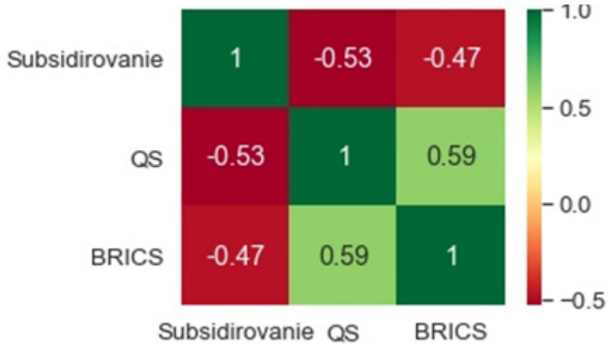



*Рис. 1. Корреляция между финансированием и позицией в рейтинге*

Далее были выделены признаки, значение корреляции для которых хотя бы с одним признаком из «Позиция в QS» или «Позиция в QS: BRICS» по модулю больше 0,3, на рис. 2 представлена корреляционная таблица для этих признаков. Нумерация признаков соответствует нумерации на сайте http://indicators.miccedu.ru/monitoring.

Самая большая по модулю отрицательная корреляция позиций вуза в обоих рейтингах оказалась с показателями 2.4 (Число публикаций организации, индексируемых в информационно-аналитической системе научного цитирования Web of Science Core Collection, в расчете на 100 НПР) и 2.5 (Число публикаций организации, индексируемых в информационно-аналитической системе научного цитирования Scopus, в расчете на 100 НПР). Отметим еще достаточно высокую по модулю корреляцию позиций в рейтингах с признаками 1.1

(Средний балл ЕГЭ студентов, принятых по результатам ЕГЭ на обучение по очной форме по программам бакалавриата и специалитета за счет средств бюджета), 2.1 (Количество цитирований публикаций, изданных за последние 5 лет, индексируемых в информационно-аналитической системе научного цитирования Web of Science в расчете на 100 НПР) и 3.9 (Численность зарубежных ведущих профессоров, преподавателей и исследователей, работающих в образовательной организации не менее 1 семестра).

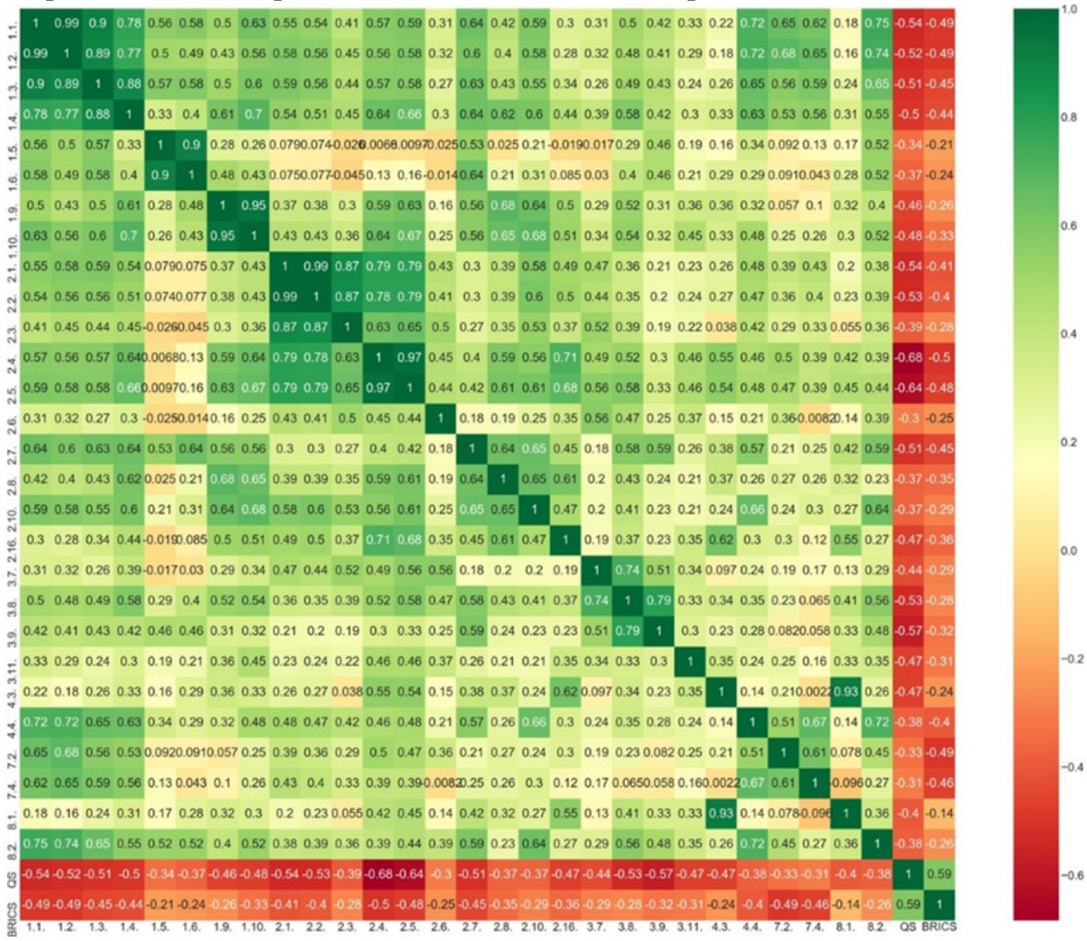



*Рис. 2. Корреляция для значимых показателей*

Далее для построения модели оценки эффективности экономического обеспечения и условий функционирования университетов была обучена модель градиентного бустинга (с этой целью использовалась библиотека XGBoost, метод XGBRegressor). Точность модели по метрике RMSE для показателя QS составила на обучающей выборке 0,0527, на тестовой 0,078. В качестве обучающей выборки использовались данные за 2014–2018 гг., в качестве тестовой — 2019 г.

На рис. 3 представлена диаграмма значимости признаков, в котором отражаются частота их использования в модели прогнозирования рейтинга QS. Как видно из рис. 2, наибольший вклад в значение рейтинга согласно модели XGBoost вкладывает признак 1.1 (Средний балл ЕГЭ студентов, принятых по результатам ЕГЭ на обучение по очной форме по программам бакалавриата и специалитета за счет средств соответствующих бюджетов бюджетной системы РФ). На втором месте по значимости (с большим отрывом) признак 2.4 (Число публикаций организации, индексируемых в информационно-аналитической системе научного цитирования Web of Science, в расчете на 100 НПР). Интересно, что субсидирование оказалось одним из самых малозначимых признаков.

Далее аналогичная модель была построена для рейтинга QS: BRICS. Для нее также было проведено исследование значимости признаков, и также, как и в предыдущем случае, наибольший вклад дает признак 1.1. Но на втором месте уже идет 1.13 (Численность аспирантов). На рис. 4 представлена диаграмма значимости признаков, в котором отражаются частота их использования в модели прогнозирования рейтинга QS: BRICS.

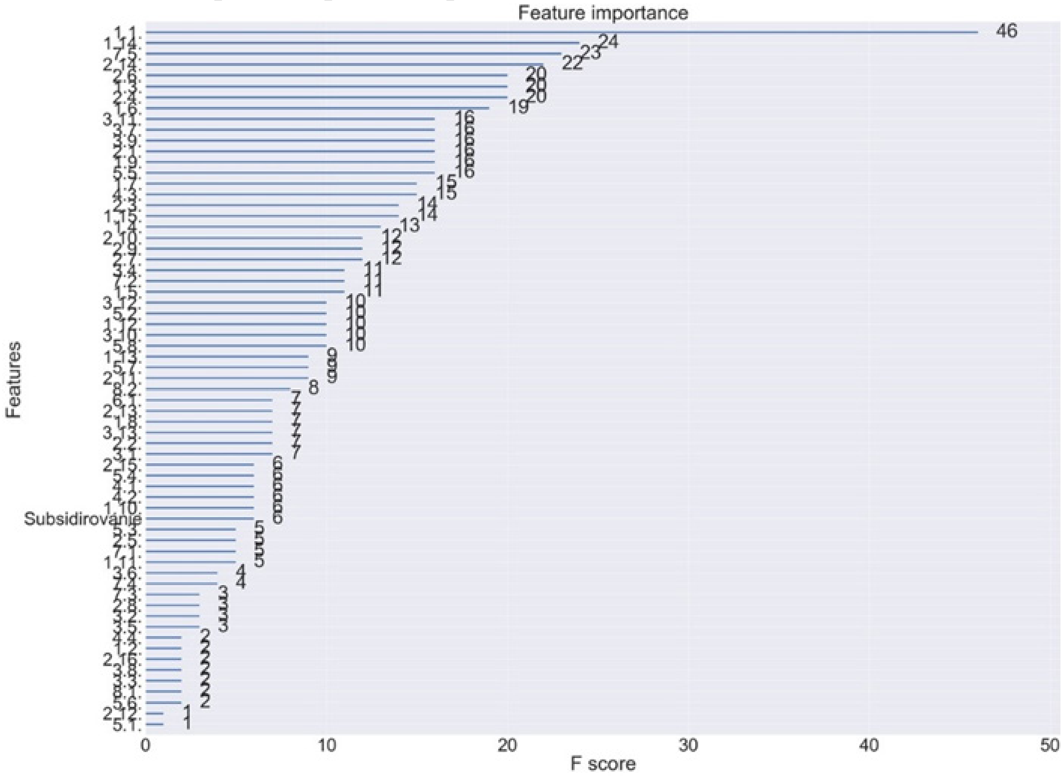



*Рис. 3. Диаграмма значимости признаков в модели прогнозирования рейтинга QS*

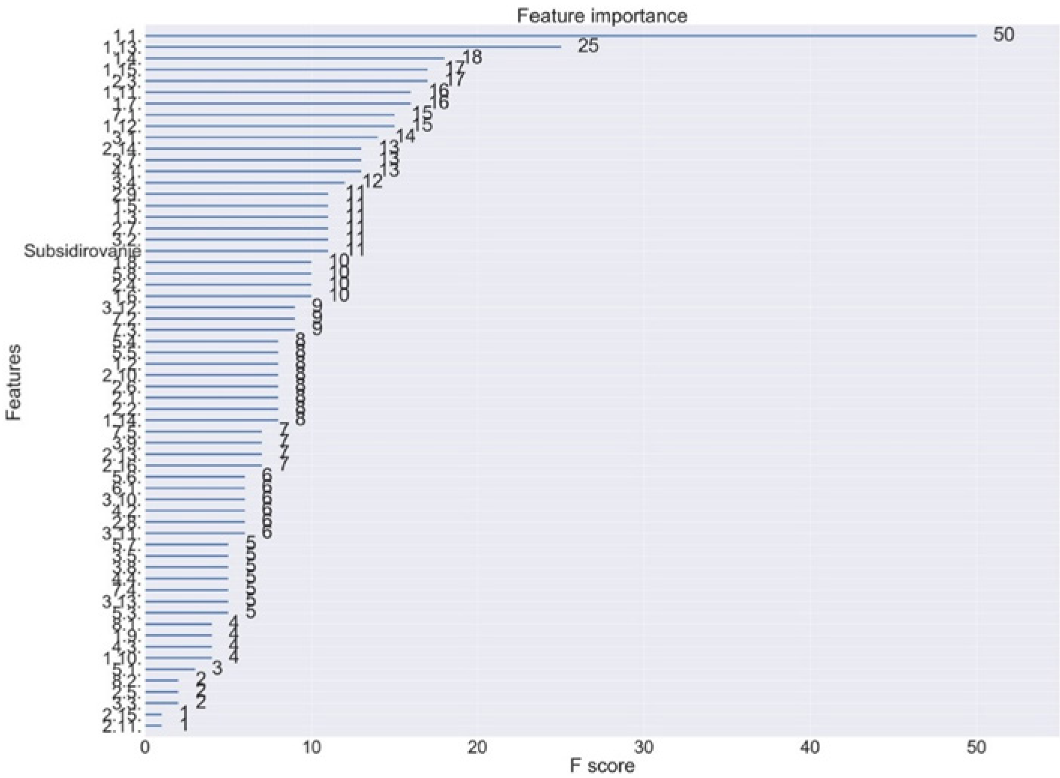



*Рис. 4. Диаграмма значимости признаков в модели прогнозирования рейтинга QS: BRICS*

Заметим, что субсидирование имеет большее значение для рейтинга QS: BRICS, чем для рейтинга QS.

Далее с целью проведения сравнительного анализа модель оценки эффективности экономического обеспечения и условий функционирования университетов была построена с использованием библиотек CatBoost и LightGBM. В табл. 2 представлены результаты полученных моделей.

Таблица 2

*Сравнение RMSE и наиболее информативных признаков*

| **Модель** | **Рейтинг** | **Обучающая/Тестовая выборка** | **RMSE** | **Наиболее информативные признаки** |
|---|---|---|---|---|
| XGBoost | QS | Обучающая | 0,053 | 1.1, 1.14, 7.5, 2.14 |
| | | Тестовая | 0,078 | |
| | BRICS | Обучающая | 0,052 | 1.1, 1.13, 1.4, 1.15 |
| | | Тестовая | 0,061 | |
| LightGBM | QS | Обучающая | 0,143 | 1.14,3.13, 2.12, 3.10 |
| | | Тестовая | 0,153 | |
| | BRICS | Обучающая | 0,145 | 5.1, 3.9, 1.11, 5.7 |
| | | Тестовая | 0,105 | |
| CatBoost | QS | Обучающая | 0,002 | 3.9, 1.6, 3.7, 2.4 |
| | | Тестовая | 0,0015 | |
| | BRICS | Обучающая | 0,0004 | 2.7, 1.13, 2.8, Субсидирование |
| | | Тестовая | 0,0003 | |

Модель с наименьшим значением ошибки RMSE — CatBoost. На рис. 5. представлена диаграмма значимости признаков для прогнозирования рейтинга QS: BRICS в модели CatBoost.

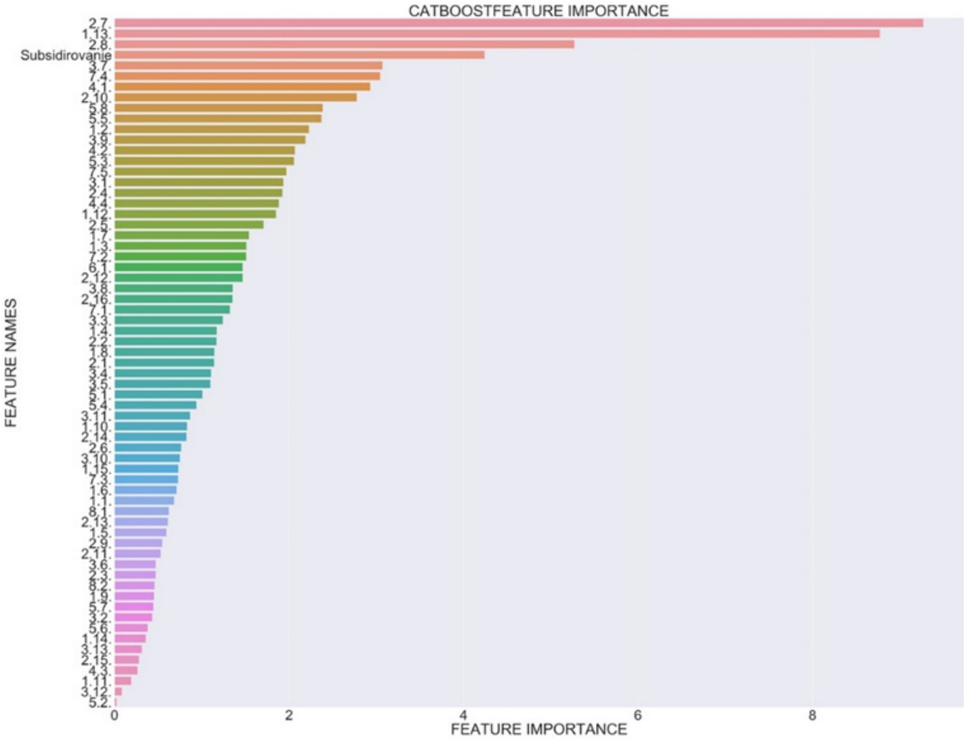



*Рис. 5. Значимость признаков для прогнозирования рейтинга QS: BRICS в модели CatBoost*

Только эта модель в качестве одного из самых информативных признаков отобрала признак «Субсидирование». Остальные отобранные признаки, например, 2.7 (Общий объем научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ), 3.9 (Численность зарубежных ведущих профессоров, преподавателей и исследователей, работающих в образовательной организации не менее 1 семестра), 1.13 (Численность аспирантов) и 1.6 (Численность студентов, победителей и призеров олимпиад школьников, принятых на очную форму обучения на первый курс) также вполне обоснованно могут влиять на позицию ВУЗа в мировых рейтингах. А параметры, отобранные моделью LightGBM, менее походят на признаки, влияющие на мировой рейтинг.

## Заключение

Предлагаемый подход позволяет оценить эффективность функционирования университетов на основе использования метода градиентного бустинга. Полученные алгоритмы могут находить статистические взаимосвязи между входными характеристиками и выходными результатами. Использование показателей эффективности для установления взаимосвязи между составляющими исследования позволяет построить математические модели для улучшения позиций вуза в международных рейтингах.

Преимущество разработанного подхода заключается в том, что он учитывает не только данные, полученные в результате функционирования системы учета и анализа каждого конкретного субъекта, оказывающего услуги в сфере высшего образования. Информационное обеспечение разработанной модели также включает статистические данные, полученные вне учетно-аналитического обеспечения высших учебных заведений, входящих в систему статистического учета. Благодаря такому подходу оценка эффективности финансово-экономического обеспечения и условий функционирования университета становится более прагматичной и учитывает существующие тенденции развития высшего образования.

## Литература

1. *Ахунов Р. Р., Зулькарнай И. У., Ислакаева Г. Р.* Показатели рейтингов – ориентир для развития вузов // Высшее образование сегодня. – 2018. – № 4. – С. 5–10.

2. *Канищев В. В., Котенев Д. Д.* Исследование применимости различных алгоритмов машинного обучения для предсказания успеха выпускаемой видеоигры // Вопросы науки и образования. – 2018. – № 7 (19). – С. 78–81.

УДК 510.67:554

# КЛЕТОЧНО-АВТОМАТНОЕ И КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МИГРАЦИИ ПРИМЕСИ

**Н. С. Кочкин, А. В. Павлова, С. Е. Рубцов**

*Кубанский государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрены различные подходы к моделированию процессов рассеяния и миграции примеси: клеточно-автоматный и конечно-разностный с использованием явной и неявной схем. Реализована 3D КА-модель, имитирующая диффузию в пространстве. Автомат функционирует в двухтактном синхронном режиме. Для моделирования процесса диффузии-конвекции в алгоритм работы КА введен третий такт, отвечающий за перемещение частиц под действием ветра. Для клеточного автомата проведена настройка в соответствии с результатами расчетов по явной и неявной разностным схемам для начально-граничной задачи первого рода в параллелепипеде. Проведена сравнительная оценка временных затрат.

**Ключевые слова:** клеточный автомат, диффузия с окрестностью Марголуса, разностная схема, метод расщепления.

## Введение

Результаты исследований в области диффузии субстанций востребованы при решении целого ряда научных и практических задач. Так, проблемы оценки экологической нагрузки на территории, подверженные воздействиям загрязняющих веществ, требуют развития методов расчета характеристик распространения и осаждения примесей от различных источников. Интенсивное использования природных ресурсов, загрязнение биосферы токсичными веществами и такие разрушительные явления как пожары, одним из негативных последствий которых является интенсивное массовыделение, приводят к загрязнению воздушного бассейна и представляют угрозу окружающей среде.

Эффективные математические модели переноса загрязнителей в атмосфере позволяют прогнозировать их пространственно-временное распределение и решать проблемы блокирования их распространения. Широко используемым математическим инструментом решения задач конвекции-диффузии в атмосфере и водной среде являются конечно-разностные методы [1, 2]. Но анализ исследований и публикаций по моделированию различных процессов окружающей среды, в том числе связанных с проблемами миграции загрязняющих примесей, демонстрирует растущий интерес к применению дискретных клеточно-автоматных (КА) [3–6 и др.] подходов, а также гибридных моделей.

В настоящей работе рассмотрены различные подходы к моделированию процессов рассеяния и миграции примеси: клеточно-автоматный и конечно-разностный с использованием явной и неявной схем. Реализована 3D КА-модель, имитирующая диффузию в пространстве. Для клеточного автомата проведена настройка в соответствии с результатами расчетов по явной и неявной схемам для начально-граничной задачи первого рода в параллелепипеде. Проведена сравнительная оценка временных затрат.

## 1. Построение 3D клеточного автомата, имитирующего диффузию и перенос

Метод конечных разностей или метод сеток — эффективный метод численного решения задач математической физики, моделирующих, в том числе диффузионный процесс в пространстве [1, 2]. Для сведения пространственной задачи в дифференциальной формулировке к конечной системе уравнений, численное решение которых легко реализуется на вычислительных машинах, вводится сеточная область. Временной интервал разбивается на элементарные и применяется метод расщепления.

С другой стороны на сегодняшний день для моделирования различных физических процессов активно используют клеточные автоматы. Они получили широкое применение в моделировании пространственно-распределенных динамических систем, прототипами которых являются физические системы [3–6 и др.].

В работе рассмотрены различные методы моделирования процесса диффузии: клеточно-автоматный и конечно-разностный с использование явной и неявной схем. Реализована 3D диффузионная КА-модель, имитирующая диффузию в пространстве.

Выбран модифицированный 3D вариант КА-модели диффузии с окрестностью Марголуса (ТМ-диффузия) [4]. Пространственный клеточный автомат представляет собой трехмерную сетку, разделенную на четные и нечетные блоки. Элементарный блок, приведенный на рис. 1, состоит из восьми ячеек, каждая из которых характеризует некоторую область пространства. Автомат функционирует в двухтактном синхронном режиме.

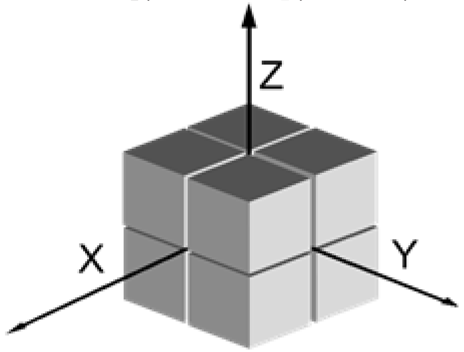


*Рис. 1 Представление блока в пространстве*

При этом предусмотрена возможность изменения вероятности поворота блоков клеточного автомата с целью вариации коэффициента диффузии. Собрана библиотека для платформы .NET, реализующая работу КА-модели, поддерживающая многопоточный подход вычислений.

Для моделирования процесса диффузии-конвекции в алгоритм работы КА введен третий такт, отвечающий за перемещение частиц под действием ветра с учетом их возможного столкновения. Для реализации ветра в алгоритме КА добавлена новая фаза — смещение.

Для примера будем полагать, что конвекция вводится вдоль плоскости $xOy$. Во время выполнения этой фазы к каждой клетке, занимаемой частицей, будет применяться действие ветра, задаваемое в полярных координатах: $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\sin\alpha$, где $v$ — скорость, а $\alpha$ — угол, задающий направление ветра. При моделировании ветра в КА смещение частицы примеси на одну клетку осуществляется по направлению ветра вдоль осей $Ox$ и $Oy$ с вероятностями $p_x$, $p_y$ соответственно, рассчитываемыми как отношение $p_x = \dfrac{v_x}{v_{\max}}$, $p_y = \dfrac{v_y}{v_{\max}}$.

Написана программа на системе построения клиентских приложений WPF для моделирования и визуализации трехмерного клеточного автомата диффузии в газах. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие работу клеточного автомата с одиночной и с несколькими областями загрязнения, а также при наличии ветра различной скорости. Произведено сравнение времени выполнении работы алгоритмов вычислений при различном количестве потоков.

## 2. Выбор разностной схемы и сравнение результатов

При решении пространственных задач диффузии с помощью конечно-разностного подхода остро встает вопрос о построении экономичных разностных схем. С помощью метода расщепления задачи, описывающие сложные физические процессы, приводятся к последовательности более простых задач, каждая из которых описывает только одну из сторон изучаемого процесса. Такой подход является наиболее удобным для математического моделирования физических процессов в сложных системах. Он дает возможность вводить в модель новые элементы, например, дополнить диффузию конвекцией или трансформацией загрязнителя. Проделать это можно, не изменяя структуры модели в целом, на уровне отдельных этапов расщепления.

Рассмотрена пространственная начально-граничная задача первого рода в параллелепипеде. Использована схема расщепления по координатам, основанная на разбиении расчетов на одном шаге по времени. Такая схема позволяет сохранить преимущества как явных схем (простой вычислительный алгоритм), так и неявных (возможность счета с большими значениями шага по времени) и лишена свойственных этим схемам недостатков. Для трех пространственных переменных применяются локально-одномерные схемы. Их построение основано на введении на каждом шаге по времени промежуточных этапов, на каждом из которых записывается одномерная аппроксимация по одному из пространственных направлений. Многомерная задача «расщепляется» на последовательность одномерных задач по каждой из координат. Для решения задачи создано приложение, выполняющее расчет пространственного распределения примеси на каждом временном слое и визуализирующее результаты, на языке Python.

Основная проблема построения клеточно-автоматов моделей физических процессов – создание КА с заданными свойствами. Для перехода от модельных величин к реальным и обратно необходимо подобрать масштабирующие коэффициенты. В работе [6] предлагается возможное решение проблемы определения таких коэффициентов, с помощью так называемых инвариантов КА-моделей (безразмерных характеристик процесса, не зависящих от способа его математического представления), позволяющих построить клеточный автомат по физическому описанию явления и интерпретировать результаты работы модели в привычных физических понятиях. В настоящей работе проведено сопоставление результатов эволюции КА диффузии с окрестностью Марголуса с данными конечно-разностной модели.

Для удобства интерпретации и анализа результатов работы моделей предусмотрена возможность перехода от булевых значений, полученных с помощью КА, к непрерывным функциям, описывающим поле концентрации примеси, с помощью процедуры осреднения по заданному радиусу

$$D_a = \frac{S}{(2r)^3}.$$

Осредненное значение (концентрация) $D_a$ вычисляется как отношение количества частиц $S$ в исследуемом пространстве к размеру этого пространства, определяемого радиусом осреднения $r$.

Реализованы линейный и распараллеленный варианты работы КА, при этом тестовые расчеты показали, что с ростом количества потоков, увеличивается скорость расчетов, но при отключенной визуализации, временные затраты на одну итерацию примерно одинаковы. Это значит, что параллельный алгоритм осреднения не дает существенного увеличения скорости для числа потоков больше двух, однако он значительно выигрывает по времени с ростом радиуса осреднения.

Выполнено сравнение результатов работы клеточного автомата с данными, полученными при помощи разностной схемы с расщеплением по координатам. Для клеточного автомата проведена настройка в соответствии с результатами расчетов по явной и неявной схемам для начально-граничной задачи первого рода в параллелепипеде. Проведена также сравнительная оценка временных затрат.

## Заключение

Результаты эволюции клеточного автомата в большей степени соответствуют результатам работы неявной схемы, т. е. один такт схемы Марголуса примерно равен выбранному шагу по времени неявной разностной схемы. При этом при проведении расчетов по неявной разностной схеме использовался метод расщепления по координатам. Однако, хотя КА и неявная схема синхронизированы по итерациям, КА-модель требует меньше времени, а также она менее ресурсозатратна.

Для настройки КА под явную схему было экспериментально подобрано соотношение количества итераций разностной схемы и тактов схемы Марголуса. Из полученных результатов можно сделать вывод, что расчеты по явной схеме требуют больше всего времени.

Начиная со сравнительно простой задачи, в дальнейшем в конечно-разностную модель будут введены дополнительные механизмы, описывающие трансформации загрязнителей и взаимодействие элементов многокомпонентных субстанций, что позволит настроить диффузионно-реакционные КА [5] для адекватной интерпретации результатов их работы.

**Благодарности**

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края (проект 19-41-230005 р_а).

**Литература**

1. *Алоян А. Е.* Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. – М. : Наука, 2008. – 415 с.

2. *Пененко В. В.* Модели и методы для задач охраны окружающей среды / В. В. Пененко, А. Е. Алоян. – Новосибирск: Наука, 1985. – 245 с.

3. *Bandman O. L.* A method for construction of cellular automata simulating pattern formation processes // Theoretical background of applied discrete mathematics. – 2010. – No 4. – P. 91–99.

4. *Weimar J.* Cellular automata for reactiondiffusion systems // Parallel Computing. –1997. – V. 23, No. 11. – P. 1699–1715.

5. *Рубцов С. Е.* Клеточно-автоматные модели диффузионно-реакционных процессов многокомпонентных примесей / С. Е. Рубцов, А. В. Павлова // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. – 2016. – № 6. – С. 55–60.

6. *Бандман О. Л.* Инварианты клеточно-автоматных моделей реакционно-диффузионных процессов // Прикладная дискретная математика. – 2012. – № 3(17). – С. 108–120.

УДК 681.1

# ПРОБЛЕМЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО УЧЕТА ПОТРЕБЛЕНИЯ ТЕПЛА В МНОГОКВАРТИРНОМ ДОМЕ

**А. В. Кузнецов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье сравниваются два основных типа средств измерения тепловой энергии, применяемых при расчетах с населением — теплосчетчики и распределители тепла. Кратко описаны физические принципы работы распределителей новейшего поколения — вычислителей тепла. Приводится список проблем, связанных с индивидуальным учетом потребления тепловой энергии в многоквартирном доме и рассматривается математическая постановка задачи для решения одной из этих проблем.
**Ключевые слова:** теплосчетчики, распределители тепла, вычислители тепла, уравнение теплопроводности.

## Введение

В наше время постоянного роста тарифов на все виды коммунальных услуг проблема справедливого распределения платы за коммунальную услугу между собственниками помещений в многоквартирном доме (МКД) как никогда актуальна. И если оплата за газо-, электро- и водоснабжение для каждого собственника рассчитывается относительно легко, то самая дорогая в условиях России услуга — теплоснабжение оплачивается, на взгляд автора, по абсолютно несправедливому принципу. В лучшем случае, если дом снабжен общедомовым прибором учета (ОДПУ) тепла, то расходы раскладываются на всех собственников пропорционально площади их помещений, при этом абсолютно не принимается во внимание количество радиаторов в помещении и были ли вообще радиаторы включены у конкретного собственника или нет. В худшем случае, расчет платы за теплоснабжение рассчитывается исходя из нормативов неясной физической природы.

Исключение составляет относительно небольшое количество домов с т.н. «горизонтальной разводкой отопления». В таких домах возможна установка индивидуального теплосчетчика в каждую квартиру. Индивидуальный теплосчетчик и ОДПУ (который также представляет собой теплосчетчик) представляют собой обыкновенные водосчетчики, снабженные дополнительно датчиками, определяющими температуру входящей и выходящей в систему отопления горячей воды (рис. 1).

Количество потребленной тепловой энергии рассчитывается тепловычислителем как

$$Q_i = k(\theta_2 - \theta_1)V_i,$$

где $Q_i$ — количество тепловой энергии, соответствующей $i$-му интервалу времени, $V_i$ — объем теплоносителя, учтенного расходомером в течение $i$-го интервала времени, $\theta_2$ — температура теплоносителя на входе, $\theta_1$ — для теплоносителя на выходе, $k$ — тепловой коэффициент, зависящий от свойств теплоносителя [1]. Соответственно, тепловая энергия, которая была отдана в течение $i = \overline{1,n}$ интервалов времени, вычисляется как

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i. \tag{1}$$

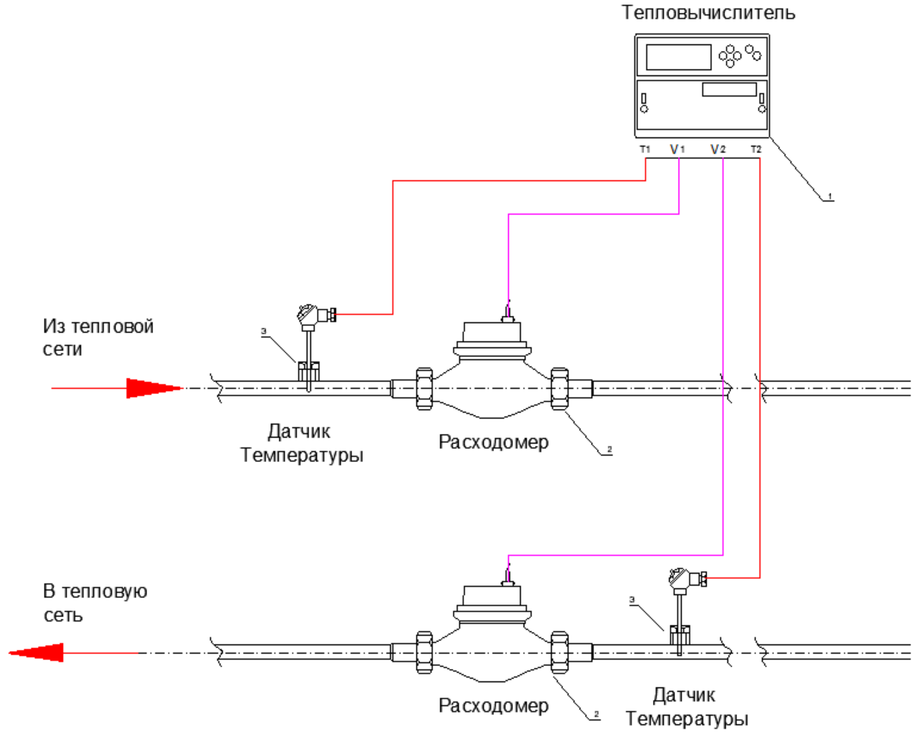



*Рис. 1. Схема теплосчетчика на базе тепловычислителя и двух импульсных счетчиков (https://eno-tek.ru/blog/teplo-blog/heatmeter-house)*

**2. Распределители и вычислители тепла**

Существует другой тип индивидуальных приборов учета — распределители тепла. Эти приборы состоят из нескольких датчиков (обычно двух) температуры, и такие приборы, в отличие от теплосчетчиков, технически можно поставить в любую систему отопления, независимо от типа разводки — вертикальной или горизонтальной. Проблема состоит в низком классе точности распределителей. Из-за этого, показания обычного распределителя можно учитывать, только когда распределители установлены в значительном количестве помещений и по этой же причине обычный распределитель выводит показания не в кВт·ч, а в условных единицах.

Распределители были созданы в 1917 г. как вспомогательные приборы для определения потребления тепловой энергии. Такие приборы изначально состояли из теплопроводника с прикрепленной к нему наполненной жидкостью ампулой, открытой для испарения, и основывались на принципе зависимости интенсивности испарения жидкости от изменения, воздействующей на нее температуры. Эти «распределители-испарители» получили широкое распространение в западной Европе в 70-е годы прошлого века во время нефтяного кризиса и используются там по сей день. Величина испарения один раз в год визуально по градуированной шкале снимается оператором, и значение вместе с информацией об отопительном приборе вручную вносится во внешние расчетные программы, где данные показания умножаются на полученные при лабораторных испытаниях поправочные коэффициенты, зависящие от типа радиатора, способа крепления распределителей и других параметров.

Так как эти приборы имели множество технических недостатков — не могли учитывать нелинейное соотношение между температурой отопительного прибора, его теплоотдачей и испарением жидкости, испарение жидкости вне отопительного сезона и др. Полученное после расчетов оцененное значение имело значительную ошибку в отношении к фактическому теплопотреблению. Поэтому данные приборы служили исключительно для распределения общих затрат на отопление дома между арендаторами и собственниками квартир. Отсюда и название — «распределители затрат на отопление». Такие распределители действительно по причине отсутствия как измерительных, так и вычислительных компонентов не смогли считать тепловую энергию с заданной удовлетворительной точностью. Требовались услуги по проведению ежегодных перерасчетов индивидуальных показаний по общедомовым приборам учета с применением поправочных коэффициентов, которые производились специализированными биллинговыми компаниями.

Ситуация кардинально изменилась с выпуском и массовым внедрением электронных распределителей начиная с 80-х годов прошлого века (рис. 2). В отличие от «распределителей-испарителей» у таких приборов появились измерительные части (встроенные датчики измерения температуры поверхности отопительного прибора и воздуха), микроконтроллер и дисплей. Эти приборы работали от автономного источника питания, имели функцию архивации данных и позднее — возможность дистанционной передачи данных по радиоканалу. Физическая сущность измерения количества тепловой энергии у распределителей следующая [2]. Первоначально, в $i$-й интервал времени по температуре на поверхности теплового прибора $\theta_{HS}$, температуре воздуха в комнате $\theta_{RS}$ приблизительно вычисляется т.н. логарифмическая избыточная температура

$$\Delta\theta_i \approx k_{sys}(\theta_{HS} - \theta_{RS}).$$

Калибровочный коэффициент $k_{sys}$ зависит от конструкции конкретного распределителя и необходим для учета отклонения полученных при измерении температур теплоносителя и воздуха от фактических. Затем рассчитывается тепловая мощность в $i$-й интервал времени продолжительностью $\Delta t$

$$Q_i = \dot{Q}_N (\Delta\theta_i)^n \Delta t. \tag{2}$$

Здесь $\dot{Q}_N$ — это эталонная мощность теплового прибора, а $n$ — тепловая экспонента. Данные параметры определяются изготовителем прибора при испытаниях в стандартных условиях, например, в соответствии со стандартом EN 442, и публикуются. Наконец, как и в случае с теплосчетчиком, тепловая мощность за промежуток времени вычисляется как сумма (1). Однако, для точного расчета потребленного тепла обычный распеделитель использовать затруднительно — значения параметров $\dot{Q}_N$, $n$ и $k_{sys}$ меняются в зависимости от температуры теплоносителя или, например покрытия прибора полотенцами, или при уменьшении объема поступающего теплоносителя с помощью крана.

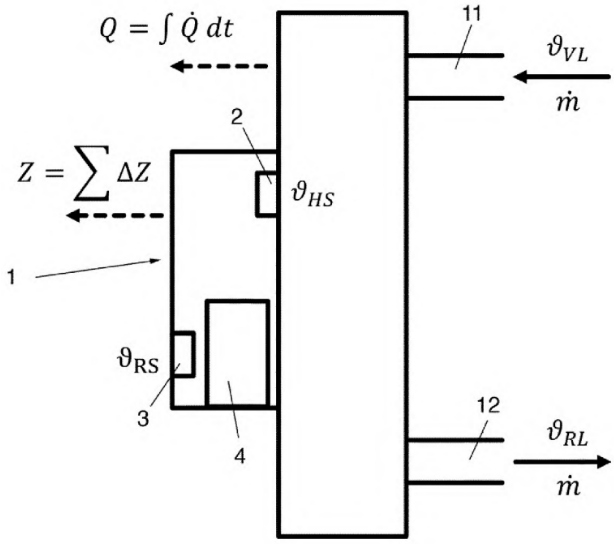



*Рис. 2. Схема вычислителя или распределителя тепла (1) с двумя датчиками (2, 3), установленного на тепловой прибор [2]*

Совсем недавно появился новый подкласс распределителей тепла — вычислители тепла. Это приборы существенно более высокой точности, чем обычный распределитель, они выводят показания в киловатт-часах (кВт·ч) и эти показания не нуждаются в коррекции с учетом показаний других вычислителей в других помещениях МКД. Точность достигается за счет того, что изготовители данного подкласса распределителей располагают базой данных поправочных коэффициентов, вычисляемых для отопительного прибора в ходе испытаний изготовителями вычислителей. Эти коэффициенты различны для разных значений разности температур $\theta_{HS}-\theta_{RS}$ и вместо соотношения (2) используется, по факту, соотношение

$$Q_i = \dot{Q}_N (\theta_{HS}-\theta_{RS})^{n_{korr}(\theta_{HS}-\theta_{RS})} \Delta t k_{korr} (\theta_{HS}-\theta_{RS}),$$

где $n_{korr}(\theta_{HS}-\theta_{RS})$ — скорректированная для данного значения разности температур поверхности прибора и воздуха $\theta_{HS}-\theta_{RS}$ тепловая экспонента, $k_{korr}(\theta_{HS}-\theta_{RS})$ — коэффициент устройства с учетом поправок для данного значения разности температур поверхности прибора и воздуха $\theta_{HS}-\theta_{RS}$.

Лидером рынка и создателем первого прибора такого класса в этой области является концерн «Techem», производящая вычислители тепловой энергии FHKV (dataIII, radio4) с двумя датчиками. Все расчеты производятся в самих вычислителях, что не нарушает принцип единства измерений и вычислений. Все приборы FHKV (dataIII, radio4) выпускаются в соответствии с Федеральным законом «Об обеспечении единства измерений» от 26.06.2008 № 102-ФЗ и производятся в полном соответствии с нормой EN834:2013 «Устройства для вычисления и распределения потребленной тепловой энергии от комнатных отопительных приборов. Устройства с автономным источником электроснабжения. Технические требования».

Вычислители FHKV (dataIII, radio4) выпускаются серийно с двумя калиброванными на производстве датчиками температуры. Вместе с тем в память каждого прибора при изготовлении зашиваются различные алгоритмы опознания манипуляции и защиты от несанкционированного доступа и искажения результатов измерений.

Так каждый вычислитель пломбируется при установке и дальнейшее вскрытие невозможно без повреждения пломбы, вычислители оснащены встроенным датчиком определения демонтажа, фиксирующим несанкционированный доступ.

В случае накрывания прибора тряпкой, фольгой или нагрева датчика температуры воздуха внешним источником тепловой энергии, вычислитель опознает такое резкое изменение температуры и автоматически переключается в «однодатчиковый» режим, то есть для вычисления разности температур и тепловой энергии применяется только измеренная температура отопительного прибора, а температура воздуха оценивается в 16 °C. Таким образом попытка манипуляции приводит к дополнительным затратам для нарушителя, так как в этом случае вычислитель считает больший расход тепла, исходя из более низкой температуры воздуха.

### 3. Проблемы применения ИПУ тепла

- Распределители всех типов не учитывают передачу тепла от стояков.
- Все ИПУ не учитывают передачу тепла стенами, полом и потолком от смежных помещений.
- Применение ИПУ не дает ответа на вопрос, как справедливо распределять расходы тепла на обогрев общедомовых помещений
- Применение ИПУ создает затруднение при распределении расходов, в случае если часть помещений оснащены ИПУ, а часть — нет.

Математически легко описать только вторую из перечисленных проблем, тогда как остальные относятся более к сфере политики и экономики. На рис. 3 изображены две смежные комнаты (плоские, для упрощения). Необходимо выяснить, как будет изменяться значение температуры $\theta(x,y,t)$ в комнате при изменении $Q_2$ и $Q_3$ и времени $t$. Особенно интересен случай, когда $Q_3 = 0$ (один из радиаторов выключен и одна квартира отапливается за счет другой) — как при этом увеличится $Q_2$ при необходимости поддерживать некоторую фиксированную температуру в левом помещении?

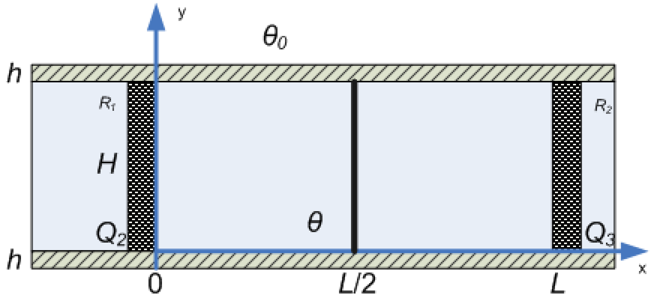



*Рис. 3. Схема двух помещений с отопительными приборами $R_1$ и $R_2$, передающих мощности $Q_2$ и $Q_3$, температура за пределами помещения — постоянная $\theta_0$*

Ситуация описывается стандартным уравнением теплопроводности, точнее, набором уравнений теплопроводности, описывающих распространение тепла от окружающей среды к наружным стенам, между помещением и внутренней стенкой и от отопительного прибора к воздуху помещения.

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta - \alpha^2 \Delta\theta = f,$$

где $\alpha$ — коэффициент температуропроводности соответствующей среды, $f$ — функция источников тепла. В самом грубом приближении, если предполагать, что тепло не уходит из помещения во внешнюю среду и что излучение отопительного прибора мало, задачу можно свести к трем одномерным начально-краевым задачам для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_1 - \alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta_1 = 0, \quad \theta_1(x,0) = 0, \quad \theta_1(0,t) = \mu_1(t), \quad \theta_1(l_1,t) = \mu_2(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_2 - \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta_2 = 0, \quad \theta_2(x,0) = 0, \quad \theta_2(l_1,t) = \mu_2(t), \quad \theta_2(l_2,t) = \mu_3(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_3 - \alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta_3 = 0, \quad \theta_3(x,0) = 0, \quad \theta_3(l_2,t) = \mu_3(t), \quad \theta_3(L,t) = \mu_4(t),$$

где $l_1$ — координата начала стенки между помещениями, $l_2$ — координата конца стенки между помещениями, $\alpha_1$ — коэффициент температуропроводности воздуха, $\alpha_2$ — коэффициент температуропроводности стенки, $\theta_1$, $\theta_3$ — функции, описывающие изменение температуры в первой и второй комнатах, $\theta_2$ — функция, описывающая изменение температуры стенки. Функции $\mu_1$, $\mu_4$ известны и соответствуют настройкам тепловых приборов $R_1$ и $R_2$, а функции $\mu_2$ и $\mu_3$ неизвестны и должны быть найдены из вышеприведенной системы уравнений. Данный подход отличается от расчета на основе уравнений теплового баланса в [3] использованием уравнений в частных производных, позволяющих исследовать динамику изменения температуры в помещениях в зависимости от изменения температуры отопительных приборов.

## Заключение

1. Распределители тепла регистрируют объем тепловой энергии, выделяемый отдельными отопительными приборами.

2. Большинство распределителей тепла регистрируют объем тепловой энергии со значительной ошибкой, достигающей 40–60 %.

3. Поэтому специалистами введено понятие условной безразмерной единицы тепловой энергии, отдаваемой отопительным прибором. В этом случае точность и справедливость расчетов за отопление обеспечивается только при оснащении 100 % помещений в МКД.

4. Распределители тепла с двумя датчиками температур поверхности отопительного прибора и воздуха в помещении при определенной модели занесенной в память распределителя тепла и значений коэффициентов коррекции, по измеряемым температурам отопительного прибора и воздуха, позволяют вычислять количество (объем) тепловой энергии в кВт·ч, отдаваемой отопительным прибором, с ошибкой 5–6 % на всем диапазоне массового расхода теплоносителя в отопительном приборе.

5. Распределитель тепла с точным вычислением количества отдаваемой отопительным прибором тепловой энергии называется специалистами вычислителем тепла и относится к индивидуальным приборам учета тепла. Они могут размещаться как в домах с вертикальной, так и с горизонтальной поквартирной разводкой труб отопления. В данном случае точность и справедливость расчетов за отопление в многоквартирном доме возможна и при оснащении одного помещения в МКД.

### Литература

1. ГОСТ Р ЕН 1434-1-2011 Теплосчетчики. Часть 1. Общие требования. – М. : Стандартинформ, 2019. – 28 с.

2. Patent EU EP3376122A1 Method and device for detecting the heat given off by a heating surface. Applicants Techem Energy Services GmbH. Inventors Klein, Joachim; Kähler, Arne. 19.09.2018. – URL: https://www.epo.org/

3. Влияние межквартирных перетоков тепла на температурный режим помещений. АВОК. Некоммерческое партнерство инженеров. 18.11.2019. – URL: https://www.abok.ru/news.php?id=4792

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ УСТЬЕВЫХ РАЙОНОВ

**А. И. Сухинов[1], И. Ю. Кузнецова[2], А. Е. Чистяков[1], Е. А. Проценко[3], В. Н. Литвинов[1,4]**

*[1]Донской государственный технический университет*
*[2]Южный Федеральный университет*
*[3]Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал)*
*Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)*
*[4]Азово-Черноморский инженерный институт*
*Донского государственного аграрного университета*

**Аннотация.** В работе приведено описание трехмерной математической модели гидродинамики, применяемой для расчета трехмерных полей вектора скорости движения водной среды в устьевых районах. Аппроксимация уравнений для расчета поля скорости движения водной среды по пространственным переменным выполнена на основе метода баланса с учетом коэффициентов заполненности контрольных областей, что позволяет учесть сложную геометрию береговой линии и дна и повысить точность расчетов. Приведено описание программного комплекса для моделирования гидродинамических процессов в устьевых районах. Приведены результаты работы данного комплекса на примере модельной задачи.
**Ключевые слова:** математическое моделирование, трехмерная модель гидродинамики, схемы расщепления по физическим процессам.

## Введение

Реализация масштабных инженерных проектов, направленных на обеспечение безопасности судоходства, требует прогнозирования заиления судоходных путей, а также предсказательного моделирования последствий техногенных катастроф. Например, катастрофический шторм в Керченском проливе в ноябре 2007 г. привел к крушению более чем 20 судов. Разливы нефти привели к загрязнению береговой линии и донных отложений нефтепродуктами и другими вредными веществами. Соединения нефтепродуктов в виде битумов и смол были обнаружены впоследствии на побережье Черного и Азовского морей, протяженностью более 200 км в 2008–2011 г. 24–25 сентября 2014 г. произошло затопление прибрежных районов Азовского моря вследствие штормового нагона, уровень воды в районе порта г. Таганрога (Ростовская область) поднялся более чем на 4 метра, что нанесло значительный урон экономике региона. Обмеление Азовского моря у берегов г. Таганрога и реки Дон в ноябре 2019 г. было связанно с малым количеством осадков в бассейнах рек, впадающих в Азовское море, и сильным ветром, отгоняющим воду от побережья. Длительный период времени наблюдается неблагоприятное перемещение донных отложений из устьевых районов реки Дон в западном направлении, приводящее к вытеснению традиционных видов флоры и фауны из восточной части Таганрогского залива, интенсивному цветению вод залива и размножению комара-звонца на обширных площадях Таганрогского залива.

Анализ существующих математических моделей гидрофизики показал, что многие из них ориентированы на использование моделей гидродинамики, не учитывающих сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, трение о дно и ветровые напряжения, турбулентный обмен, силу Кориолиса, стоки рек, испарение и др. Некоторые из разработанных в настоящий момент пространственно-трехмерных моделей гидрофизики реализованы в известных пакетах, например, MARS 3D, POM (Princeton Ocean Models), CHTDM (Climatic Hydro Termo Dynamic Model), NEMO (Nucleus for European Modeling of the Ocean). Океанологические модели хорошо себя зарекомендовали для моделирования гидродинамики водоемов с глубинами 50–100 м и более, но не могут использоваться для расчета полей течений на мелководье в случае, если глубина водоема сопоставима с длинами поверхностных волн. В океанологических моделях, как правило, используется гидростатическое приближение, которое не позволяет учитывать специфику мелководья – существенное влияние рельефа дна на волновое движение, за счет которого осуществляется турбулентный обмен в вертикальном направлении [1–3]. Океанологические модели зачастую используют сигма-координатную систему, которая недостаточно корректно описывает ускорение движения водного потока по вертикали при значительных перепадах глубин на мелководье, а также процесс осушения-затопления прибрежных участков при сгонно-нагонных явлениях, что является характерным для мелководных водоемов. Применение сеток с измененяемым количеством уровней сигма-координатной системы частично решает эту проблему. Для изучения движения микрочастиц в гидросфере можно использовать методы и средства математического моделирования с использованием равномерных прямоугольных сеток в виду их более широкого и универсального применения. Известно, что их использование может привести к возникновению погрешности решения модельных задач на границе расчетной области. Данный недостаток может быть устранен в значительной степени за счет использования метода частичной заполненности расчетных ячеек, что позволит повысить точность моделирования задач гидрофизики мелководных водоемов [4]. Алгоритм расчета, учитывающий частичную «заполненность» ячеек, лишен недостатка, связанного со ступенчатым представлением границы области на прямоугольной сетке [5].

В работе описана пространственно-трехмерная модель гидрофизических процессов в прибрежных системах и устьевых районах, учитывающая трение о дно, сложный рельеф дна и береговой линии, нелинейный характер микротурбулентного обмена по вертикальному направлению. Описан подход к аппроксимации рассматриваемой модели с учетом коэффициентов заполненности контрольных областей. Предлагаемая модель легла в основу разработанного программного комплекса, позволяющего более точно описывать гидродинамические процессы в устьевых районах. Приведены результаты работы программного комплекса на модельной задаче.

## 1. Постановка задачи гидродинамики

В основу разрабатываемой модели расчета трехмерных полей вектора скорости движения водной среды положена математическая модель гидродинамики мелководных водоемов [6]:

– уравнение движения (Навье — Стокса)

$$u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z = -\frac{1}{\rho}P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (\nu u'_z)'_z, \tag{1}$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho}P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\nu v'_z)'_z, \tag{2}$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho}P'_z + (\mu w'_x) + (\mu w'_y)'_y + (\nu w'_z)'_z + g, \tag{3}$$

– уравнение неразрывности в случае переменной плотности

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости; $P$ — полное гидродинамическое давление; $\rho$ — плотность водной среды; $\mu$, $\nu$ — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена; $g$ — ускорение свободного падения.

Система уравнений (1)–(4) рассматривается при следующем начальном условии

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0. \tag{5}$$

Краевые условия для уравнений (1)–(4):

– на входе

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0, \; P'_{\mathbf{n}} = 0, \tag{6}$$

– донная граница

$$\rho_v \mu \left(\mathbf{V}_\tau\right)'_{\mathbf{n}} = -\boldsymbol{\tau}, \; \mathbf{V}_{\mathbf{n}} = 0, \; P'_{\mathbf{n}} = 0 \tag{7}$$

– боковая граница

$$\left(\mathbf{V}_\tau\right)'_{\mathbf{n}} = 0, \; \mathbf{V}'_{\mathbf{n}} = 0, \; P'_{\mathbf{n}} = 0, \tag{8}$$

– верхняя граница

$$\rho_v \mu \left(\mathbf{V}_\tau\right)'_{\mathbf{n}} = -\boldsymbol{\tau}, \;\; w = -P'_t / \rho g, \; P'_{\mathbf{n}} = 0, \tag{9}$$

– на выходе (Керченский пролив)

$$P'_{\mathbf{n}} = 0, \; \mathbf{V}'_{\mathbf{n}} = 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{V}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{V}_\tau$ — нормальная и тангенциальная составляющие вектора скорости; $\mathbf{n}$ — вектор нормали; $\boldsymbol{\tau} = \left\{\tau_x, \tau_y, \tau_z\right\}$ — вектор тангенциального напряжения; $\rho_v$ — плотность взвеси.

На рис. 1 представлена геометрия (карта глубин) расчетной области.

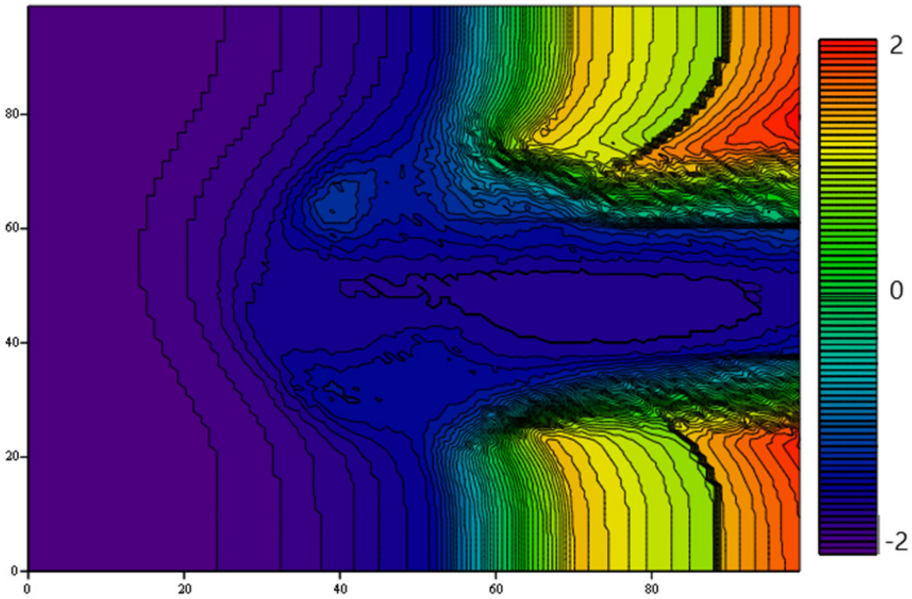



*Рис. 1. Карта глубин расчетной области*

Вектор тангенциального напряжения для свободной поверхности рассчитывается по формуле

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_a C d_s \left|\mathbf{w}\right| \mathbf{w},$$

где $\mathbf{w}$ — вектор скорости ветра относительно воды; $\rho_a$ — плотность атмосферы;

$Cd_s = 0.0026$ — безразмерный коэффициент поверхностного сопротивления, который зависит от скорости ветра и находится в диапазоне 0.0016-0.0032 [7].

Вектор тангенциального напряжения для дна имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = \rho C d_b \left|\mathbf{V}\right| \mathbf{V},$$

где $Cd_b = gk^2 / h^{1/3}$, $k$ — групповой коэффициент шероховатости в формуле Мэннинга, рассматривается в диапазоне 0.025–0.2, в процессе моделирования использовалось значение 0.025, обусловленное преимущественным покрытием дна Азовского моря илистыми отложениями; $h = H + \eta$ — глубина акватории, $H$ — глубина до невозмущенной поверхности, $\eta$ — высота свободной поверхности относительно геоида (уровень моря).

## 2. Схемы расщепления по физическим процессам для решения задач гидродинамики

Расчетная область вписана в параллелепипед. Для программной реализации трехмерной математической модели гидродинамики вводится равномерная сетка.

$$\overline{w}_h = \left\{ t^n = n\tau,\ \ x_i = ih_x,\ \ y_j = jh_y,\ z_k = kh_z;\ n = \overline{0..N_t},\ \ i = \overline{0..N_x},\ j = \overline{0..N_y},\ \ k = \overline{0..N_z}; \right.$$

$$\left. N_t\tau = T,\ \ N_x h_x = l_x,\ \ N_y h_y = l_y,\ \ N_z h_z = l_z \right\},$$

где $\tau$ — шаг по времени, $h_x$, $h_y$, $h_z$ — шаги по пространству, $N_t$ — количество временных слоев, $T$ — верхняя граница по времени, $N_x$, $N_y$, $N_z$ — количество узлов по пространству, $l_x$, $l_y$, $l_z$ — границы по пространству.

Согласно методу поправки к давлению, исходная модель гидродинамики разбивается на три подзадачи [8, 9]. Первая подзадача представлена уравнением диффузии — конвекции, при помощи которого вычисляются компоненты поля вектора скорости водного потока на промежуточном временном слое:

$$\frac{\tilde{u}-u}{\tau} + u\overline{u}'_x + v\overline{u}'_y + w\overline{u}'_z = (\mu\overline{u}'_x)'_x + (\mu\overline{u}'_y)'_y + (\nu\overline{u}'_z)'_z, \tag{11}$$

$$\frac{\tilde{v}-v}{\tau} + u\overline{v}'_x + v\overline{v}'_y + w\overline{v}'_z = (\mu\overline{v}'_x)'_x + (\mu\overline{v}'_y)'_y + (\nu\overline{v}'_z)'_z, \tag{12}$$

$$\frac{\tilde{w}-w}{\tau} + u\overline{w}'_x + v\overline{w}'_y + w\overline{w}'_z = (\mu\overline{w}'_x)'_x + (\mu\overline{w}'_y)'_y + (\nu\overline{w}'_z)'_z + g\left(\frac{\rho_0}{\rho}-1\right), \tag{13}$$

где $u, v, w$ — компоненты вектора скорости на предыдущем временном слое; $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ — компоненты вектора скорости на промежуточном временном слое; $\overline{u} = \sigma\tilde{u} + (1-\sigma)u,\ \ \sigma \in [0,1]$ — вес схемы.

Расчет распределения давлений (вторая подзадача) базируется на уравнении Пуассона

$$p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} = \frac{\widehat{\rho}-\rho}{\tau^2} + \frac{(\widehat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\widehat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\widehat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau}. \tag{14}$$

Третья подзадача позволяет по явным формулам определить распределение скоростей водного потока на следующем временном слое

$$\frac{\widehat{u}-\tilde{u}}{\tau} = -\frac{1}{\widehat{\rho}}p'_x,\ \ \frac{\widehat{v}-\tilde{v}}{\tau} = -\frac{1}{\widehat{\rho}}p'_y,\ \ \frac{\widehat{w}-\tilde{w}}{\tau} = -\frac{1}{\rho}p'_z, \tag{15}$$

где $\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}$ — компоненты вектора скорости на текущем временном слое.

Обозначим $o_{i,j,k}$ степень «заполненность» ячейки $(i, j, k)$. Степень заполненности ячейки задается давлением водного столба на дно данной ячейки. В общем случае степень заполненности ячеек рассчитывается исходя из выражения [4]:

$$o_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} + P_{i-1,j,k} + P_{i,j-1,k} + P_{i-1,j-1,k}}{4\rho g h_z}. \tag{16}$$

Аппроксимация задачи расчета поля скорости движения водной среды по пространственным переменным выполнена на основе метода баланса с учетом коэффициентов заполненности контрольных областей.

## 3. Программная реализация и результаты численных экспериментов

Для расчета трехмерных полей вектора скорости движения водной среды на языке программирования C++ разработан программный комплекс, учитывающий такие физические параметры как: турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, ветровые течения и трение о дно, и обеспечивает выполнение следующих функций:

– расчет поля скорости без учета давления;

– расчет гидростатического давления (используется в качестве начального приближения для гидродинамического давления);

– расчет гидродинамического давления;

– расчет трехмерного поля скорости.

В программном комплексе можно выделить следующие блоки:

– управляющий блок, в котором содержится цикл по временной координате и происходит вызов функций расчета поля скорости без учета давления, расчета гидростатического давления, расчета гидродинамического давления, расчета трехмерного поля скорости и вода–вывода данных;

– блок ввода начальных данных для расчета течений и давления, в котором задаются начальные распределения поля скорости и давления, а также координаты и значение водных потоков в устьевом районе;

– блок построения сеточных уравнений для поля скорости без учета давления в соответствии с конечно-разностной схемой;

– блок построения сеточных уравнений для поля давления в гидростатическом приближении;

– блок построения сеточных уравнений для поля гидродинамического давления;

– блок расчета поля скорости с учетом давления (результатом работы данного блока является расчет значений поля трехмерного вектора скоростей на следующем временном слое);

– блок расчета семидиагональных сеточных уравнений адаптивным попеременно-треугольным методом скорейшего спуска;

– блок расчета пятидиагональных сеточных уравнений адаптивным попеременно-треугольным методом скорейшего спуска;

– блок вывода значений поля скоростей в файлы.

Моделирование движения водной среды проводилось на сетке $100 \times 100 \times 40$. Параметры модели (1)–(10) задавались следующим образом: размеры шагов по горизонтальным координатам — 0.5 м, по вертикали — 0.1 м, размер шага по времени — 0.25 с. В процессе моделирования использовалось описание геометрии расчетной области в виде карты глубин, представленной на рис. 1.

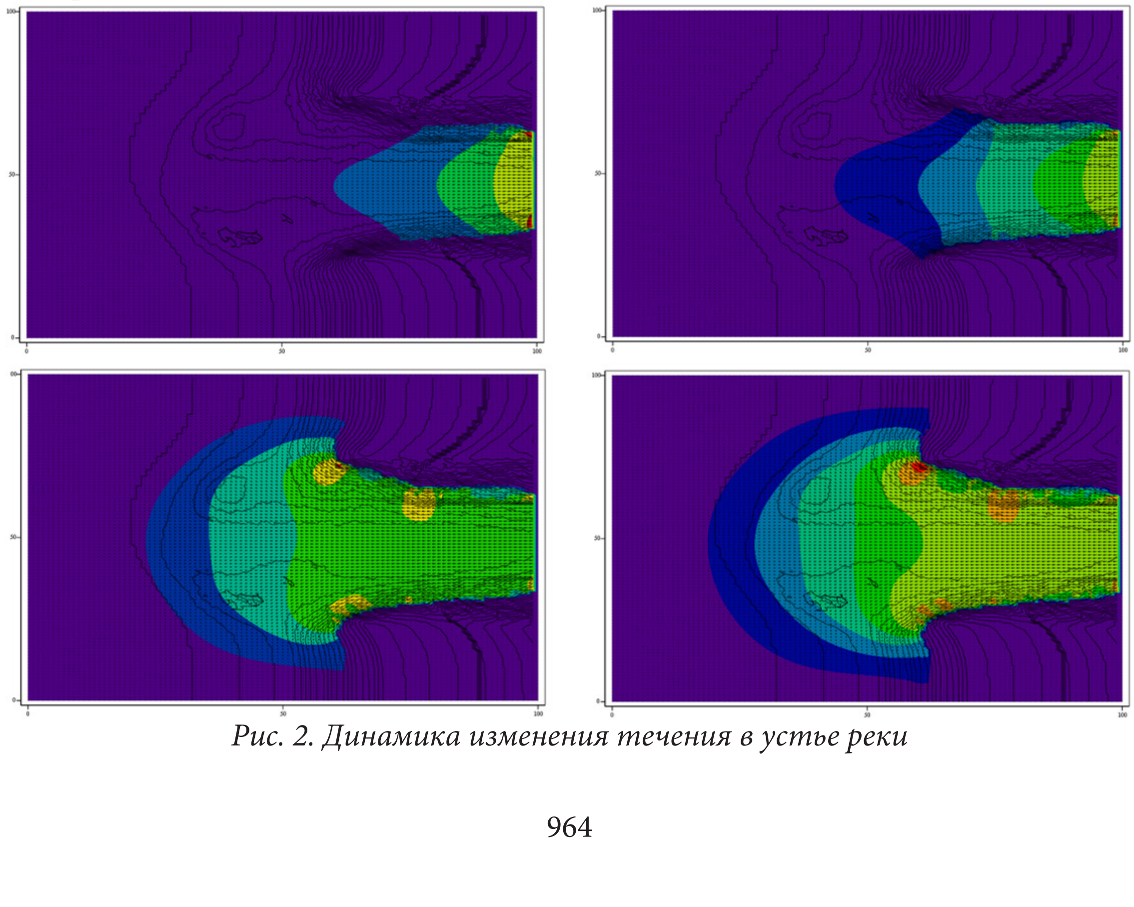


*Рис. 2. Динамика изменения течения в устье реки*

На рис. 2 представлены результаты работы программного комплекса по расчету трехмерных полей вектора скоростей водного потока в устьевом районе. Планируемые модификации программного комплекса позволят с высокой точностью описывать процессы смешения вод взаимосвязанных водоёмов, а также прогнозировать проникновение солёных вод в поймы рек.

**Заключение**

В работе представлена трехмерная модель гидродинамики устьевых районов, позволяющая получить трехмерные поля вектора скоростей водного потока. Аппроксимация задачи расчета поля скорости движения водной среды по пространственным переменным выполнена на основе метода баланса с учетом коэффициентов заполненности расчетных ячеек, что позволяет учесть сложную геометрию береговой линии и повысить тем самым точность моделирования. Для численного решения рассмотренной модели был разработан программный комплекс, включающий в себя функцию расчета поля скорости без учета давления; функции расчета гидростатического давления (используется в качестве начального приближения для гидродинамического давления) и расчета гидродинамического давления, а также функцию расчета трехмерного поля скорости. Приведены результаты работы описанного программного комплекса для моделирования динамики изменения течения в устьевом районе.

**Благодарности**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00623.

**Литература**

1. *Oliger, J.* Theoretical and practical aspects of some initial boundary-value problems in fluid dynamica SIAM / J. Oliger, A. Sundstorm // Journal on Applied Mathematics. – 1978. – V. 35. – P. 419–445.

2. *Marchesiello, P.* Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models / P. Marchesiello, J.C. Mc.Williams, A. Shchepetkin // Oceanic Modelling Journal. – 2001. – V. 3. – P. 1–20.

3. *Андросов, А. А.* Проливы мирового океана. Общий подход к моделированию / А. А. Андросов, Н. Е. Вольцингер. – Санкт-Петербург : Наука, 2005. – 171 с.

4. *Сухинов, А. И.* Предсказательное моделирование прибрежных гидрофизических процессов на многопроцессорной системе с использованием явных схем / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, А. В. Шишеня, Е. Ф. Тимофеева // Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30, № 3. – С. 83–100.

5. *Сухинов, А. И.* Метод учета заполненности ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Математическое моделирование. – 2019. – Т. 31, № 8. – С. 79–100.

6. *Белоцерковский, О. М.* Турбулентность. Новые подходы / О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, В. М. Чечеткин. – Москва : Наука, 2003. – 286 с.

7. *Alekseenko, E.* Coastal hydrodynamics in a windy lagoon / E. Alekseenko, B. Roux, A.I. Sukhinov, R. Kotarba, D. Fougere // Computers and Fluids. – 2013. – V. 77. – P. 24–35.

8. *Самарский, А. А.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : URSS, 2009. – 248 с.

9. *Коновалов, А. Н.* Метод скорейшего спуска с адаптивным попеременно-треугольным переобусловливателем / А. Н. Коновалов // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 953–963.

УДК 519.72

# ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СЕТЕВОГО ГРАФИКА НА ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

**М. Ю. Леденев, Т. В. Азарнова**

*Воронежский государственный университет*

## Введение

Среди существующих методов составления оптимальных планов и управления сложными комплексами работ, требующих участия большого количества исполнителей и затрат ограниченных ресурсов, большее значение имеют методы сетевого планирования. На их основе руководитель проекта имеет возможность системно представлять ход всех работ, может управлять процессом их реализации, а также маневрировать ресурсами [1].

Введем основные понятия сетевого моделирования, опираясь на [2, 3].

Под проектом понимается комплекс работ, которые выполняются в определенной последовательности и требуют для своего выполнения затрат времени и ресурсов. В рамках управления проектом особое значение имеет задача календарного планирования, решение которой позволяет определить моменты начала и окончания каждой работы, при условии, что реализация проекта начинается в фиксированный момент времени, а также определить время, необходимое для реализации проекта (критическое время).

Математической моделью проекта является сеть — бесконтурный, ориентированный граф, который иначе называется сетевым графиком. В сетевом графике каждой дуге соответствует работа, продолжительность которой определяет вес дуги. Каждая вершина — это событие, которое наступает, если завешаются все непосредственно предшествующие ему работы. Начальная вершина сетевого графика имеет только выходящие дуги, а конечная вершина — только входящие. Временные параметры проекта рассчитывается по сетевому графику на основе алгоритма нахождения максимального (критического) пути в бесконтурном графе, причем время, необходимое для реализации проекта, — это длина максимального пути из начального события сети в конечное. Данный алгоритм ориентирован на количественные оценки продолжительности работ. Однако, влияние фактора неопределенности приводит к необходимости использовать для задания продолжительностей работ интервальные и нечеткие числа [4]. Цель статьи заключается в представлении алгоритма определения временных параметров сетевого графика, который «работает» с интервальной информацией.

## 1. Арифметические операции над интервальными числами

Будем рассматривать нечеткие числа и нечеткие интервалы, заданные прямоугольными функциями принадлежности следующего вида [5]:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L(x), & a-l\le x<a,\\ 1, & a\le x\le b,\\ R(x), & b<x\le b+r,\\ 0, & \text{\textit{иначе}}; \end{cases}$$

где $L$ и $R$ — линейные функции, такие что $L(a-l)=R(b+r)=0,\ L(a)=R(b)=1;\ l,r$ — соответственно левый и правый коэффициенты неопределенности.

Если $a = b$, то получим собственно нечеткое число, и $a$ называется модальным значением. Если $a \neq b$, то $A$ с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ определяет нечеткий интервал. В дальнейших рассуждениях будем использовать термин «нечеткое число», подразумевая под ним и нечеткий интервал.

Для нечеткого множества $A$ $\alpha$-срезом называется обычное множество

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Если $A$ — нечеткое число, то $\alpha$-срез представляет собой промежуток $[l_\alpha, r_\alpha]$, где $l_\alpha$ — это корень уравнения $L(x) = \alpha$, $r_\alpha$ — корень уравнения $R(x) = \alpha$. Таким образом, перебирая последовательные значения $\alpha \in (0,1]$ с определенным шагом, нечеткое число можно представить совокупность $\alpha$-срезов, т. е. $A = \{([l_\alpha, r_\alpha]/\alpha)\}_{\alpha \in (0,1]}$ [5].

В интервальной арифметике различные промежутки с включенными или исключенными границами называют интервалами или интервальными числами.

Поскольку нечеткие числа можно представить в виде совокупности интервальных чисел, то важно определить операции над интервальными числами. Пусть $[a,b]$ и $[d,e]$ — интервальные числа, тогда определим арифметические операции над ними следующим образом [6]:

$$[a,b] + [d,e] = [a+d, b+e],$$
$$[a,b] - [d,e] = [a-e, b-d],$$
$$[a,b] \cdot [d,e] = [\min\{ad, ae, bd, be\}, \max\{ad, ae, bd, be\}],$$
$$\frac{[a,b]}{[d,e]} = \left[\min\left\{a/d, a/e, b/d, b/e\right\}, \max\left\{a/d, a/e, b/d, b/e\right\}\right].$$

## 2. Операции над нечеткими числами

Для определения нечетких операций над нечеткими числами существуют два подхода. Первый подход базируется на интервальной арифметике [6], а второй — на принципе обобщения [5, 6]. Рассмотрим первый подход. Пусть $A$ и $B$ — нечеткие числа, $A_\alpha$ и $B_\alpha$ — их $\alpha$-срезы, $*$ — символ арифметической операции, тогда для любых $\alpha \in (0,1]$ имеет место следующее определение:

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} (A * B)_\alpha,$$

где $(A * B)_\alpha = A_\alpha * B_\alpha$, $0 \notin B_\alpha$ для всех $\alpha \in (0,1]$.

Таким образом, арифметические операции над нечеткими числами сводятся к арифметическим операциям над соответствующими $\alpha$-срезами.

Теперь рассмотрим второй подход. Пусть $A$ и $B$ — нечеткие числа, $*$ — символ арифметической операции, тогда нечеткое число $A * B$ определяется функцией принадлежности [5, 6]

$$\mu_{A*B}(z) = \sup_{z = x*y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

На основе данной формулы определим

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, \quad \mu_{A-B}(z) = \sup_{z=x-y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

$$\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, \quad \mu_{A/B}(z) = \sup_{z=x/y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Рассмотрим пример. Пусть нечеткие числа $A$ (*приблизительно* 5) и $B$ (*приблизительно* 7) заданы значениями функций принадлежности на множестве точек

$$A = \{(2/0),(3/0.33),(4/0.66),(5/1),(6/0.5),(7/0)\},$$
$$B = \{(5/0),(6/0.5),(7/1),(8/0.66),(9/0.33),(10/0)\}.$$

Найдем их сумму. Для этого нужно определить все возможные суммы $x+y$. Вычисления представим в виде таблицы, в которой в каждом столбце в левой колонке стоит сумма $x+y$, а в правой — $\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$.

Таблица 1

*Вычисление функций принадлежности для всевозможных сумм $x+y$*

| | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 0 | 8 | 0 | 9 | 0 | 10 | 0 | 11 | 0 | 12 | 0 |
| 6 | 8 | 0 | 9 | 0.33 | 10 | 0.5 | 11 | 0.5 | 12 | 0.5 | 13 | 0 |
| 7 | 9 | 0 | 10 | 0.33 | 11 | 0.66 | 12 | 1 | 13 | 0.5 | 14 | 0 |
| 8 | 10 | 0 | 11 | 0.33 | 12 | 0.66 | 13 | 0.66 | 14 | 0.5 | 15 | 0 |
| 9 | 11 | 0 | 12 | 0.33 | 13 | 0.33 | 14 | 0.33 | 15 | 0.33 | 16 | 0 |
| 10 | 12 | 0 | 13 | 0 | 14 | 0 | 15 | 0 | 16 | 0 | 17 | 0 |

Теперь необходимо для каждого значения $x+y$ определить значение функции принадлежности. Для этого выбираем фиксированное значение $z = x+y$ и из всех полученных значений функции принадлежности выбираем максимальное значение. В таблице эти значения выделены серым цветом. По выделенным клеткам можно выписать результат

$$A+B = \{(7/0),(8/0),(9/0.33),(10/0.5),(11/0.66),(12/1),(13/0.66),$$
$$(14/0.5),(15/0.33),(16/0),(17/0).$$

Полученное нечеткое число можно интерпретировать как *приблизительно* 12.

При построении различных алгоритмов, помимо арифметических операций, требуется сравнивать нечеткие числа. Рассмотрим подход, основанный на принципе обобщения.

Известно, что множество действительных чисел линейно упорядочено, т. е. для заданной пары чисел $x$ и $y$ всегда можно установить одно из следующих отношений $x \geq y$ или $y \geq x$, а, следовательно, можно определить следующие две операции:

$$\min\{x, y\} = \begin{cases} x, \textit{ если } x \leq y, \\ y, \textit{ если } y \leq x, \end{cases} \qquad \max\{x, y\} = \begin{cases} y, \textit{ если } x \leq y, \\ x, \textit{ если } y \leq x. \end{cases}$$

Действуя на основе принципа обобщения, определим нечеткие числа

$$\mu_{\mathrm{MIN}(A,B)}(z) = \sup_{z=\min\{x,y\}} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$
$$\mu_{\mathrm{MAX}(A,B)}(z) = \sup_{z=\max\{x,y\}} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Найдем нечеткое число $\mathrm{MIN}(A,B)$ для предыдущего примера. Вычисления также будем производить в таблице.

$$A = \{(2/0),(3/0.33),(4/0.66),(5/1),(6/0.5),(7/0)\},$$
$$B = \{(5/0),(6/0.5),(7/1),(8/0.66),(9/0.33),(10/0)\}.$$

На основе расчетной таблицы получим нечеткое число (клетки можно выделить иначе)

$$\mathrm{MIN}(A,B) = \{(2/0),(3/0.33),(4/0.66),(5/1),(6/0.5),(7/0)\},$$

которое полностью совпадает с $A$.

Таблица 2

Вычисление функций принадлежности числа $\mathrm{MIN}(A, B)$

| | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 0 | 3 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 |
| 6 | 2 | 0 | 3 | 0.33 | 4 | 0.5 | 5 | 0.5 | 6 | 0.5 | 6 | 0 |
| 7 | 2 | 0 | 3 | 0.33 | 4 | 0.66 | 5 | 1 | 6 | 0.5 | 7 | 0 |
| 8 | 2 | 0 | 3 | 0.33 | 4 | 0.66 | 5 | 0.66 | 6 | 0.5 | 7 | 0 |
| 9 | 2 | 0 | 3 | 0.33 | 4 | 0.33 | 5 | 0.33 | 6 | 0.33 | 7 | 0 |
| 10 | 2 | 0 | 3 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 | 6 | 0 | 7 | 0 |

## 3. Алгоритм расчета временных параметров проекта на основе продолжительностей работ, заданных интервальными числами

Временные параметры сетевого графика позволяют составить календарный план реализации проекта. Пусть длина дуги соответствует продолжительности выполнения работы, тогда *временем наступления события* будем считать время окончания все работ, предшествующих данному событию, при этом предполагается, что работа над проектом начинается в момент времени, равный нулю.

Каждому событию $i$ можно поставить в соответствие следующие параметры:

$t_e(i)$ — *раннее время наступления i-го события* — время, раньше которого событие $i$ наступить не может, иначе не будут завершены работы, которые ему предшествуют;

$t_l(i)$ — *позднее время наступления i-го события* — время, позже которого событие $i$ наступить не должно, иначе увеличится время, необходимое для реализации проекта.

Зафиксируем событие $i$. Очевидно, что для его наступления необходимо, чтобы все работы, которые ему предшествуют, были завершены. Тогда раннее время $t_e(i)$ можно интерпретировать как длину максимального пути из исходного события в данное событие $i$.

Длина максимального пути из исходного события в завершающее — это время, необходимое для реализации всего проекта, так как время завершения всего комплекса работ не может быть меньше, чем суммарная продолжительность всех работ вдоль самого длинного пути. Это время называется *критическим* и обозначается $T_{\max}$. Сетевой график может иметь несколько критических путей. Все они имеют одинаковую длину $T_{\max}$.

Позднее время $t_l(i)$ наступления $i$-го события можно интерпретировать как разность между длиной критического пути и длиной критического пути из $i$-го события в завершающее событие сети.

Работы и события, принадлежащие критическому пути, также называются *критическими*. Особенность критических работ заключается в том, что они не имеют резервов времени, поэтому невыполнение срока окончания любой из критических работ приводит к увеличению критического времени $T_{\max}$. В связи с этим именно критические работы требуют бесперебойного обеспечения ресурсами и контроля за выполнением. Все остальные работы располагают определенными резервами времени.

Пусть продолжительности работ $t_{ij}$ заданы в форме интервальных чисел $\left[\underline{t}_{ij}, \overline{t}_{ij}\right]$. Поскольку классический алгоритм расчета временных параметров использует нулевые метки, то введем вырожденное интервальное число $[0,0]$. Изложим модифицированный алгоритм.

Шаг 1 (*упорядочивание событий*). Данный шаг не учитывает форму представления информации, поэтому он реализуется также, как в классическом случае [2]: выполняется топологическая сортировка, в результате которой вершинам приписываются «правильные» номера, упорядочивающие события сетевого графика, при этом исходное событие сети получает номер 0, а завершающее — номер $n$.

Шаг 2 (*определение ранних времен наступления событий*). Положить $t_e(0)=[0,0]$. Рассматривая вершины-события в порядке возрастания их номеров, для каждого события $j$ определить раннее время наступления по формуле

$$t_e(j)=\max_{i\in\Gamma^{-1}(j)}\left\{\left[\underline{t}_e(i),\overline{t}_e(i)\right]+\left[\underline{t}_{ij},\overline{t}_{ij}\right]\right\}=\max_{i\in\Gamma^{-1}(j)}\left\{\left[\underline{t}_e(i)+\underline{t}_{ij},\overline{t}_e(i)+\overline{t}_{ij}\right]\right\}=$$

$$=\left[\min_{i\in\Gamma^{-1}(j)}\left\{\underline{t}_e(i)+\underline{t}_{ij}\right\},\max_{i\in\Gamma^{-1}(j)}\left\{\overline{t}_e(i)+\overline{t}_{ij}\right\}\right],$$

где $\Gamma^{-1}(j)=\{i:i\to j\}$ — множество вершин, из которых дуги ведут в вершину $j$.

Шаг 3 (*определение критического пути*). Положить $T_{\max}=\left[\underline{t}_e(n),\overline{t}_e(n)\right]$, где $n$ — завершающее событие сети. Для определения критического пути выполнить следующие действия: положить $j=n$ и выделить те дуги $(i,j)$, которые удовлетворяют условию

$$\left[\underline{t}_e(j),\overline{t}_e(j)\right]-\left[\underline{t}_e(i),\overline{t}_e(i)\right]=\left[\underline{t}_{ij},\overline{t}_{ij}\right] \text{ или } \left[\underline{t}_e(j)-\overline{t}_e(i),\overline{t}_e(j)-\underline{t}_e(i)\right]=\left[\underline{t}_{ij},\overline{t}_{ij}\right],$$

откуда получим следующие условия в более простом виде:

$$\begin{cases}\underline{t}_e(j)-\overline{t}_e(i)=\underline{t}_{ij},\\ \overline{t}_e(j)-\underline{t}_e(i)=\overline{t}_{ij}.\end{cases}$$

Затем рассматриваются те вершины, из которых выходят выделенные дуги, и снова из входящих в них дуг выделяются те, которые удовлетворяют тому же условию. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто исходное событие сети. Путь из исходного события в завершающее событие, составленный из выделенных дуг, является критическим.

Тестирование изложенного алгоритма показало, что, если продолжительности работ заданы интервальными числами с малой шириной, то получаются приемлемые результаты, причем возможна их эффективная оптимизация за счет сдвигов. Если среди продолжительностей имеются интервалы с большой шириной, то это влияет на критическое время — оно задается «широким» интервальным числом, и прогнозировать время, необходимое для выполнения проекта становится не возможно.

## Заключение

В данной статье предложена модификация метола критического пути на случай, если продолжительности работ заданы интервальными числами. Также алгоритм может быть использован, если используются нечеткие числа, поскольку каждое нечеткого число может быть задано совокупностью $\alpha$-срезов, являющихся интервальными числами. В этом случае для построения функций принадлежностей, соответствующих ранним временам наступления событий, требуется аппроксимация границ найденных интервальных чисел для каждого $\alpha$.

## Литература


1. Балашов, В. Г. Метод критического пути / В. Г. Балашов, А. Ю. Заложнев // Управление большими системами. – М. : ИПУ РАН, 2003. – Т. 3. – С. 5–10.

2. *Кудрявцев, Е. М.* Методы сетевого планирования и управления проектом / Е. М. Кудрявцев. – М. : ДМК Пресс, 2005. – 240 с.

3. *Леденева, Т. М.* Специальные главы математики. Прикладные дискретные модели / Т. М. Леденева. – Воронеж : Изд-во ВГТУ, 2000. – 134 с.

4. *Леденева, Т. М.* Нечеткая модель проекта с продолжительностями работ в форме обобщенных гауссовых чисел / Т. М. Леденева, Д. А. Черменев // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии, 2015. – № 2. – С. 72–81.

5. *Леденева, Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. – Воронеж : ВГУ, 2006. – 233 с.

6. *Пегат, А.* Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 798 с.

УДК 519.816

# НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Т. М. Леденева, Е. И. Цыганкова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В данной статье рассматриваются арифметические операции над приближенными числами, под которыми подразумеваются интервальные и нечеткие интервальные числа, а также твины. Нечеткое интервальное число отличается тем, что его границы задаются нечеткими числами общего вида. Под твином подразумевается интервальное число, у которого границы также представлены интервальными числами. Операции над нечеткими интервальными числами можно определить через $\alpha$-срезы, которые являются в данном случае твинами. Полученные результаты будут использоваться в задаче кластеризации с разнородной интервальной информацией.
**Ключевые слова:** нечеткое интервальное число, твин, $\alpha$-срез.

## Введение

Одной из современных технологий обработки информации является технология больших данных [1]. Появление первых продуктов и решений, относящихся непосредственно к проблеме обработки больших данных, относят к 2010 году. Классическими источниками больших данных являются социальные медиа, данные астрономических наблюдений, метеорологические данные, данные о местонахождении абонентов сетей сотовой связи, устройств аудио- и видеорегистрации, а также внутренняя информация предприятий и организаций, например, в сфере медицины, коммерческом секторе, сфере государственного управления и др. Необходимо заметить, что под технологией больших данных подразумеваются, прежде всего, методы и средства обработки информации (цифровой, языковой, символьной, статистической, геометрической и т. п.) большого объема, направленные на решение следующих задач: выявление зависимостей в данных, кластеризация и выявление паттернов, оптимизация, системное моделирование, визуализация данных. Заметим, что одним из способов «сокращения» больших данных является использование моделей представления приближенной информации. В данной статье рассматриваются обобщения интервальных чисел в виде нечетких интервальных чисел и твинов, и для них вводятся арифметические операции. Полученные результаты будут использованы в методе декомпозиционного дерева [2,3], который относится к алгоритмам дивизимной кластеризации.

## 1. Теоретическая основа исследования

Введем необходимые определения, базируясь на [4–6].

Пусть числа $\underline{a}, \overline{a} \in R$ такие, что $\underline{a} \le \overline{a}$. Под *интервальным числом* (или *интервалом*) $A$ будем понимать замкнутое ограниченное подмножество вещественной оси $R$ вида

$$A = \left[\underline{a}, \overline{a}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} : \underline{a} \le x \le \overline{a}\right\},$$

где $\underline{a}$ и $\overline{a}$ называются, соответственно, нижней и верхней границей интервала $A$.

Вместо отрезка можно рассматривать и другие промежутки $\left(\underline{a}, \overline{a}\right)$, $\left[\underline{a}, \overline{a}\right)$, $\left(\underline{a}, \overline{a}\right]$, но в рамках интервальной арифметики все они называются интервалами. Множество всех интервалов на $\mathbb{R}$ обозначим $I_{\mathbb{R}}$.

Величину $\left\|A\right\| = \overline{a} - \underline{a}$ будем называть шириной интервала.

Интервал $A \in I_{\mathbb{R}}$ называется *неотрицательным* $(A \geq 0)$, если неотрицательны обе его границы, и *неположительным* $(A \leq 0)$, если не положительны оба его конца. Множества данных интервалов обозначим соответственно $I_{\mathbb{R}}^{+}$ и $I_{\mathbb{R}}^{-}$. Интервал $[\underline{a},\overline{a}]$ может быть симметричным относительно 0 при $|\underline{a}| = \overline{a}$. Множество таких интервалов обозначим $I_s$.

Интервал $[a,a]$ называется вырожденным и, по сути, является обобщением обычного числа $a$, в этом случае множества $\mathbb{R}$ и $I_{\mathbb{R}}$ эквивалентны.

Два интервала $A = [\underline{a},\overline{a}]$ и $B = [\underline{b},\overline{b}]$ называются равными, если $\begin{cases} \underline{a} = \underline{b}, \\ \overline{a} = \overline{b}. \end{cases}$.

Будем говорить, что интервал $A = [\underline{a},\overline{a}]$ включен в интервал $B = [\underline{b},\overline{b}]$ и обозначать этот факт в виде $A \subseteq B$, если $\begin{cases} \underline{a} \leq \overline{a}, \\ \underline{b} \leq \overline{b}. \end{cases}$

Введем арифметические операции над интервалами.

Для любых двух интервалов $A$ и $B$ можно ввести алгебраические операции двух типов:

$$A \circ B = \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A\, \exists b \in B\,(c = a \circ b)\}, \tag{1}$$

где $\circ \in \{+,\times\}$;

$$\bullet A = \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in [\underline{a},\overline{a}]\,(c = \bullet a)\}, \tag{2}$$

где $\bullet \in \{-,{}^{-1}\}$.

Здесь $\circ$ — бинарная операция, а $\bullet$ — унарная.

Операции данных типов над интервалами определяются следующим образом:

$$-A = -[\underline{a},\overline{a}] = [-\overline{a},-\underline{a}], \tag{3}$$

$$A^{-1} = [\underline{a},\overline{a}]^{-1} = \left[\overline{a}^{-1},\underline{a}^{-1}\right], \tag{4}$$

$$A + B = [\underline{a},\overline{a}] + [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}], \tag{5}$$

$$A - B = A + (-B) = [\underline{a},\overline{a}] + \left(-[\underline{b},\overline{b}]\right) = [\underline{a},\overline{a}] + [-\overline{b},-\underline{b}] = [\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}], \tag{6}$$

$$A \times B = [\underline{a},\overline{a}] \times [\underline{b},\overline{b}] = \left[\min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\},\max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}\right], \tag{7}$$

$$A / B = A \times (B^{-1}) = \left[\min\{\underline{a}/\underline{b},\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b},\overline{a}/\overline{b}\},\max\{\underline{a}/\underline{b},\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b},\overline{a}/\overline{b}\}\right]. \tag{8}$$

Кроме того, может быть определена операция возведения в целую положительную степень следующим образом:

$$n = 0 \Rightarrow A^0 = [1,1]; \;\; n > 0 \Rightarrow A^n = A \times A^{n-1}.$$

В задачах, связанных с обработкой интервальной информации зачастую требуется сравнить два интервала. При решении этой проблемы необходимо учитывать варианты взаимного расположения интервалов. Если интервалы не пересекаются, то их сравнение тривиально: тот интервал, который лежит правее, больше того интервала, который лежит левее. Для пересекающихся интервалов существует несколько подходов к их сравнению. В [7] предложен подход, основанный на сравнении геометрических вероятностей попадания в интервалы. В [4] интервалы сравниваются на основе специальных индексов несходства. Рассмотрим этот подход более подробно.

Пусть заданы два пересекающихся интервала $A = [\underline{a},\overline{a}]$ и $B = [\underline{b},\overline{b}]$. Объединение и пересечение данных интервалов — это интервалы, которые определяются следующими правилами:

$$A \cup B = \left[\min\{\underline{a},\underline{b}\},\max\{\overline{a},\overline{b}\}\right], \tag{9}$$

$$A \cap B = \left[\max\{\underline{a},\underline{b}\},\min\{\overline{a},\overline{b}\}\right], \tag{10}$$

Заметим, что $\|A \cup B\| = \max\{\overline{a},\overline{b}\} - \min\{\underline{a},\underline{b}\}$, $\|A \cap B\| = \min\{\overline{a},\overline{b}\} - \max\{\underline{a},\underline{b}\}$.

Абсолютным индексом несходства между интервалами $A$ и $B$ называется величина [4] вида

$$\xi'_\gamma(A,B) = \|A \cup B\| - \|A \cap B\| + \gamma\left(2\|A \cap B\| - \|A\| - \|B\|\right), \tag{11}$$

где $\gamma \in [0;0.5]$ — настраиваемый параметр.

Относительный индекс несходства между интервалами $A$ и $B$ зададим в виде

$$\xi_\gamma(A,B) = \frac{\xi'_\gamma(A,B)}{\|A \cup B\|} \in [0,1]. \tag{12}$$

На основе полученного индекса несходства можно провести сравнительный анализ интервалов. Практический интерес имеют следующие частные случаи:

$$\xi_{\gamma=0}(A,B) = \frac{\|A \cup B\| - \|A \cap B\|}{\|A \cup B\|} = 1 - \frac{\|A \cap B\|}{\|A \cup B\|} = 1 - \frac{\max\{\overline{a},\overline{b}\} - \min\{\underline{a},\underline{b}\}}{\min\{\overline{a},\overline{b}\} - \max\{\underline{a},\underline{b}\}},$$

$$\xi_{\gamma=0.5}(A,B) = \frac{\|A \cup B\| - 0.5\left(\|A\| + \|B\|\right)}{\|A \cup B\|} = 1 - 0.5\left(\frac{\|A\|}{\|A \cup B\|} + \frac{\|B\|}{\|A \cup B\|}\right) =$$

$$= 1 - 0.5\left(\frac{\overline{a} - \underline{a}}{\min\{\overline{a},\overline{b}\} - \max\{\underline{a},\underline{b}\}} + \frac{\overline{b} - \underline{b}}{\min\{\overline{a},\overline{b}\} - \max\{\underline{a},\underline{b}\}}\right).$$

Индекс несходства $\xi_\gamma(A,B) = 0$ означает, что интервалы полностью совпадают, при этом $\xi_\gamma(A,B) = 1$ говорит о том, что сравниваемые интервалы не пересекаются.

## 2. Полученные результаты

Дальнейшее развитие концепции интервальной неопределённости приводит к понятию «сложных» интервалов, одним из которых является интервал, имеющий интервальные границы, или *твин*. Твин используется, если имеется неопределенность при определении границ интервального числа.

Определим твин следующим образом:

$$T = \left[\!\left[ \left[\underline{l},\overline{l}\right], \left[\underline{r},\overline{r}\right] \right]\!\right] = [\![L,R]\!],$$

где $L = \left[\underline{l},\overline{l}\right]$, $R = \left[\underline{r},\overline{r}\right]$, причем $\overline{l} < \underline{r}$.

Заметим, что шириной твина целесообразно считать величину $|T| = \overline{r} - \underline{l}$.

Пусть заданы твины $T_1 = [\![L_1,R_1]\!]$ и $T_2 = [\![L_2,R_2]\!]$. Основываясь на определениях операций над интервалами (3)–(8), определим операции над твинами следующим образом:

операция умножения на число

$$\alpha T = \alpha[\![L,R]\!] = [\![\alpha L,\alpha R]\!] = \begin{cases} \left[\!\left[ \left[\alpha\underline{l},\alpha\overline{l}\right], \left[\alpha\underline{r},\alpha\overline{r}\right] \right]\!\right], \textit{если } \alpha > 0, \\ \left[\!\left[ \left[\alpha\overline{r},\alpha\underline{r}\right], \left[\alpha\overline{l},\alpha\underline{l}\right] \right]\!\right], \textit{если } \alpha < 0; \end{cases}$$

операция сложения твинов

$$T_1 + T_2 = [\![L_1,R_1]\!] + [\![L_2,R_2]\!] = [\![L_1 + L_2, R_1 + R_2]\!] =$$

$$= \left[\!\left[ \left[\underline{l}_1,\overline{l}_1\right] + \left[\underline{l}_2,\overline{l}_2\right], \left[\underline{r}_1,\overline{r}_1\right] + \left[\underline{r}_2,\overline{r}_2\right] \right]\!\right] = \left[\!\left[ \left[\underline{l}_1 + \underline{l}_2, \overline{l}_1 + \overline{l}_2\right], \left[\underline{r}_1 + \underline{r}_2, \overline{r}_1 + \overline{r}_2\right] \right]\!\right];$$

операция вычитания

$$T_1 - T_2 = [\![L_1,R_1]\!] + \left(-[\![L_2,R_2]\!]\right) = \left[\!\left[ \left[\underline{l}_1,\overline{l}_1\right] + \left[\underline{r}_1,\overline{r}_1\right], \left[-\overline{r}_2,-\underline{r}_2\right] + \left[-\overline{l}_2,-\underline{l}_2\right] \right]\!\right] =$$

$$= \left[\!\left[ \left[\underline{l}_1 - \overline{r}_2, \overline{l}_1 - \underline{r}_2\right], \left[\underline{r}_1 - \overline{l}_2, \overline{r}_1 - \underline{l}_2\right] \right]\!\right];$$

операция умножения

$$T_1 \cdot T_2 = [\![ L_1, R_1 ]\!] \cdot [\![ L_2, R_2 ]\!] = \left[\!\!\left[ \min_{i,j=1,2}\left\{ L_i \cdot R_j \right\}, \max_{i,j=1,2}\left\{ L_i \cdot R_j \right\} \right]\!\!\right],$$

где $L \cdot R = \left[ \underline{l}, \overline{l} \right] \cdot \left[ \underline{r}, \overline{r} \right] = \left[ \min\left\{ \underline{l} \cdot \underline{r}, \overline{l} \cdot \underline{r}, \underline{l} \cdot \overline{r}, \overline{l} \cdot \overline{r} \right\}, \max\left\{ \underline{l} \cdot \underline{r}, \overline{l} \cdot \underline{r}, \underline{l} \cdot \overline{r}, \overline{l} \cdot \overline{r} \right\} \right]$;

операция деления

$$T_1 / T_2 = [\![ L_1, R_1 ]\!] / [\![ L_2, R_2 ]\!] = \left[\!\!\left[ \min_{i,j=1,2}\left\{ L_i / R_j \right\}, \max_{i,j=1,2}\left\{ L_i / R_j \right\} \right]\!\!\right],$$

где $L / R = \left[ \underline{l}, \overline{l} \right] / \left[ \underline{r}, \overline{r} \right] = \left[ \min\left\{ \underline{l} / \underline{r}, \overline{l} / \underline{r}, \underline{l} / \overline{r}, \overline{l} / \overline{r} \right\}, \max\left\{ \underline{l} / \underline{r}, \overline{l} / \underline{r}, \underline{l} / \overline{r}, \overline{l} / \overline{r} \right\} \right]$.

В дальнейших рассуждениях нам потребуется определение *нечеткого числа* [5].

Нечетким треугольным числом называется нечеткое подмножество числовой прямой с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a-x}{l}, & a - l \le x < a, \\ 1, & x = a, \\ 1 - \dfrac{x-a}{r}, & a < x \le a + r, \\ 0, & \textit{иначе}; \end{cases}$$

где $l, r$ — левый и правый коэффициенты неопределенности,

Для нечеткого множества $A$ его $\alpha$ -срезом называется обычное множество

$$A_\alpha = \left\{ x : \mu_A(x) \ge \alpha \right\}.$$

Для треугольных нечетких чисел $\alpha$-срез представляет собой интервальное число вида $S_\alpha = \left[ a - l(1-\alpha), a + r(1-\alpha) \right] = \left[ l_\alpha, r_\alpha \right]$. Перебирая последовательные значения $\alpha \in (0,1]$ с определенным шагом, треугольное нечеткое число нечеткое число можно представить совокупность $\alpha$-срезов, т. е. $A = \left\{ \left( \left[ l_\alpha, r_\alpha \right] / \alpha \right) \right\}_{\alpha \in (0,1]}$.

Нечетким интервальным числом назовем интервал $\left[ \tilde{L}, \tilde{R} \right]$, у которого границы заданы приближенно нечеткими числами $\tilde{L}$ и $\tilde{R}$ (например, треугольного вида). Очевидно, что операции над нечеткими интервальными числами сводятся к операциям над нечеткими числами, которые определяют их границы.

Пусть $A$ и $B$ — нечеткие числа, $*$ — символ арифметической операции, тогда нечеткое число $A * B$ определяется функцией принадлежности [5]

$$\mu_{A*B}(z) = \sup_{z = x*y} \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(y) \right\}.$$

На основе данной формулы определим

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(y) \right\}, \; \mu_{A-B}(z) = \sup_{z=x-y} \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(y) \right\},$$

$$\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(y) \right\}, \; \mu_{A/B}(z) = \sup_{z=x/y} \min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(y) \right\}.$$

Пусть $\tilde{I}_1 = \left[ \tilde{L}_1, \tilde{R}_1 \right], \tilde{I}_2 = \left[ \tilde{L}_2, \tilde{R}_2 \right]$ — два нечетких интервальных числа. Построим формулу для их суммы. Согласно определению суммы интервальных чисел имеем

$$I_1 + I_2 = \left[ \tilde{L}_1, \tilde{R}_1 \right] + \left[ \tilde{L}_2, \tilde{R}_2 \right] = \left[ \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2, \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \right],$$

где $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ — нечеткие числа с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{L}_1}$, $\mu_{\tilde{L}_2}$, $\mu_{\tilde{R}_1}$, $\mu_{\tilde{R}_2}$ соответственно. С учетом формулы для сложения нечетких чисел, получим

$$\left( \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \right)(z) = \left[ \sup_{z=x+y} \min\left\{ \mu_{\tilde{L}_1}(x), \mu_{\tilde{L}_2}(y) \right\}, \sup_{z=x+y} \min\left\{ \mu_{\tilde{R}_1}(x), \mu_{\tilde{R}_2}(y) \right\} \right].$$

Для определения операций над нечеткими интервальными числами можно использовать другой подход, основанный на понятии $\alpha$-среза. Пусть $\tilde{I}_1 = \left[\tilde{L}_1, \tilde{R}_1\right]$, $\tilde{I}_2 = \left[\tilde{L}_2, \tilde{R}_2\right]$ — два нечетких интервальных числа. Каждое их нечетких чисел $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$, $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$ представим $\alpha$-срезами следующим образом:

$$\tilde{L}_1^\alpha = \left[a - l_{\tilde{L}_1}(1-\alpha), a + r_{\tilde{L}_1}(1-\alpha)\right], \ \tilde{L}_2^\alpha = \left[a - l_{\tilde{L}_2}(1-\alpha), a + r_{\tilde{L}_2}(1-\alpha)\right],$$

$$\tilde{R}_1^\alpha = \left[a - l_{\tilde{R}_1}(1-\alpha), a + r_{\tilde{R}_1}(1-\alpha)\right], \ \tilde{R}_2^\alpha = \left[a - l_{\tilde{R}_2}(1-\alpha), a + r_{\tilde{R}_2}(1-\alpha)\right].$$

В этом случае $\alpha$ -срезы нечетких чисел, по сути, являются твинами

$$\tilde{I}_1^\alpha = \left[\tilde{L}_1^\alpha, \tilde{R}_1^\alpha\right] = \left[\!\left[\left[a - l_{\tilde{L}_1}(1-\alpha), a + r_{\tilde{L}_1}(1-\alpha)\right], \left[a - l_{\tilde{R}_1}(1-\alpha), a + r_{\tilde{R}_1}(1-\alpha)\right]\right]\!\right],$$

$$\tilde{I}_2^\alpha = \left[\tilde{L}_2^\alpha, \tilde{R}_2^\alpha\right] = \left[\!\left[\left[a - l_{\tilde{L}_2}(1-\alpha), a + r_{\tilde{L}_2}(1-\alpha)\right], \left[a - l_{\tilde{R}_2}(1-\alpha), a + r_{\tilde{R}_2}(1-\alpha)\right]\right]\!\right].$$

С учетом этого определения, получим

$$I_1 + I_2 = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \left[\tilde{L}_1^\alpha + \tilde{L}_2^\alpha, \tilde{R}_1^\alpha + \tilde{R}_2^\alpha\right] =$$

$$= \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \left[\!\left[\left[2a - (1-\alpha)\left(l_{\tilde{L}_1} + l_{\tilde{L}_2}\right), 2a + (1-\alpha)\left(r_{\tilde{L}_1} + r_{\tilde{L}_2}\right)\right], \left[2a - (1-\alpha)\left(l_{\tilde{R}_1} + l_{\tilde{R}_2}\right), 2a + (1-\alpha)\left(r_{\tilde{R}_1} + r_{\tilde{R}_2}\right)\right]\right]\!\right].$$

На основе данного подхода можно получить другие арифметические операции над твинами. Кроме того, индекс несходства для твинов можно получить, используя в простейшем случае формулу для $\xi_{\gamma=0}$, но нужно учитывать взаимное расположение границ двух твинов. Рассмотрим, каким образом определяются теоретико-множественные операции для двух твинов $T_1 = [\![L_1, R_1]\!]$ и $T_2 = [\![L_2, R_2]\!]$, когда интервал $L_1$ пересекается с интервалом $L_2$, а интервал $R_2$ находится левее $R_1$. Для определения $T_1 \cup T_2$ при условии, что $L_1$ и $L_2$ пересекаются, нужно определить объединение интервалов $L_1 \cup L_2$, тогда

$$T_1 \cup T_2 = [\![L_1 \cup L_2, R_1]\!] = \left[\!\left[\left[\min\left\{\underline{l}_1, \underline{l}_2\right\}, \max\left\{\overline{l}_1, \overline{l}_2\right\}\right], \left[\underline{r}_1, \overline{r}_1\right]\right]\!\right],$$

$$T_1 \cap T_2 = [\![L_2, R_2]\!] = \left[\!\left[\left[\underline{l}_2, \overline{l}_2\right], \left[\underline{r}_2, \overline{r}_2\right]\right]\!\right].$$

В других ситуациях формула будет иная.

## Заключение

В статье рассматриваются арифметические операции над интервальными числами и их обобщениями. Полученные формулы будут использоваться в задаче нечеткой кластеризации при условии, что исходная информация об объекте задается вектором, каждая компонента которого имеет интервальное представление в виде простого интервального числа, нечеткого интервального числа или твина.

## Литература

1. *Майер-Шенбергер, В.* Большие данные. Революция, которая изменит то, как мы живем, работаем и мыслим / В. Майер-Шенбергер, К. Кукьер. – М. : Манн, Иванов и Фербер, 2014. – 240 с.

2. *Леденева, Т. М.* Влияние различных типов транзитивности на декомпозиционное дерево в задаче нечеткой классификации / Т. М. Леденева, Н. А. Каплиева // Нечеткие системы и мягкие вычисления, 2013. – Т. 8, № 1. – С. 5–25.

3. *Леденева, Т. М.* Влияние функции подобия на результаты нечеткой классификации / Т. М. Леденева, Нгуен Нгок Хуи // Информационные технологии, 2011. – № 11. – С. 14–20.

4. *Billard, L.* Symbolic Data Analysis: Conseptual Statistics and Data Mining / L. Billard, E.Diday. – England : John Wiley & Sons Ltd, 2006.g – 321 p.
5. *Леденева, Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2006. – 233 с.
6. *Пегат, А.* Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 798 с.
7. *Бердникова, О. М.* Дескриптивная статистика для интервальных наблюдений при наличии логических правил / О. М. Бердникова, Т. М. Леденева // Вестн. Воронеж. гос. тех. ун-та, 2014. – Т. 10, № 5. – С. 34–39.

УДК 533.539

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ УГЛЕВОДОРОДНЫХ РАСТВОРОВ В ПРОЦЕССЕ ДОБЫЧИ НЕФТИ И ГАЗА

**В. Л. Литвинов**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Расчет фазового поведения и композиционное моделирование с уравнением состояния требуют использования псевдокомпонент для описания нефтегазовой смеси [3, 4–6]. Из-за большого количества компонент, которые образуют тяжелые фракции и зависимости сложности расчёта от их количества, необходимо сгруппировать их в псевдокомпоненты. Кроме того, чтобы минимизировать затраты расчета, также выгодно смешивать легкие компоненты.

На основании данных, полученных при разгонке, и свойств нефти и углеводородного конденсата определяются псевдокомпоненты, которые характеризуются интервалом кипения, средней температурой кипения, плотностью, молярной массой, критическим давлением, температурой, объемом и ацентрическим фактором.

Псевдокомпоненты разделяют на фракции по температуре кипения с шагом, например, 10°C, или по группам углеводородов C6, C7, C8 ... CN, или экспертно [6, 8].

Предел кипения фракций ряда SCN выбирается таким образом, чтобы верхний предел кипения фракции на 0,5°C был больше температуры кипения н–алкана с тем же числом атомов углерода.

Исходная задача: имеется состав, состоящий из 10 компонент. Некоторые из них являются псевдофракциями, т.е. объединяют несколько углеводородных компонент. Так псевдофракция под номером 10, включает C20, C21,..,C80. Причем сюда входят как нормальные углеводороды, так и все их изомеры. Требуется заменить тяжелые компоненты меньшим количеством компонент. Для этого необходимо сначала разбить каждую из псевдофракций на более мелкие псевдофракции, входящие в состав, т.е. сделать Splitting, а затем объединить их по некоторым, повышающих эффективность, принципам, т.е. сделать Lumping [1–3].

Существует несколько различных способов Splitting и Lumping:

Splitting исходного состава по различным базисам:

– алгоритм, предложенный Pedersen по молекулярному весу [6];

– алгоритм, предложенный Whitson по молекулярному весу [1, 6].

В работе рассмотрена схема автоматического лампинга [3, 7]. Представлен алгоритм для характеристики тяжелых фракции нефти и газа и последующего лампинга в псевдокомпоненты. Алгоритм основан на значениях K-values при фиксированных давлении и температуре, которое типично для изучаемого процесса [3]. Композиционное моделирование с использованием различных схем лампинга также проводится для исследования влияния различных сочетаний псевдокомпонент на результаты расчетов гидродинамического симулятора.

Используемые в данной схеме K-values вычислены в алгоритме FLASH при наименьших возможных давлении и температуре. В данном случае использовались значения из стандартных условий: p=1 atm., T=288.71 K.

Погрешность при использовании схемы автоматического лампинга, основанного на K-values, составляет не более 5 %, причем количество компонент уменьшилось в 2 раза. Сложность вычислений сократилась в 4 раза.

## Литература


1. *Whitson C. H., Torp S. B.* Evaluating Constant Volume Depletion Data. – JPT (March 1983), Trans., AIME, 275.

2. *Колдоба А. В., Колдоба Е. В.* Термодинамически согласованная модель многокомпонентной смеси с фазовыми переходами // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 4. – С. 147–155.

3. *Колдоба Е. В.* Метод построения термических констант фазового равновесия многокомпонентных растворов // Матем. Моделирование. – 2018. – С. 84–96.

4. *Литвинов В. Л., Рахмаев Р. И.* Решение уравнений состояния для углеводородных растворов // Молодежная наука: вызовы и перспективы // Материалы I Всероссийской научно–практической конференции. Самара, 2018. – С. 45–48.

5. *Литвинов В. Л.* Нахождение частного класса решений уравнений состояния для углеводородных растворов / Журнал «Научный поиск». – 2018. – № 4. – С. 56–59.

6. *Брусиловский А. И.* Фазовые превращения при разработке нефти и газа. – Москва : Издательский дом «Грааль», 2002. – 575 с.

7. *Yau-Kun Li, Long X. Nghiem, Alan Siu.* Phase behaviour computations for reservoir fluids: effect of pseudo–components on phase diagrams and simulation results. Petroleum Society of Canada. Journal of Canadian Petroleum Technology. – 1985. – 24 p.

8. *Литвинов В. Л.* Об одном методе моделирования компонентно–фракционного состава флюида в процессе добычи нефти и газа / Журнал Многофазные системы. – 2020. – № 1-2. – С. 58–59.

УДК 004.94:536.2

# РАСЧЕТ ЗАДАЧИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОБОДНОГО ПО CODE_ASTER НА ПРИМЕРЕ ФЛАНЦА СТАЦИОНАРНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

**Е. А. Максимова, И. Ю. Савельева, А. В. Чередниченко**

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

**Аннотация.** Представлено построение геометрической модели и конечноэлементного приближения фланца стационарной энергетической установки, моделирование и построение сетки проводится с использованием модулей Salome-Meca. В работе дается краткое описание основных команд модуля AsterStudy для моделирования данной задачи. Численный расчет выполняется с использованием бесплатного ПО Code_Aster. По результатам исследования приводятся: распределение температуры, деформирование фланца, перемещение, а также эквивалентные напряжения по Мизесу.

**Ключевые слова:** свободное программное обеспечение, Code_Aster, термопластичность, фланец, стационарная энергетическая установка, метод конечных элементов.

## Введение

Важным этапом при проектировании установок в различных отраслях промышленности является расчет полей температуры и напряжений в элементах конструкций, работающих при высоких температурах [1].

Для расчетов теплонапряженного состояния элементов конструкций широко используется метод конечных элементов (МКЭ). Одним из вариантов расчета деталей машиностроения является использование готовых библиотек конечно-элементных программ, написанных на компилируемых высокоуровневых языках программирования.

Альтернативой предыдущего подхода является использование программных конечно-элементных комплексов. Существует большое количество как коммерческих программных конечно-элементных комплексов: ANSYS, Abaqus, MSC.Nastran, LS-Dyna, так и свободного программного обеспечения (Code_Aster, CalculiX, Elmer и т. д.). Использование свободного программного обеспечения для расчетов теплонапряженного состояния элементов конструкций актуально, поскольку, во-первых, устраняется зависимость от владельцев коммерческих лицензий, во-вторых, уменьшаются расходы на программное обеспечение и, в-третьих, открываются возможности адаптации кода под решение специфических задач. Однако выбор свободного программного комплекса требует проведения большого объема валидационных тестовых расчетов [4].

В данной работе представлено решение нестационарной задачи термопластичности для фланца стационарной энергетической установки. Расчеты были проведены с использованием свободного программного комплекса Code_Aster.

## Постановка задачи и основные соотношения

Формулировка связанной стационарной термомеханической задачи в области $V$, соответствующей однородному телу из изотропного материала, имеет вид [1]:

$$\Delta T(M) = 0, \quad \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(M) = 0, \quad M \in V,$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\hat{\mathbf{I}} - \alpha^{(T)}\left(T(M)-T_0\right)\hat{\mathbf{I}}\right), \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\nabla\mathbf{u} + \left(\nabla\mathbf{u}\right)^T\right)/2,$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа; $T(M)$ — температура, [K]; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензор напряжений, [Па]; $E$ — модуль Юнга, [Па]; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — тензор деформации; $\nu$ — коэффициент Пуассона; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$; $\hat{\mathbf{I}}$ — единичный тензор второго ранга; $\nabla$ — оператор Гамильтона; $\alpha^{(T)}$ — коэффициент температурной деформации, [K$^{-1}$]; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения.

Краевые условия для такой задачи имеют вид:

$$T\big|_{S_1} = f_1(x), \quad \mathbf{q}\big|_{S_2} = \mathbf{f}_2(x), \quad \boldsymbol{\sigma}\big|_{S_3} = \mathbf{p}(x), \quad \mathbf{u}\big|_{S_4} = \mathbf{g}(x),$$

где $S_1 \cup S_2 = \partial V$, $S_3 \cup S_4 = \partial V$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, $S_3 \cap S_4 = \varnothing$; $\mathbf{q}$ — вектор плотности теплового потока; $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор напряжения; $f_1(x)$, $\mathbf{f}_2(x)$, $\mathbf{p}(x)$, $\mathbf{g}(x)$ — известные функции и вектор-функции.

Требуется рассмотреть фланец стационарной энергетической установки. Характерные размеры фланца в миллиметрах указаны на рис. 1.

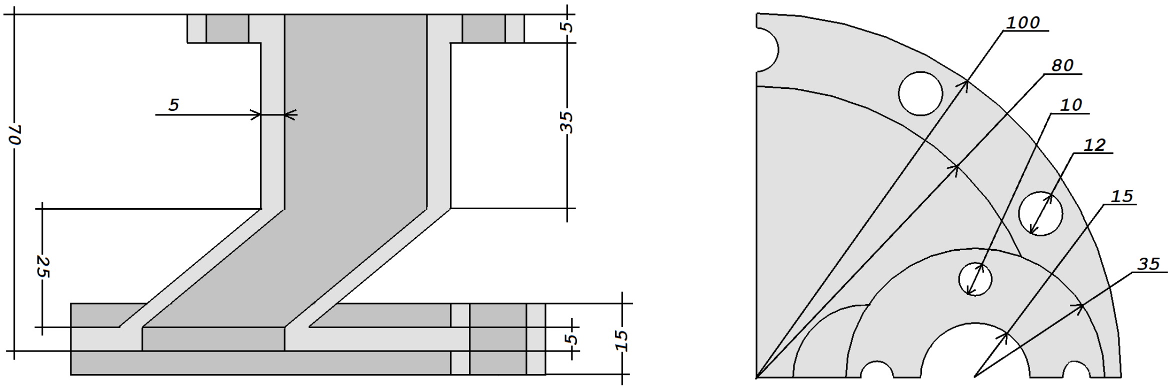



*Рис. 1. Размеры фланца в миллиметрах*

Поместив начало системы координат в центр фланца, выделим четверть фланца, расположенную в первом октанте (рис. 2).

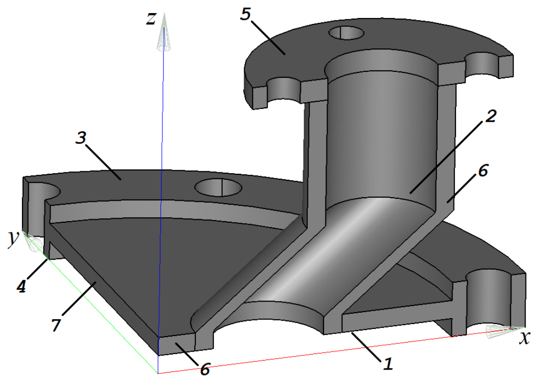



*Рис. 2. Фрагмент твердотельной модели фланца стационарной энергетической установки*

Начальная температура фланца — 283 K. Теплоизолированными считаются участки (6), (7) геометрической модели, принадлежащие плоскостям симметрии, участки поверхностей (4) и (5), перпендикулярных оси $Oz$, зон контакта со смежными элементами конструкции, а также цилиндрические поверхности отверстий под крепежные элементы. Внутренние поверхности (1) и (2) фланца контактируют со средой. На рис. 3 приведена зависимость температуры среды $T_c$ от времени, которая представляет собой периодическое изменение с периодом 720 с. Изменение коэффициентов теплообмена $\alpha_1$ и $\alpha_2$ поверхностей (1) и (2) соответственно также является периодическим (рис. 4).

На внешней поверхности (3) фланца происходит теплообмен с окружающей средой постоянной температуры $T_3 = 283$ K, коэффициент теплообмена равен $\alpha_3 = 15$ Вт/м$\cdot$K. Помимо теплового воздействия, внутренние поверхности (1) и (2) фланца подвержены механическому воздействию — давлению $p = 7.5$ МПа, которое возникает с периодом 12 минут и действует в течение первой половины каждого периода. В начальный момент времени $t = 0$ нагружение предполагается мгновенным.

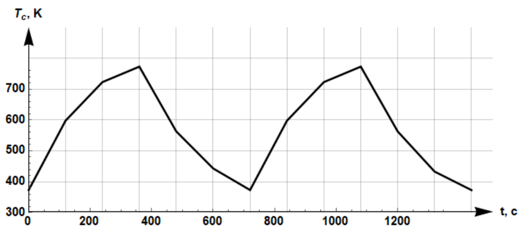



*Рис. 3. График зависимости температуры среды от времени*

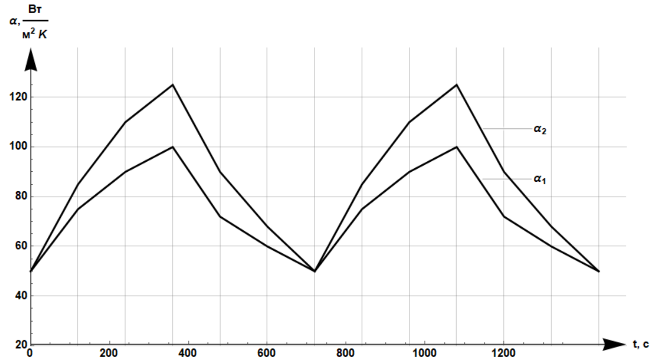



*Рис. 4. Графики зависимости коэффициентов теплообмена $\alpha_1$ и $\alpha_2$ от времени*

***Построение твердотельной модели и конечноэлементного приближения***

Твердотельная модель фрагмента фланца была построена в модуле Geometry пакета Salome-Meca. Для корректной работы сеточных алгоритмов, дополнительно были построены плоскости, разбивающие фрагмент фланца на части, из трехмерной модели выделены поверхности, на которые будут накладываться граничные условия.

С использованием модуля Mesh была автоматически сгенерирована сетка (рис. 5), элементы которой являются тетраэдрами первого порядка, указан диапазон длин ребер тетраэдров, а также поверхности, к которым требуется сгустить сетку. Из сетки, опираясь на геометрическую модель, выделены группы элементов для дальнейшего определения граничных условий. Сетка содержит 3035 узлов и 9142 тетраэдра.

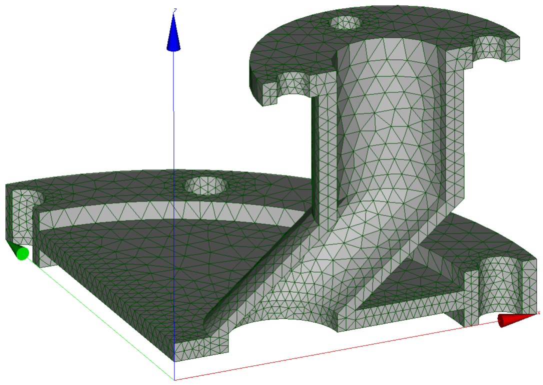


*Рис. 5. Сетка, элементы которой являются тетраэдрами*

**Определение материала и граничных условий для решения нелинейной задачи теплопроводности**

В качестве материала, из которого изготовлен фланец, была принята сталь марки Х18Н9Т, плотность которой $\rho = 7800 \frac{кг}{м^3}$, значение удельной теплоемкости $c = 650 \frac{Дж}{кг \cdot K}$. Зависимость коэффициента теплопроводности $\lambda$ от температуры приведена на рис. 6.

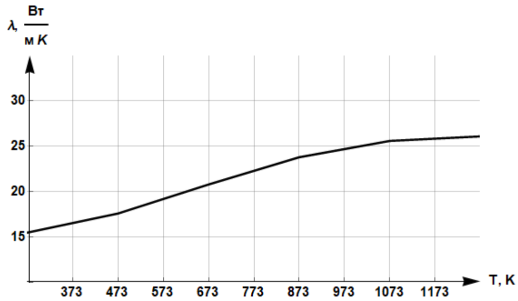



*Рис. 6. График зависимости коэффициента теплопроводности* $\lambda$ *от температуры*

Стандартный алгоритм работы в модуле AsterStudy предполагает пошаговое моделирование поставленной задачи. На первом этапе — решении задачи теплопроводности — считывается построенная сетка, определяется тип моделирования: `MODELISATION > 3D`, и задаются основные характеристики материала. Коэффициент теплопроводности, а также температура среды $T_c$ и коэффициенты теплообмена $\alpha_1$ и $\alpha_2$ программно задаются табличным способом. Постоянные величины, такие как поток, объемная теплоемкость, температура окружающей среды $T_3$ и коэффициент теплообмена $\alpha_3$, определяются в виде константных функций.

### Визуализация результатов решения нелинейной задачи теплопроводности

На рис. 7 представлено распределение температуры по поверхности фланца на момент времени $t = 360$ с. На рис. 8 номерами отмечены характерные узлы, для которых построены графики зависимости температуры от времени.

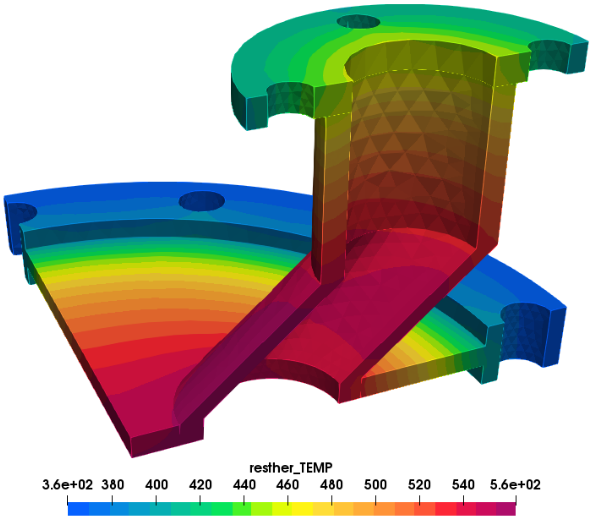



*Рис. 7. Распределение температуры в момент времени* $t = 360$ *с*

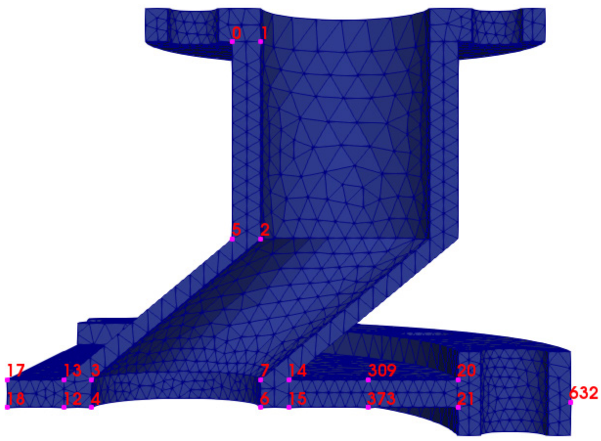



*Рис. 8. Характерные узлы*

На рис. 9 для узлов 6, 21, 373, 632 изображены графики зависимости температуры от времени, согласно которым температура к четвертому периоду перестает возрастать.

### Определение материала и граничных условий

Механические свойства стали, из которой сделан данный фланец, определяются следующими параметрами: $\alpha^{(T)} = 1.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$, $\nu = 0.3$. Для данного материала принята математическая модель упругопластической сплошной среды с линейным упрочнением. Предел текучести стали равен $\sigma_{\mathrm{T}} = 300$ МПа, а коэффициент упрочнения $E_{\mathrm{T}} = 250$ МПа.

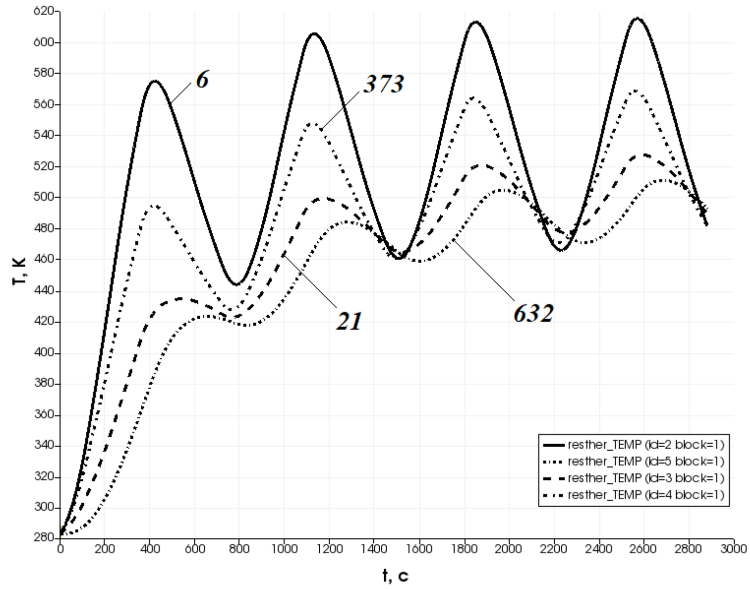



*Рис. 9. Графики температуры для узлов 6, 21, 373,632 на 4 периода*

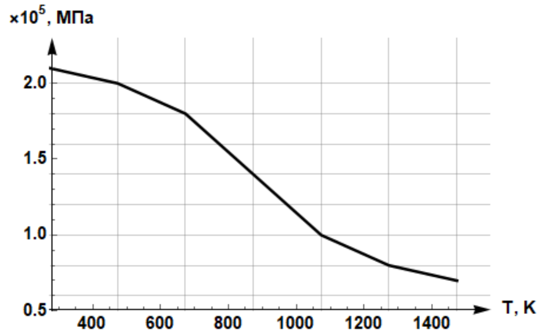



*Рис. 10. Зависимость модуля Юнга стали марки Х18Н9Т от температуры*

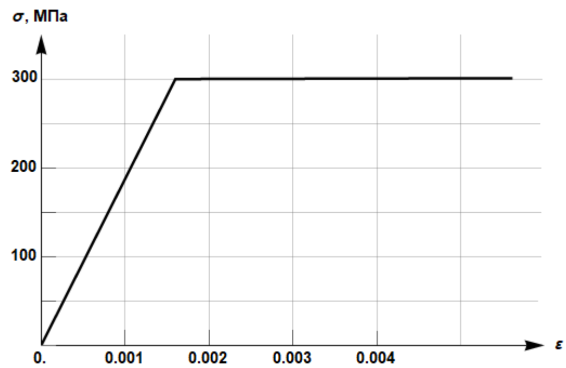



*Рис. 11. Диаграмма растяжения для стали марки Х18Н9Т*

Определить кривую растяжения для данного материала можно с помощью ключевого слова `ECRO_LINE`, где задаются значения предела текучести и коэффициент упрочнения.

### Учет граничных условий и решение задачи термопластичности

Учет граничных условий осуществляется двумя командами: `AFFE_CHAR_MECA` для фиксирования степеней свободы плоскостей симметрии и цилиндрических отверстий под крепежные элементы, и `AFFE_CHAR_MECA_F` для определения переменного давления $p$. На втором этапе происходит нелинейный расчет термопластичности — `STAT_NON_LINE`.

Процесс нагружения сопровождается приращением пластических деформаций. Приращения деформаций можно представить как сумму приращений упругих и пластических деформаций [5, 6]: $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}$, где $d\varepsilon_{ij}^{e}$ — приращение упругих деформаций; $d\varepsilon_{ij}^{p}$ — приращение пластических деформаций. Ассоциированный закон пластического течения: $d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, где $d\lambda$ — множитель Лагранжа; $f(\sigma_{ij})$ — пластический потенциал.

Тип упрочнения задается ключевым словом `RELATION > VMIS_ISOT_LINE`, т. е. определено изотропное упрочнение и поведение материала согласно диаграмме растяжения [7].

Code_Aster предоставляет широкий выбор моделей для описания деформаций материала, в данной задаче используется тип, допускающий малые (не более 5 %) перемещения и пластические деформации, т. е. ключевое слово `DEFORMATION = 'PETIT'` [8]. При помощи параметра `CONVERGENCE` определяется погрешность вычислений и количество итераций для каждого временного шага. Значение погрешности $10^{-4}$ считается допустимым для данной задачи, большая точность влечет за собой значительное увеличение времени расчета.

### Визуализация результатов решения задачи термопластичности

На рис. 12 представлено деформирование фланца относительно начального состояния. Для наглядности масштаб перемещений узлов сетки был увеличен в 3 раза. На рис. 13 указаны номера узлов сетки, для которых далее будут построены графики.

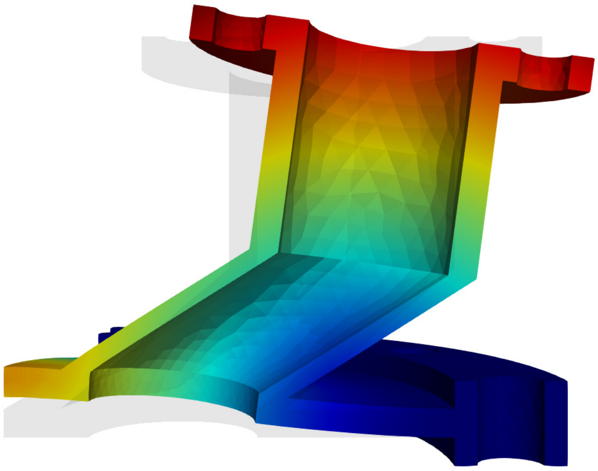


*Рис. 12. Деформирование фланца ($t = 360$ с)*

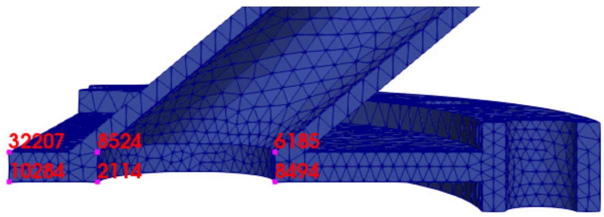



*Рис. 13. Характерные узлы для построения графиков*

На рис. 14–15 представлены перемещения вдоль осей $Ox$ и $Oz$ для двух моментов времени: $t = 360$ с — конец первого полуцикла нагружения, $t = 720$ с — конец первого полуцикла разгрузки.

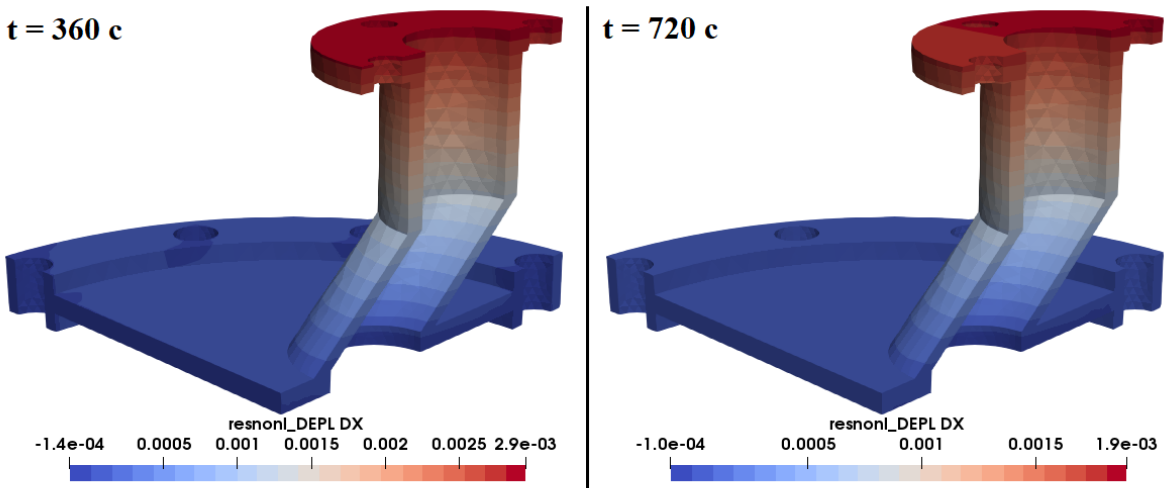



*Рис. 14. Перемещения вдоль оси $Ox$ на моменты времени $t = 360$ с и $t = 720$ с*

На рис. 16 приведен график зависимости перемещения вдоль оси $Oz$ от времени для двух узлов 8494 и 10284.

На рис. 17–18 представлены напряжения и деформации по Мизесу для двух моментов времени. Весь интервал изменения данных параметров был разбит на 22 диапазона.

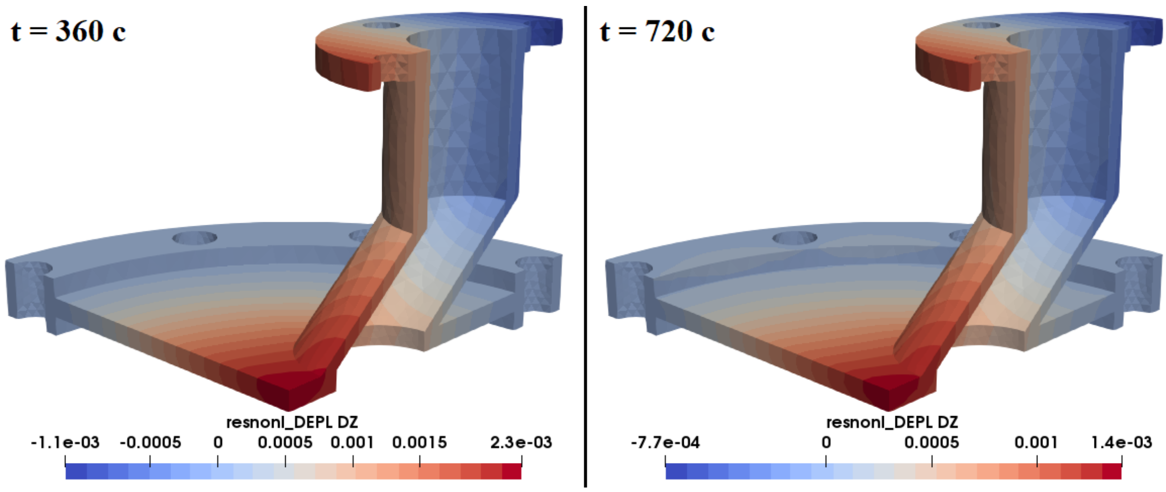



*Рис. 15. Перемещения вдоль оси $Oz$ на моменты времени $t = 360$ с и $t = 720$ с*

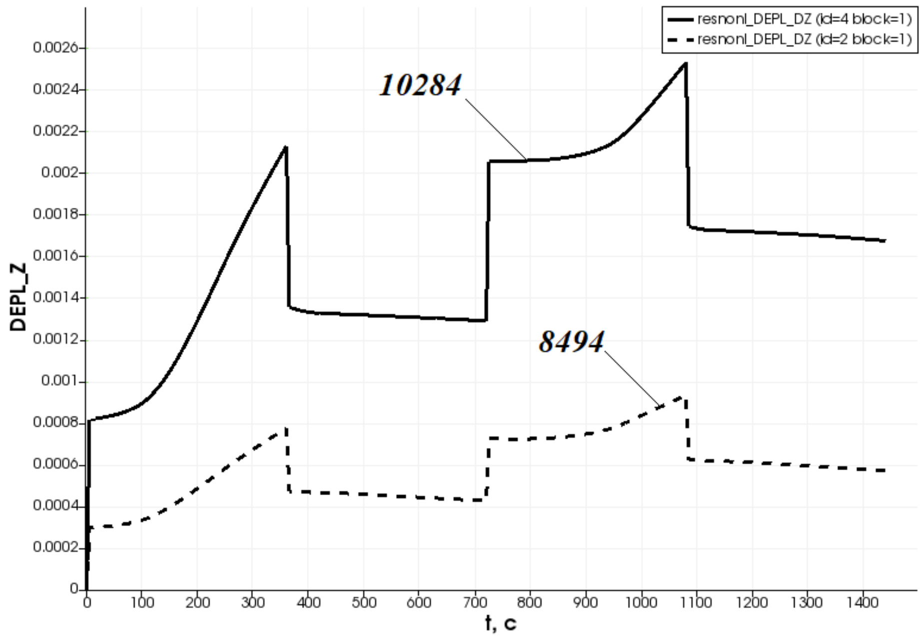



*Рис. 16. График зависимости перемещений от времени для узлов 8494 и 10284*

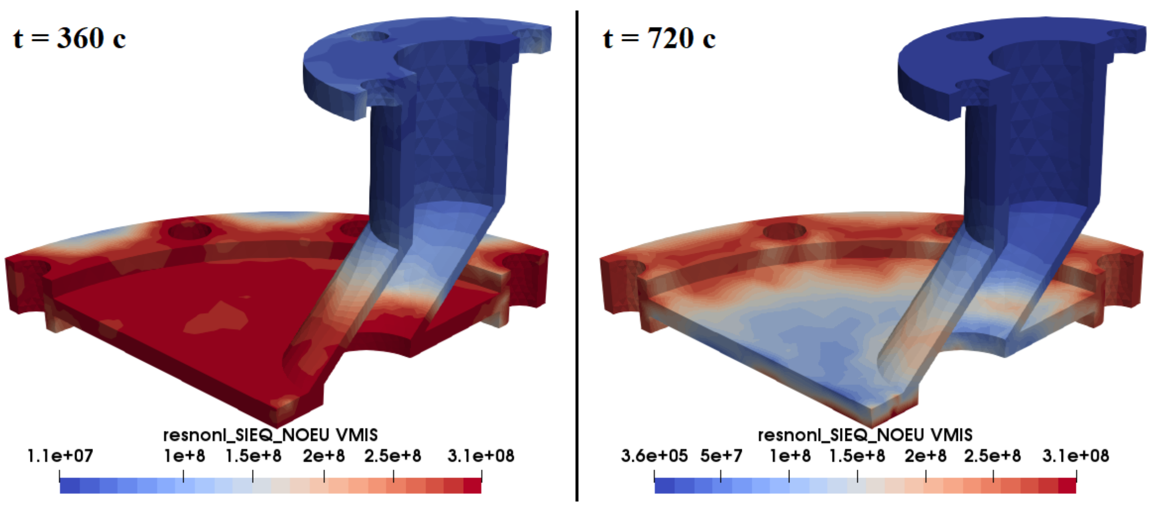



*Рис. 17. Эквивалентные напряжения по Мизесу на моменты времени $t = 360$ с и $t = 720$ с*

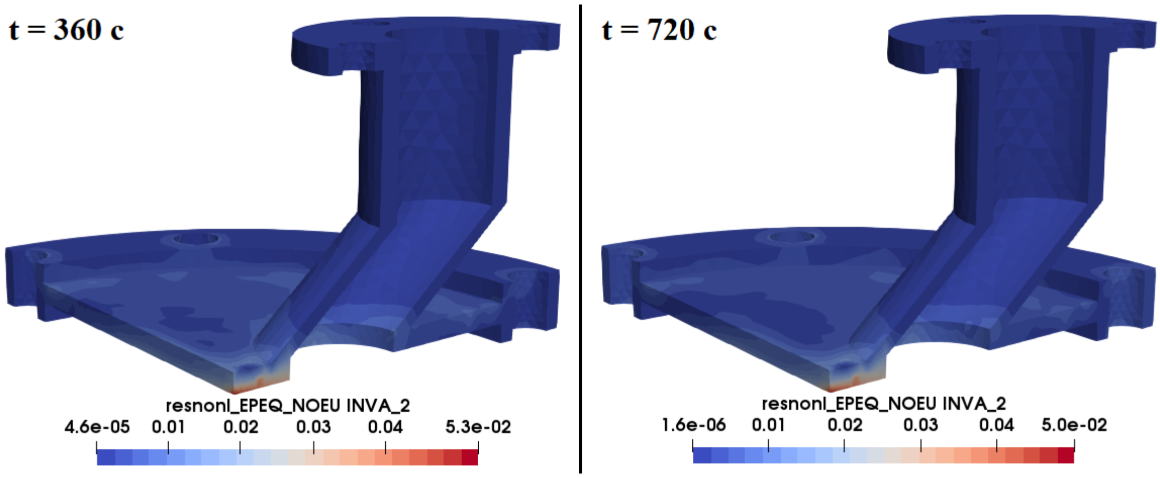



*Рис. 18. Эквивалентные деформации по Мизесу на моменты времени* $t = 360$ *с и* $t = 720$ *с*

## Заключение

В работе был рассмотрен фланец стационарной энергетической установки, построена его твердотельная модель и конечноэлементное приближение. С использованием решателя Code-Aster произведено моделирование и решение нелинейной задачи теплопроводности, а также задачи термопластичности. При помощи модуля ParaVis представлена графическая интерпретация результатов расчетов.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (проект 0705-2020-0047).

## Литература

1. *Зарубин В. С., Станкевич И. В.* Расчет теплонапряженных конструкций. — М. : Машиностроение, 2005.
2. *Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Демьянушко И. В., Дульнев Р. А., Сизова Р. Н.* Термопрочность деталей машин. — М. : Машиностроение, 1975.
3. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The finite element method. The basis. — Butterworth Heinemann, 2000. – Vol 1.
4. *Maksimova E. A., Savelyeva I. Yu., Cherednichenko A. V.* Calculation of the heat-stressed state of the disk using free software Code_Aster. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. Vol 747. (IOP Publishing), 2020. – pp 012104
5. *Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008.
6. *Bathe K. J.* Finite Element Procedures. Prentice Hall, Pearson Education, 2014.
7. *Andersen C.* Plasticity tutorial - rev.1.1. Code Aster STA 10.3. // Plasticity tutorial for CAELinux.com by Paul Carrico Translated and reworked by Claus Andersen, 2011. URL: http://caelinux.org/wiki/images/3/39/Claws_Plasticity.pdf
8. *Aubry J.-P.* Beginning with Code_Aster: A practical introduction to finite element method using Code_Aster, Gmsh and Salome. — P. : Framasoft, 2013.
9. Code_Aster. Analyse des structures et Thermo-Mecanique pour des Etudes et des Recherches. – URL: http://code-aster.org

УДК 004.942

# АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЯ КОНСЕРВАТИВНОСТИ В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

**М. Г. Матвеев, Е. А. Сирота**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе проводится анализ и исследование МНК-оценок в случае выполнения условия консервативности и его нарушения в задаче параметрической идентификации распределенных динамических процессов.

Показано, что при низком уровне помех качество МНК-оценок в случае выполнения условия консервативности становится лучше на порядок, оценивались смещение и стандартные ошибки МНК-оценок.

**Ключевые слова:** параметрическая идентификации, МНК-оценки, условие консервативности, распределенные динамические процессы, смещение.

## Введение

Анализ временных рядов включает выявление закономерностей изучаемых процессов, построение моделей, контроль и управление динамикой развития. Известно [1, 2], что анализ и исследование нестационарных процессов отличается от анализа процесса в случае его стационарности. Так, например, мощность тестов проверки типа процесса и наличия коинтеграции резко снижается (при наличии изменений в процессах) в случае анализа нестационарных временных рядов или модель временного ряда наблюдений, описывающая поведение системы, в случае неправильного определения типа процесса может быть не адекватной.

Известно, что определение типа процесса [3, 4] основано на проверке гипотезы о том, что исходный ряд является DS-процессом или проверке «гипотезы единичного корня».

В наших работах рассматриваются задачи оценки параметров моделей распределенных динамических процессов на основе статистических методов [5–7].

Если процессы адекватно описываются линейными дифференциальными уравнениями, то для получения оценок удобно перейти к разностным уравнениям. Например, для однородного уравнения конвективной диффузии с одной пространственной переменной приведенное разностное уравнение для $i$-го узла в $k+1$ момент времени будет иметь вид:

$$y_i^{k+1} = a_1 y_{i-1}^k + a_2 y_i^k + a_3 y_{i+1}^k \tag{1}$$

с заданными начальными и краевыми условиями:

$$y_i^0 = c_i\,, y_{i-1}^k = b_{i-1}^k, y_{i+1}^k = b_{i+1}^k, \forall k, \tag{2}$$

где $i$ — дискретные значения пространственной координаты, $k$ дискретное время; вообще говоря, необходимый индекс $i$ у параметров $a=(a_1;a_2;a_3)$ здесь и далее опущен для упрощения записи; $a_1+a_2+a_3=1$, что обеспечивает консервативность схемы. Напомним, что схема называется консервативной, если она отражает на сетке те же законы сохранения, которые присутствовали в исходной дифференциальной задаче. Параметрическая идентификация задачи (1,2) подразумевает получение МНК-оценок неизвестных параметров.

Очевидно, что модель (1), по аналогии с векторной авторегрессией, описывает стационарные процессы, если корни ее характеристического уравнения находятся строго внутри единичной окружности. Также, по аналогии с авторегрессией, при наличии хотя бы одного корня на границе единичной окружности распределенная модель (1) будет описывать нестационарное поведение случайных последовательностей.

Ранее нами было доказано, что наличие единичного корня в спектре матрицы системы (1) соответствует выполнению условия консервативности.

Таким образом, целью нашей работы является анализ и исследование МНК-оценок в случае выполнения условия консервативности и его нарушения, а точнее сравнительный анализ показателей смещения и стандартной ошибки отклонения для полученных МНК-оценок.

## 1. Описание экспериментальной части

Итак, рассмотрим приведенное разностное уравнение (1) в случае, когда условию консервативности выполняется (рассматриваем случай, когда абсолютные значения параметров не превосходят единицы). К значениям переменной $y_i$ в соответствующих узлах сетки была добавлена аддитивная помеха наблюдения $\xi_i^k$, полученная с помощью генератора независимых случайных чисел гауссовского типа с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией $\delta_\xi^2$. Интенсивность помехи $c \cdot \delta_\xi^2$ задавалась на уровнях: $c =$ 0.1, 0.01, 0.001.

С помощью генератора независимых случайных чисел гауссовского типа были получены параметры $a_1, a_2$, параметр $a_3$ находился из условия консервативности (сами параметры генерировались 1000 раз).

В табл. 1 приведены примеры результаты генерации параметров (сумма = 1).

Далее были найдены МНК-оценки параметров для каждого уровня помехи и каждого уравнения, считались смещения и стандартные ошибки оценок параметров, которые потом усреднялись.

На втором этапе генерировались параметры, сумма которых не равна единицы, то есть условие консервативности нарушается. Действия повторялись, т.е. находились МНК-оценки параметров для каждого уровня помехи и каждого уравнения, считались смещения и стандартные ошибки оценок параметров, которые потом усреднялись.

В табл. 2 приведены примеры результата генерации параметров (сумма не равна 1).

Сравнительный анализ приведен ниже в табл. 3, 4.

Таблица 1

*Результаты генерации параметров (сумма равна 1)*

| Параметр | Значение | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0,101106 | 0,724933 | 0,518368 | 0,631071 | 0,938046 |
| $a_2$ | 0,28072 | 0,874622 | 0,116334 | 0,874412 | 0,737125 |
| $a_3$ | 0,618174 | –0,59955 | 0,365298 | –0,50548 | –0,67517 |

Таблица 2

*Результаты генерации параметров (сумма не равна 1)*

| Параметр | Значение | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0,96944 | 0,095585 | 0,949442 | 0,15894 | 0,013347 |
| $a_2$ | 0,792718 | 0,498513 | 0,470791 | 0,580779 | 0,48694 |
| $a_3$ | 0,585633 | 0,445236 | 0,612405 | 0,656767 | 0,918381 |

Таблица 3

*Сравнение смещений МНК-оценок в случае выполнения условия консервативности и не выполнения*

| $c$ | Сумма равна 1 | | | Сумма не равна 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta a_1$ | $\Delta a_2$ | $\Delta a_3$ | $\Delta a_1$ | $\Delta a_2$ | $\Delta a_3$ |
| 0,01 | –0,0018021 | 0,00079339 | 0,00127 | –0,00122 | 0,001306 | 0,000880046 |
| 0,001 | –0,000149 | 0,000075650 | 0,000106 | –0,00014371 | 0,00009 | 0,000103060 |
| 0,0001 | –0,00000459 | 0,0000023027 | 0,0000031 | 0,00012186278 | 0,00013030357 | 0,0000091214 |

Таблица 4

*Сравнение стандартных ошибок МНК-оценок в случае выполнения условия консервативности и не выполнения*

| $c$ | Сумма равна 1 | | | Сумма не равна 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta a_1$ | $\Delta a_2$ | $\Delta a_3$ | $\Delta a_1$ | $\Delta a_2$ | $\Delta a_3$ |
| 0,01 | 0,005994 | 0,00333011 | 0,004161 | 0,0069 | 0,00736 | 0,00536 |
| 0,001 | 0,000842 | 0,000445561 | 0,000587 | 0,000930094 | 0,0009143882 | 0,000707549 |
| 0,0001 | 0,0000817 | 0,0000420954 | 0,000057 | 0,0001218627 | 0,00013030357 | 0,0000912145 |

## Заключение

Анализ табл. 1–4 показывает, что при низком уровне помех в случае выполнения условия консервативности показатели смещения и стандартной ошибки, характеризующие качество МНК-оценок при решении задачи параметрической идентификации, оказываются на порядок лучше.

## Литература

1. *Guo L. Z., Billings S. A., Coca D.* Identification of partial differential equation models for a class of multiscale spatio-temporal dynamical // International Journal of Control. – 2010. – V. 83(1). – P. 40–48.

2. *Xun X., Cao J., Mallick B., Carroll R. J., Maity A.* Parameter Estimation of Partial Differential Equation Models // Journal of the American Statistical Association. – 2013. – V. 108(503). – P. 1009–1020.

3. *Носко В. П.* Эконометрика. Введение в регрессионный анализ временных рядов. – Москва: НФПК, 2002.

4. *Яковлева А. В.* Эконометрика. Конспект лекций. – Москва: Эксмо, 2008.

5. *Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A.* Parameters identification of a distributed dynamical model using combined approach // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – V. 1096.

6. *Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A., Kopytina E. A.* Modeling of Nonstationary Distributed Processes on the Basis of Multidimensional Time Series // Procedia Engineering. – 2017. – V. 201. – P. 501–516.

7. *Копытин, А. В., Копытина, Е. А., Матвеев, М. Г.* Применение расширенного фильтра Калмана для идентификации параметров распределенной динамической системы // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». 2018. – № 3. – P. 44–50.

УДК 004.942 519.6

# К ПРОЕКТИРОВАНИЮ КРУПНОГАБАРИТНОГО РАЗВЕРТЫВАЕМОГО ОБОДНОГО РЕФЛЕКТОРА КОСМИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

**В. Е. Мешковский[1], А. Н. Сдобников[1], Ю. А. Кисанов[2]**

*[1]Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)*
*[2]ОАО «Информационные спутниковые системы имени академика М. Ф. Решетнёва»*

**Аннотация.** Среди крупногабаритных трансформируемых космических антенн в настоящее время наибольшее внимание уделяется разработке антенн с рефлекторами ободного типа. Перед разработчиками ставятся задачи поиска оптимальных вариантов конструкторских решений. В работе рассмотрены различные варианты конструкторского выполнения рефлекторов вантово-стержневой схемы, содержащих кольцевой силовой каркас (силовой обод) с приводом развёртывания и формообразующую структуру отражающей поверхности, объединёнными в единую конструкцию с помощью тросовых и стержневых элементов. Проведены численные расчёты и экспериментальные исследования, позволяющие оценить эффективность раскрытия ободного рефлектора.
**Ключевые слова:** трансформируемый рефлектор, вантово-стержневая схема, силовой обод, моделирование развёртывания, численный анализ, приводы развёртывания.

## Введение

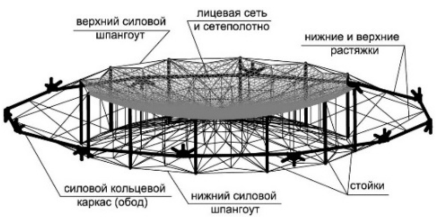
Возрастающие потребности в трансформируемых рефлекторах с апертурой более 12 метров для телекоммуникационных приложений ставят перед разработчиками таких систем задачи поиска наилучших концептуальных решений, отвечающих требованиям минимальной массы, высокой точности отражающей поверхности и необходимой динамической жёсткости. [1–6]. Наибольшее применение нашли рефлекторы ободного типа, которые состоят из складывающегося каркаса обода и закреплённой на нём отражающей поверхности из металлического сетеполотна. Основные параметры рефлектора определяются конструкцией каркаса, поэтому эти рефлекторы принято называть ободными. В работе на примере конструкции крупногабаритного трансформируемого ободного рефлектора рассмотрены варианты топологических схем конструкции с выбором рациональных конструктивных решений узлов и приводов отражателя, отвечающих требованиям экспериментальной отработки создаваемой антенны и её функционирования в эксплуатационном режиме. Рассмотрены два варианта привода развёртывания: пружинный и тросовый.

## 1. Конструктивные особенности конструкции рефлектора и топологические схемы

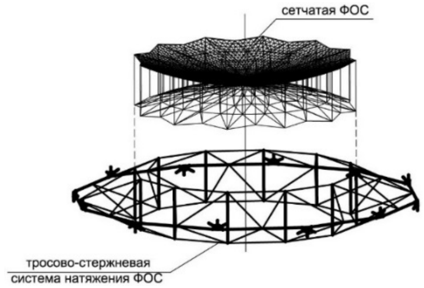
Рефлектор (рис. 1) включает формообразующую структуру (ФОС) отражателя (лицевая и тыльная сети, связанные в узлах растяжками (вантами), определяющими параболическую форму лицевой сети с закреплённым на ней сетеполотном), которая с помощью верхнего и нижнего тросовых шпангоутов закрепляется на 12-ти стержневых стойках. Образованная таким образом вантово-стержневая система «ФОС + стойки» связана с помощью нижних и верхних растяжек с несущим кольцевым каркасом (ободом).

### *1.1. Пружинный привод силового обода*

Силовой обод представляет собой замкнутый многоугольник, состоящий из двенадцати поворотных звеньев-труб, шарнирно связанных между собой через двенадцать опор. В шар-



*а)*



*б)*

*Рис. 1. Общий вид рефлектора вантово-стержневой схемы в развёрнутом состоянии и его модульная структура*

нирах опор обода расположены силовые пружинные приводы с системой сдерживания, обеспечивающие управляемое раскрытие силового обода и связанную с ним с помощью растяжек ФОС из сложенного транспортного состояния в рабочую конфигурацию. Силовой узел привода развёртывания крупногабаритного космического рефлектора представлен на рис. 2.

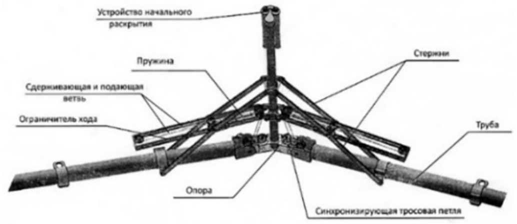


*Рис. 2. Фрагмент силового обода и силовой узел*

Развёртывание рефлектора происходит за счёт упругой энергии пружин, расположенных в силовых узлах и связывающих ползуны с осями (т. B) (рис. 3). Упругая энергия в пружинах накапливается в процессе складывания рефлектора в транспортное положение. В каждый момент времени при развёртывании рефлектора упругая сила предварительно растянутой пружины действует вдоль перемещающейся в пространстве прямой BD, вызывая движение ползуна (т. D) вдоль направляющей в направлении её оси вращения (т. B). Таким образом, эта упругая сила отслеживает взаимное положение точек B и D и является, по существу, следящей силой.

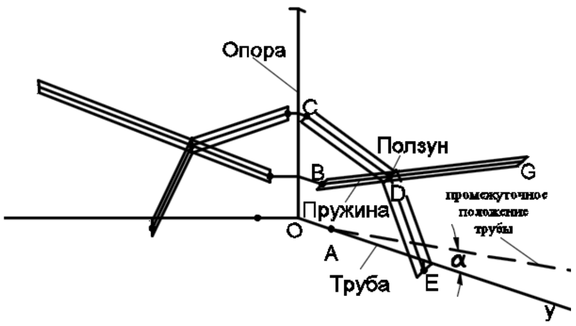


*Рис. 3. Конструктивная схема силового узла*

На первоначальном этапе развёртывания от момента расчековки тросовая система не расправлена и не напряжена, а стойки могут занимать достаточно произвольное положение в пространстве. Это происходит до момента времени, соответствующего некоторому углу наклона $\alpha_0$ труб к плоскости 0xy расправленного обода (рис. 3). Начиная с этого момента времени происходит непосредственное натяжение ФОС с растяжками, стойками и шпангоутами, обеспечивающее формирование единой упругой преднапряжённой конструкции рефлектора. Именно второй этап является определяющим напряжённо-деформированное состояние рефлектора и необходимые характеристики пружинных силовых приводов.

Указанная особенность раскрытия значительно усложняет определение параметров конструкции, так как в этом случае требуется моделировать конструктивно нелинейную систему с последовательным включением в работу отдельных частей конструкции рефлектора с возможным их динамическим взаимодействием.

### *1.2. Постановка задачи определения параметров конструкции силового обода рефлектора*

В случае управляемого достаточно медленного развёртывания динамическими эффектами можно пренебречь и рассматривать задачу в квазистатической постановке. Для возможности решения данной задачи в квазистатической постановке необходимо также определить начальные условия, т. е. положение элементов обода и стоек в начале второго этапе деформирования.

Одним из допущений, принятым в расчётной схеме, является совпадение в данный момент времени срединных плоскостей стоек и силовых узлов. Под срединной плоскостью стоек подразумевается плоскость, проходящая через середины стоек, а под срединной плоскостью силовых узлов — плоскость, относительно которой смежные силовые узлы (совокупность силовых приводов, связанных с одной опорой) располагаются симметрично (рис. 4).

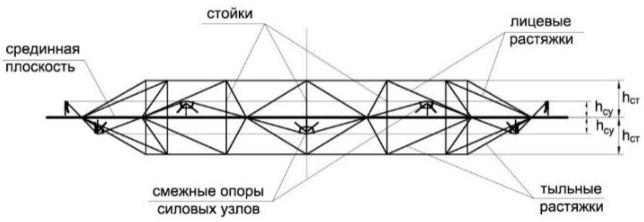
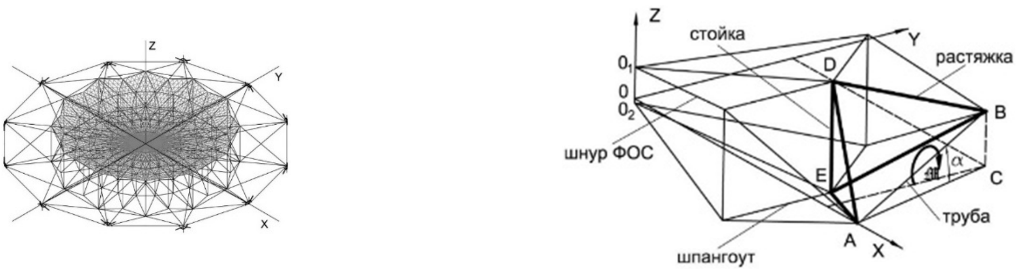


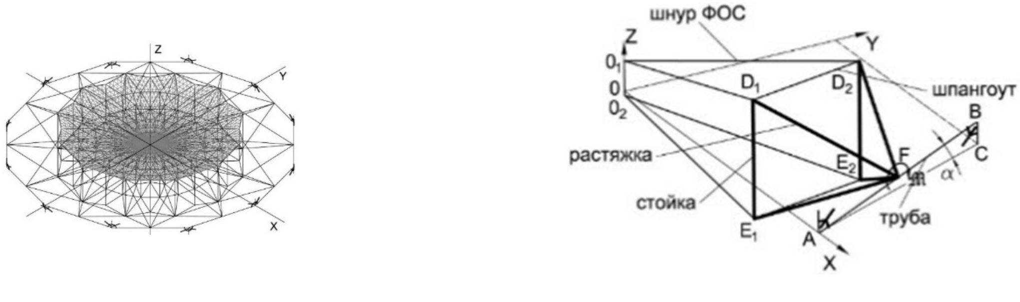

*Рис. 4. Вариант наилучшего расположения срединных плоскостей стоек и силовых узлов*

Второе допущение связано с различными вариантами связи растяжек с ободом. На рис. 5 и рис. 6 показаны два варианта крепления растяжек к силовому ободу: к основаниям опор и к серединам труб, соответственно.




*а)* *б)*

*Рис. 5. Крепление растяжек к основаниям опор*




*а)* *б)*

*Рис. 6. Крепление растяжек к центрам труб*

### *1.3. Результаты численного анализа раскрытия обода рефлектора*

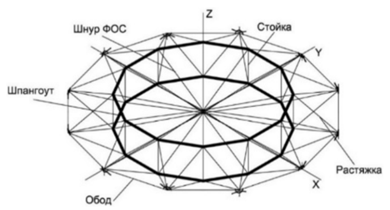
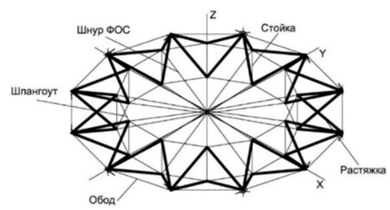
Ниже приведён пример расчёта раскрытия рефлектора диаметром 20 м при различных вариантах закрепления растяжек к ободу и начальном натяжении тросовой системы при

$$\alpha_0 = 5°.$$

Для первого варианта закрепления растяжек характерным является различная их длина (рис. 5), что свойственно такому конструктивному выполнения конструкции рефлектора. В табл. 1, в частности, приведены расчёты удлинений шпангоутов и растяжек. Видно, что удлинения некоторых шпангоутов принимают отрицательные значения, а растяжки натянуты неравномерно.

Таблица 1

*Удлинение шпангоутов и растяжек при раскрытии*

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="4">Удлинения, мм</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Шпангоуты</td><td colspan="2">Растяжки</td></tr>
<tr><td>Лицевой пояс</td><td>Тыльный пояс</td><td>Лицевой пояс</td><td>Тыльный пояс</td></tr>
<tr><td>1</td><td>–1.9679</td><td>51.4683</td><td>18.7195</td><td>43.3007</td></tr>
<tr><td>2</td><td>52.7785</td><td>–3.1173</td><td>44.3197</td><td>18.3109</td></tr>
<tr><td>3</td><td>–2.0997</td><td>51.5112</td><td>18.6790</td><td>43.5929</td></tr>
<tr><td>4</td><td>52.8025</td><td>–3.1720</td><td>44.1701</td><td>18.4175</td></tr>
<tr><td>5</td><td>–2.1275</td><td>51.2890</td><td>18.6254</td><td>43.4487</td></tr>
<tr><td>6</td><td>52.7660</td><td>–3.3750</td><td>44.0282</td><td>17.9453</td></tr>
<tr><td>7</td><td>–1.9805</td><td>51.4498</td><td>18.7553</td><td>43.3603</td></tr>
<tr><td>8</td><td>52.7355</td><td>–3.1972</td><td>44.2641</td><td>18.1395</td></tr>
<tr><td>9</td><td>–2.0619</td><td>51.6060</td><td>18.7464</td><td>43.5327</td></tr>
<tr><td>10</td><td>52.7321</td><td>–3.1264</td><td>44.2112</td><td>18.5053</td></tr>
<tr><td>11</td><td>–2.1400</td><td>51.2913</td><td>18.6105</td><td>43.4745</td></tr>
<tr><td>12</td><td>52.7450</td><td>–3.4320</td><td>44.0058</td><td>17.8743</td></tr>
</table>

Так как гибкие шпангоуты (шнуры) не работают на сжатие, то отрицательные значения удлинений говорят о том, что эти элементы конструкции не натянуты и не несут никакой нагрузки, т.е. не участвуют в работе тросовой системы, что, естественно, не допустимо. В этом случае результаты приведённых расчётов имеют по существу качественный характер и не могут дать исчерпывающий ответ на прочностные свойства конструкции.

Что же касается второго варианта, то в этом случае растяжки будут иметь одинаковую длину, что приводит к однородному деформированию всех элементов тросовой системы и ФОС, т. е. неравномерное натяжение тросовой системы исключается.

Следует также отметить, что при развёртывании обода по первому варианту момент М (рис. 5) от вращения трубы может вызывать закручивание тросовой системы. В то время как во втором варианте (рис. 6) этот момент М не вызовет закрутку тросов при соединении растяжек с трубами с помощью сферических шарниров.

Исходя из изложенного, все расчёты НДС проводились для варианта соединения растяжек с центрами труб. Для исследуемых вариантов конструкции рефлектора с апертурой 12 метров и диаметрами силового обода 16, 18 и 20 метров в табл. 2 представлены расчёты напряжённо-деформированного состояния стержневых и вантовых элементов конструкции методом конечных элементов в программном комплексе *MSC.Patran-Nastran* для различных значений первоначального угла натяжения тросовой системы. Следует отметить, что ввиду сложной сетчатой структуры ФОС на данном этапе численных исследований последняя заменялась ее упругим аналогом в виде шнуров ФОС.

Таблица 2

*Средние напряжения в элементах конструкции обода*

| Диаметр обода, м | $\alpha$ | Средние напряжения в шнурах ФОС, МПа | Средние напряжения в растяжках, МПа | Средние напряжения в шпангоутах, МПа | Внутренние силы в пружинах, Н |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 5 | 62 | 31 | 65.5 | 705 |
| 17 | 5,2 | 62 | 36,5 | 65,5 | 700 |
| 16 | 5,4 | 61,5 | 42,5 | 65 | 720 |
| 15 | 5,9 | 62,5 | 57,5 | 66 | 830 |
| 14,5 | 6,2 | 58,5 | 68 | 62 | 875 |
| 14 | 6,0 | 41 | 66,3 | 43,3 | 660 |

Анализ НДС показывает, что если уменьшать угол $\alpha$ при диаметре 14,5 м, то «не дотянем» шнуры, а если увеличивать — «перетянем» растяжки.

Анализ кинематики развёртывания рефлектора показывает, что шпангоуты и растяжки, соединяющие стойки с силовым ободом, в указанных вариантах включаются в процесс натяжения ФОС различными способами.

Для первого варианта характерным является неодновременное включение в работу шпангоутов и растяжек, что обусловлено самой геометрией связей стоек с опорами обода в начальный момент нагружения ФОС. Такое поведение растяжек и существенно усложняет численный анализ напряжённо-деформированного состояния рефлектора и требует моделирования упругой системы с переменными связями при вероятностном положении всех элементов ФОС и стоек в начальный момент времени. Обеспечить конструктивным способом начальное равноудалённое расположение концов стоек от смежных опор, с которыми стойки связаны с помощью растяжек, по-видимому, не представляется возможным. По нашему мнению, исследование раскрытия рефлектора для данного варианта крепления растяжек возможно только экспериментальным путём.

Второй вариант соединения растяжек с ободом лишён указанного выше недостатка. В данном случае все растяжки одновременно включаются в работу, что позволяет проводить исследования напряжённо-деформированного состояния рефлектора численными методами с использование известных конечно-элементных комплексов.

Таким образом, второй вариант с точки зрения теоретических исследований является предпочтительным, но, по-видимому, что такое техническое решение не является допустимым для конструкций, элементы которых выполнены из полимерных композиционных материалов и нагружены изгибающей нагрузкой.

Здесь следует ещё раз подчеркнуть, что второй вариант позволяет теоретически выбрать необходимые параметры силовых пружин, оценить напряжённо-деформированного состояния всех элементов конструкции рефлектора, а также провести расчёты по минимизации диаметра силового обода, отвечающего требованиям прочности и устойчивости.

## 2. Тросовый привод развёртывания обода рефлектора

Рассмотрен альтернативный вариант привода синхронизированного поворота каждой пары звеньев-труб, шарнирно закреплённых на каждой из двенадцати опорных стоек развёртываемого обода. На рис. 7 изображена предлагаемая конструкция в развёрнутом состоянии с указанием основных элементов.

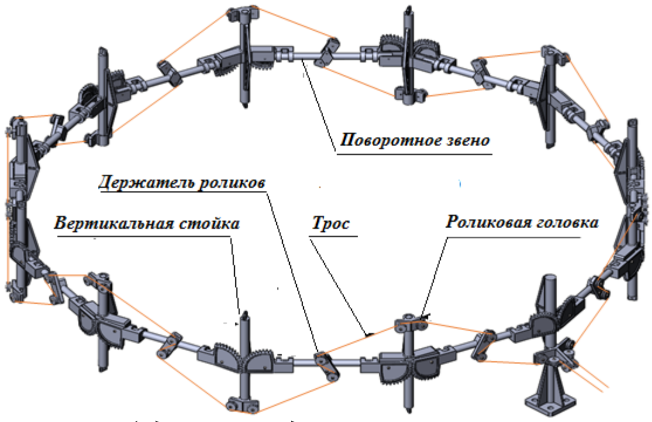



*Рис. 7. Вариант обода с приводом синхронизированного поворота*

Принцип действия привода поворота звеньев основан на создании на каждом развёртываемом поворотном звене вращающего момента пары сил, создаваемой при движении троса в двушкивном держателе роликов, закреплённом на поворотном звене обода как показано на рис. 8.

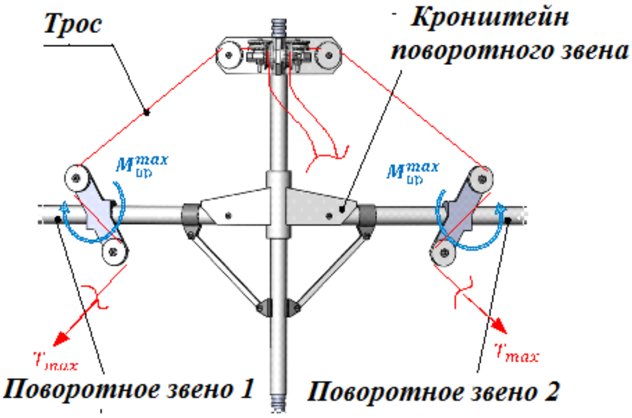



*Рис. 8. Конструкция привода поворота*

Функционирование привода с использованием тросовой системы обеспечивается сокращением длины троса, проходящего через шкивы двушкивных держателей всех звеньев, и намоткой его на барабан с помощью электродвигателя.

Разработана методика расчёта конструктивных параметров тросового привода, в частности, оптимального угла наклона двушкивного кронштейна относительно продольной оси поворотного звена, обеспечивающего заданную величину вращающего момента в конечный момент времени раскрытия обода и начала взаимодействия стоек обода с закреплённой на них растяжек ФОС.

### *2.1. Зависимость момента пары сил от угла наклона держателя относительно оси поворотного звена*

Рассмотрен вопрос о влиянии угла наклона блока с роликами относительно оси поворотного звена на величину создаваемого на нем вращающего момента пары сил при движении троса.

На рис. 9 представлена схема сегмента силового обода для двух вариантов расположения держателя шкивов, через которые проходит трос при раскрытии рефлектора. Для каждого варианта показаны три положения развёртываемого поворотного звена при раскрытии обода, определяемого углом $\varphi$ $\left(0 \le \varphi \le \pi / 2\right)$

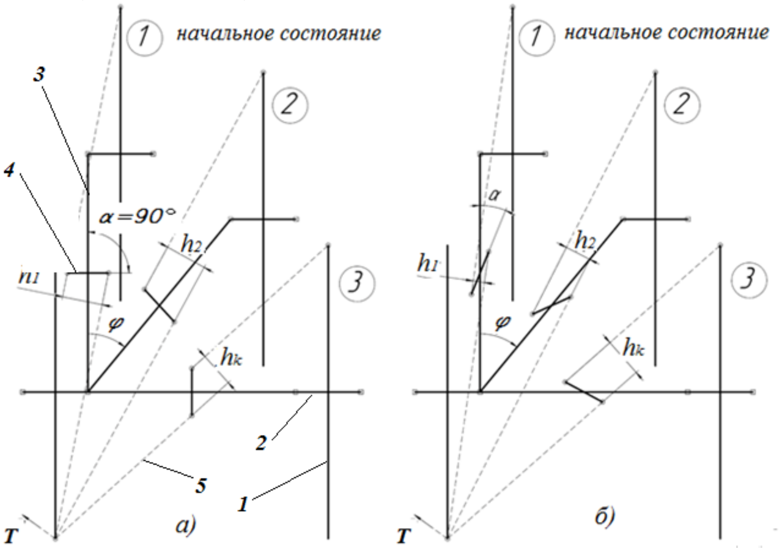



*Рис. 9. К определению плеча момента пары сил при развёртывании поворотного звена обода: а) угол держателя с осью поворотного звена $\alpha = 90°$; б) под углом $\alpha$ к оси поворотного звена; 1 — вертикальная стойка, 2 — кронштейн, 3 — поворотное звено, 4 — держатель шкивов, 5 — трос*

На рис. 9 показан характер изменения плеча пары сил $h_i$. В первом варианте, когда угол наклона держателя шкивов равен $\alpha = 90°$ плечо практически не изменяется. Во втором варианте б), когда угол $\alpha$ отличен от прямого угла, величина плеча возрастает при развороте звена из начального $(\varphi = 0°)$ до конечного положения $(\varphi = 90°)$.

Вариант б) более приемлем, поскольку в этом случае характеризуется переменным моментом пары сил, возрастающим к концу раскрытия, когда упругая ФОС начнет взаимодействовать с раскрывающимся ободом рефлектора. Получается, что схема расположения приводных шкивов перпендикулярно звену (вариант (а)) не лучшая, как с точки зрения компоновки в транспортном положении, так и величины создаваемого момента пары сил.

### 2.2. Закон изменения плеча момента пары сил

Закон изменения плеча момента пары сил при развёртывании поворотного звена можно описать функциональной зависимостью в виде $h = f\left(\alpha, \varphi, \mathit{\Gamma}\right)$, где $\alpha$ — угол наклона держателя шкивов относительно оси поворотного звена, $\varphi$ — угол поворота звена относительно вертикали $(0 \le \varphi \le \pi / 2)$, $\mathit{\Gamma}$ — геометрические размеры элементов силового обода показаны на рис. 10 и сведены в табл. 3.

Поиск функциональной зависимости для нахождения плеча $h = f\left(\alpha, \varphi, \mathit{\Gamma}\right)$ основывается на решении задачи планиметрии, где целью является выразить искомую величину $h$ через известные параметры $\alpha, \varphi, a, b, c$ и $d$, а затем принять одну из них за переменную (например, угол наклона силового звена $\varphi$) для анализа влияния угла $\alpha$ на целевой параметр $h$. Итоговое соотношение для определения $h$ выглядит следующим образом:

$$h = 2d\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{a + c\cos\varphi}{b + c\sin\varphi} - \varphi - \alpha\right).$$

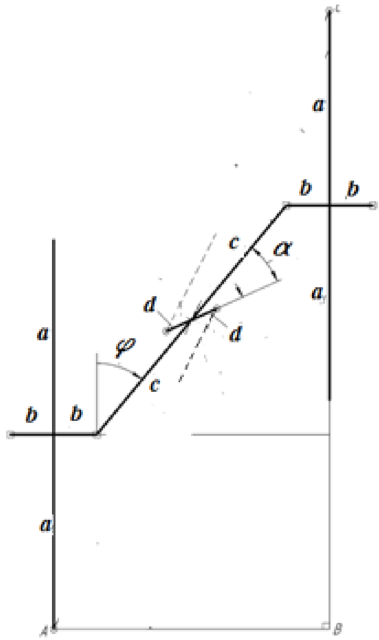



*Рис. 10. Геометрия элементов силового обода*

Таблица 3

*Размеры элементов силового каркаса*

| Элемент обода | Обозначения геометрических размеров элементов обода |
|---|---|
| Вертикальная стойка | $2a$ |
| Кронштейн | $2b$ |
| Поворотное звено | $2c$ |
| Держатель шкивов | $2d$ |

На рис. 11 представлены графики функций изменения плеча $h$ момента пары сил при повороте звена для разных значений угла наклона держателя $\alpha$ относительно его оси.

Расчёт проводился при следующих значениях геометрических размеров макетного образца обода:

$$a = 80 \text{ мм};\ b = 24 \text{ мм};\ c = 66 \text{ мм};\ d = 19 \text{ мм}.$$

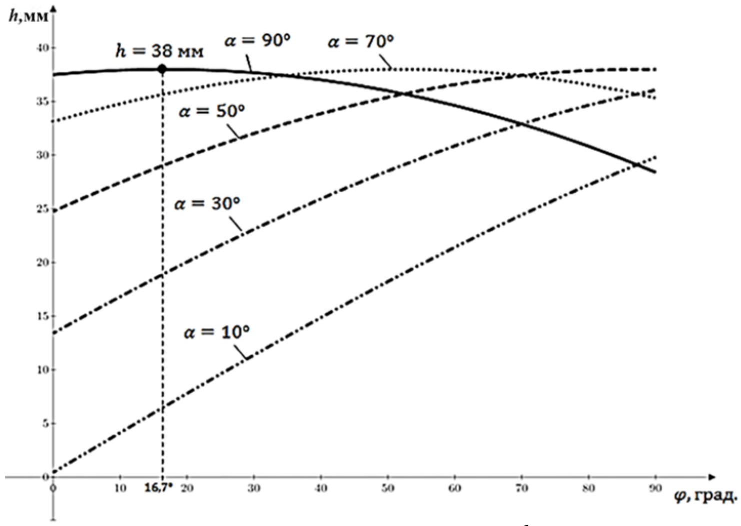



*Рис. 11. Характер изменения плеча момента пары сил $h$ при повороте звена для разных значений угла наклона держателя $\alpha$*

В табл. 4 представлены значения $h$ для начального и конечного положения силового звена для разных значений угла $\alpha$, а также максимальные значения $h_{max}$, достигаемые на рассматриваемом отрезке изменения угла поворота $\varphi$ звена $(0 \le \varphi \le \pi / 2)$.

Таблица 4

*Характерные значения плеч поворота*

| $h$, мм | $\alpha = 90°$ | $\alpha = 70°$ | $\alpha = 50°$ | $\alpha = 30°$ | $\alpha = 10°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(\varphi = 0°)$ | 37,5 | 33,1 | 24,8 | 13,4 | 0,441 |
| $h(\varphi = 90°)$ | 28,4 | 35,3 | 37,9 | 36,1 | 29,8 |
| $h_{max}$ | 38 $(\varphi = 16,7°)$ | 38 $(\varphi = 53,4°)$ | 38 $(\varphi = 87,2°)$ | 36,1 | 29,8 |

Полученные результаты подтверждают предположения, сделанные ранее. Действительно, при угле $\alpha = 90°$ не происходит увеличения плеча *h*, а, следовательно, и роста вращающего поворотное звено момента пары сил. Более того, при $\varphi > 16,7°$ происходит уменьшение плеча *h*. В то же время при меньших углах держателя $\alpha$ (50°;30°;10°) значения функции $h(\varphi)$ возрастают на всем промежутке изменения $\varphi$.

Работа привода с использованием тросовой системы обеспечивается сокращением длины троса, проходящего через шкивы двушкивных кронштейнов всех звеньев, и намоткой его на барабан с помощью электродвигателя. Для проверки и визуализации кинематики раскрытия силового обода с использованием тросового привода изготовлен действующий макет модели развёртываемого рефлектора в масштабе 1:20 в комплектации «силовой обод с тросовым приводом + упругий аналог ФОС». Проведённые серии экспериментов по раскрытию модели подтвердили возможность и повторяемость функционирования тросового привода, равно как и всего процесса развёртывания модели рефлектора.

**Заключение**

Проведенные исследования топологических схем силового каркаса рефлектора ободного типа позволяют обосновать наиболее выгодную конструктивную схему ободного каркаса для дальнейшего этапа проектирования трансформируемого рефлектора. Проведенные эксперименты по раскрытию макета силового обода с тросовым приводом подтвердили возможность его использования в дальнейших исследованиях.

**Литература**


1. *Tibert G.* Deployable tensegrity structures for space applications: Doctoral thesis ‑ Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, Stockholm, Sweden. – 2002– 220 p.

2. Meschini A., Rigato R., Scarozza D. The development of a novel large deployable antenna reflector concept; Proceedings of the 2-nd International Conference «Advanced Lightweight Structures and Reflector Antennas», 1 – 3 October 2014, Sheraton Metechi Palace Hotel, Tbilisi, Georgia. – 2014. – P. 29–42.

3. *Величко А. И., Белов С. В., Пономарев С. В.* Моделирование рефлектора с тензогридным ободом // Решетневские чтения: материалы XVII Междунар. Науч. Конф. (12–14 ноября 2013, г. Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. ЛОГИНОВА ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2013. – С. 61–62.

4. *Пономарев С. В.* Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестник томского государственного университета. 2011. №4. С. 110–119

5. *Краевский П. А., Белов О. А., Морозов И. С.* Механизм выдвижения мачты тросового типа // Решетневские чтения: материалы XXI Междунар. Науч. Конф. (8–11 ноября 2017, г. Красноярск): в 2 частях. Часть 1. – С. 131–132.

6. *Hedgepeth, J. M., Thomson, M. W. and Chae, D.* Design of large lightweight precise mesh reflector structures. Astro Aerospace Corporation Technical Document, AAC-TN-1164, 8 November 1991.

УДК 004.942; 519.6

# МИНИМИЗАЦИЯ РЕСУРСОВ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ УГРОЗ ОТ ВРЕДОНОСНОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

**А. И. Мирзаев, Э. Р. Наврузов**

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент*

**Аннотация.** Рассматривается защита компьютерных систем от вредоносного программного обеспечения. В качестве инструмента для обнаружения угроз используются решение задачи распознавания с непересекающимися классами по прецедентам. Минимизация ресурсов производится за счёт селекции обучающих выборок. При селекции удаляются шумовые объекты и решается задача о минимальном покрытии выборки эталонами. Для вычисления обобщающей способности алгоритмов предлагается использовать меру их компактности, вычисляемую по числу удаляемых шумовых объектов и эталонов минимального покрытия.

**Ключевые слова:** вредоносное программное обеспечение, классификация, объекты-эталоны, шумовые объекты, обобщающая способность, минимальное покрытие.

## Введение

Оперативное принятие решений является одним из ключевых условий для обнаружения вредоносных программ в области информационной безопасности. Одной из основных проблем в этой области является обработка больших объемов данных. Решение проблемы связано с увеличением комбинаторной сложности используемых алгоритмов, изменением структуры отношений объектов из-за проклятия размерности, с реализацией последовательности действий по селекции обучающих выборок.

В данной работе предлагается описание процесса отбора и удаления шумовых объектов для поиска объектов-эталонов минимального покрытия обучающей выборки. Цель формирования множества объектов-эталонов является повышение точности распознавания и минимизация затрат вычислительных ресурсов для обнаружения угроз от вредоносного программного продукта.

## 1. Постановка задачи и методы решения

Считается, что задано множество угроз (объектов) $E_0 = \{S_1, \ldots, S_m\}$, разделенное на $l\ (l \geq 2)$ непересекающихся подмножеств (классов) $K_1, \ldots, K_l$, $E_0 = \bigcup_{i=1}^{l} K_i$. Описание объектов производится с помощью набора из n разнотипных признаков $X(n) = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi$ из которых измеряются в интервальных шкалах, $(n-\xi)$ — в номинальной. На множестве объектов $E_0$ задана метрика $\rho(x, y)$.

Обозначим через $L(E_0, \rho)$ — подмножество граничных объектов классов, определяемое на $E_0$ по метрике $\rho(x, y)$. Объекты $S_i, S_j \in K_t$, $t = 1,...,l$ считаются связанными между собой $(S_i \leftrightarrow S_j)$, если $\{S \in L(E_0, \rho) \mid \rho(S, S_i) < r_i$ и, где $r_i(r_j)$— расстояние до ближайшего от $S_i(S_j)$ объекта из $CK_t(CK_t = E_0 \setminus K_t)$ по метрике $\rho(x, y)$ [1].

Множество $G_{tv} = \{S_{v_1}, ..., S_{v_c}\}$, $c \geq 2$, $G_{tv} \subset K_t$, $v < |K_t|$ представляет область (группу) со связанными объектами в классе $K_t$, если для любых $S_{v_i}, S_{v_j} \in G_{tv}$ существует путь $S_{v_i} \leftrightarrow S_{v_k} \leftrightarrow ... \leftrightarrow S_{v_j}$. Объект $S_i \in K_t, t = 1,...,l$ принадлежит группе из одного элемента и считается несвязанным, если не существует пути $S_i \leftrightarrow S_j$ ни для одного объекта $S_j \neq S_i$ и $S_j \in K_t$ [1].

Считается, что для задания многообразия структур отношений между объектами используется набор базовых метрик $\{\rho(x, y)\}$. Для жадных алгоритмов обучения распознаванию образов определена процедура поиска и удаления шумовых объектов.

Требуется:

– произвести поиск и удалении шумовых объектов из выборки;

– реализовать разбиение объектов классов на непересекающиеся группы по отношению связанности;

– вычислить значения компактности объектов классов и выборки в целом;

– определить минимальное покрытие обучающей выборки объектами-эталонами.

Отметим особенности выбора методов, ориентированных на реализацию требований постановки задачи. Набор шумовых объектов определяется по множеству граничных объектов классов по заданной мере расстояния (метрике) из $\{\rho(x, y)\}$. Метрика $\rho(x, y)$ считается базовой для формирование локальных метрик.

Принцип выбора локальных метрик аналогичен описанному для алгоритма FRIS STOLP [2]. Различие заключается в удалении шумовых объектов и поиске минимального покрытия обучающей выборки объектами-эталонами. Для обоснования выбора алгоритмов распознавания используются две меры компактности. Эти меры позволяет оценивать кластерную структуру объектов классов и обобщающую способность алгоритмов. При вычислении обобщающей способности это является отказом от применения крайне ненадежного для больших объемов данных метода кросс-валидации.

С целью сокращения расходов ресурсов построение ряда алгоритмов классификации производится по специально отобранным подмножествам объектов обучающей выборки. Называются эти подмножества опорными объектами. Характерной особенностью этих объектов является их расположение вблизи границ классов. Такая «дислокация» увеличивает риск использования шумовых выбросов в качестве опорных объектов. Шумовые выбросы являются причиной снижения точности классификации и увеличения объёма хранимых для обучения прецедентов данных.

Применение жадных алгоритмов при обучении при наличии шумовых объектов являются основание для отказа от использования метрического алгоритма FRIS STOLP. Предлагается разделить процесс обучения на два последовательных этапа. На первом этапе производится поиск и удаление шумовых объектов. Использование жадного алгоритма на втором этапе сводится к решению задачи минимального покрытия объектами-эталонами (опорными объектами) выборки без шумовых выбросов.

Очевидна связь шумовых выбросов с структурой отношений объектов. Многообразием факторов [1], влияющим на структуру отношений, могут быть меры расстояния, способ нормирования данных, критерий отбора информативных признаков и т. д.

Анализ влияние перечисленных факторов на формирование данных для обучения можно провести через меру компактности классов и выборки целом. Существенной особенностью этой меры является учёт влияния шумовых объектов на структуру отношений объектов.

Отнесение объекта к числу шумовых основано на проверке двух условий:

– объект является граничным для своего класса по заданной метрике $\rho(x, y)$;

– в определяемой области (окрестности объекта) признакового пространства число объектов из своего класса меньше чем число объектов из противоположных классов.

## 2. Вычислительный эксперимент

Для вычислительного эксперимента взята база угроз spambase [3], состоящая из 4595 объектов, описанных с 57 признаками. Для проведения вычислительного эксперимента по поиску шумовых объектов использовались метрики Евклида, Хэмминга и Чебешева. Значения мер компактности с учётам удаления шумовых объектов приводятся в табл. 1.

Таблица 1

*Значения мер компактности после удаления шумовых объектов*

| Признаковое пространство | Метрика | Число шумовых объектов | Количество групп ($K_1$,$K_2$) | Компактность по | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $K_1$ | $K_2$ | Выборке |
| Исходное | Евклида | 680 | 230 | 0.2540 | 0.6540 | 0.4975 |
| | Хэмминга | 564 | 179 | 0.7011 | 0.7277 | 0.7172 |
| | Чебешева | 793 | 258 | 0.3405 | 0.6209 | 0.5098 |
| Нормированное в [0,1] | Евклида | 405 | 48 | 0.9275 | 0.9726 | 0.9548 |
| | Хэмминга | 347 | 66 | 0.9380 | 0.9767 | 0.9614 |
| | Чебешева | 439 | 63 | 0.9221 | 0.8856 | 0.8999 |

Анализ результатов из табл. 1 показывает, что лучшие показатели компактности по структуре отношений объектов получены в нормированном в [0;1] признаковом пространстве и мере расстояние по метрике Хемминга.

Для сравнения обобщающей способности алгоритмов использовалось мера компактности. Результаты эксперимента демонстрируется как решение задачи минимального покрытия выборки объектами-эталонами в табл. 2. Для числа объектов-эталонов в скобках указано (число эталонов класса $K_1$ число эталонов класса $K_2$).

Таблица 2

*Минимальное покрытие выборки объектами-эталонами*

| Признаковое пространство | Метрика | Число объектов | | Среднее по эталону |
|---|---|---|---|---|
| | | Шумовой | Эталон | |
| Исходное | Евклида | 680 | 426(219,207) | 7.8301 |
| | Хэмминга | 564 | 404(207,197) | 8.8849 |
| | Чебешева | 793 | 435(189,246) | 7.2318 |
| Нормированное в [0,1] | Евклида | 405 | 207(97,110) | 18.4574 |
| | Хэмминга | 347 | 228(104,124) | 17.2245 |
| | Чебешева | 439 | 219(81,138) | 17.1641 |

Результаты вычислительного эксперимента показали (табл.2), что наиболее высокая компактность при определении объектов-эталонов минимального покрытия обучающей выборки было достинута при использовании метрики Евклида. Оптимальное число эталонов позволяет повышать обобщяющую способность алгоритмов расходовать минимальное количество вычислительных ресурсов при обнаружении вредоносного программного обеспечения в задачах информационной безопасности.

## Заключение

Обоснована методика выбора алгоритмов распознавания для классификации угроз от вредоносного программного продукта. Селекции обучающей выборки за счёт удаления шумовых объектов и минимального покрытия объектами-эталонами позволяет уменьшит расход вычислительных ресурсов и повышает точность распознавания. Перспективным направлением исследований является подбор и обоснование выбора эвристик для удаления шумовых признаков.

## Литература

1. *Ignat'ev N. A.* Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2018. – V. 28, № 4. – P. 590–597.

2. *Загоруйко Н. Г, Кутненко О. А., Зырянов А. О., Леванов Д. А.* Обучение распознаванию образов без переобучения // Машинное обучение и анализ данных. – 2014. – Т. 1, № 7. – С. 891–901.

3. http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets

УДК 004.021:510.522

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ПОИСКА ПОДСТРОКИ В ТЕКСТЕ С УЧЕТОМ СФЕРЫ ИХ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ

**В. А. Михайлов[1], Ф. М. Аблаев[1], Т. А. Михайлова[2]**

*[1]Казанский (Приволжский) федеральный университет*
*[2]Башкирский государственный университет*

**Аннотация.** В статье представлены результаты исследования алгоритмов, решающих задачу поиска подстроки в тексте. Вследствие уточнения асимптотических оценок сложности детерминированных алгоритмов в рамках выбранной модели вычисления и сравнительного анализа алгоритмов построен вероятностный алгоритм поиска. Составлена программная реализация и проведены вычислительные эксперименты, моделирующие практические применения исследуемых алгоритмов. Результаты экспериментов отражают рекомендуемые назначения и способы применения каждого алгоритма.
**Ключевые слова:** алгоритм, поиск, сложность, оценка, алгоритм Бойера — Мура, шаблон, алгоритм Рабина — Карпа, вероятностный алгоритм, анализ, эксперимент.

## Введение

Поиск подстроки в тексте — одна из популярных задач поиска информации, для решения которой существует множество алгоритмов. Её часто сравнивают с задачей «поиска иголки в стоге сена» и описывают следующим образом.

*Пусть задан текст t и шаблон (строка) p. Необходимо определить, входит ли некоторый заданный шаблон символов в исходный текст. В случае вхождения — найти массив номеров символов, начиная с которого p содержится в t, иначе — вывести пустой массив.*

Данная задача встречается очень часто в виде функции во множестве привычных приложений, таких как текстовые редакторы, браузеры, поисковые системы, СУБД, системы определения плагиата, системы анализа хакерских атак и т. п. По этой причине актуальной является программная реализация детерминированных и вероятностного алгоритмов поиска подстроки для проведения экспериментально-сравнительного анализа, что и представляет цель проведенного исследования.

## 1. Сравнительный анализ алгоритмов поиска, построение вероятностного алгоритма

### *1.1. Оценка сложности детерминированных алгоритмов поиска*

В ходе работы были изучены следующие детерминированные алгоритмы поиска подстроки:
- простейший последовательный алгоритм поиска;
- алгоритм Рабина — Карпа;
- алгоритм Кнута — Морриса — Пратта;
- алгоритм Бойера — Мура.

По причине того, что в первую очередь интересует работа алгоритмов при использовании приближённых к практике машине и данных, необходимо выбрать наиболее подходящую модель вычисления и получить оценки сложности на данной модели. Для этого была выбрана модель однопроцессорной машины с произвольным доступом к памяти, так как она хорошо описывает работу современных процессоров.

В результатах оценивания сложности алгоритмов (табл. 1) используются следующие обозначения: $O(\ldots)$ — асимптотически верхняя оценка сложности алгоритма, $|\Sigma|$ — мощность алфавита $\Sigma$, $n$ — длина текста, $m$ — длина шаблона (строки).

Таблица 1

*Оценки сложности детерминированных алгоритмов поиска подстроки в тексте*

| Название | Сложность предварительных вычислений | Сложность фазы сравнения | Сложность сравнения в наихудшем случае |
|---|---|---|---|
| Простейший алгоритм поиска | 0 | $O(m(n-m+1))$ | $O(n^2)$ |
| Алгоритм Кнута — Морриса — Пратта | $O(m)$ | $O(n)$ | $O(n+m)$ |
| Алгоритм Бойера — Мура | $O(m + \lvert\Sigma\rvert)$ | $O(n)$ | $O(n+m+\lvert\Sigma\rvert)$ |
| Алгоритм Рабина — Карпа | $O(m)$ | $O(n)$ | $O(m(n-m+1))$ |

### *1.2. Построение вероятностного алгоритма*

Вследствие изучения вышеупомянутых алгоритмов и получения оценок сложности их работы, был построен вероятностный алгоритм на основе выполнения алгоритма Рабина — Карпа. Недостатками других рассматриваемых алгоритмов является проблема плохой модифицируемости получения универсальной для разных шаблонов префикс-функции и таблицы хороших суффиксов, так как они полностью зависят от содержания текста шаблона.

Известно, что проблема данного алгоритма может заключаться в возникновении коллизии хешей разных строк, вследствие чего алгоритм иногда может выдавать неверный результат. Детерминированный алгоритм Рабина — Карпа решает проблему неверного ответа путём посимвольной перепроверки шаблона и рассматриваемого фрагмента текста, чьи хеши совпадают. Однако временная сложность в худшем случае может стать не лучше средней сложности простейшего алгоритма последовательного поиска. Поэтому в качестве основной идеи построения вероятностного алгоритма замена посимвольной проверки на повторный вызов алгоритма, используя другую хеш-функцию. Для упрощения был использован кольцевой полиномиальный хеш, где предварительно случайным образом выбиралось полиномиальное основание. Это позволяет уменьшить временную сложность алгоритма в худшем случае до $O(n+m)$.

## 2. Программная реализация алгоритмов

### *2.1. Используемые программные средства*

В ходе изучения вышеописанных алгоритмов на языке программирования Java была построена реализация, которая тестировалась на ЭВМ, имеющей следующую конфигурацию:

- процессор Intel Core i5-9300h, 2.3 GHz;
- оперативная память DDR4 16 GB DRAM 2666 MHz (двуканальный режим памяти).

Результаты напрямую зависят от характеристик и загрузки процессора фоновыми приложениями, чтения-записи информации в ОЗУ. Следовательно, эксперименты были проведены повторно несколько раз и в качестве конечного результата бралось среднее по выборке полученных результатов выполнения соответствующего алгоритма.

### *2.2. Вычислительные эксперименты*

Были проведены следующие вычислительные эксперименты: поиск одного и нескольких шаблонов неупорядоченной базе данных, содержащей в себе более чем 107 строк (табл. 2), и в тексте книги (в качестве примера был взят первый том художественного произведения Толстого Л. Н. «Война и мир», содержащий 1274973 символа).

Таблица 2

*Фрагмент неупорядоченной базы данных*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8536 | 22802 | 3212 | 55444 | 2016-12-02 | 17:52:32+03 |
| 672360 | 64356 | 139276 | 7254 | 2012-04-25 | 22:37:38+06 |
| 96995 | 32916 | 234170 | 1203 | 2004-12-31 | 05:54:51+04 |
| 658474 | 19236 | 22357 | 3379 | 2012-02-11 | 14:15:29+02 |
| 1128986 | 63760 | 283206 | 72407 | 2015-11-24 | 13:22:43+05 |

Результаты экспериментально-сравнительного анализа (табл. 3–4) показали, что алгоритмы Бойера — Мура и Кнута — Морриса — Пратта имеют значительные преимущества в одиночном поиске и часто используются в повседневных приложениях (текстовые редакторы, поиск в странице браузера и т. д.), однако плохо модифицируются для параллельных и вероятностных вычислений, что даёт преимущество алгоритму Рабина — Карпа там, где необходима частая и параллельная обработка фрагментов в часто использующихся данных (системы антиплагиата, системы учёта отзывов, анализ хакерских атак). Простейший алгоритм последовательного поиска полезен для ознакомления и практически возможен в использовании поиска в документе небольшого объёма.

Таблица 3

*Среднее время выполнения экспериментов без учёта предварительных вычислений*

| Название | Среднее время выполнения (мс) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Поиск в неупорядоченной базе данных | | Поиск в тексте книги | |
| | 1 шаблон | 5 шаблонов | 1 шаблон | 5 шаблонов |
| Простейший алгоритм поиска | 196 | 654 | 14 | 325 |
| Алгоритм Кнута — Морриса — Пратта | 132 | 350 | ~2.52 | 11 |
| Алгоритм Бойера — Мура | 89 | 359 | 7 | 25 |
| Алгоритм Рабина — Карпа | 57 | 240 | ~1.67 | 8 |
| Вероятностный алгоритм | 53 | 179 | ~1.62 | 7 |

Таблица 4

*Среднее время выполнения экспериментов с учётом предварительных вычислений*

| Название | Среднее время выполнения (мс) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Поиск в неупорядоченной базе данных | | Поиск в тексте книги | |
| | 1 шаблон | 5 шаблонов | 1 шаблон | 5 шаблонов |
| Простейший алгоритм поиска | 196 | 654 | 14 | 325 |
| Алгоритм Кнута — Морриса — Пратта | 154 | 467 | 4 | 18 |
| Алгоритм Бойера — Мура | 113 | 484 | 9 | 33 |
| Алгоритм Рабина — Карпа | 757 | 944 | 16 | 22 |
| Вероятностный алгоритм | 3653 | 3838 | 67 | 72 |

## Заключение

В результате можно сделать вывод, что каждый существующий алгоритм поиска подстроки имеет свои плюсы и минусы, вследствие чего имеет свою наиболее подходящую прикладную область применения по сравнению с другими аналогами. Разные результаты алгоритмов в той или иной ситуации при близких асимптотических оценках временной сложности возникают вследствие опускания констант, которые могут сыграть роль на практическом времени выполнения.

## Литература

1. *Гасфилд, Д.* Строки, деревья и последовательности в алгоритмах: информатика и вычислительная биология / Д. Гасфилд. – Санкт-Петербург: Невский Диалект, 2003. – 654 с.

2. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Х. Кормен, Ч. Е. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн. – 3-е изд. – Москва : Вильямс, 2013. – 1328 с.

3. *Смит, Б.* Методы и алгоритмы вычислений на строках / Б. Смит. – Москва, 2006. – 496 с.

4. *Rabin, M. O.* Efficient randomized pattern-matching algorithms / Rabin M. O., Karp R. M. // IBM Journal of Research and Development. – IBM, 1987. – Т. 31, № 2. – P. 249–260.

5. *Rabin, M. O.* Fingerprinting by random polynomials / Rabin M. O. // Tech Report TR-CSE-03-01. – Center for Research in Computing Technology, Harvard University, 1981. – P. 1–14.

УДК 519.245

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО В МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ПОЛИМЕРИЗАЦИИ ИЗОПРЕНА В ПРИСУТСТВИИ ПОЛИЦЕНТРОВОЙ ТИТАНСОДЕРЖАЩЕЙ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**С. А. Мустафина[1], Т. А. Михайлова[1], Э. Н. Мифтахов[1], В. А. Михайлов[2], Е. С. Подвальный[3]**

*[1]Башкирский государственный университет*
*[2]Казанский (Приволжский) Федеральный университет*
*[3]Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ*

**Аннотация.** В статье предложен подход моделирования периодического процесса полимеризации в условиях полицентровости каталитической системы, который основан на методе Монте-Карло. Продемонстрированы результаты апробации алгоритма на примере процесса полимеризации изопрена в присутствии титансодержащей каталитической системы, которая лежит в основе промышленного производства изопренового синтетического каучука. В основе алгоритма лежит имитация роста каждой макромолекулы формируемого полимера и отслеживание процессов, происходящих с ней. Построенная модель позволяет исследовать молекулярно-массовые характеристики полимера в зависимости от конверсии мономеров, проводить расчет молекулярно-массового распределения получаемого продукта в любой момент времени ведения процесса.

**Ключевые слова:** полимеризация, изопрен, титансодержащая каталитическая система, полицентровость, периодический процесс, моделирование, статистический подход, метод Монте-Карло, полидисперсность, молекулярно-массовое распределение.

## Введение

В настоящее время ассортимент синтетических каучуков достаточно широк. Такой ассортимент каучуков обусловлен тем, что натуральный каучук имеет низкие качественные показатели, пригодные для создания резинотехнических изделий. В связи с этим исследования процессов полимеризации представляют собой большой интерес как для современной науки, так и для мирового производства синтетического каучука. Эта область исследования дает наилучшие возможности для изучения статистических особенностей и факторов, влияющих на процессы полимеризации, и позволяет с высокой точностью описывать физические процессы [1].

В основе производства синтетических каучуков (изопреновых, бутадиеновых, бутадиен-стирольных, бутадиен-нитрильных и др.) лежат процессы полимеризации и поликонденсации. Одним из наиболее распространенных полимерных материалов промышленного назначения является каучук на основе изопрена. Но его производство представляет собой сложный технологический процесс, проводящийся в присутствии катализаторов типа Циглера — Натта.

В рамках работы рассмотрим процесс растворной полимеризации изопрена на каталитической системе $TiCl_4$-nИПС-ТИБА-ПП (ИПС — изопропиловый спирт, ТИБА — триизобутилалюминий, ПП — пиперилен). Исследуемый процесс осуществляется в периодическом режиме. Промышленное производство полиизопрена предполагает предварительное гидродинамическое воздействие на каталитический комплекс с применением трубчатого турбулентного аппарата. Результатом этого воздействия чаще других становится изменение характера полицентровости [2]. В частности, в рассматриваемом случае выявляются два типа активных центров.

Изучение данного процесса становится возможным при построении математической модели. Моделирование позволяет не только прогнозировать характеристики конечного продукта в зависимости от рецептуры и условий ведения процесса, но и проводить его оптимизацию. Следовательно, важной задачей на сегодняшний день является изучение и модификация качественных показателей продуктов полимеризации с помощью методов математического моделирования.

## 1. Методы исследования

При математическом описании процессов полимеризации условно выделяются кинетический и статистический подходы. Кинетический подход заключается в составлении и решении уравнений материального баланса для концентраций всех типов молекул, участвующих в процессе полимеризации [3]. Получаемая система дифференциальных уравнений имеет практически бесконечную размерность и решается с помощью различных упрощающих методов, таких как метод моментов и метод производящих функций [4]. Данный подход может быть успешно использован для расчета усредненных молекулярных характеристик полимера.

При использовании статистического подхода происходит моделирование растущей полимерной цепи при помощи случайных величин. В основе данного подхода лежит имитация роста каждой молекулы полимера: каждое звено растущей полимерной цепи рассматривается как конкретный случайный процесс условного движения вдоль полимерной молекулы, а вероятность реализации случайного процесса считается равной доле соответствующих ей молекул среди всех остальных в реакционной системе.

Статистический подход позволяет исчерпывающим образом описать детальную структуру макромолекул в терминах нескольких вероятностных параметров [5]. Такой подход к моделированию полимеризационных процессов лежит в основе имитационного метода Монте-Карло. Математическая модель при этом представляет собой совокупность частиц, соответствующих отдельным молекулам и макромолекулам, что дает возможность накапливать информацию о количестве и длине образующихся макромолекул полимера и получать действительные значения молекулярных характеристик продукта полимеризации в любой момент времени, что позволяет наблюдать за течением процесса в динамике.

Используем статистический подход к моделированию периодического процесса растворной полимеризации изопрена. Предварительно необходимо выписать кинетическую схему полимеризации изопрена в присутствии полицентровой каталитической системы [6]:

1. Рост цепи:

$$P_i^j + M \xrightarrow{k_p^j} P_{i+1}^j,$$

2. Передача цепи на мономер:

$$P_i^j + M \xrightarrow{k_m^j} Q_i + P_1^j,$$

3. Передача цепи на алюминийорганическое соединение (АОС):

$$P_i^j + A \xrightarrow{k_a^j} Q_i + P_1^j,$$

4. Гибель активных центров:

$$P_i^j \xrightarrow{k_d^j} Q_i,$$

5. Переход активных центров друг в друга:

$$P_i^1 \xrightarrow{k_c^{12}} P_i^2,$$

$$P_i^2 \xrightarrow{k_c^{21}} P_i^1,$$

где $M$ — мономер, $A$ — концентрация АОС, $j, l = 1, 2$ — характеризует тип активного центра, $P_i^j$ — активная («растущая») цепь полимера длиной $i$ на $j$ типе активных центров; $Q_i$ — неактивная («мертвая») цепь полимера длиной $i$, $k_p^j$, $k_m^j$, $k_a^j$, $k_d^j$, $k_c^{jl}$ — константы, характеризующие скорость реакции роста цепи, передачи на мономер, передачи на алюминийорганическое соединение (АОС), гибели активных центров и перехода активных центров друг в друга, соответственно.

Ранее в работе [7] был представлен алгоритм моделирования периодического процесса сополимеризации бутадиена со стиролом методом Монте-Карло, реализация которого основана на методе, предложенном в 1977 г. физиком Gillespie D. для моделирования колебательных процессов. Основными этапами предлагаемого алгоритма являются:

1) вычисление скорости каждой реакции — расчет осуществляется согласно закону действующих масс, в качестве концентраций мономера и алюминийорганического соединения используется количество частиц вещества в системе, а для активных и неактивных макромолекул полимера концентрация представляет собой количество цепей данного вида в системе;

2) вычисление вероятностей осуществления каждой реакции в данный момент времени;

3) генерация равномерно распределенного случайного числа на отрезке от 0 до 1 и определение типа разыгранной реакции — вероятности последовательно располагаются на отрезке от 0 до 1, заполняя его полностью, далее генерируется случайное число и определяется часть отрезка, в которую число попадает; выбранный отрезок соответствует реакции, которую необходимо имитировать.

4) имитация разыгранной реакции.

Данный процесс повторяется циклическим до достижения необходимого значения конверсии мономера.

Имитация выполняемой реакции основана на изменении общего количества молекул участвующих в реакции реагентов. Стоит отметить, что молекулы мономера и алюминийорганического соединения будем характеризовать только их количеством, а макромолекулы полимера — числом, которое отражает количество звеньев в цепи. Программная реализация алгоритма подразумевает, что все макромолекулы целесообразно хранить в динамическом массиве, а так как исследуемому процессу характерно наличие нескольких типов активных центров, это требует для каждого типа собственного динамического массива [8]. Описанная структура позволяет получать следующую информацию: общее число цепей полимера, длину каждой цепи, среднечисленную и среднемассовую молекулярные массы полимера, молекулярно-массовое распределение и другие характеристики.

Опишем, каким образом происходит имитация реакций на примере отдельных стадий:

1. Рост цепи:

• уменьшение числа молекул мономера на единицу;

• выбор случайной цепи в массиве активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра;

• увеличение длины выбранной цепи сополимера на единицу.

2. Передача цепи на мономер:

• уменьшение числа молекул мономера на единицу;

• выбор случайной цепи в массиве активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра;

• добавление выбранной цепи в массив неактивных цепей;

• удаление выбранной цепи из массива активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра;

• добавление цепи единичной длины в массив активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра.

3. Передача цепи на алюминийорганическое соединение:

• уменьшение числа молекул алюминийорганического соединения на единицу;

• выбор случайной цепи в массиве активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра;

• добавление выбранной цепи в массив неактивных цепей;

• удаление выбранной цепи из массива активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра;

• добавление цепи единичной длины в массив активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра.

4. Гибель активных центров:

• выбор случайной цепи в массиве активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра;

• добавление выбранной цепи в массив неактивных цепей;

• удаление выбранной цепи из массива активных цепей, соответствующих $j$-му типу активного центра.

5. Переход активных центров друг в друга:

• выбор случайной цепи в массиве активных цепей, соответствующих первому (второму) типу активного центра;

• добавление выбранной цепи в массив активных цепей, соответствующих второму (первому) типу активного центра;

• удаление выбранной цепи из массива активных цепей, соответствующих первому (второму) типу активного центра.

## 2. Вычислительный эксперимент

Авторами статьи разработан алгоритм для численного исследования периодического процесса полимеризации изопрена в присутствии полицентровой каталитической системы на основе титана. Алгоритм реализован на языке программирования Visual C++ и может быть использован для моделирования процессов полимеризации, в присутствии каталитических систем, содержащих до 4 типов активных центров

Для иллюстрации работы программы на основе предложенного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент по исследованию процесса полимеризации изопрена в присутствии титансодержащей каталитической системы. При этом использовались условия ведения процесса, соответствующие лабораторным [6]. Исходя из условий проведения эксперимента были получены мольные концентрации реагентов:

– мольная концентрация изопрена — 1.388 моль/л;

– мольная концентрация алюминийорганического соединения — 0.0014 моль/л;

– мольная концентрация катализатора — 0.0014 моль/л.

При этом стоит отметить, что концентрация активных центров задавалась в количестве 2.2 % от закладываемого объема катализатора в мольном соотношении с преобладающим функционированием активных центров второго типа, доля которого составляет 0.92.

Построенная модель позволяет прогнозировать значения молекулярных характеристик полимера. Ранее аналогичный вычислительный эксперимент был проведен на основе моделирования посредством применения кинетического подхода [6]. Результаты моделирования представлены на рис. 1, а именно — зависимость значений коэффициента полидисперсности полимера от конверсии мономеров (доли превращения мономера в полимер). Полидисперсность полимера выражается отношением среднемассовой молекулярной массы полимера к среднечисленной молекулярной массе. Результаты статистического подхода показывают удовлетворительное согласование с результатами кинетического подхода. Относительная разница между расчетными значениями составляет не более 18 % (максимальное значение соответствует конверсии 10 %), а по завершении процесса относительная разница составляет 4 % (при конверсии 65 %).

## 3. Результаты и обсуждение

Любой образец полимера характеризуется присутствием макромолекул различных размеров, следовательно, для оценки качества образующегося продукта важное значение имеет картина молекулярно-массового распределения. Молекулярно-массовое распределение

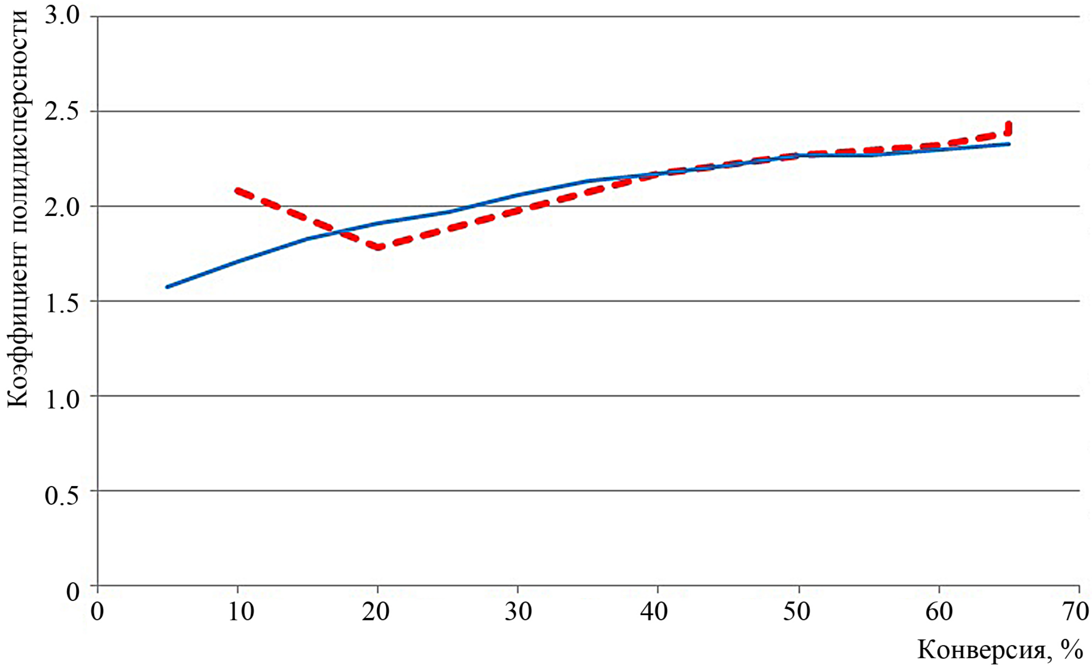



*Рис. 1. Зависимость значений коэффициента полидисперсности полимера от конверсии мономеров (линия — результаты статистического подхода, пунктир — результаты кинетического подхода)*

демонстрирует соотношение количеств макромолекул различной молекулярной массы, а коэффициент полидисперсности позволяет характеризовать ширину молекулярно-массового распределения. Так как рассматриваемый в рамках вычислительного эксперимента процесс протекает в условиях полицентровости, то было построено общее молекулярно-массовое распределение полимера (рис. 2), а также молекулярно-массовое распределение отдельно для каждого типа активного центра (рис. 3–4). На рисунках показано сравнение кривых молекулярно-массового распределения полиизопрена, для построения которых применялся как кинетический подход (пунктир — модельное распределение), так и подход на основе метода Монте-Карло. Для построения молекулярно-массового распределения с использованием статистического подхода требуется произвести фракционирование макромолекул полученного полимера по их массе (каждая фракция охватывает определенный интервал молекулярной массы) и на основе статистических данных построить зависимость массовой доли каждой фракции от молекулярной массы. Вычисление массовой доли можно производить как отдельно для каждого типа активного центра, так и суммарно.

Анализ кривых на рис. 2–4 позволяет выявить ярко выраженное соответствие построенных распределений. Присутствующие колебания и шумы для кривой молекулярно-массового распределения, построенного посредством моделирования методом Монте-Карло, объясняются особенностями метода и величиной взятого объема макромолекул для проведения расчета.

## Заключение

Таким образом, представленный в работе подход моделирования полимеризационных процессов в условиях полицентровости методом Монте-Карло и разработанный программный продукт позволяют провести исследование свойств продукта полимеризации изопрена, протекающего в периодическом режиме в присутствии полицентровой титансодержащей каталитической системы. Так как в основе данного подхода лежит имитация роста каждой макромолекулы и отслеживание процессов, происходящих с ней, то это позволяет накапливать

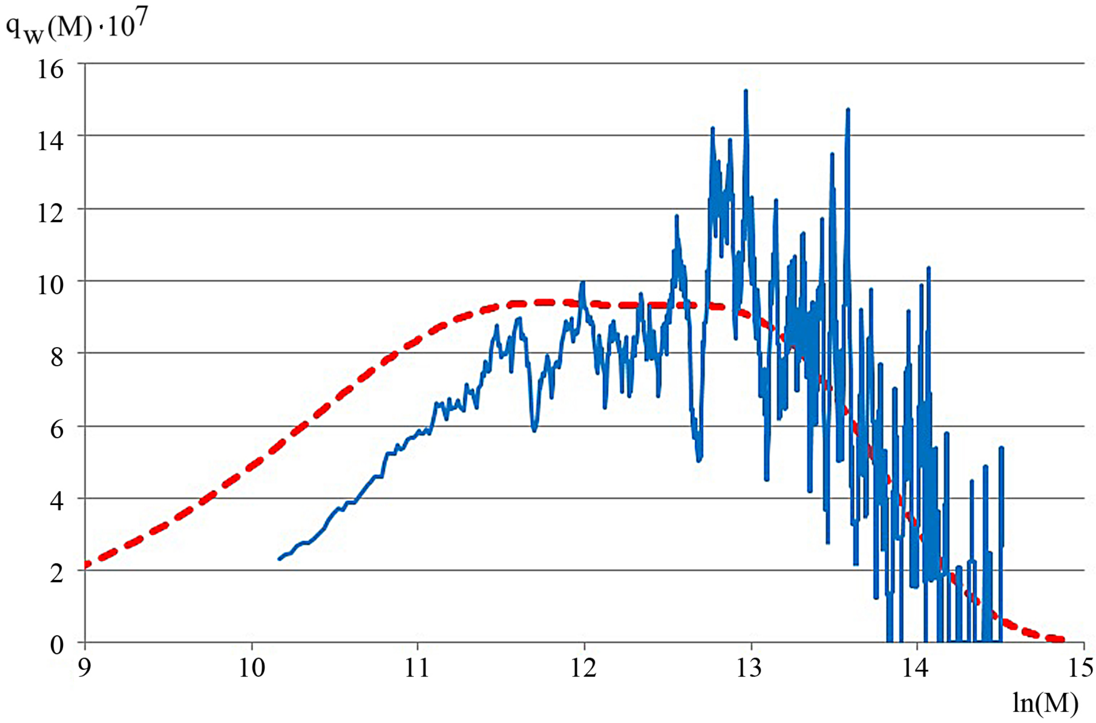



*Рис. 2. Общее молекулярно-массовое распределение полимера (линия — результаты статистического подхода, пунктир — модельное распределение)*

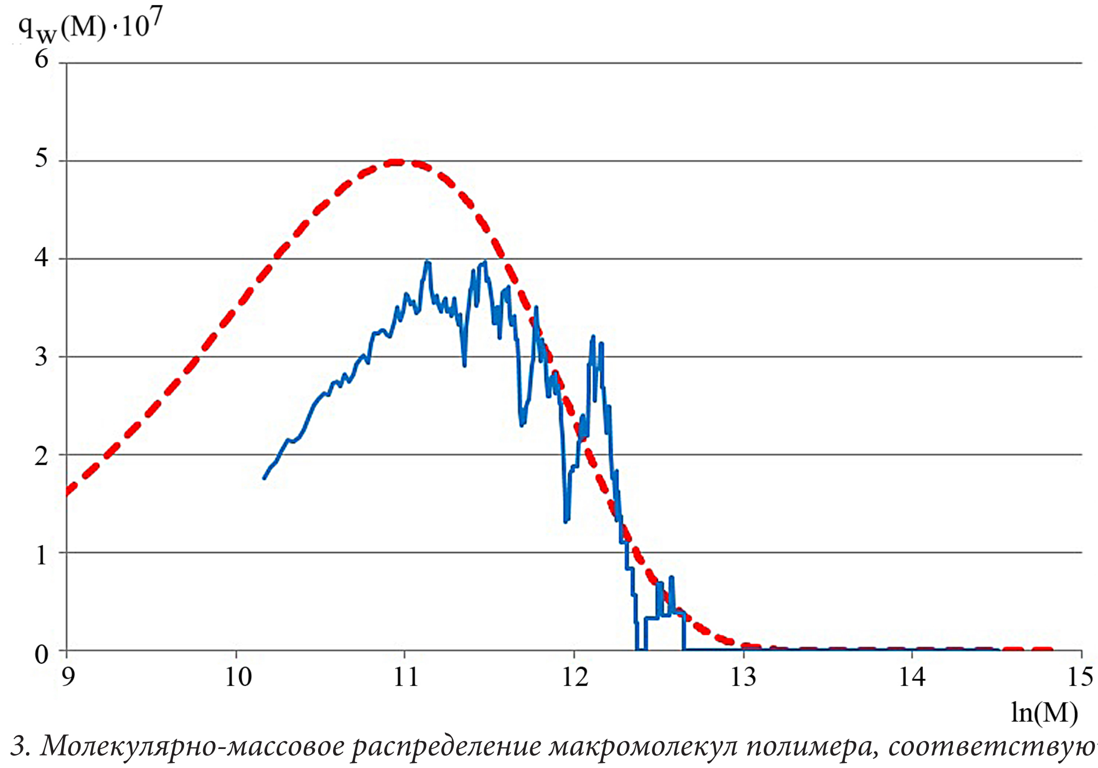



*Рис. 3. Молекулярно-массовое распределение макромолекул полимера, соответствующих активным центрам 1 типа (линия — результаты статистического подхода, пунктир — модельное распределение)*

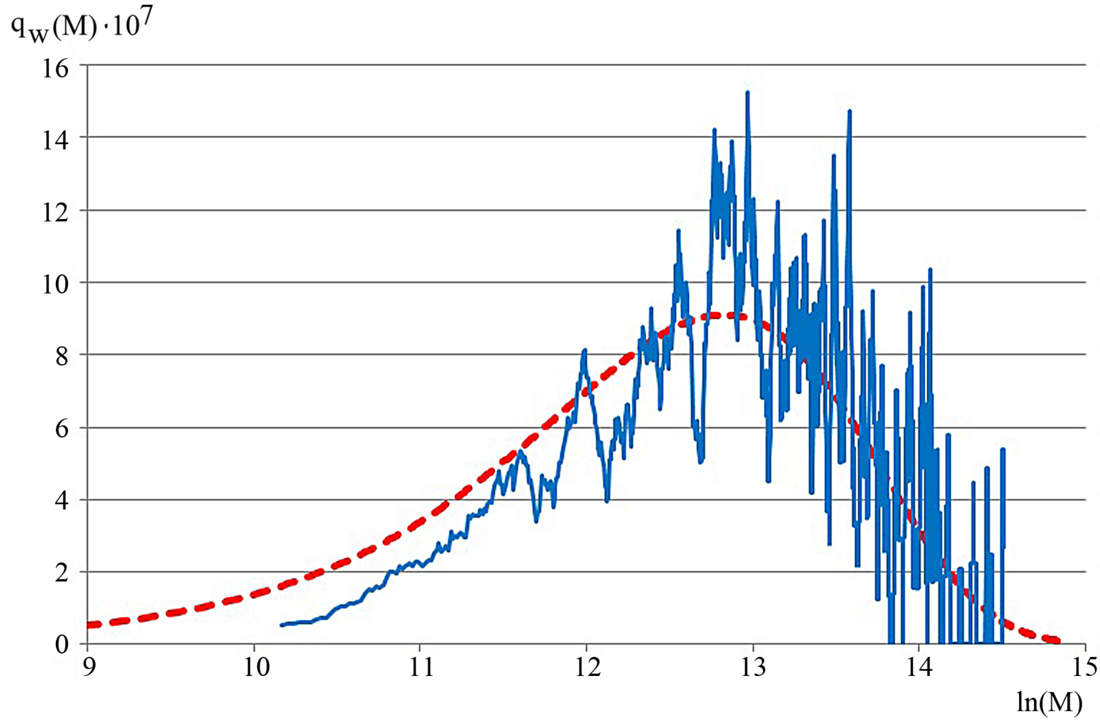



*Рис. 4. Молекулярно-массовое распределение макромолекул полимера, соответствующих активным центрам 2 типа (линия — результаты статистического подхода, пунктир — модельное распределение)*

информацию о длине образующихся цепей полимера. На основе данной информации возможно прогнозирование зависимостей изменения основных молекулярных характеристик полимера от конверсии мономеров в любой момент времени ведения процесса — среднечисленной и среднемассовой молекулярных масс, коэффициента полидисперсности полимера, а также возможно построение молекулярно-массового распределения образующегося продукта как для каждого типа активного центра, так и общее.

## Благодарности

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

## Литература

1. *Усманов, Т. С.* Обратные задачи формирования молекулярно-массовых распределений и кинетическая неоднородность в химических процессах / Т. С. Усманов, С. И. Спивак, С. М. Усманов. – Москва : Химия, 2004. – 252 с.

2. *Захаров, В. П.* Кинетическая неоднородность титановых и неодимовых катализаторов производства 1,4-цис-полиизопрена / В. П. Захаров, В. З. Мингалеев, А. А. Берлин, И. Ш. Насыров, Д. А. Жаворонков, Е. М. Захарова // Химическая физика. – 2015. – Т. 34, №3. – С. 69–75.

3. *Хохлов, А. Р.* Лекции по физической химии полимеров / А. Р. Хохлов, С. И. Кучанов. – Москва : Мир, 2000. – 192 с.

4. *Подвальный, С. Л.* Моделирование промышленных процессов полимеризации / С. Л. Подвальный. – Москва : Химия, 1979. – 256 с.

5. *Френкель, С. Я.* Введение в статистическую теорию полимеризации / С. Я. Френкель. – Москва : Наука, 1965. – 268 с.

6. *Мифтахов, Э. Н.* О решении прямых задач процесса полимеризации изопрена в присутствии моноцентровных и полицентровых каталитических систем / Э. Н. Мифтахов, С. А. Мустафина // Математическое моделирование процессов и систем: материалы IX Международной молодежной научно-практической конференции. – Стерлитамак, 2019. – С. 261–266.

7. *Михайлова, Т. А.* Исследование характеристик продукта свободно-радикальной сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии на основе метода Монте-Карло / Т. А. Михайлова, Э. Н. Мифтахов, И. Ш. Насыров, С. А. Мустафина // Каучук и резина. – 2015. – № 2. – С. 28–30.

8. *Михайлова, Т. А.* Компьютерное моделирование процесса свободно-радикальной сополимеризации бутадиена со стиролом в эмульсии методом Монте-Карло / Т. А. Михайлова, Э. Н. Мифтахов, С. А. Мустафина // Системы управления и информационные технологии. – 2014. – №3.2(57). – С. 250–254.

УДК 004.8

# ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРЕДСКАЗАНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЗАДЕРЖЕК АВИАРЕЙСОВ

**С. С. Ноздрин, И. Л. Каширина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья представляет собой исследование использования современных методов анализа данных и машинного обучения для предсказания времени задержек авиарейсов на основе исторических данных. В результате выполненной работы была построена модель, которая решает задачу прогнозирования с заданной степенью точности.

Построенная модель может быть интересна руководителям авиакомпаний и аэропортов, а также исследователям, изучающим современные методы предиктивной аналитики.
**Ключевые слова:** анализ, машинное обучение, авиарейсы, модель.

## Введение

В современном мире многие компании нередко прибегают к технологиям анализа данных и машинного обучения для оптимизации работы их сервисов и построению прогнозов, исключением не являются и авиакомпании.

Получение своевременной информации о возможных задержках рейсов дает возможность компании перестроить работу в аэропорту, избежать внештатных ситуаций, а также заблаговременно предоставить необходимую информацию пассажирам.

Цель данной работы: взяв за основу исторические данные (набор для обучения) по пунктуальности авиарейсов за период с октября 2015 года по сентябрь 2018 года, необходимо разработать модель машинного обучения, которая будет прогнозировать длительность задержки рейсов по отправлению (в минутах) на представленных тестовых данных. Рейс считается задержавшимся, если время его фактического отправления больше времени отправления по расписанию. Если рейс вылетает раньше расписания, задержка считается равной нулю.

К разрабатываемому проекту выдвинуты следующие требования:

1. Получить наименьшее значение метрики RMSE на тестовом наборе данных. Имеющиеся в наличии решения обеспечивают значение метрики 26.9 на проверочных данных, не участвующих в обучении. По результатам проведенного анализа необходимо улучшить имеющийся результат.

2. Аналитическую модель необходимо разрабатывать с использованием Python версии 3.5 и выше.

В данной работе для решения задачи нами были применены такие методы, как случайный лес, xgboost, метод кластеризации k-средних [1]. Оценка и сравнение построенных классификационных алгоритмов производились с помощью метрики RMSE.

В настоящее время исследованию пунктуальности рейсов и разработки предсказательной модели большее значение уделяется зарубежом, поэтому стоит обратиться к иностранным исследователям. Большая часть работ по изучению данной задачи сводилась к исследованию причин задержек рейсов и построению модели классификации с целью определения наличия задержки как таковой.

Так, команда исследователей из Португалии во главе с Нуно Фернандешом в работе «Factors influencing charter flight departure delay» [2], изд. с 2020 г. получила важные признаки, необходимые для предсказания наличия задержки: информация об отмене предыдущего полета данного рейса, продолжительность рейса, количество двигателей самолета, ширина и долгота расположения аэропортов прибытия и отправления. Попытки предсказать длительность задержек у данных исследователей не принесли успехов и ограничились построением модели для предсказания рейсов с задержкой не более, чем 60 минут.

Также египетскими учеными в работе «Machine learning techniques for analysis of egyptian flight delay» [3], изд. с 2018 г. были предприняты аналогичные попытки по построению модели классификации задержек рейсов местных авиалинии. Значимыми признаками для данного классификатора оказались продолжительность полета, тип самолета, время вылета и прилета.

Таких образом, многие иностранные исследователи занимаются анализом задержек рейсов и строят предиктивные модели, получая наиболее важные факторы для предсказания. Однако, большинство этих моделей сводятся к классификации рейсов, а не построению регрессионой модели, т. е. предсказанию длительности задержки.

## Материалы и методы

### *Исходная выборка*

Задача, обсуждаемая в данном исследовании, поставлена компанией Рамакс, которая предоставила неперсонифицированные данные о рейсах с 2015 по 2018 год. В исходную выборку были отобраны наиболее значимые по мнению компании признаки для предсказания, которые представлены в табл. 1.

Тренировочная выборка вмещает в себя 675259 образцов, что соответствует количеству рейсов, а тестовые данные содержат информацию о 65429 рейсах.

Таблица 1

*Исходные признаки*

| Категория признаков | Переменные |
|---|---|
| Непрерывные | Дата Рейса, Время отправления по расписанию, Номер ВС, Пассажиры факт Всего, Время прибытия по расписанию, Пассажиры факт J, Пассажиры факт W ,Пассажиры факт Y. |
| Категориальные | Рейс, Тип рейса, А/П отправл, А/П прибыт, Стоянка отправл, Терминал приписки (отправл), Тип ВС Гейт прибыт, Статус. |

Особенностью данных являлось распределение зависимой переменной. На рис. 1 можно заметить, что в основном задержек не случалось или они совсем маленькие и находятся в окрестности нуля. 391069 из 675259 образцов имели 0 задержку, более подробная информация представлена в таблице ниже.

Также отметим, что 0.95 квантиль — это задержки от 40 минут и меньше, а 0.99 квантиль — 160 минут и меньше. Поэтому для наглядности на рис.1 гистограмма построена с учетом 0.95 квантиля, для решения же задачи большие задержки не удалялись. Сложность данной задачи как раз проявлялась в трудности обнаружения больших задержек.

Таблица 2

*Статистика зависимой переменной*

| Характеристики | Время задержки по отправл, мин. |
|---|---|
| Количество | 675259 |
| Среднее | 9.75 |
| Стан.отклонение | 43.44 |
| Мин. | 0 |
| 1 квартиль | 0 |
| 2 квартиль | 0 |
| 3 квартиль | 5 |
| Макс | 1436 |

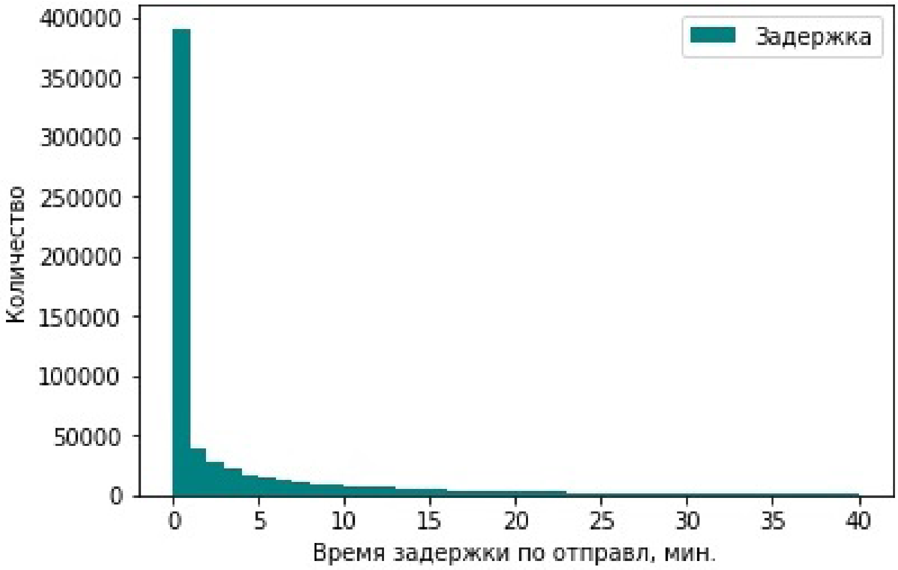



*Рис. 1. Гистограмма распределения зависимой переменной*

На основе исходных данных были построены такие дополнительные признаки, как величина средних задержек по всем категориальным переменным (средняя задержка по каждому типу рейса, номеру вс, и.т. д). Важным признаком оказался месяц полета. На рис. 2 видно, что зимой средняя задержка возрастает в 1,5–2 раза относительно других сезонов.

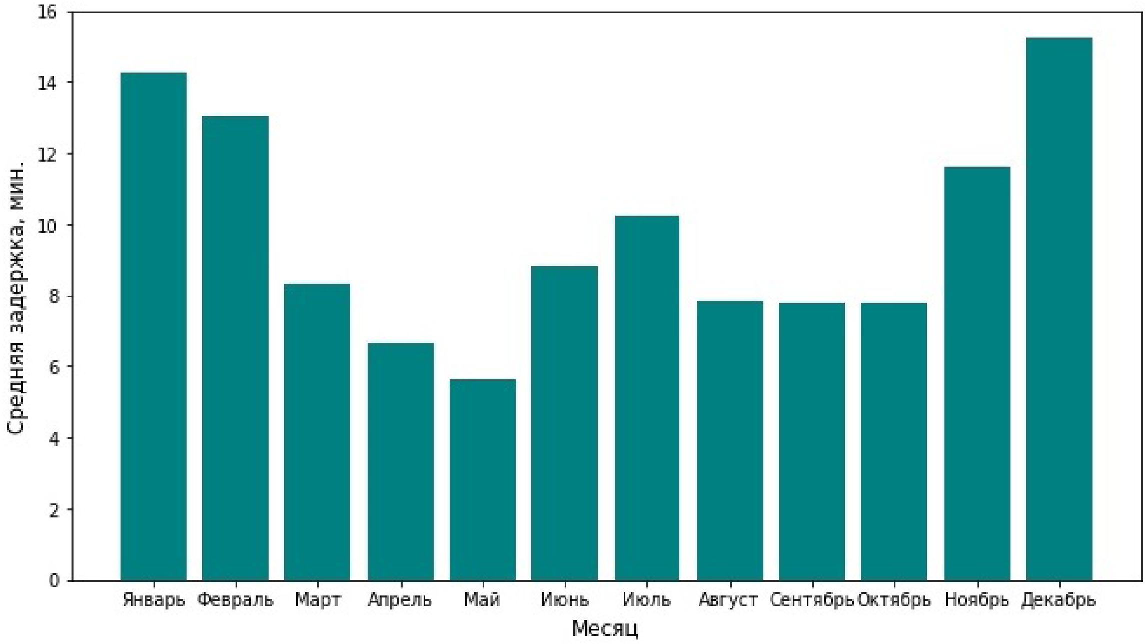



*Рис. 2. Средняя задержка по месяцам*

Также анализировались и сезонные факторы, например, влияние дней недели, времени суток, даты на длительность задержки. Матрица корреляций между новыми количественными переменными и  зависимой переменой представлена на рис. 3.

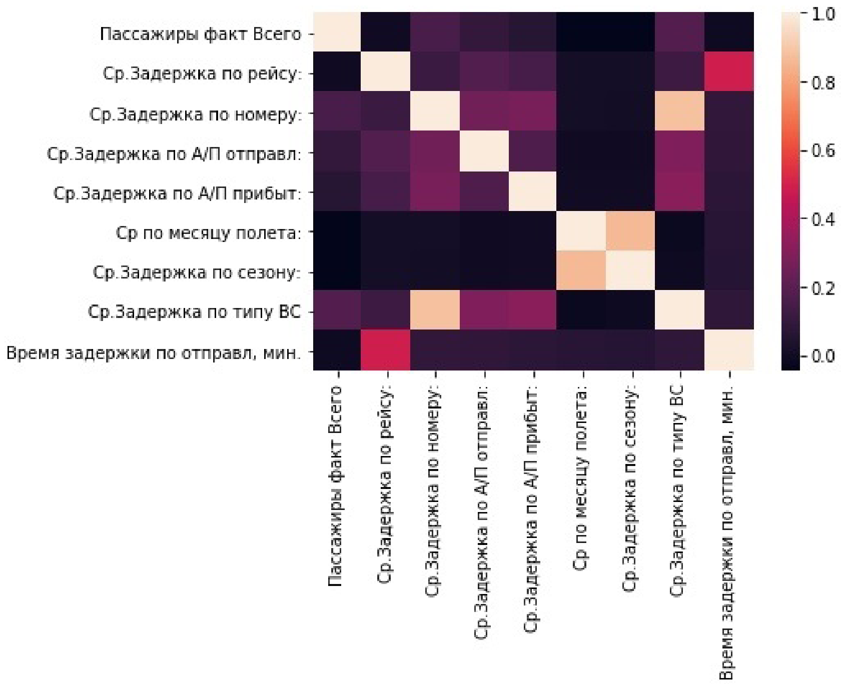



*Рис. 3. Матрица корреляций новых признаков с зависимой переменной*

## Построение моделей

Первичный анализ включал кластрезацию исходных данных. Для кластеризации использовался алгоритм k-средних. Это очень популярный и простой метод, позволяющий разделить исходные данные на несколько групп.

Наилучшим разбиением считается то, которое минимизирует величину $V$ из формулы (1), где $S_i$ — это $i$-й кластер, $x$ — элемент из данного кластера, а $m_i$ — центр кластера.

$$V = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in S_i} (x - m_i)^2. \tag{1}$$

Оптимальное количество кластеров определялось с помощью графика каменистой осыпи, представленного на рис. 4. На основе этого графика первоначально было принято решение об использовании 6 кластеров.

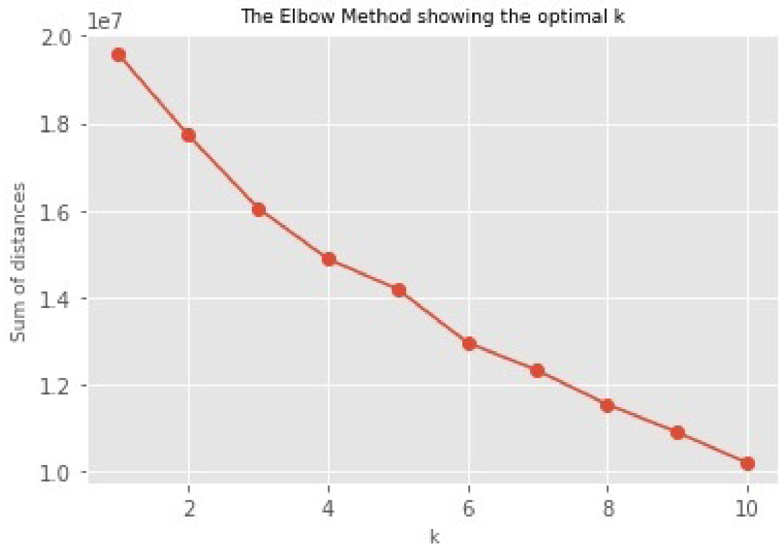



*Рис. 4. График каменистой осыпи*

Впоследствии некоторые кластеры были объединены в один, т. к. средняя задержка в этих кластерах была схожей. Распределение средних задержек по кластерам представлено в таблице ниже.

Таблица 3

*Средние задержки по кластерам*

| Номер кластера | Средняя задержка | Размер кластера |
|---|---|---|
| 1 | 7.315 | 170695 |
| 2 | 15.033 | 88166 |
| 3 | 12.216 | 100688 |
| 4 | 12.831 | 54511 |
| 5 | 6.065 | 260246 |
| 6 | 517.086 | 973 |

В итоге, модели машинного обучения строились для 4 кластеров: маленьких задержек(кластеры 1 и 5), небольших(кластры 3 и 4), средного(2) и большого(6). Важным итогом кластерного анализа являлся результат получения явного кластера с большими задержками, что относится к безусловным плюсам данной модели.

Для большей части кластеров использовался метод машинного обучения - xgboost (модифицированная версия градиентного бустинга).

В основе XGBoost[6] лежит алгоритм градиентного бустинга деревьев решений. Градиентный бустинг — это техника машинного обучения для задач классификации и регрессии, которая строит модель предсказания в форме ансамбля слабых предсказывающих моделей, обычно деревьев решений. Обучение ансамбля проводится последовательно. На каждой итерации вычисляются отклонения предсказаний уже обученного ансамбля на обучающей выборке. Следующая модель, которая будет добавлена в ансамбль, будет предсказывать эти отклонения. Таким образом, добавив предсказания нового дерева к предсказаниям обученного ансамбля, мы можем уменьшить среднее отклонение модели, которое является целью оптимизационной задачи. Новые деревья добавляются в ансамбль до тех пор, пока ошибка уменьшается, либо пока не выполняется одно из правил «ранней остановки». Данная модель имеет несколько гиперпараметров, которые необходимо подбирать для каждой конкретной задачи.

Нахождение оптимальных ответов последующего дерева исходит из решения оптимизационной задачи нахождения минимума функции (3) по параметру $w$

$$L = l(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)} + w_t(x_i)) + \gamma T + 0.5\lambda \sum_{j=1}^{T} w_j^{\,2}, \tag{2}$$

где $l$ — функция потерь, $y_i, y_i^{(t-1)}$ — значение $i$-го элемента обучающей выборки и сумма предсказаний первых t деревьев соответственно, $x_i$ — набор признаков $i$-го элемента обучающей выборки, $w_t(x_i)$ — предсказание на $i$-м элементе обучающей выборки, $\gamma T$ — регуляризационное слагаемое, штрафующее за чрезмерное количество узлов в дереве (T), а $\lambda$ — коэффициент $L_2$ регулязации.

Также, для одного из кластеров наилучшим образом показала себя модель случайного леса.

Случайный лес — алгоритм машинного обчения, заключающийся в использовании ансамбля решающих деревьев. Алгоритм применяется как для задач классификации, так и для задач регрессии или кластеризации. Каждое решающее дерево само по себе дает не очень высокое качество классификации, но за счет их большого количества результат выходит хорошим. Наиболее распространенный способ построения деревьев — бэггинг. Идея заключается в генерации случайной подвыборки с повторениями. Далее строится решающее дерево, которое классифицирует образцы данной подвыборки, причем в ходе создания очередного узла дерева выбирается набор признаков, на основе которых производится разбиение, из которых выбирается наилучший (например, с использованием критерия Джини). Дерево строится до полного исчерпания подвыборки. В задачах регрессии предсказывается значение путем усреднения ответов деревьев.

Также одной из важных стадий построения моделей машинного обучения являлось формирование новых признаков и удаление менее информативных из исходной выборки. Для каждой из групп модель строилась по-своему, индивидуальному признаковому пространству. В табл. 4 представлены признаки, которые оказались наиболее полезными для решения данной задачи.

Таблица 4

*Используемые признаки*

| Категория признаков | Переменные |
|---|---|
| Из исходной выборки | Пассажиры факт Всего, Тип рейса, Тип ВС Стоянка отправл, Год полета, День полета |
| Новые | А/П прибыт – SVO, Рейс с 0 задержкой Средняя задержка по рейсу, Праздничный день Год экспл, Сезон полета |

На основе построенных моделей был сделан вывод о том, какие признаки оказались наиболее важными, на рис. 5 приведена столбчатая диаграмма. Другие типы столбцов, имеющие значение важности менее 0.05, были отброшены, т. к. существенно не улучшали качество модели.

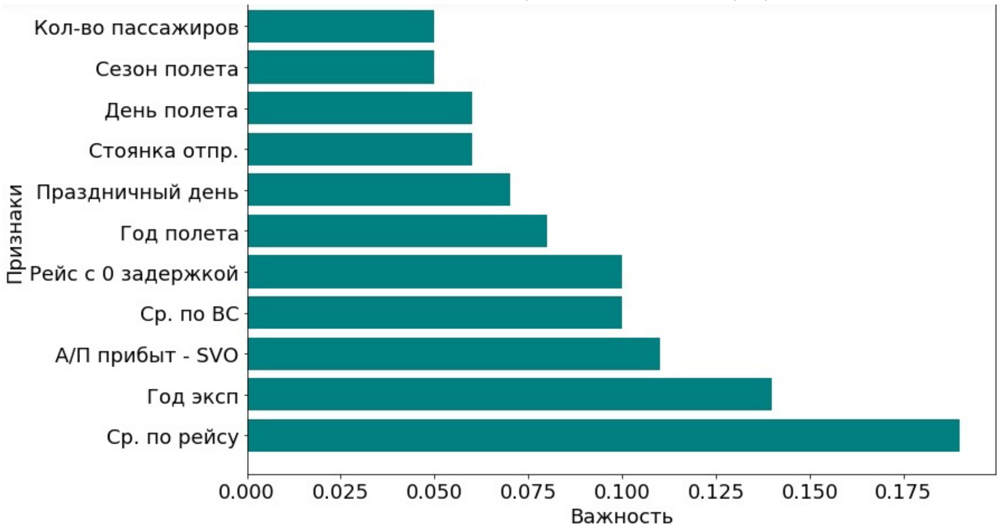



*Рис. 5. График важности признаков*

Помимо исходных признаков к общему пространству были добавлены новые признаки, построенные на основе предыдущих. Данные признаки оказались полезными, так, например, в праздничные дни и их предверие повышается спрос на рейсы, а также в данных существовала особая группа рейсов, которая практически никогда не задерживается.

Не менее значимым оказался признак сезон полета, т. к. зимой средняя задержка возрастает в несколько раз, что заметно по рис. 2. Также на основе данных было отмечено, что рейсы, прибывающие в аэропорт Шереметьево(SVO) чаще задерживаются на продолжительное время.

Также дополнительно собиралась и подключалась к исходным данным информация, связанная с годом введения в эксплуатацию типа ВС. Это важный признак, т. к. чем старше воздушное средство, тем тщательнее его проверяют перед взлетом, чаще возникают внештатные результаты перед полетом.

## Результаты и их обсуждения

В качестве показателя производительности модели была использовала метрика RMSE, которая является стандартной для задач регрессии.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}.$$

Данный показатель считается по выборке длины $n$, $y_i$ — реальное значение предсказываемой переменной, а $\hat{y}_i$ — значение, предсказанное моделью.

К достоинствам данного показателя относят легкость интерпритации, а также дифференцируемость и как следствие, возможность использования данной метрики как функции ошибок для методов, основанных на нахождении минимума таких показателей. Главным недостатком же является высокая чувствительность RMSE к выбросам, т. е. большим отклонениям разности в числителе. Даже редкие такие случаи могут привести к серьезному увеличению данной метрики.

Таблица 5

*Результаты построенных моделей*

| Номер кластера | Модель | Показатель RMSE |
|---|---|---|
| 1 | xgboost | 22.30 |
| 2 | xgboost | 33.98 |
| 3 | Random Forest | 25.62 |
| 4 | xgboost | 310.92 |

Выбор наилучшей модели для каждой из групп(кластеров) осуществлялся с помощью показателя метрики RMSE, а наилучшие гиперпараметры подбирались с помощью техники кросс-валидации. В итоге получилось улучшить значение данной метрики до 26.45, что является хоть и не таким существенным, как хотелось бы, но улучшением исходного показателя (26.9).

В ходе работы для решения задачи регрессии — нахождения длительности задержки авиарейсов использовался кластерный анализ, позволивший разделить данные на несколько групп, для каждой из которых строились модели машинного обучения, такие как случайный лес и xgboost, со своим признаковым пространством.

Важной особенностью задачи является то, что больших задержек очень мало, их очень тяжело идентифицировать и точно предсказать, а метрика RMSE очень чувствительна к большим отклонениям.

Таблица 6

*Результаты построенных моделей*

| | С учетом посл.кластера | Без учета посл.кластера |
|---|---|---|
| Показатель RMSE | 26.45 | 25.66 |

Модель справляется с тем, чтобы предсказывать маленькие задержки и находить большие, но точность прогнозов в кластере с крупными задержками оставляет желать лучшего. Именно это и способствует резкому увелечению метрики. Сравнение данного показателя без учета посл. кластера ( включающего всего 27 образцов из общего количества в 65429 образцов в тестовом множестве) и результата модели приведены в таблице выше.

## Заключение

В результате данного исследования был проведен всесторонний анализ задержек рейсов и их предикторов. Для решения поставленной задачи были применены следующие методы: алгоритм кластеризации K-средних, случайный лес и xgboost. В ходе работы был построен ряд моделей, позволивший незначительно улучшить исходную метрику данной регрессионой задачи. Результат был достигнут путем разбиения исходных данных на кластеры и применения техники кросс-валидации [4], позволившей найти лучшие гиперпараметры для моделей, давшие наилучшие показатели метрики RMSE.

## Литература

1. Scikit-learn.cluster.KMeans – машинное обучение на Python. – URL: https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans (дата обращения: 10.12.2019).

2. *Fernandes, N.* Factors influencing charter flight departure delay / N. Fernandes, S. Moro, C. J. Costa, M.Apracio // Academia. – 2018. – № 1. – URL: https://www.academia.edu/44018330/Factors-influencing-charter-flight-departure-delay (дата обращения: 10.10.2020).

3. *Al-Tabbakh, S. M.* Machine learning techniques for analysis of egyptian flight delay / S. M. Al-Tabbakh, H. M. Mohamed, H. El-Zahed // Academia. – 2020. – № 1. – URL : https://www.academia.edu/36835689/MACHINE-LEARNING-TECHNIQUES-FOR-ANALYSIS-OF-EGYPTIAN-FLIGHT-DELAY (дата обращения: 10.10.2020).

4. *Шолле, Ф.* Глубокое обучение на Python / Ф. Шолле. – СПб : Питер, 2018. – 400 с.

5. Scikit-learn – машинное обучение на Python. – URL: https://github.com/scikit-learn (дата обращения: 15.01.2020).

6. xgboost – библиотека машинного обучения. – URL: https://xgboost.ai (дата обращения: 27.01.2020).

УДК 519.8

# ФОРМИРОВАНИЕ ШКАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗНАЧИМОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ УРОВНЯ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНЫХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ

**С. А. Палкина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается один из подходов оценивания уровня освоения дисциплин в высших учебных заведениях. Он основан на многокритериальном оценивании используемых в образовательных организациях средств измерений. В основу положен метод анализа иерархий, позволяющий учитывать одновременно несколько факторов выбора и при этом использовать качественные шкалы. Результатом работы является модель оценивания средств измерений и алгоритм формирования шкалы коэффициентов значимости средств измерений, используемых при определении уровня освоения учебных дисциплин.

**Ключевые слова:** оценивание результатов, промежуточная аттестация, шкала оценивания, средства измерений, метод анализа иерархий.

## Введение

Федеральные государственные образовательные стандарты предполагают оценивание результатов обучения в ВУЗах сразу по трем направлениям: знаниям, умениям и навыкам. При этом оценка формируется, исходя из показателей достижения заданного уровня освоения компетенции по этим направлениям посредством применения контрольно-измерительных материалов тех или иных средств измерений. Для оценивания результатов обучения на экзамене (зачете с оценкой) используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», а на зачете используется – «зачтено» и «не зачтено». Однако использование большого спектра контроль-измерительных материалов не позволяет преподавателю однозначно формировать итоговую оценку. Несмотря на то, что рабочей программой дисциплин вводятся критерии оценивания, итоговая оценка, получаемая, исходя из применения отдельных контрольно-измерительных материалов, не всегда объективна, т.е. в полной мере отражает критерии оценивания. В связи с этим, становится актуальной проблема формирования шкалы коэффициентов значимости средств измерений, используемых при оценивании знаний, умений и навыков обучающихся.

## 1. Постановка задачи

В рамках промежуточной аттестации оценка по дисциплине определяется исходя из достижения заданного уровня формируемых компетенций, характеризующих знания, умения и навыки обучающегося. При этом в рамках аттестации оценка результатов производится посредством применения некоторого множества средств измерений, реализуемых через контрольно-измерительные материалы (КИМ). Так в качестве средств оценивания могут использоваться: устный опрос (индивидуальный опрос, фронтальная беседа, доклад), письменные работы (контрольные, эссе, сочинения, рефераты, тесты), проектная деятельность (курсовая работа, презентация и проект). При наличии широкого спектра КИМ рекомендовано использовать интегральную оценку для получения итогового балла, например, вида:

$$Q_{итог} = K_{пр}Q_{пр} + K_{лр}Q_{лр} + K_{тест}Q_{тест},$$

где $K_{пр}$, $K_{лр}$, $K_{тест}$ — коэффициенты (веса) значимости практических работ, лабораторных работ и теста соответственно;

$Q_{пр}$, $Q_{лр}$, $Q_{тест}$ — оценка, полученная за практическую лабораторную работу и тест, соответственно.

Количество элементов оценивания и вес каждого определяется преподавателем индивидуально. На практике этот процесс зачастую очень трудоемок, т. к. приходится учитывать множество факторов. Это и делает актуальной задачу разработки алгоритма формирования шкалы коэффициентов значимости средств измерений (КИМ), позволяющего объективно оценить результаты освоения дисциплины.

## 2. Процедура формирования шкалы оценивания

Процедура оценивания уровня освоения дисциплины заключается в вычислении итогового балла. Итоговый балл является интегральной оценкой и складывается из оценок по отдельным средствам измерений, применяемым на этапе аттестации. Оценка по итогам применения средств измерений определяется посредством применения шкалы оценивания к критериям (характеристикам) материалов. Последние шкалы формируются в рамках разработки рабочих программ дисциплин. Соответственно, ставится задача разработать алгоритм формирования шкалы коэффициентов значимости средств измерений (КИМ), в основу, которого, будет положена модель оценивания значимости средств измерений.

В подходе, изложенном в данной работе, в качестве факторов оценивания взяты основные показатели определения уровня освоения дисциплины: знания, умения и навыки. Использование метода анализа иерархии (МАИ) позволяет при формировании модели учесть несколько факторов одновременно, при этом использовать качественные оценки. Согласно МАИ, модель для формирования шкалы оценивания представима в виде, представленном на рис. 1.

Эта модель далее используется для формирования видения эксперта сценария освоения обучающимся дисциплины. Формирования видение осуществляется путем проведения опроса эксперта и фиксации его результатов. Для упрощения процедуры опроса эксперт может проставить только приоритеты значимости элементов. В первом случае для формирования матриц парных сравнений понадобится применение шкалы Т. Саати. Во втором будет действовать правило, согласно которому, если в цепочке приоритетов элементы стоят:

1) друг за другом, то вес ставится равным 3,
2) через один, то вес ставится равным 5,
3) через два элемента, вес ставится равным 7.

Веса значимости выбраны также в соответствии со шкалой Т. Саати, применяемой для МАИ. Если не все элементы оцениваются, их в цепочку оценивания не вносят, соответственно, ставят вес равным нулю. Так, например, элемент Практические занятия уровня 3 предусматривает возможность использования таких средств измерений, как устный опрос, письменная работа, проектная деятельность и факт посещения занятий. Эксперту для формирования видения значимости следует расставить приоритеты этих элементов. Например, письменная работа более значимее, чем проектная деятельность, проектная деятельность более значимее устного опроса, а устный опрос значимее простого присутствия. Пример матрицы парных сравнений для элемента Практические занятия приведен в табл. 1.

Согласно алгоритму МАИ далее рассчитываются локальные и глобальные веса критериев. Полученное множество значений глобальных весов и представляет собой шкалу коэффициентов (весов) значимости средств измерений (КИМ).

Таблица 1

*Матрица парных сравнений для уровня 3 относительно элемента Практические занятия*

| Практич. занятия | Устный опрос | Письменная работа | Проектная деят. | Посещения |
|---|---|---|---|---|
| Устный опрос | 1 | 1/5 | 1/3 | 3 |
| Письменная работа | 5 | 1 | 3 | 7 |
| Проектная деят. | 3 | 1/3 | 1 | 5 |
| Посещения | 1/3 | 1/7 | 1/5 | 1 |

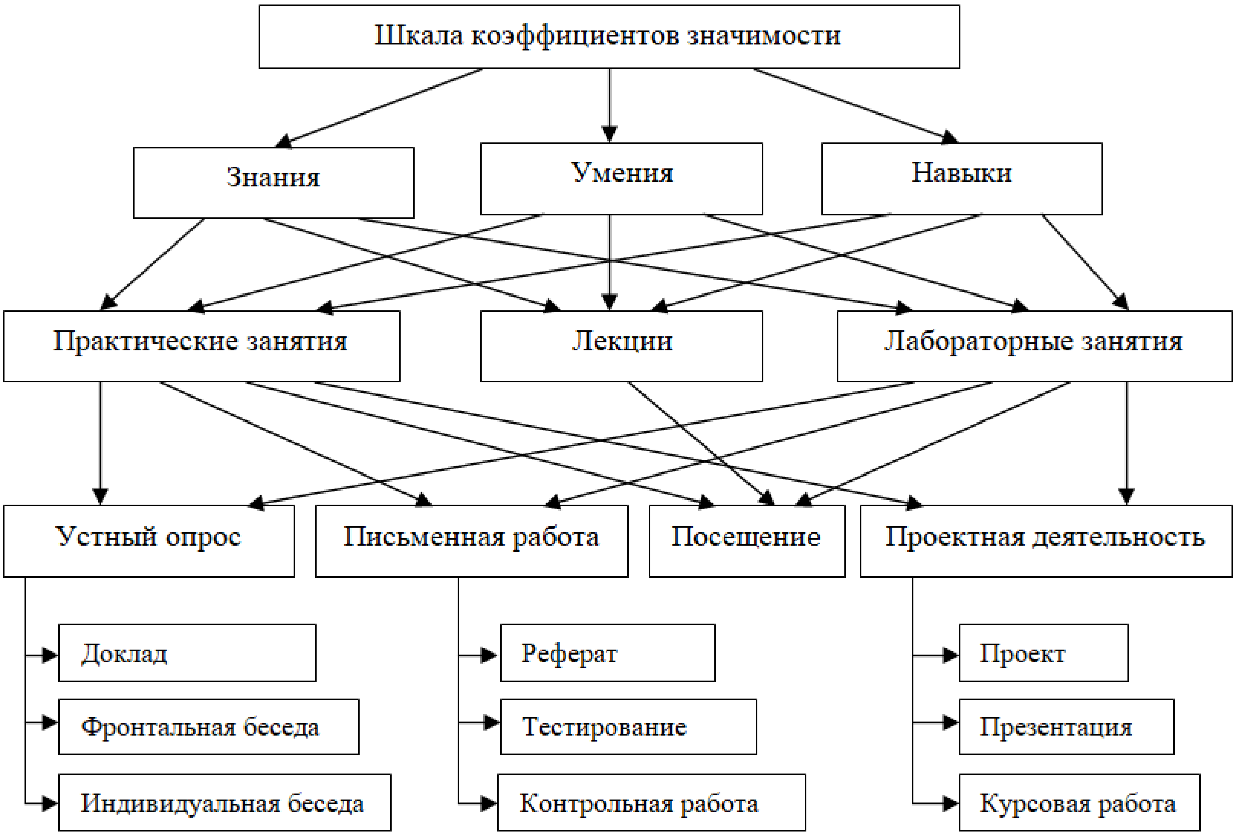



*Рис. 1. Модель оценки средств измерения*

Алгоритм формирования шкалы коэффициентов (весов) значимости средств измерения (КИМ) представим в виде следующих шагов.

Шаг 1. Определение множества средств измерений (КИМ) и выстраивание иерархии в соответствии с принципами МАИ (формирование моделиоценивания).

Шаг 2. Формирование видения эксперта в отношении критериев оценивания значимости средств измерения (опрос эксперта).

Шаг 3. Представление результатов опроса в виде матриц парных сравнений и расчет локальных и глобальных весов модели.

Шаг 4. Формирование множества коэффициентов значимости, т. е. шкалы коэффициентов (весов) значимости средств измерений (КИМ).

Следует заметить, что расчет коэффициентов по модели можно делать не до самого нижнего уровня. Останов зависит от предпочтений эксперта. Так, например, учитывать лишь вес устного опроса, письменной работы или результата проектной деятельности, не переходя к оценке значимости реферата или теста. При формировании шкалы коэффициентов значимости допускается ранжирование весов, что позволяет определить место в рейтинге значимости средств измерений.

## Заключение

Полученная модель оценки отражает только основные критерии, которые в большинстве случаев используются преподавателями. Однако модель может быть расширена в отношении элементов иерархии, как горизонтально, так и вертикально. При этом алгоритм вычисления коэффициентов останется без изменений. Соответственно, рассмотренный подход позволяет использовать одну и ту же модель оценивания для формирования шкал коэффициентов значимости средств измерений разных учебных дисциплин.

Преимущества метода анализа иерархий, используемого для расчета коэффициентов: позволяет получать не только значения коэффициентов, но и может использоваться для ранжирования средств измерений, процесс обработки данных контролируем вследствие работы эксперта с матрицами парных сравнений, имеется возможность адаптации модели под любую дисциплину, при расчете коэффициентов значимости используются качественные характеристики.

Программная реализация предложенного алгоритма позволит автоматизировать процесс вычисления значений шкалы и, тем самым, сделает процедуру удобной для применения на практике.

## Литература

1. *Азарнова, Т. В.* Метод анализа иерархий как средство поддержки принятия решений в стратегическом аналитическом планировании / Т. В. Азарнова, О. Ю. Пономарева, В. В. Ухлова // Экономическое прогнозирование: модели и методы: сб. тр. IX международной науч.-практ. конф. (Воронеж, 26 апреля 2013 г.). – Воронеж, 2013. – С. 9–12.

2. *Макаров, И. М.* Теория выбора и принятия решений / И. М. Макаров [и др.] – Москва : Наука. 1982. – 330 с.

3. *Саати, Т.* Принятие решений : Метод анализа иерархий / Т. Саати; Пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. – Москва : Радио и связь, 1993. – 314 с.

4. *Ухлова, В. В.* Адаптация метода анализа иерархий к задаче оценки достижений учащихся / Ухлова В. В., Палкина С. А. // Математические модели современных экономических процессов, методы анализа и синтеза экономических механизмов; Актуальные проблемы и перспективы менеджмента организаций в России: [сб. ст.] XIII Всерос. науч.-практ. конф. / Ин-т проблем упр. им. В. А. Трапезникова Рос. Акад. Наук, Самар. нац. исслед. ун-т им. С. П. Королева; гл. ред. Д. А. Новиков – Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2020. – С. 81–87.

УДК 519.677+519.624.2

# ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ БАЗОВОЙ ЛИНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ СПЕКТРОВ

**Т. Б. Подосенова**

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

**Аннотация.** Границы областей локализации резонансных линий в спектрах излучения задают разбиение области задания спектров на фрагменты локализации как полезной резонансной, так и мешающей базовой компонент спектра. На основе непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) спектров с использованием базисных гауссовых вейвлетов [1, 2] рассмотрены задачи поиска резонансных линий в спектре. Предложен алгоритм аппроксимации базовой компоненты спектра.
**Ключевые слова:** спектр излучения, резонансная линия, базовая линия, локализация линии, гауссов вейвлет, непрерывное вейвлет-преобразование.

## Введение

Обработка исходных данных — аппаратно регистрируемых спектров излучения: $y = \{y_i = y(x_i) = Y(x_i) + B(x_i) + \varepsilon_i \geq 0,\ i = 1...N\}$, $Y(x) = \sum_j g_j(x) = \sum_j A_j g_0(x; \mu_j, \beta_j)$, $A_j \geq 0$, — рассматриваемых в виде суммы полезной, гладкой базовой и шумовой компонент, сводится в конечном итоге к определению параметров суммы резонансных унимодальных функций — кривой $Y(x)$, — в предположении нормального или по Пуассону закона распределения ошибок: $E(\varepsilon_i) = 0$, $D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \max(1, y_i)$. Резонансные компоненты связаны с проявлением фрагментов интересующих нас линейчатых спектров веществ или ядер. Математическая модель регистрируемых данных приведена в [3]. Для задач обработки данных часто достаточно ограничиться гауссовой моделью формы пиков: $g_0(x; m, b) = e^{-(x-m)^2/(2b^2)}$, $\int_{-\infty}^{\infty} g_0(x; \mu, \beta)dx = \sqrt{2\pi}\beta$, $\beta > 0$.

На первоначальном этапе обработки спектров одной из важных является задача поиска фрагментов локализации сигналов — резонансных пиков — в спектре. На этих участках спектра могут быть локализованы как одиночные линии — синглеты, — так и мультиплеты — совокупности неразрешенных линий. В работе [4] предложена формула для критерия разрешенности резонансов гауссовой формы.

При поиске фрагментов локализации резонансных пиков в спектре будем применять интенсивно развивающийся в последнее время метод непрерывного вейвлет-преобразования [1]. Метод НВП сводится к вычислению корреляции между фрагментами анализируемого спектра и смещаемыми вдоль оси аргумента спектра растянутыми/сжатыми копиями анализирующей базовой вейвлет-функции [2].

**1. Гауссовы вейвлеты.** Базисные гауссовы вейвлеты $\psi_n(x)$ и $\varphi_n(x)$, применяемые в данной работе, основаны на вычислении производных гауссовых функций [1]:

$$\psi_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}, \quad \varphi_n(x) = \lambda_n C_n^{-1}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad C_n = \|\varphi_n(x)\|_{L_2}, \quad n \geq 1;$$

$\lambda_n = -1$ для $n = 2, 3$, и $\lambda_n = 1$ для остальных значений $n \geq 1$. В работе будем использовать вейвлеты младших четных порядков: $\psi_2(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$, $\psi_4(x) = (-x^4 + 6x^2 - 3)e^{-x^2/2}$, $\varphi_2(x) = 2C_2^{-1}(1 - 2x^2)e^{-x^2}$, $\varphi_4(x) = 4C_4^{-1}(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$, $n = 2, 4$. Значения норм вейвлетов известны [5]: $C_1 = (\pi/2)^{1/4}$, $C_2 = \sqrt{3}\cdot(\pi/2)^{1/4}$, $C_3 = \sqrt{15}\cdot(\pi/2)^{1/4}$, $C_4 = \sqrt{105}\cdot(\pi/2)^{1/4}$.

Графики функций $\psi_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ при четных значениях порядков $n$ напоминают формой резонансные кривые, а их аналитические представления допускают запись через ортогональные полиномы Эрмита [6]: $\psi_n(x) = -He_n(x)e^{-x^2/2}$, $\varphi_n(x) = C_n^{-1}H_n(x)e^{-x^2}$. Так же как функции $He_n(x)$ и $H_n(x)$ различаются масштабом: $H_n(x) = 2^{n/2}He_n(x\sqrt{2})$ [6], так и вейвлеты $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ отличаются полуширинами: $\varphi_n(x) = (-1)^{n+1}2^{n/2}\lambda_n C_n^{-1}\psi_n(x\sqrt{2})$ [4].

**2. Коэффициенты вейвлет-разложения спектра.** При использовании метода НВП коэффициенты вейвлет-разложения спектра записываются в виде свертки [1]: $W_\psi(a,b;x) = a^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx$, где $a, b$ — параметры масштаба и сдвига. При этом в силу коммутирования операции дифференцирования и НВП [2], для вейвлет-преобразований выполняется: $W_\psi\left(a,b;\frac{d^n}{dx^n}y(x)\right) = (-1)^n\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\cdot\frac{d^n}{dx^n}\Psi_{a,b}(x)\cdot dx$, $\Psi_{a,b}(x) = a^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, — что позволяет перейти от дифференцирования заданного численно исходного спектра $y(x)$ к дифференцированию заданного в виде аналитической функции вейвлета $\Psi_{a,b}(x)$.

В случае синглета: $y(x) = Ag_0(x;\mu,\beta)$, — выражения вейвлет-коэффициентов для базисных гауссовых вейвлетов 2-го и 4-го порядков выписаны аналитически [4]:

$$W_{\varphi_n}(a,b;y) = (-1)^{n+1}2^{(n-1)/2}\lambda_n C_n^{-1}\cdot W_{\psi_n}(a,\sqrt{2}b;\bar{y}),\ \ \bar{y}(x) = y(x/\sqrt{2}) = A\cdot g_0(x;\sqrt{2}\mu,\sqrt{2}\beta),$$

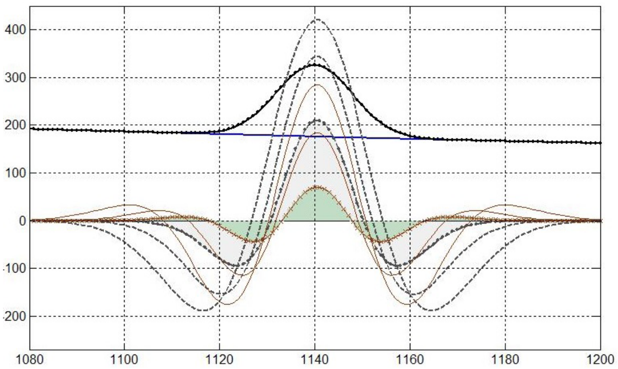
$$W_{\psi_n}(a,\sqrt{2}b;\bar{y}) = \frac{2A\sqrt{\pi}\beta}{\sqrt{a}}\left(1+\left(\frac{\sqrt{2}\beta}{a}\right)^2\right)^{-(2[n/2]+1)/2}\cdot\psi_n\left(\frac{\sqrt{2}(b-\mu)}{\sqrt{a^2+2\beta^2}}\right),\ \ n = 2, 4.$$

Легко видеть, что вейвлет-образы спектров сохраняют положения одиночных резонансов на оси аргумента.

Крайние нули $\bar{b}_1, \bar{b}_4$ коэффициентов $W_{\varphi_4}(a,b;y)$ имеют вид $\bar{b}_{1,4} \approx \pm 1.6507\cdot\sqrt{a^2+2\beta^2}$, и поэтому при $a = k\beta$, $k = 1.1415$, область $(\mu-3\beta,\ \mu+3\beta)$ локализации синглета $y(x)$ практически совпадает с отрезком $(\bar{b}_1, \bar{b}_4)$ оси аргумента $b$ [4].

В силу свойств линейности для вейвлет-преобразований выполняется [2]: $W_\psi(a,b;Y_B) = W_\psi(a,b;B) + \sum_j W_\psi(a,b;g_j)$, где $Y_B(x) = Y(x) + B(x)$. В области локализации резонансов $g_j(x)$ значения $W_\psi(a,b;B)$ малы, что объясняется как достаточно гладким поведением базовой компоненты спектра $B(x)$, так и наличием нескольких $(\geq 2)$ первых нулевых моментов у гауссовых вейвлетов [2].

На рис. 1 иллюстрирован случай, когда $Y(x)$ есть синглет (слева) и мультиплет (триплет, справа). Показаны графики спектра $Y_B(x)$ и базовой линии $B(x)$, графики вейвлет-коэффициентов $W_{\varphi_n}(a,x;Y_B)$ для масштабов $a \in \{\beta, 1.5\beta, 2\beta\}$, $\beta = 8$, $n = 2, 4$. Закрашены графики, соответствующие: полуширине синглета $a = \beta$ (для синглета) и $a = 2\beta$ (для мультиплета); более темным цветом показан график вейвлет-коэффициентов 4-го порядка.



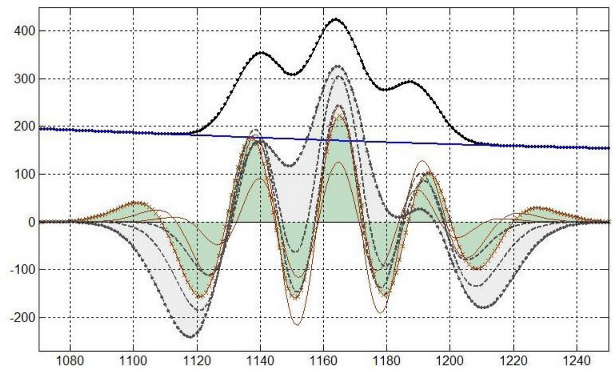




*Рис. 1. Графики кривых $Y_B(x)$, $B(x)$ и вейвлет-образов $W_{\varphi_n}(a,x;Y_B)$ для случаев одиночного резонанса и мультиплета, $a \in \{\beta, 1.5\beta, 2\beta\}$, $\beta = 8$, $n = 2, 4$*

**3. Сглаживание зашумленных данных.** Метод НВП с использованием гауссовых вейвлетов позволяет достаточно надежно выявить структуру спектра, но при малых масштабах вейвлетов в результате НВП в спектрах могут быть выявлены не только резонансные линии, но и случайные флуктуации. Учитывая это, в данной работе метод НВП применяется после проведения этапа сглаживания спектров.

Для уменьшения разброса ошибок в исходных зашумленных данных мы используем полиномиальные SG-фильтры Савицкого — Голея [7, 8]. При фильтрации величины $y_i$ заменяются значениями локальных аппроксимирующих полиномов, полученных для скользящего окна $(x_{i-m}\ , x_{i+m}) = \{x_{i+s}\ , s = -m \ldots m\}$, по методу наименьших квадратов (МНК). Коэффициенты этих МНК-полиномов определяются только шириной окна сглаживания $(2m+1)$ и заданным порядком полинома $k < 2m+1$.

В случае спектрометрических данных достаточно использования сглаживающего кубического SG-фильтра, коэффициенты которого задаются квадратичным полиномом $h(s) = \dfrac{3\{(3m^2+3m-1)-5s^2\}}{(2m+3)(2m+1)(2m-1)}$, $s = -m \ldots m$, где $m$ — оценка полуширины резонансной линии [8]. Значения коэффициентов SG-фильтра в центре и на краях скользящего окна — величины порядка $h(0) \approx 0.07$, $h(m) = h(-m) \approx -0.04$ [8].

Фильтр Савицкого — Голея [7] является одним из эффективных методов сглаживания данных. В работе [8] отражена, в хронологическом порядке, история создания SG-фильтра, и изучен ряд вопросов математического обоснования этого фильтра. Кроме того, проведен сравнительный анализ кубического SG-фильтра с шириной окна $(2m+1)$, $m = \beta$, и гауссова фильтра ширины $\beta/3$ [8]. Фильтры SG хорошо аппроксимируют высокочастотные компоненты сигнала, но в тех областях спектра, где отсутствуют резонансы, фильтрация гауссовыми фильтрами приводит к лучшему результату по сравнению с SG-фильтрами.

**4. Алгоритм локализации резонансных линий.** Область задания $D = [x_1\ , x_N\ ]$ одномерного спектра излучения $y(x)$ представим в виде объединения перемежающихся областей $D_j$ локализации базовой компоненты спектра и областей $P_j$ локализации резонансных линий: $D = D_1 \cup P_1 \cup D_2 \cup \ldots\ \cup D_K \cup P_K \cup D_{K+1}$, $j = 1 \ldots K$. Границы локализации резонансных компонент будем вычислять с использованием аргументов точек локальных минимумов вейвлет-образов спектра. Предлагаемый в работе алгоритм разметки границ резонансов в спектре для аппроксимации базовой линии спектра включает в себя несколько этапов:

*1.* Сглаживаем исходный спектр SG-фильтром [7–9], со скользящим окном ширины $2w+1$, $5 \le w \le 20$; $w > 0$ есть оценка параметра $\beta$. Результат — спектр $\tilde{y}$, или $\tilde{y}(x)$.

*2.* Вычисляем коэффициенты $W_{\varphi_n}(a, x; y)$, $a = p \cdot w$, $p > 0$, $n = 2, 4$. Определяем аргументы точек локальных экстремумов графиков полученных вейвлет-образов.

*3.* Вычисляем границы $(x_{j_1}, x_{j_2})$ фрагментов $\Omega_j = \{x_i\ , i = j_1 \ldots j_2\}$ оси аргумента, таких, что для $x_i \in \Omega_j$ значения вейвлет-коэффициентов превышают уровень ошибки данных: $\max\,(W_{\varphi_2}(a, x_i; y), W_{\varphi_4}(a, x_i; y)) \ge \delta \cdot \sigma_i$, $\sigma_i = \sqrt{\max(1, y_i)}$, $j = 1 \ldots K_0$. Обычно $1 \le \delta \le 3$.

*4.* Проверяем фрагменты спектра на наличие резонансов по критерию: $(\max\limits_{x_i \in \Omega_j} \tilde{y}_i - \min\limits_{x_i \in \Omega_j} \tilde{y}_i) / (\max\limits_{x_i \in \Omega_j} \sigma_i) \ge 1$. Выделяем мультиплеты в спектре, исследуя локальные экстремумы графиков коэффициентов $W_{\varphi_n}(a, x; y)$, $n = 2, 4$, на фрагментах $\Omega_j$. Считаем, что точки $x_i \in \Omega_j$ относятся к области мультиплетов, если $W_{\varphi_2}(a, x; y) > 0$.

*5.* Для каждого информативного фрагмента $\Omega_j$ ищем ближайшие слева и справа к границам $\Omega_j$ значения локальных минимумов кривой $W_{\varphi_4}(a, x; y)$, а затем, расширяя область локализации резонансов, определяем ближайшие к найденным значениям аргументы нулей функции $W_{\varphi_2}(a, x; y)$. Полученные точки оси аргумента считаем границами областей $D_j$ и $P_j$ локализации базовой компоненты спектра и резонансных линий соответственно.

6. На фрагментах $D_j$ будем аппроксимировать базовую линию $B(x)$, используя регуляризирующие алгоритмы для сглаженного спектра $\tilde{y}(x)$, а на областях $P_j$ локализации резонансов будем моделировать $B(x)$ с помощью кубических сплайнов [9].

Заметим, что преобразованные SG-фильтрами спектры $\tilde{y}(x)$ не обладают достаточной степенью гладкости на областях $D_j$ локализации базовой компоненты спектра, и потому по спектрам $\tilde{y}(x)$ сложно смоделировать близкую к истине базовую компоненту спектра. Вследствие этого на областях $D_j$ используются регуляризирующие алгоритмы.

**5. Регуляризирующий алгоритм сглаживания.** Задача сглаживания зашумленной функции $\tilde{y}(x) \in L_2[c,d]$, $c \le x \le d$, сводится к минимизации функционала Тихонова [10]: $M^{\alpha}(f) = \|f - \tilde{y}\|^2_{L_2} + \alpha \|f\|^2_{W_2^1}$, где $f(x) \in W_2^1[c,d]$ [11]. У функционала $M^{\alpha}(f)$ существует единственный минимум, а функция $f(x)$, на которой достигается минимум, удовлетворяет уравнению Эйлера [12]: $f'' - q^2 f = -\theta \tilde{y}$, $\theta = \alpha^{-1}$, $q^2 = 1 + \theta$. В работе [11] рассмотрена постановка и получены аналитические решения краевых задач для указанного уравнения Эйлера для ряда способов задания краевых условий.

В настоящей работе использованы аналитические выражения для численного решения краевой задачи, с условиями на значения 2-й производной функции, $f''(c) = f''(d) = 0$, полученные в [11]. Значения $f(x)$ в граничных точках $D_j$ используются при моделировании базовой линии спектра кубическими сплайнами на заданных фрагментах $P_j$ локализации полезного сигнала [9].

**6. Примеры численных расчетов.** На рис. 2 показаны графики исходного и сглаженного спектров, графики восстановленной базовой линии $\tilde{B}(x)$ и коэффициентов $W_{\varphi_n}(a,x;y)$, $n = 2, 4$, для значения масштабов $a = \beta$ (слева) и $a = 1.5\beta$ (справа), $\beta = 8$, а также график линии отсечки: $\delta \cdot \sigma(x) = \delta \cdot \sqrt{\max(1, y(x))}$, $\delta = 1$. В приведенном примере $Y(x)$ представляет собой совокупность плохо разрешенных мультиплетов (триплетов). Выделенные в алгоритме области $P_j$ локализации резонансов закрашены цветом.

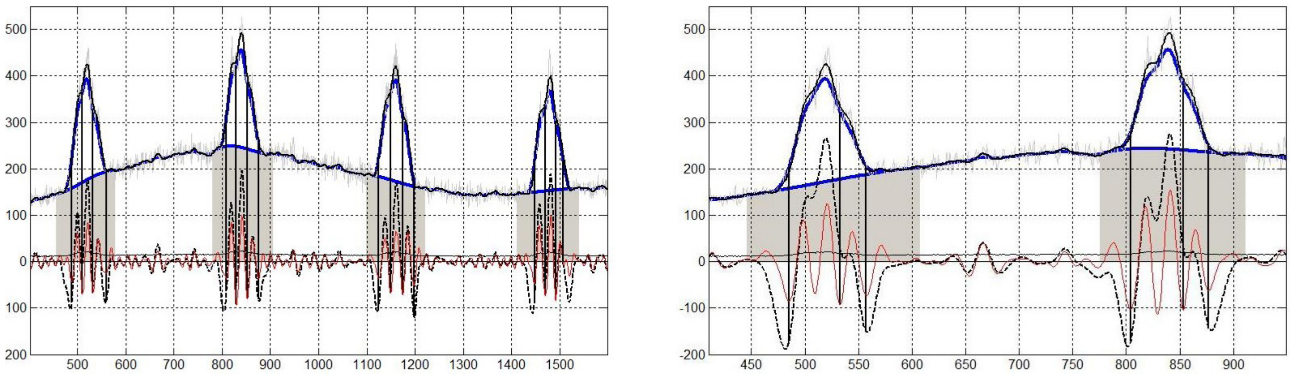


*Рис. 2. Результаты работы алгоритма обработки зашумленного модельного спектра, с использованием вейвлет-образов $W_{\varphi_n}(a,x;y)$, $n = 2, 4$, при задании параметров: $\beta = 8$, $a = \beta$ (слева) и $a = 1.5\beta$ (справа)*

## Заключение

Проведенные численные расчеты показывают, что при расстановке границ локализации мультиплетов в спектре, для восстановления базовой линии спектра, можно использовать масштабы гауссовых вейвлетов из диапазона $\beta \le a \le 3\beta$. Описанный в работе алгоритм может быть полезен при обработке и других временных рядов наблюдений, в частности, при аппроксимации тренда в данных [2].

**Литература**


1. *Дьяконов, В. П.* Вейвлеты. От теории к практике / В. П. Дьяконов. – М. : Солон-Р, 2002. – 448 с.

2. *Астафьева, Н. М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. М. Астафьева // УФН. – 1966. – Т. 166, № 11. – С. 1145–1170.

3. *Подосенова, Т. Б.* Особенности реализации алгоритма НВП при обработке спектральных данных / Т. Б. Подосенова // Развитие науки и образования в современном мире: сб. тр. науч.-практич. конф. – М. : АР–Консалт, 2018. – С. 9–6.

4. *Подосенова, Т. Б.* О вейвлет-образах плохоразрешенных мультиплетов [Электронный ресурс] / Т. Б. Подосенова // Электронный научный журнал. – 2019. – № 3 (25). – С. 8–15.

5. *Подосенова, Т. Б.* Вопросы нормировки при проведении CWT преобразований спектров / Т. Б. Подосенова // Перспективы развития науки и образования: сб. тр. науч.-практич. конф. – М. : АР–Консалт, 2018. – С. 16–22.

6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган – М. : Наука, 1979. – 832 с.

7. *Savitzky, A.* Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures / A. Savitzky, M.J.E. Golay // Analytical Chemistry. – 1964. – Vol. 36, No 8. – P. 1627–1639.

8. *Подосенова, Т. Б.* О сглаживающих SG фильтрах для задач обработки спектров [Электронный ресурс] / Т. Б. Подосенова // Электронный научный журнал. –2019. – № 3 (25). – С. 16–24.

9. *Подосенова, Т. Б.* Комбинированный алгоритм подавления шума в спектрах излучения [Электронный ресурс] / Т. Б. Подосенова // Электронный научный журнал. – 2020. – № 4 (33). – С. 12–17.

10. *Тихонов, А. Н.* Методы решения некорректных задач: учеб. пособие для вузов / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.

11. *Подосенова, Т. Б.* Численное решение уравнения Эйлера для задачи сглаживания экспериментальных данных / Т. Б. Подосенова // Science and education: problems and innovations: сб. ст. III Междунар. науч. практич. конф. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение», 2020. – С. 14–18.

12. *Гельфанд, И. М.* Вариационное исчисление: Учебник для ун-тов / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 228 с.

УДК 539.43:621.787

# ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ КОНЦЕНТРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ НА ВЕЛИЧИНУ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТНОМ УПРОЧНЁННОМ СЛОЕ БАЛКИ

**В. П. Радченко[1], Д. М. Шишкин[1], С. В. Глушков[2]**

[1]*Самарский государственный технический университет*
[2]*Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королёва*

**Аннотация.** В работе приведены результаты исследования влияния периодически расположенных концентраторов в форме поперечных полукруглых надрезов (канавок), нанесённых на предварительно упрочнённую грань балки, на напряжённо-деформированное состояние конструкции. Исходной информацией является экспериментально определённая эпюра остаточных напряжений по глубине упрочнённого слоя для гладкой балки после обработки поверхности дробью. Разработана методика численного решения задачи, базирующаяся на аналогии остаточных пластических деформаций с псевдотемпературными деформациями в неоднородном температурном поле. В результате исходная задача сведена к фиктивной задаче термоупругости. Детально изучено влияние количества канавок $n = \{3;5;7;9\}$ и радиуса полукруглого надреза $\rho = \{0,1;0,3\}$ мм на характер и величину распределения остаточных напряжений в зоне концентрации напряжений. Расчёты выполнены для балки $100\times10\times10$ мм из сплава ЭП742. Выполнен обстоятельный параметрический анализ поставленной задачи. Получены зависимости распределения остаточных напряжений по глубине слоя во всех концентраторах. Установлено, что происходит существенное снижение (по модулю) величины сжимающих напряжений в зонах концентрации по сравнению с напряжениями в гладкой балке, при этом максимальное снижение наблюдается в срединной области системы периодических надрезов.
**Ключевые слова:** балка, поверхностное пластическое упрочнение, периодическая система надрезов, напряжённо-деформированное состояние, остаточные напряжения, метод конечных элементов.

## Введение

В процессе эксплуатации любое изделие в той или иной мере подвергается влиянию механического износа деталей и узлов. Мониторинг несущих металлоконструкций и оценка степени износа составляющих его частей, как правило, имеют непостоянный по времени характер, поэтому динамически отследить докритическое состояние с целью предотвращения аварийной ситуации крайне сложно. Чаще всего нарушения в работе изделия сопровождаются мгновенной потерей устойчивости и нарушением состояния равновесия. Одной из явных причин подобных случаев является наличие развивающихся микродефектов различного рода в приповерхностном слое материала. Ситуация усугубляется, если на этапе выявления повреждений в дефектах обнаруживаются ещё и микротрещины, поскольку даже незначительные циклические нагрузки на конструкцию могут способствовать прогрессированию трещины до макроуровня [1, 6].

Одним из эффективных способов повышения ресурса металлоконструкций без существенного изменения массогабаритных параметров является поверхностное пластическое упрочнение (ППД) [3, 5–7]. Применение таких подходов сопровождается благоприятным влиянием упрочнения на многие показатели надёжности (повышение предела выносливости, микротвёрдости, износостойкости и т. д.) за счёт появления сжимающих остаточных напряжений (ОН) в тонком приповерхностном слое. Анализ напряжённо-деформированного состояния (НДС) материала с упрочнением и без него показывает существенный рост сопротивляемости при механическом воздействии в первом случае, что снижает возможность появления поверхностных дефектов [2, 3].

Положительное влияние ППД наблюдается и для деталей с концентраторами напряжений в виде вырезов, вмятин, царапин и иных видов трещиноподобных несплошностей [4–6, 8–10]. Такое явление однозначно обуславливается наличием сжимающих напряжений вблизи концентратора, которые локально снижают интенсивность эксплуатационных растягивающих напряжений, предотвращают растрескивание металла и раскрытие берегов трещин нормального отрыва. Уменьшение дислокаций в слоях материала посредством наружного уплотнения способствует также изменению траектории процесса разрушения. В подтверждение этого в работах [8, 9] на примере развития поверхностных трещин в образцах, изготовленных из никелевого суперсплава и ослабленных царапинами и вмятинами, представлены результаты положительного влияния ОН на усталостную долговечность. Результаты работы [6], полученные на основе линейной механики разрушения при исследовании цилиндрического стального образца с надрезом, также показали, что остановка роста трещины усталости наблюдается в поверхностном упрочнённом слое по причине резкого падения значений расчётного коэффициента интенсивности напряжений.

Цель текущей работы заключается в использовании теоретических принципов подхода [4], описанных в работе для цилиндрических образцов с надрезами, а также экспериментальных данных материала из работы [3] применительно к призматическому телу (балке) с повторяющимися концентраторами напряжений в форме полукруглых надрезов.

## 1. Постановка задачи

В работе рассматривается ультразвуковое механическое упрочнение дробью верхней грани призматической балки квадратного сечения ($100\times10\times10$ мм), изготовленной из сплава марки ЭП742, с последующим нанесением периодически повторяющихся канавок полукруглого профиля (рис. 1), имитирующих локальные повреждения верхнего слоя, с целью изучения НДС тела. Толщина упрочнённого слоя полагалась равной 200 мкм, что соответствует предельной величине для рассматриваемого метода ППД гладкой балки [3]. Нечётное количество рассматриваемых канавок $n=\{3;5;7;9\}$ выбиралось из тех соображений, чтобы детально изучить центральное сечение, а также по полученным результатам выполнить сравнительный анализ результатов в сечениях симметрично расположенных надрезов. Величина радиуса скругления поперечных канавок $\rho$ определяла нахождение концентратора либо в зоне упрочнения (при $\rho=0{,}1$ мм), либо в зоне основного материала (при $\rho=0{,}3$ мм). В качестве исходной информации в задаче принимаются экспериментальные сведения об остаточных напряжениях для сплава ЭП742 в гладкой балке (без «дефектов») [3].

## 2. Метод реконструкции напряжённо-деформированного состояния в гладком образце после поверхностного пластического деформирования

Исследование НДС ослабленной концентраторами балки для всех расчётных случаев выполнялось на основании известных компонент тензоров ОН и пластических деформаций (ПД) для «бездефектной» гладкой балки, полученных в работе [3]. Построение математической модели производилось в декартовой системе координат, плоскость $xOz$ совмещена с верхней упрочнённой гранью балки, ось $Oy$ направлена вертикально по глубине (рис. 1). На основании утверждений [4], что все компоненты тензоров ОН и ПД зависят только от координаты $y$, а ненулевыми величинами являются $\sigma_x=\sigma_x(y)$ и $\sigma_z=\sigma_z(y)$, изотропное поверхностное упрочнение гладкой поверхности образца можно описать с помощью соотношений [3]:

$$\sigma_x = \sigma_z, \quad q_x = q_z = -\frac{1-\nu}{E}\sigma_x, \quad q_y = \frac{2(1-\nu)}{E}\sigma_x, \tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_z$ — компоненты напряжений; $q_x, q_y$, $q_z$ — величины пластических деформаций; $\nu$ — коэффициент Пуассона; $E$ — модуль Юнга.

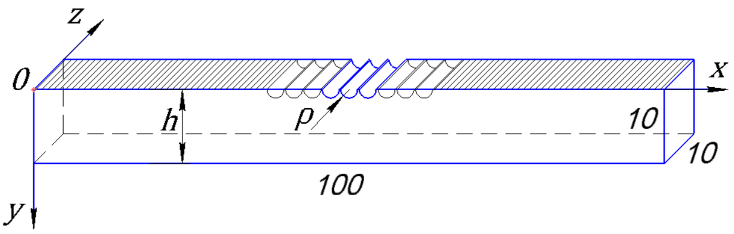



*Рис. 1. Схематическое изображение балки с упрочнённой верхней гранью при наличии повторяющихся концентраторов напряжений*

Поскольку в работе рассматривается только изотропное упрочнение, для реконструкции НДС в поверхностно упрочнённой гладкой балке из сплава ЭП742 достаточно знать лишь экспериментальную зависимость $\sigma_x = \sigma_x(y)$, приведённую в работе [3] (рис. 2). Остальные компоненты НДС можно вычислить, используя соотношения (1).

Для решения задачи, помимо аналитической аппроксимации компоненты $\sigma_x = \sigma_x(y)$, необходимо экстраполировать её на все значения $0 \le y \le h$, где $h$ — высота балки ($h = 10$ мм). Для этого использовалась аппроксимация вида

$$\sigma_x = \sigma_x(y) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left[-\left(\frac{y - y^*}{b}\right)^2\right], \tag{2}$$

где $\sigma_0, \sigma_1, b$ — параметры аппроксимации экспериментальной эпюры [1]; $y, y^*$ — величины текущей координаты и экспериментальной координаты локального экстремума (рис. 2).

Рассматриваемая задача реконструкции полей ОН и ПД при заданной высоте балки $h = 10$ мм решалась со следующими параметрами аппроксимации: $\sigma_0 = 13{,}38$ МПа, $\sigma_1 = 1100{,}98$ МПа, $b = 0{,}0928$ мм. Расчётные значения $\sigma_x = \sigma_x(y)$ по формуле (2) приведены на рис. 2 сплошной линией, маркеры — экспериментальные значения.

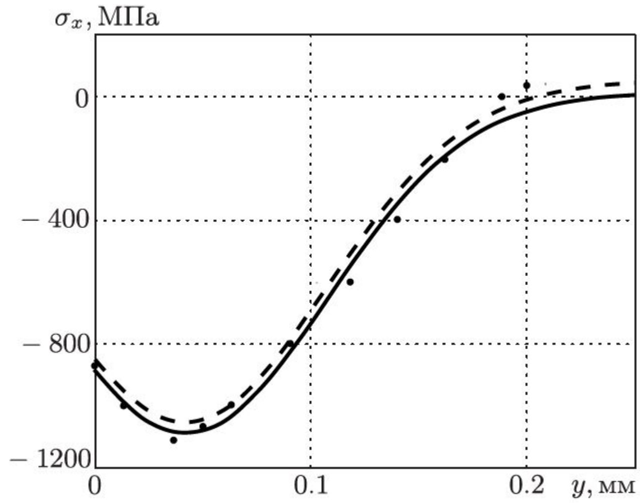



*Рис. 2. Распределение остаточных напряжений $\sigma_x = \sigma_x(y)$ после упрочнения гладкой поверхности балки из сплава ЭП742: экспериментальные (маркеры), расчётные (сплошная линия) по аппроксимации (2) и расчётные (штриховая линия) для термоупругой задачи*

## 3. Численный подход к решению задачи локального перераспределения остаточных напряжений в концентраторах напряжений после предварительного поверхностного упрочнения

Решение задачи о перераспределении ОН в образце, ослабленном периодически повторяющимися поперечными вырезами полукруглого профиля радиуса $\rho$ после опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД), основывается на модифицированном методе расчёта по первоначальным деформациям [3].

Вычислительный эксперимент осуществлялся при помощи метода конечных элементов (МКЭ) в программной среде ANSYS APDL и представлял собой следующую схему последовательных действий. На первом этапе согласно соотношениям (1) и (2) производилась реконструкция полей ОН и ПД для гладкого образца без поверхностных «дефектов».

На втором этапе задача сводилась к решению фиктивной задачи термоупругости с неоднородным по координате y температурным полем $T = T(y)$, которое можно задать произвольным, а сами температурные деформации полагать эквивалентными пластическим [3]:

$$q_i(y) = \beta_i(T(y))[T(y) - T_0] \quad (i = x, y, z), \tag{3}$$

где $q_i(y)$ — компоненты тензора остаточных пластических деформаций; $\beta_i(T(y))$ — коэффициенты температурного расширения; $T = T(y)$ — температурное поле, заданное произвольным образом; $T_0 = \text{const}$ — фиксированное значение температуры, заданное на грани, противоположной упрочнённой. Адекватность подхода сведения исходной подстановки к задаче фиктивной термоупругости проиллюстрирована на рис. 2, где штриховой линией показан расчёт на основе МКЭ для гладкой балки.

На заключительном этапе образец рассматривался при наличии концентраторов напряжений в количестве $n = \{3; 5; 7; 9\}$ для конкретного расчётного случая с $\rho = \{0{,}1; 0{,}3\}$ мм, т. е. происходила имитация процесса повреждения поверхностного упрочнённого слоя изделия за счёт удаления части материала. На этом этапе образуется неуравновешенное поле полных деформаций, которое изменяется благодаря перераспределению упругих деформаций, после чего балка переходит в равновесное состояние.

Отдельное внимание следует уделить подготовке и реализации численного метода. Конечно-элементное моделирование выполнялось построением плоской двухмерной модели, представляющей продольное сечение балки в плоскости $xOy$, посредством четырёхузловых элементов MESH200. С помощью метода экструзии в направлении оси $Oz$ плоская модель приобретала объёмный вид, а первоначальные плоские элементы — вид восьмиузловых элементов типа SOLID70, необходимых для решения температурной задачи. Решение фиктивной задачи термоупругости осуществлялось объёмными элементами SOLID185. Указанные объёмные элементы для решения обеих задач были выбраны на том основании, что они позволяют выполнять ротацию между собой без перестраивания сетки расчётной модели, тем самым обеспечивая взаимосвязь между температурным и прочностным решениями. Процедура упрочнения поверхностного слоя толщиной 200 мкм выполнялась за счёт локального сгущения сетки элементов в местах расположения концентраторов с линейным размером рёбер, не превышающим 7 мкм. Такой подход также позволил более точно описать полукруглую форму канавок расположением достаточного количества элементов в окружном направлении и наличием перемычек шириной 14 мкм между промежуточными надрезами. Центральный вырез откладывался на расстоянии $x = 50$ мм от начала координат, остальные надрезы располагались симметрично относительно центрального.

Наложение граничных условий на расчётную модель реализовывалось следующим образом. При температурном анализе применялись граничные условия первого рода —верхняя упрочнённая грань балки подвергалась нагреву $T_1 = 400$ °C, на противоположной грани задавалась температура $T_0 = 20$ °С, а остальные грани были теплоизолированы. Для реализации прочностного расчёта балка имела жёсткое закрепление по левому нижнему ребру, а нижнее правое представляло собой шарнирное опирание.

### 4. Анализ полученных результатов

Численный эксперимент выполнялся для двух значений радиуса полукруглого надреза $\rho = \{0,1; 0,3\}$ мм и в количестве $n = \{3; 5; 7; 9\}$. Оценка результатов решения для каждого отдельно взятого расчётного случая выполнялась по сечениям, проходящим от впадины каждого концентратора на глубину 1 мм. Изучение величин ОН при глубине свыше 1 мм лишено всякого смысла, так как распределение значений компонент тензора ОН $\sigma_i = \sigma_i(y)$ $(i = x, y, z)$ при $1 \le y \le h$ носит асимптотический характер. Для идентификации поперечных концентраторов напряжений их нумерация проводилась по порядку слева направо. В качестве примера на графиках приводятся результаты расчётов при $n = 9$ для $\rho = 0,1$ мм (рис. 3) и для $\rho = 0,3$ мм (рис. 4) для величины $\sigma_x = \sigma_x(y)$, а также при $n = 9$ для $\rho = 0,3$ мм (рис. 5, 6) для величин $\sigma_y = \sigma_y(y)$ и $\sigma_z = \sigma_z(y)$ соответственно. На рис. 3–6 маркер 5 соответствует центральной канавке, а маркеры {1, 9}, {2, 8}, {3, 7}, {4, 6} соответствуют канавкам, симметрично расположенным относительно центральной, по мере удаления от неё, соответственно. Маркер 0 на рис. 3 соответствует остаточному напряжению в гладкой (бездефектной) балке.

Из графиков видно, что по мере удаления канавок от центра к периферии наблюдается тенденция снижения явления релаксации для всех компонент тензора сжимающих ОН, причём значения ОН в примыкающих к центральному надрезу 5 канавок 4 и 6 для всех расчётных случаев практически совпадают. Отдельно следует отметить, что несмотря на выход канавок 1, 2, 8 и 9 с радиусами $\rho = 0,3$ мм из зоны упрочнения, в них всё ещё наблюдаются сжимающие остаточные напряжения.

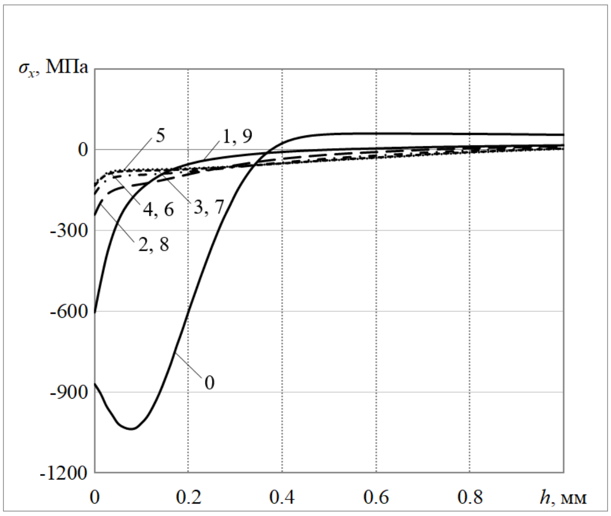



*Рис. 3. Распределение $\sigma_x = \sigma_x(y)$ при $n = 9$ для $\rho = 0,1$ мм*

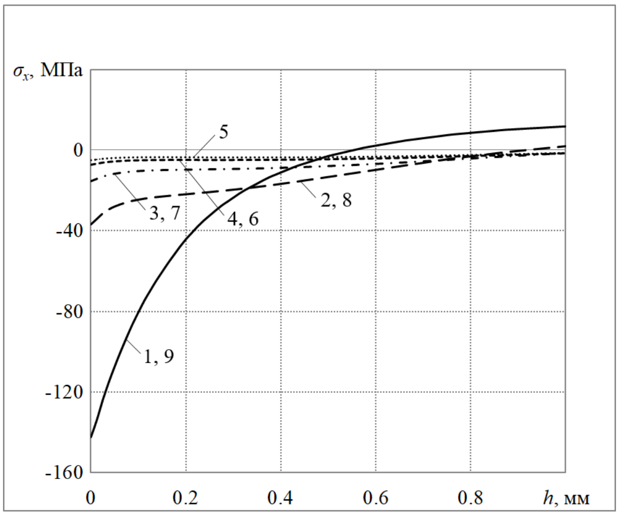



*Рис. 4. Распределение $\sigma_x = \sigma_x(y)$ при $n = 9$ для $\rho = 0,3$ мм*

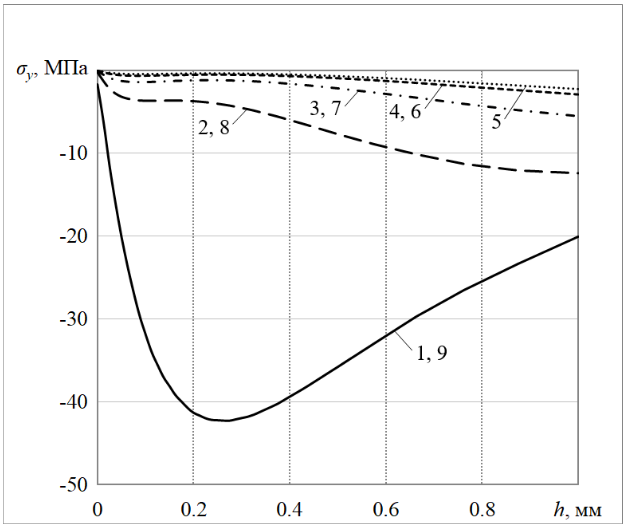



*Рис. 5. Распределение* $\sigma_y = \sigma_y(y)$
*при* $n = 9$ *для* $\rho = 0{,}3$ *мм*

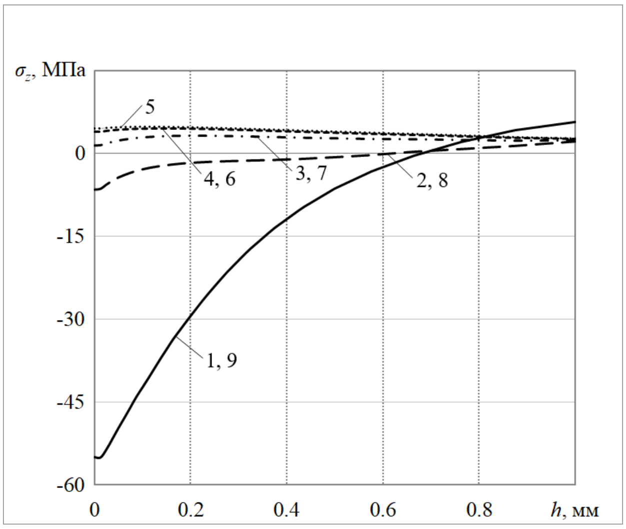



*Рис. 6. Распределение* $\sigma_z = \sigma_z(y)$
*при* $n = 9$ *для* $\rho = 0{,}3$ *мм*

## Заключение

По полученным в ходе исследования результатам можно сделать следующие выводы:

1) разработана методика численного решения краевой задачи о перераспределении остаточных напряжений в поверхностно упрочнённой балке после нанесения на упрочнённую поверхность системы надрезов полукруглого радиуса;

2) выполнен параметрический анализ влияния количества концентраторов и радиуса надреза на напряжённо-деформированное состояние в области концентрации напряжений;

3) в результате исследования установлено, что в области дна концентратора происходит падение уровня сжимающих остаточных напряжений по сравнению с гладкой балкой, при этом минимальный уровень сжимающих напряжений наблюдается в центральном надрезе периодической системы.

## Благодарности


Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–01–00550а).


## Литература


1. *Матченко Т. І., Матченко П. Т., Шугайло О-й. П., Ляшенко Л. А., Панченко А. В.* Аналіз підходів до оцінки витривалості та циклічної тріщиностійкості елементів металевих конструкцій // Ядерна та радіаційна безпека. – 2017. – № 1. – С. 49–55. DOI: 10.32918/nrs.2017.1(73).09.

2. *Павлов В. Ф., Букатый А. С., Семенова О. Ю.* Прогнозирование предела выносливости поверхностно упрочненных деталей с концентраторами напряжений // Вестник машиностроения. – 2019. – № 1. – С. 3–7.

3. *Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е.* Влияние технологии поверхностного пластического упрочнения, остаточных напряжений и граничных условий на выпучивание балки // Вестн. Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика. – 2020. – № 1. – С. 87–98. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.07

4. *Радченко В. П., Куров А. Ю.* Влияние анизотропии поверхностного пластического упрочнения на формирование остаточных напряжений в цилиндрических деталях с надрезами полукруглого профиля // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2016. – Т. 20, № 4. – С. 675–690. DOI: 10.14498/vsgtu1513.

5. *Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И.* Математическое моделирование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // Вестн. Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика. – 2016. – № 1. – С. 93–112. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.07.

6. *Сазанов В. П.* Исследование закономерностей остановки усталостной трещины в цилиндрическом образце с надрезом // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2018. – Т. 17, № 1 – С. 160–169. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169.

7. *Dai K., Shaw L.* Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation // International Journal of Fatigue. – 2008. – V. 30, No. 8. – P. 1398–1408. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010.

8. *Doremus L., Cormier J., Villechaise P., Henaff G., Nadot Y., Pierret S.* Influence of residual stresses on the fatigue crack growth from surface anomalies in a nickel-based superalloy // Materials Science and Engineering A. – 2015. – V. 644. – P. 234–246. DOI: 10.1016/j.msea.2015.07.077.

9. *Fleury R. M. N., Nowell D.* Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys // International Journal of Fatigue. – 2017. – V. 105. – P. 27–33. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015

10. *Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J.* The effect of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6 // Materials Science and Engineering A. – 2009. V. 516, No. 1–2. – P. 235–247. DOI: 10.1016/j.msea.2009.03.020.

УДК 519.6

# КУСОЧНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Я. Е. Ромм, Г. А. Джанунц**

*Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал)*
*Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)*

**Аннотация.** Кусочно-интерполяционное приближение функций одной вещественной переменной, производных и интегралов строится с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа и Ньютона. Полиномы преобразуются к виду алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами с помощью восстановления коэффициентов полинома по его корням. Применяются формулы отличные от формул Виета. В полученном виде полиномы интерполируют правые части обыкновенных дифференциальных уравнений, выражение первообразных используется для приближения решения. Выполняется итерационное уточнение. Представлены оценки погрешности, результаты численного эксперимента для жестких и нежестких задач в моделях физических, химических и других процессов.

**Ключевые слова:** кусочная интерполяция функций, решение задачи Коши, численное моделирование жестких и нежестких задач.

## Введение и постановка вопроса

Приближенное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) строится на основе интерполяционных полиномов Лагранжа и Ньютона. Оба полинома эквивалентно преобразуются к виду алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами. В этом случае получается аналитическое выражение производной и первообразной. С помощью преобразованных полиномов приближаются правые части каждого уравнения системы ОДУ. Первообразная от полинома с соответственным значением константы — координата приближенного решения, подставляется в функцию правой части. Процесс итерационно повторяется, в результате решение приближается со сравнительно высокой точностью. Задача сообщения — представить математическое описание метода, его алгоритмизацию и программную реализацию. Метод совмещается с кусочной интерполяцией. Анализируется вычислительная устойчивость, границы погрешности, временная сложность для нежестких и жестких задач. Дано сравнение с методами Рунге — Кутты, Батчера и Дормана — Принса [1, 2]. Цель работы — показать отличительное качество предложенного метода, которое состоит в ограниченном накоплении погрешности при сохранении приемлемой трудоемкости, что востребовано в задачах моделирования физических, химических процессов [2], в задачах планетной астрономии [3]. Описан численный эксперимент, исследуется возможность уменьшения погрешности без автоматического выбора параметров, описанного в [4]. Вместе с упрощением метода требуется снизить его трудоемкость.

## 1. Инвариантное восстановление коэффициентов полинома по его корням

Пусть рассматривается полином $P_n(x)=\sum_{\ell=0}^{n} d_\ell x^\ell$, с коэффициентом $d_n=1$, и корнями $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, так что

$$\sum_{\ell=0}^{n} d_\ell x^\ell = \prod_{r=0}^{n-1} (x-x_r). \qquad (1)$$

Если $P_1(x) = x - x_0$, то полагается $P_1(x) = d_{11}x + d_{10}$, где $d_{11} = 1$, $d_{10} = -x_0$. Если уже вычислены коэффициенты полинома $P_{k-1}(x) = d_{(k-1)(k-1)}x^{k-1} + d_{(k-1)(k-2)}x^{k-2} + ... + d_{(k-1)\,1}x + d_{(k-1)\,0}$, $k \geq 2$, то $P_k(x) = \prod_{r=0}^{k-1}(x - x_r)$, и $P_k(x) = P_{k-1}(x) \cdot (x - x_{k-1})$. Отсюда

$$\begin{gathered} d_{kk} = d_{(k-1)(k-1)}, d_{k(k-1)} = d_{(k-1)(k-2)} - d_{(k-1)(k-1)}x_{k-1}, d_{k(k-2)} = d_{(k-1)(k-3)} - d_{(k-1)(k-2)}x_{k-1}, \dots \\ \dots, d_{k(k-\ell)} = d_{(k-1)(k-\ell-1)} - d_{(k-1)(k-\ell)}x_{k-1}, \dots, d_{k0} = -d_{(k-1)\,0}\, x_{k-1}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\ell = 1, 2, ..., k-1$. При $k = n$ левые части (2) совпадут с искомыми значениями коэффициентов полинома (1). Алгоритм сохраняется для комплексных корней и коэффициентов, программируется в форме двойного цикла [5]. Соотношения (2) применяются для преобразования интерполяционных полиномов. Для интерполяции функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, полином Лагранжа примет вид:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n} (x - x_r) \Big/ \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n} (x_j - x_r), \tag{3}$$

где $x_r$ — узлы интерполяции. На основании численного эксперимента, компьютерная реализация дает менее высокую погрешность в случае равноотстоящих узлов.

## 2. Преобразование интерполяционного полинома Лагранжа

Пусть на отрезке $x \in [a, b]$ взяты равноотстоящие узлы для интерполяционного полинома (3): $x_i \in [a, b]$, $i \in \overline{0, n}$, $x_{i+1} - x_i = h$, $i \in \overline{0, n-1}$, $h = (b-a)n^{-1}$. В этом случае $x_j = x_0 + jh$, $x_r = x_0 + rh$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Отсюда $\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n}(x_j - x_r) = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n}(j - r)h$, $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n}(x - x_r)/(j - r)\,h^{-1}$. Вводится переменная $t = (x - x_0)\,h^{-1}$. Тогда $(x - x_1)\,h^{-1} = t - 1$, $\dots$, $(x - x_r)h^{-1} = t - r$, $r \in \overline{0, n}$, и

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n} (t - r)/(j - r), \quad t = (x - x_0)h^{-1}. \tag{4}$$

Аналогичное преобразование дано в [6]. Отличие составит перевод числителей из (4) в форму полиномов с натуральными коэффициентами. В результате станет возможным аналитическое выражение первообразных, производных и организация итераций в правых частях ОДУ. Пусть числитель дроби $\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n}(t - r)/(j - r)$ записан в виде

$$P_{nj}(t) = \prod_{r=0}^{n-1}(t - t_r), \tag{5}$$

где роль корней полинома играют последовательные натуральные числа, среди которых пропускается $j$: $t_r = \begin{cases} r, & r < j; \\ r+1, & r \geq j. \end{cases}$ По схеме (2) получится:

$$P_{nj}(t) = d_{0j} + d_{1j}t + d_{2j}t^2 + ... + d_{nj}t^n. \tag{6}$$

Коэффициенты полинома (6) будут натуральными числами. Они могут быть априори вычислены и храниться в памяти компьютера как константы, не зависящие от интерполируемой функции $f(x)$, от диапазона и расположения её аргумента, причем это можно сделать для любого $j$ и для всех степеней полинома $n$ в априори заданных границах. Знаменатель в (4) отличается от числителя тем, что в нем $t = j$. В результате

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,(d_{0j} + d_{1j}t + d_{2j}t^2 + ... + d_{nj}t^n)/(d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + ... + d_{nj}j^n), \tag{7}$$

где $t=(x-x_0)h^{-1}$. Числитель и знаменатель в (7) удобно вычислять по схеме Горнера

$$P_{nj}(t)=d_{0j}+d_{1j}t+d_{2j}t^2+\ldots+d_{nj}t^n=(\cdots(d_{nj}\times t+d_{n-1j})\times t+d_{n-2j})\times t+\cdots+d_{1j})\times t+d_{0j}.$$

В этих обозначениях

$$P_n(t)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,P_{nj}(t)/P_{nj}(j),\quad t=(x-x_0)h^{-1}. \tag{8}$$

Если собрать коэффициенты при равных степенях слагаемых, то

$$P_n(t)=\sum_{\ell=0}^{n} D_\ell\, t^\ell, \tag{9}$$

где $D_\ell$ — результат приведения подобных. В дальнейшем приближение $f(x)\approx P_n(t)$, выполняется с использованием (8), (9). Отсюда две разновидности приближения производных:

$$f'(x)\approx P_n'(x)=h^{-1}\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,(d_{1j}+2d_{2j}t+\ldots+(n-1)d_{nj}\,t^{n-1})/(d_{0j}+d_{1j}j+d_{2j}j^2+\ldots+d_{nj}j^n), \tag{10}$$

$$f'(x)\approx P_n'(x)=h^{-1}P_n'(t)=h^{-1}\sum_{\ell=1}^{n}\ell\, D_\ell\, t^{\ell-1}. \tag{11}$$

На практике (10) несколько точнее (11).

### 3. Кусочная интерполяция

Если (8) – (11) применяются на малых подынтервалах с общими границами разбиения

$$[a,b]=\bigcup_{i=0}^{p-1}[a_i,b_i], \tag{12}$$

то точность приближения возрастет: функция и интеграл будут приближаться с точностью до $10^{-19}-10^{-20}$, производная — с точностью $10^{-16}-10^{-15}$ (формат extended, Delphi). Ниже предполагается, что $b_i-a_i=(b-a)p^{-1}$, если не оговорено иное, то $p=2^k$, $k$ — натуральное. Видоизменения (8), (9) формально совпадают между собой и с полиномом (3) при условии, что на одном и том же отрезке узлы одинаковы, одинаковы степени полиномов и интерполируется одна и та же функция. В этих же условиях все три полинома совпадают с интерполяционным полиномом Ньютона [6]. Для $\forall k\geq 0$ справедливо соотношение [7]:

$$[a,b]=\bigcup_{i=0}^{2^k-1}[a_i,b_i],\ |\,f(x)-\Psi_{in}(t)\,|\ \leq\ c\ 2^{-k(n+1)}\,h^{n+1}\ \forall i=\overline{0,2^k-1},\ \forall x\in[a_i,b_i], \tag{13}$$

где предполагается, что $f(x)$ — определена и непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ $n+1$ раз. Здесь $\Psi_{in}(t)$ — интерполяционный полином Ньютона для интерполирования вперед на подынтервале $[a_i,b_i]$, $t=(x-a_i)h^{-1}$, $h$ — шаг интерполяции полинома $\Psi_{0n}(t)$ на $[a,b]$ (при $k=0$), $c=\max\limits_{[a,b]}\max\limits_{1\leq n\leq n_0}|\,f^{(n+1)}(x)\,|$, $n_0=\text{const}$, $c=\text{const}$. Из (13) последовательность полиномов $\Psi_{in}(t)$ равномерно сходится к $f(x)$ на $[a,b]$, если $k\to\infty$. Эти утверждения и (13) сохраняются для рассматриваемых видоизменений интерполяционного полинома Лагранжа.

### 4. Приближенное вычисление интегралов

Непосредственно из (8), (9), (12) вытекают формулы приближенного вычисления интегралов. С разбиением (12)

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{p-1}\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx,\ \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx\approx\int_{a_i}^{b_i} P_{ni}(x)\,dx, \tag{14}$$

где $P_{ni}(x)$ — полином (7), построенный на подынтервале $[a_i\,,\, b_i]$:

$$P_{ni}(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_{ij})(d_{0j}+d_{1j}t+d_{2j}t^2+\ldots+d_{nj}t^n)/(d_{0j}+d_{1j}j+d_{2j}j^2+\ldots+d_{nj}j^n),$$
$$t=(x-a_i)h_i^{-1},\;\; h_i=(b_i-a_i)n^{-1}. \qquad (15)$$

Отсюда

$$\int_{a_i}^{b_i} P_{ni}(x)\,dx=\sum_{j=0}^{n} f(x_{ij})\,h_i\int_0^n (d_{0j}+d_{1j}t+d_{2j}t^2+\ldots+d_{nj}t^n)dt/(d_{0j}+d_{1j}j+d_{2j}j^2+\ldots+d_{nj}j^n),$$

или,

$$\int_{a_i}^{b_i} P_{ni}(x)\,dx=(b-a)(pn)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{n} f(x_{ij})\,(d_{0j}+d_{1j}2^{-1}n+d_{2j}3^{-1}n^2+\ldots+d_{nj}(n+1)^{-1}n^n)/(d_{0j}+d_{1j}j+d_{2j}j^2+\ldots+d_{nj}j^n). \qquad (16)$$

Сложение (16) по всем подынтервалам влечет

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)(pn)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{n} f(x_{ij})\,(d_{0j}+d_{1j}2^{-1}n+d_{2j}3^{-1}n^2+\ldots+d_{nj}(n+1)^{-1}n^n)/(d_{0j}+d_{1j}j+d_{2j}j^2+\ldots+d_{nj}j^n). \qquad (17)$$

Если на каждом отрезке в правой части (14) $f(x)$ приближается с оценкой (13), где $h=(b-a)n^{-1}$, $b_i-a_i=(b-a)2^{-k}$, то $\left|\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx-\int_{a_i}^{b_i} P_{ni}(x)\,dx\right|\le c\,2^{-k(n+1)}\left((b-a)n^{-1}\right)^{n+1}(b-a)2^{-k}.$

Отсюда

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=0}^{2^k-1}\int_{a_i}^{b_i} P_{ni}(x)\,dx\right|\le\sum_{i=0}^{2^k-1}\left|\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx-\int_{a_i}^{b_i} P_{ni}(x)\,dx\right|\le\sum_{i=0}^{2^k-1} c\,2^{-k(n+1)}\left((b-a)n^{-1}\right)^{n+1}(b-a)2^{-k}.$$

Окончательно,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=0}^{2^k-1}\int_{a_i}^{b_i} P_{ni}(x)\,dx\right|\le c\;2^{-k(n+1)}\left((b-a)n^{-1}\right)^{n+1}(b-a). \qquad (18)$$

Оценка (18) имеет место в условиях, при которых выполняется (13). В этих условиях $c\;2^{-k(n+1)}\left((b-a)/n\right)^{n+1}(b-a)\to 0,\; k\to\infty$. Формула (17) — разновидность формул Ньютона — Котеса [6].

## 5. Кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для ОДУ

Пусть рассматривается задача Коши

$$y'=f(x,y),\;\; y(x_0)=y_0, \qquad (19)$$

в области $R:\{\; a\le x\le b;\; |\,y-y_0\,|\le B;\; B=\text{const}\;\}$, где функция $f(x,y)$ определена, непрерывно дифференцируема (в точках $a$ — справа, $b$ — слева) и удовлетворяет условию Липшица: $\left|\, f(x,y)-f(x,\tilde y)\,\right|\le L\,|\,y-\tilde y\,|$, $L=\text{const}$, $\forall\;(x,y),\,(x,\tilde y)\in R$. Предполагается, что в $R$ решение задачи (19) существует и единственно. Для простоты обозначений, $a$, $b$ те же, что в (12). Для интерполяции правой части (19) в $f(x,y)$ подставляется приближенное значение $y$. Вначале вместо $y$ подставляется $y_0$. Функция $f(x,y_0)$ приближается полиномами вида (8), (9) по изложенной схеме так, как если бы $f(x)$ совпадала с $f(x, y_0)$. При фиксированных $n$ и $k$ на отрезке $[a_i, b_i]$, $i=1$, затем, аналогично, при $i=2,3,\ldots,$ выполняется итерационное уточнение. Пусть $P_n(t)=\sum_{\ell=0}^{n} D_\ell t^\ell$, $f(x, y_0) \approx P_n(t)$, $t=(x-a_i)h_i^{-1}$, $h_i$ — шаг интерполяции на $[a_i, b_i]$. Первообразная $P_{(\text{int})\,n+1}(x)=y_{0(i-1)}+h_i \int_0^{(x-a_i)h_i^{-1}} P_n(t)dt$, равная $y_{0(i-1)}+h_i \sum_{\ell=0}^{n} D_\ell/(\ell+1) t^{\ell+1}$, принимается за приближение решения: $y(x) \approx P_{(\text{int})\,n+1}(x)$. Далее, полагается $f(x, y) \approx f(x, P_{(\text{int})\,n+1}(x))$, и при том же $n$, на том же отрезке строится интерполяционный полином вида (9): $P_n^{(1)}(t) \approx f(x, P_{(\text{int})\,n+1}(x))$, $t=(x-a_i)h_i^{-1}$. Снова берется первообразная с тем же значением константы $P_{(\text{int})\,n+1}^{(1)}(x)=y_{0(i-1)}+h_i \int_0^{(x-a_i)h_i^{-1}} P_n^{(1)}(t)dt$, подставляется в правую часть, $f(x, y) \approx f(x, P_{(\text{int})\,n+1}^{(1)}(x))$, которая затем интерполируется аналогично: $P_n^{(2)}(t) \approx f(x, P_{(\text{int})\,n+1}^{(2)}(x))$. Фактически итерации $P_n^{(\ell)}(t) \approx f(x, P_{(\text{int})n+1}^{(\ell)}(x)), t=(x-a_i)h_i^{-1}, P_{(\text{int})n+1}^{(\ell)}(x)=y_{0(i-1)}+h_i \int_0^{(x-a_i)h_i^{-1}} P_n^{(\ell)}(t)dt,$ $\ell=1,2,\ldots,$ продолжаются до заданной границы $\ell \leq q=\text{const}$, абстрактно их количество не ограничивается. Выше за значение $y_{0(i-1)}$ было принято $P_{(\text{int})\,n+1}^{(q)}(b_{i-1})$. По окончании итераций на $[a_i, b_i]$ выполняется переход к $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, где за значение $y_{0i}$ принимается $P_{(\text{int})\,n+1}^{(q)}(b_i)$. Пусть $\varepsilon_{i\ell}$ означает абсолютную погрешность приближения решения на $\ell$-й итерации на отрезке $[a_i, b_i]$. В [4] показано, что при условии

$$\left| f(x, P_{(\text{int})\,n+1}^{(\ell)}(x))-P_n^{(\ell)}(t) \right| \leq \left| y(x)-P_{(\text{int})\,n+1}^{(\ell)}(x) \right|, \ \ell=0,1,\ldots, \ \forall x \in [a_i, b_i], \tag{20}$$

имеет место оценка

$$\varepsilon_{i\ell+1} \leq ((L+1)(b-a))^{\ell+1} 2^{-k(\ell+1)} / (\ell+1)! \, c_{ki} \quad \forall x \in [a_i, b_i], \tag{21}$$

где $c_{ki}$ — граница абсолютной погрешности интерполяции правой части (19), оцениваемая из (13): $c_{ki}=c\, 2^{-k(n+1)} h^{n+1}$, $x \in [a_i, b_i]$, при этом $h=(b-a)n^{-1}$. Более точно,

$$\left| f(x, P_{(\text{int})\,n+1}^{(\ell)}(x))-P_n^{(\ell)}(t) \right| \leq c_{kr}, \ c_{kr}=c\, 2^{-k(n+1)} h^{n+1}, \ \forall i=\overline{0, 2^k-1} \wedge \forall x \in [a_i, b_i], \ t=(x-a_i)h_i^{-1}. \tag{22}$$

Пусть $\forall \varepsilon>0$ путем выбора $k$ в (22) обеспечено выполнение неравенства $c_{ki} \leq \varepsilon$. Если $\varepsilon \leq \left| y(x)-P_{(\text{int})\,n+1}^{(\ell)}(x) \right|$, $\ell=0,1,\ldots,$ $\forall x \in [a_i, b_i]$, то выполнено (20), соответственно выполнено (21), и за счет выбора $\ell$ в (21) можно обеспечить выполнение неравенства

$$((L+1)(b-a))^{\ell+1} 2^{-k(\ell+1)} / (\ell+1)! \leq 1 \quad \forall x \in [a_i, b_i]. \tag{23}$$

В этих условиях, начиная с некоторого $\ell_0$, получится

$$\left| y(x)-P_{(\text{int})\,n+1}^{(\ell)}(x) \right| \leq \varepsilon, \ \forall \ell \geq \ell_0, \ \forall x \in [a_i, b_i]. \tag{24}$$

Тем самым, при выполнении (22) в сочетании с (23), кусочно-интерполяционный метод с итерационным уточнением обеспечит равномерную сходимость к решению, (24) не зависит от $i$ и распространяется на $[a, b]$ из (12).

Все изложенные рассуждения и оценки переносятся на случай интерполяционного полинома Ньютона с равноотстоящими узлами для интерполирования вперед [6]. Каноническая запись этого полинома на подынтервале из (12) имеет вид

$$\Psi_{in}(t)=f(x_{i0})+\sum_{j=1}^{n} \Delta^j f_{i0} / j! \prod_{r=0}^{j-1} (t-r), \ t=(x-x_{i0})h_i^{-1}, \ x_{i0}=a_i, \ h_i=(b_i-a_i)n^{-1}, \tag{25}$$

где $x_{ij}=a_i+jh$, $j=\overline{0, n}$, $\Delta^j f_{i0}$ — конечная разность $j$-го порядка в узле $x_{i0}$. Полином (25) преобразуется к виду полинома с числовыми коэффициентами. Для этого вычисляются конечные разности $\Delta^j f_{i0},\ j=\overline{1,n}$. Поскольку полином $P_j(t)=\prod_{r=0}^{j-1}(t-r)$ задан разложением на множители, где $r=0,1,\ldots,j-1$ — его корни, можно восстановить коэффициенты по схеме (1), (2). При этом в (6) $t_r=r,\ \ r=0,1,\ldots,j-1$. Далее, простым приведением подобных полином (25) преобразуется к виду $\Psi_{in}(t)=a_{i0}+a_{i1}t+a_{i2}t^2+\ldots+a_{in}t^n,\ i=\overline{0,\ p-1}$. В этом случае применение к кусочно-интерполяционному вычислению интегралов повторяет преобразования и оценки (14)–(18) с точностью до обозначений коэффициентов. В случае применения к задаче Коши повторяются рассуждения и соотношения (20)–(24) с точностью до замены обозначений $P_n^{(\ell)}(t)$ на $\Psi_n^{(\ell)}(x)$, и $P_{(\mathrm{int})\,n+1}^{(\ell)}(x)$ на $\Psi_{(\mathrm{int})\,n+1}^{(\ell)}(x)$.

## 6. Численный эксперимент

Часть эксперимента дана на примерах задач, имеющих аналитические решения. Обсуждаются также результаты моделирования химических процессов и задач небесной механики. Эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-2500.

**Пример 1.** Задача $y'=\cos(x+y),\ \ y(0)=0$, имеет решение $y=-x+2\,arctg(x)$. Абсолютная погрешность приближения на $[0,\ 512]$ разностными и кусочно-интерполяционным (PP) методами дана в табл. 1 наряду с числом обращений $(fc)$ к правой части.

Таблица 1

*Погрешность и число обращений к правой части при решении задачи примера 1*

| $x$ | Runge-Kutt_4 | Butcher_6 | Dorman-Prince_8 | PP |
|---|---|---|---|---|
| | $h=1.024\times10^{-3}$ | $h=1.024\times10^{-2}$ | $h=1.024\times10^{-2}$ | $h=2.3\times10^{-2}$ |
| | $fc=2000000$ | $fc=350000$ | $fc=650000$ | $fc=183344$ |
| 5.12 | 1.315E–**0015** | 2.665E–**0016** | 1.518E–**0018** | 1.084E–**0018** |
| 10.24 | 3.422E–**0016** | 6.765E–**0017** | 7.373E–**0018** | 0.000E+**0000** |
| … | … | … | … | … |
| 256.00 | 3.608E–**0016** | 2.498E–**0016** | 7.078E–**0016** | 4.163E–**0017** |
| 261.12 | 8.327E–**0016** | 4.441E–**0016** | 8.882E–**0016** | 5.551E–**0017** |
| … | … | … | … | … |
| 506.88 | 3.053E–**0016** | 1.749E–**0015** | 4.524E–**0015** | 2.776E–**0017** |
| 512.00 | 8.049E–**0016** | 2.137E–**0015** | 3.747E–**0015** | 5.551E–**0017** |

Граница погрешности $10^{-15}$ соответствует методам 4-го (Runge-Kutt_4), 6-го (Butcher_6) и 8-го (Dorman-Prince_8) порядков. Величины шагов для каждого разностного метода выбраны с целью наименьшей погрешности. Методу Батчера соответствует количество обращений к функции правой части $fc=350000$. Кусочно-интерполяционное решение с параметрами $b_i-a_i=0.345,\ \ n=15,\ \ \ell=13$, характеризуется порядком погрешности $10^{-17}$ при $fc=183344$.

**Пример 2.** Система $y_1'=x+2y_1/x-\sqrt{y_2}\,,\ \ y_2'=2\sqrt{y_2}\,$, при $y_1(1)=2,\ \ y_2(1)=4$ имеет решение $y_1=x(1+x),\ \ y_2=(1+x)^2$. Канонические нормы вектора абсолютных погрешностей компонент на отрезке $[1,\ 513]$ представлены в табл. 2 наряду с $fc$.

При одинаковом порядке погрешности среди разностных методов значением $fc=6656000$ характеризуется метод Дормана — Принса. Кусочно-интерполяционное приближение с параметрами: $b_i-a_i=0.25,\ \ n=3,\ \ \ell=20$, в большинстве проверочных точек дает значения «нулевых» погрешностей в формате вывода данных (*extended*), при увеличении числа проверочных точек встречаются значения $10^{-18}-10^{-16}$. При этом $fc=56028$.

**Пример 3.** В [1] на серии тестовых задач представлено сравнение вычислительных качеств наиболее эффективных методов высокоточного решения нежестких задач Коши. Типичные

Таблица 2

*Погрешность и число обращений к правой части при решении задачи примера 2*

| $x$ | Runge-Kutt_4 | Butcher_6 | Dorman-Prince_8 | PP |
|---|---|---|---|---|
| | $h = 1.024\times10^{-5}$ | $h = 1.0\times10^{-4}$ | $h = 1.0\times10^{-3}$ | $h \approx 8.3\times10^{-2}$ |
| | $fc = 2.0\times10^{8}$ | $fc = 35840000$ | $fc = 6656000$ | $fc = 56028$ |
| 6.12 | 2.082E–**0017** | 3.539E–**0016** | 8.674E–**0017** | 0.000E+**0000** |
| 11.24 | 1.110E–**0016** | 1.388E–**0016** | 3.608E–**0016** | 0.000E+**0000** |
| … | … | … | … | … |
| 257.00 | 5.684E–**0014** | 2.842E–**0014** | 6.821E–**0013** | 0.000E+**0000** |
| 262.12 | 5.684E–**0014** | 4.974E–**0014** | 3.837E–**0013** | 0.000E+**0000** |
| … | … | … | … | … |
| 507.88 | 1.563E–**0013** | 1.705E–**0013** | 2.416E–**0013** | 0.000E+**0000** |
| 513.00 | 1.421E–**0013** | 4.832E–**0013** | 4.263E–**0013** | 0.000E+**0000** |

результаты дает тестовая задача двух тел:

$$y_1' = y_3,\ y_2' = y_4,\ y_3' = -y_1(y_1^2 + y_2^2)^{-3/2},\ y_4' = -y_2(y_1^2 + y_2^2)^{-3/2},$$
$$y_1(0) = 0.5,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 0,\ y_4(0) = \sqrt{3}. \qquad (26)$$

На $[0,\ 6\pi]$ метод Дормана — Принса 8-го порядка дает решение задачи (26) с погрешностью порядка $10^{-14}$ при $fc \approx 39000$, экстраполяционная программа ODEX на том же отрезке достигает погрешности порядка $10^{-13}$ при $fc \approx 36000$ [1]. Наименьшей границы погрешности, порядка $10^{-16}$, на том же отрезке, среди исследованных методов численного приближения достигает интегратор Гаусса — Эверхарта 19-го порядка — GAUSS_32 [8], реализованный в среде Delphi. Метод адаптирован для решения задач небесной механики, в частности, механизм выбора величины шага интегрирования осуществлен с учетом специфики плоской задачи двух тел [8]. Кусочно-интерполяционное решение задачи (26) характеризуется границей погрешности порядка $10^{-17}$ при $fc \approx 275924$ (параметры метода: $b_i - a_i = 2\pi/1024,\ n = 10,\ \ell = 20$). Аналогичные результаты получаются при решении других нежестких задач.

**Пример 4.** Периодическая реакция Белоусова — Жаботинского моделируется жесткой системой [2]: $y_1' = 77.27(y_2 + y_1(1 - 8.375\cdot10^{-6} y_1 - y_2))$, $y_2' = 77.27^{-1}(y_3 - y_2(1 - y_1))$, $y_3' = 0.161(y_1 - y_3)$. Результаты кусочно-интерполяционного приближения решения для начальных данных $y_1(0) = 4$, $y_2(0) = 1.1$, $y_3(0) = 4$ на отрезке $[0,\ 512]$ при вариации степени интерполяционного полинома и количества подынтервалов разбиения представлены в [4]. Фиксирование параметров метода и исключение дополнительных уточняющих процедур программы позволило сократить время решения задачи с границей погрешности $10^{-14}$ с $t \approx 11\,\mathrm{min}$ до $t = 4\mathrm{min}\ 14\mathrm{s}\,677\,\mathrm{ms}$ $(b_i - a_i = 0.01/512,\ n = 4,\ \ell = 5)$.

## Заключение

Приближенное решение задачи Коши для ОДУ построено с использованием кусочной интерполяции на основе интерполяционных полиномов Лагранжа и Ньютона, эквивалентно преобразованных к виду алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами. С помощью преобразованных полиномов приближаются правые части уравнений системы. Первообразные от полиномов — координаты приближенного решения. Процесс итерационно уточняется, в результате решение приближается со сравнительно высокой точностью. Численный эксперимент показывает вычислительную устойчивость решения жестких и нежестких задач в приемлемых границах трудоемкости.

**Литература**


1. *Хайрер, Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1990. – 512 с.
2. *Хайрер, Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1999. – 685 с.
3. *Бордовицына, Т. В.* Современные численные методы в задачах небесной механики / Т. В. Бордовицына. – М. : Наука, 1984. – 136 с.
4. *Джанунц Г. А.* Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением / Г. А. Джанунц, Я. Е. Ромм // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2017. – Т. 57, № 10. – С. 1641–1660.
5. *Ромм, Я. Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II / Я. Е. Ромм // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 161–174.
6. *Березин, И. С.* Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – Т. 1. – М. : Наука, 1966. – 632 с.
7. *Ромм, Я. Е.* Компьютерный метод варьируемой кусочно-полиномиальной аппроксимации функций и решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Е. Ромм, Г. А. Джанунц // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 3. – С. 169–189.
8. *Авдюшев, В. А.* Интегратор Гаусса-Эверхарта / В. А. Авдюшев // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, № 4. – С. 31–47.

УДК 004.85

# РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ПРЕДСКАЗАНИЯ ЗАДЕРЖЕК АВИАРЕЙСОВ

**Е. Н. Санникова, И. Л. Каширина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматривается алгоритм прогноза задержек авиарейсов, разработанный с использованием библиотек языка Python. Предлагается модель, реализующая данную задачу. Прогноз осуществлялся с учетом горизонта прогнозирования в один день. Размер обучающей выборки, предоставленный компанией Аэрофлот, составил более 770 тысяч записей. Сложность построения модели заключается в том, что большие по времени задержки авиарейсов встречаются менее чем в 0.7 % случаев, однако именно их и надо предсказать с максимально высокой точностью.

**Ключевые слова:** прогнозирование, категориальные признаки, подбор гиперпараметров, метрика, кросс-валидация, техника label encoding, Python, регрессионная модель, градиентный бустинг.

## Введение

Время — один из самых дорогих ресурсов в современном обществе, поэтому в конкурентном мире бизнесу необходимо обеспечить предоставление своевременного качественного сервиса. Несмотря на известные сложности в разработке прогнозных алгоритмов [1], в текущих реалиях исследовательская модель по предсказанию задержек авиарейсов является актуальной. Так, существуют работы по созданию регрессионной модели для предсказания времени задержки рейса на базе исторических данных, но качество предсказания низкое [2]. Кроме того, существуют специальные приложения, оценивающие множество различных факторов до объявления посадки на рейс, предсказывая возможную задержку. Качество таких приложений удовлетворительное только в том случае, если вероятность негативного развития событий превышает 0.8 [3]. С целью повышения качества модели прогнозирования задержек авиарейсов был разработан алгоритм машинного обучения, обученный на примере датасета, предоставленного компанией Аэрофлот (период с октября 2015 года по декабрь 2018 года) с использованием библиотек языка Python.

## 1. Алгоритм предсказания задержки авиарейсов: постановка и описание задачи прогнозирования

Задание на моделирование выглядело следующим образом.

1) Взяв за основу исторические данные (набор для обучения) по задержкам авиарейсов за период с октября 2015 года по декабрь 2018 года, необходимо разработать модель, которая будет прогнозировать длительность задержки рейсов по отправлению на представленных тестовых данных.

2) Рейс считается задержавшимся, если время его фактического отправления больше времени отправления по расписанию. Если рейс вылетает раньше расписания, задержка считается равной нулю.

3) Для обучения модели возможно использование дополнительных данных из открытых источников, период дополнительных данных должен быть ограничен временным периодом набора данных для обучения.

4) Горизонт прогнозирования модели должен составлять ближайшие сутки. Качество разработанной модели должно проверяться с помощью метрики RMSE на тестовом наборе данных.

Процесс разработки алгоритма по предсказанию задержки авиарейсов включает следующие этапы:

1) обработка «сырых» исходных данных для возможности дальнейшей работы;

2) добавление новых признаков, учитывающих временную природу результирующего признака;

3) выбор минимизируемой функции, обучение модели и подбор гиперпараметров, минимизирующих заданную метрику с помощью кросс-валидации;

4) выбор наилучшей модели;

5) анализ полученных результатов.

Рассмотрим подробнее каждый из пунктов. Задача прогнозирования времени задержки авиарейса является задачей прогнозирования временного ряда с рядом особенностей. Первоначально мы имеем следующий набор предикторных признаков, по которым предсказывается результативный признак:

1) day — день недели;

2) month — месяц;

3) sezon — сезон;

4) holiday_ind — индикатор дня(раб/вых/праздн);

5) flight_day — дата полета;

6) flight — номер рейса;

7) A/P_dep — аэропорт отправления;

8) dep_term — терминал отправления;

9) A/P_arr — аэропорт прибытия;

10) arr_term — терминал прибытия;

11) aircr_type — тип воздушного судна (ВС) по расписанию;

12) airct_numb — номер ВС;

13) dep_hour — час отправления;

14) arr_hour — час прибытия;

15) fl_duration — длительность перелета;

16) all_passengers — всего пассажиров.

Соответственно delay(задержка) — результативный признак, который измеряется в минутах. Цель исследования — предсказание этого результативного признака исходя из входных показателей.

Для части «сырых» признаков была применена техника кодирования, суть которой заключается в замене уникальных категориальных значений на соответственные числовые. Это было применено для удобства и возможности дальнейших вычислений. В итоге имеем набор данных, включающий 771 657 различных строк, все признаки имеют числовой тип данных за исключением flight_day, который имеет тип date_time.

На рис. 1 изображен обработанный и готовый для работы датасет, где оставлены только 7 входных признаков с целью наглядного изображения.

Для повышения точности модели были дополнительно сконструированы 28 новых признаков. Из них 4 — средняя задержка за сезон, месяц, день недели и будний/выходной день. Соответствующие 4 категориальных признака были удалены. Следующие 6 признаков — средняя задержка для определенного рейса (flight) за предыдущие 7, 14, 28, 90, 180, 365 дней. По аналогии были добавлены по 6 признаков со средней задержкой для аэропорта отправления (A/P_dep), аэропорта прибытия (A/P_arr) и терминала отправления (dep_term). Итоговый набор признаков изображен на рис. 2.

Следующий этап работы — исследование подготовленных данных с целью определения инструментов прогнозирования в среде Python. На рис. 3 приведена зависимость задержки для двух случайных рейсов от даты полёта.

```
In [23]: data.iloc[:, [4, 5, 6, 8, 12, 13, 14, -1]]
Out[23]:
```

| | flight_day | flight | A/P_dep | A/P_arr | dep_hour | arr_hour | fl_duration | delay |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2015-10-27 | 387 | 158 | 63 | 7.667969 | 20.750000 | 785 | 0.0 |
| 1 | 2015-10-27 | 1 | 158 | 77 | 9.835938 | 20.578125 | 645 | 2.0 |
| 2 | 2015-10-27 | 37 | 158 | 106 | 10.750000 | 23.578125 | 769 | 0.0 |
| 3 | 2015-10-27 | 29 | 158 | 92 | 12.500000 | 1.333008 | 770 | 0.0 |
| 4 | 2015-10-27 | 670 | 127 | 159 | 14.250000 | 16.671875 | 144 | 9.0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 771652 | 2018-12-31 | 730 | 158 | 140 | 23.328125 | 1.250000 | 114 | 0.0 |
| 771653 | 2018-12-31 | 159 | 52 | 159 | 20.578125 | 21.750000 | 69 | 178.0 |
| 771654 | 2018-12-31 | 860 | 56 | 159 | 23.671875 | 3.166016 | 209 | 0.0 |
| 771655 | 2018-12-31 | 260 | 158 | 186 | 23.828125 | 1.166992 | 79 | 0.0 |
| 771656 | 2018-12-31 | 693 | 153 | 159 | 23.828125 | 3.083984 | 194 | 0.0 |

771657 rows × 8 columns

*Рис.1. Отображение обработанного датасета*

```
In [16]: data.columns
Out[16]: Index(['flight_day', 'flight', 'A/P_dep', 'dep_term', 'A/P_arr', 'arr_term',
               'aircr_type', 'aircr_numb', 'dep_hour', 'arr_hour', 'fl_duration',
               'delay', 'd', 'rolling_mean_flight7', 'rolling_mean_flight14',
               'rolling_mean_flight28', 'rolling_mean_flight90',
               'rolling_mean_flight180', 'rolling_mean_flight365',
               'rolling_mean_A/P_dep7', 'rolling_mean_A/P_dep14',
               'rolling_mean_A/P_dep28', 'rolling_mean_A/P_dep90',
               'rolling_mean_A/P_dep180', 'rolling_mean_A/P_dep365',
               'rolling_mean_A/P_arr7', 'rolling_mean_A/P_arr14',
               'rolling_mean_A/P_arr28', 'rolling_mean_A/P_arr90',
               'rolling_mean_A/P_arr180', 'rolling_mean_A/P_arr365',
               'rolling_mean_dep_term7', 'rolling_mean_dep_term14',
               'rolling_mean_dep_term28', 'rolling_mean_dep_term90',
               'rolling_mean_dep_term180', 'rolling_mean_dep_term365', 'month_del',
               'day_del', 'sezon_del', 'holiday_ind_del'],
              dtype='object')
```

*Рис. 2. Итоговый набор признаков*

На этих графиках мы не наблюдаем ни тренда, ни циклов, ни какой-либо сезонности — основных компонент временных рядов. Графики похожи скорее на случайные отклонения. Кроме того, задача осложняется тем, что, во-первых, у части рейсов есть пропущенные значения (скорее всего самолёт в этот день по каким-то причинам не вылетал), которые не указаны в датасете, во-вторых, зачастую нарушается периодичность полётов. Все эти замечания (в особенности второе) не позволяют решать нашу задачу, как задачу прогнозирования временного ряда, в которой важно соблюдение определенного интервала между значениями. В связи с этим мы не можем использовать как простые модели прогнозирования, основанные на гипотезах периодичности, так и более сложные модели: ARMA и её производные.

Таким образом, наилучшим выбором станет использование *обычной регрессионной модели [2]*, но с учётом знания о временной природе нашего результативного признака для конструирования новых значимых входных признаков.

Для наилучшего выбора функции минимизации имеет смысл посмотреть на распределение нашего результирующего признака delay в рамках нашего алгоритма. Гистограмма для этого признака изображена на рис. 4. Для наглядности в отрезок для построения гистограммы не включены значения delay, равные нулю и большие (больше 60-ти минут). Следует сделать важное замечание, что значений delay, равных нулю, в нашей выборке ~61 %; значений delay, больших 60-ти минут, ~3 %.

```
In [35]: fig, ax =  plt.subplots(2)
         fig.set_size_inches(18.5, 10.5)

         ax[0].plot(data[data["flight"]==3]["flight_day"], data[data["flight"]==3]["delay"])
         ax[1].plot(data[data["flight"]==52]["flight_day"], data[data["flight"]==52]["delay"])
         plt.show()
```

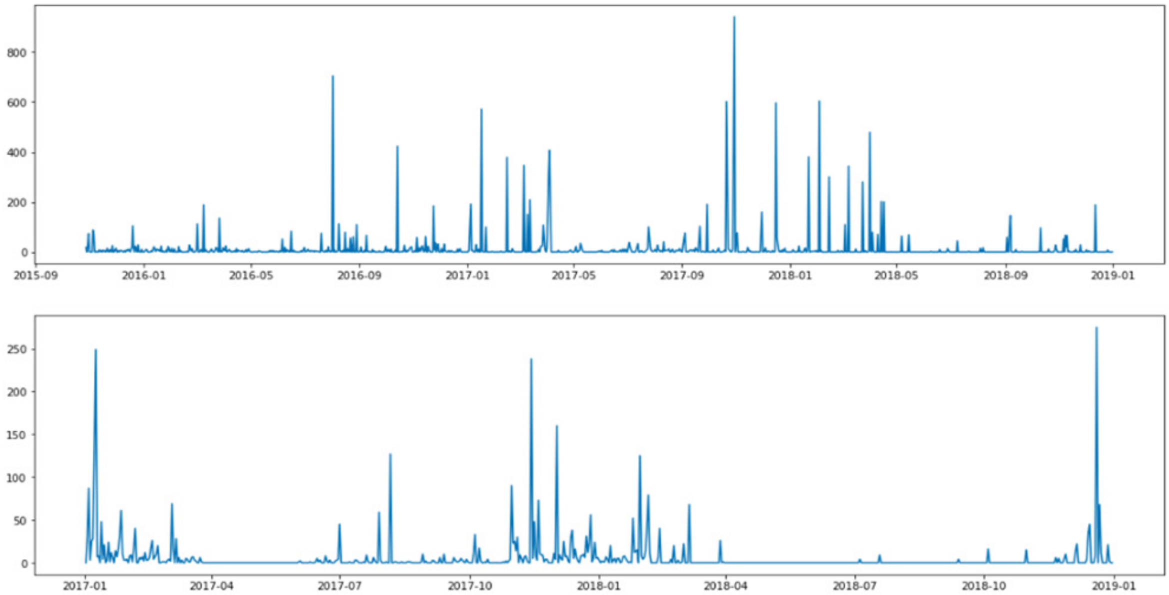



*Рис. 3. Графическое представление зависимости задержки для двух случайных рейсов от даты полета*

```
In [13]: data[(data["delay"]!=0)&(data["delay"]<60)][["delay"]].hist(bins=100)
         plt.show()
```

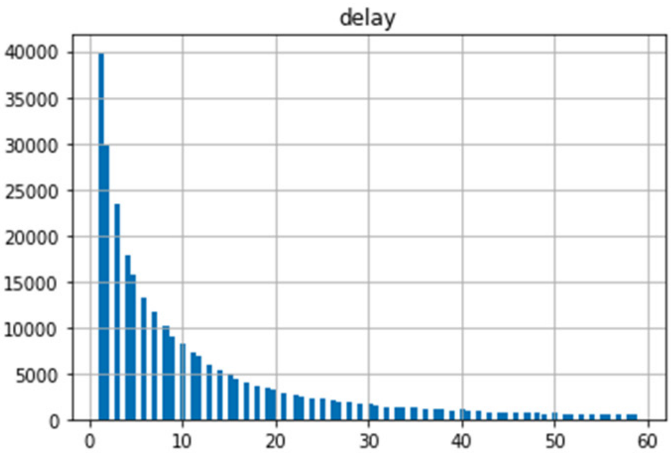



*Рис. 4. Гистограмма результирующего признака delay*

Данное распределение очень напоминает распределение Пуассона с lambda = 1. Поэтому имеет смысл в дальнейшем попробовать обучать модель с функцией минимизации *Poisson objective* или с функцией минимизации *Tweedie*, которая часто применяется в задачах с данными, имеющими большое количество нулевых значений.

*Гиперпараметрами* для регулирования качества модели являются следующие:

– скорость обучения,

– количество листьев в деревьях,

– максимальная глубина деревьев.

Обучение завершается, если на протяжении 100 итераций не было улучшения качества на тестовой выборке.

Для получения качественных оценок была применена *техника кросс-валидации* по 5-ти фолдам. Модель обучалась на предыдущих двух годах полётов и качество проверялось на следующем дне, отображенном на рис. 5.

----- Fold: (1 / 5) -----

| | start | end | days |
|---|---|---|---|
| train | 2016-12-27 | 2018-12-26 | 730 |
| test | 2018-12-27 | 2018-12-27 | 1 |

----- Fold: (2 / 5) -----

| | start | end | days |
|---|---|---|---|
| train | 2016-12-29 | 2018-12-27 | 729 |
| test | 2018-12-28 | 2018-12-28 | 1 |

*Рис. 5. Проверка качества модели*

## 2. Результаты предсказания прогноза задержки авиарейсов

Согласно результатам исследования наилучшей оказалась *модель градиентного бустинга [3]* с функцией минимизации Poisson, скоростью обучения 0,01, количеством листьев 128, максимальной глубиной дерева 120. Результаты обучения по метрике RMSE приведены на рис. 6 (в левой части). Для сравнения приведены результаты константного алгоритма, который всегда прогнозирует отсутствие задержки, то есть 0 (в правой части).

| ------ | train error | test error |
|---|---|---|
| fold № 1 | 15.86 | 43.99 |
| fold № 2 | 16.43 | 19.91 |
| fold № 3 | 16.83 | 17.03 |
| fold № 4 | 16.17 | 22.54 |
| fold № 5 | 16.82 | 20.69 |
| mean | 16.42 | 24.83 |
| std | 0.38 | 9.75 |

| ------ | train_zero error | test_zero error |
|---|---|---|
| fold № 1 | 43.68 | 44.85 |
| fold № 2 | 43.67 | 20.70 |
| fold № 3 | 43.65 | 17.74 |
| fold № 4 | 43.63 | 22.87 |
| fold № 5 | 43.59 | 20.90 |
| mean | 43.65 | 25.41 |
| std | 0.03 | 9.85 |

*Рис. 6. Сравнение результатов алгоритмов*

Получен заметный разброс ошибок на тестовой выборке, и достаточно большое стандартное отклонение, равное 9,75. Это можно объяснить наличием сильно отклоняющихся значений delay (выбросов).

Для обучающей выборки получили среднее 16,42 и std равное 0,38, то есть достаточно хороший результат. На первый взгляд наше решение на тестовом множестве проявило себя не сильно лучше константного, которое всегда угадывает ~61 % прогнозируемых значений, но всё же наш результат немного лучше.

Значимость признаков приведена на рис. 7.

Самыми значимыми являются 3 признака: rolling_mean_flight28, flight и aircr_numb. Первый является средней задержкой за предыдущие 28 дней полётов, далее идут признаки Номер рейса и Номер воздушного судна. Значимость этих признаков является достаточно логичной.

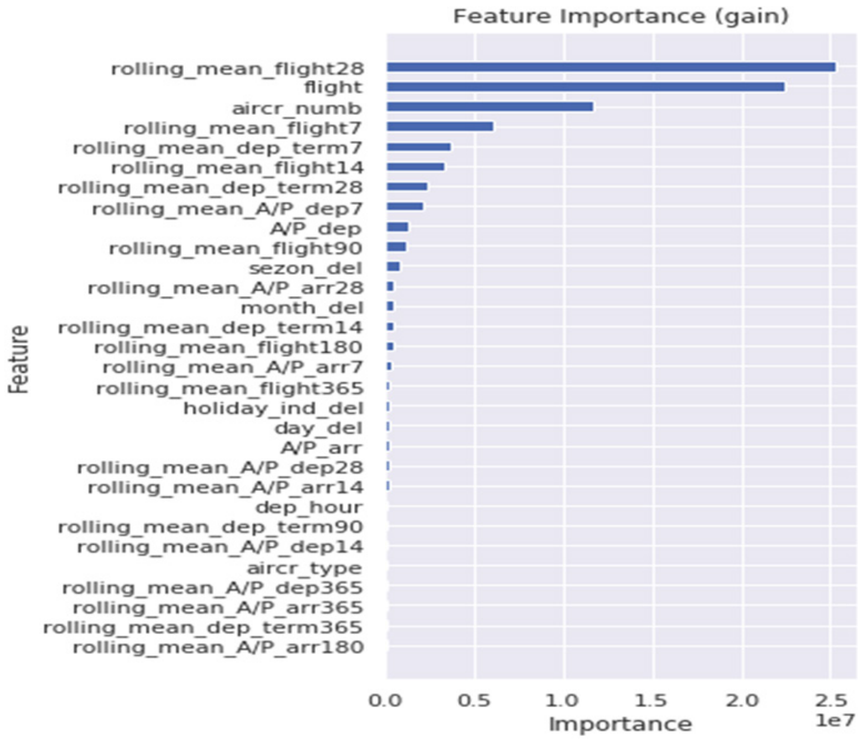



*Рис. 7. Значимость признаков*

Далее в ходе работы была найдена причина получения такого сильного разброса ответов на тестовой выборке. Например, рассмотрим первый тестовый фолд при обучении. Если считать значения задержки рейса более чем на 180 минут выбросами или шумами, то в этом наборе данных 6 значений, выходящих за отрезок [0, 180]. Это 878, 188, 393, 376, 224 и 380 минут. Поскольку в наших данных таких аномальных значений совсем мало (меньше 0,7 %), то очевидно, что насколько сильной обобщающей способностью не обладала бы наша модель, хорошо предсказать такие значения она не сможет. Исходя из этого, было рассчитано RMSE алгоритма, который идеально прогнозирует все значения delay, кроме данных 6-ти значений для нашего первого фолда, а в этих 6-ти случаях прогнозирует медианным значением, т.е. нулём. Оно оказалось равным 40,63, то есть это, по сути, RMSE «почти идеального» алгоритма. Напомним, что RMSE нашего алгоритма 43,99, константного нулевого – 44,85. Наш алгоритм на 3,36 хуже «почти идеального» и на 0,86 лучше константного (медианного). Такие выводы можно сделать для любой тестовой выборки и то, насколько качественное RMSE мы получим, зависит от количества этих выбросов в данных.

В результате исследований был сделан вывод, что в зависимости от задачи, поставленной авиакомпанией, имеет смысл либо оценивать прогностическую способность алгоритма без выбросов, либо отталкиваться от какого-либо базового алгоритма, например медианного — нулевого или «почти идеального» для оценки того, насколько лучше или хуже наш алгоритм работает, нежели базовый.

Таким образом, была разработана модель для прогнозирования задержки авиарейсов и статистически обоснованный подход для оценки качества всех моделей, применяемых с этой целью, исходя из возможности наличия сильно отклоняющихся значений в данных.

**Заключение**

В данной статье рассматривается разработка алгоритма прогноза задержки авиарейсов на примере датасета за период с октября 2015 года по декабрь 2018 года с использованием языка Python версии 3.6. В процессе построения и тестирования модели отмечены следующие моменты:

– задача сильно не сбалансирована (много нулевых значений откладывания рейса), что усложняет процесс разработки модели;

– медиана полученного с помощью модели решения равна 6, медиана целевого признака 0, т. е. алгоритм всегда стремится предсказать числа, большие 0, чтобы не сильно ошибиться на больших задержках;

– вследствие несбалансированности данных имело смысл рассмотреть разные постановки задачи: задачу классификации — просто предсказать, будет ли задержка или нет; задачу регрессии – предсказать, насколько она будет большая;

– построенная модель регрессии продемонстрировала не очень высокое качество, и классификация с сильно несбалансированными классами не привела к лучшему результату;

– построенные признаки для прогноза являются не самыми информативными (наиболее значимые — средняя задержка рейса за предыдущие 28 и 7 дней).

Таким образом, дальнейший этап модификации алгоритма — приемлемый прогноз сильных выбросов (шумов). Таких примеров в выборке мало, и они в каком-то смысле случайны. Тем не менее, шумы необходимо предсказать с достаточной степенью точности, так прогнозы больших задержек рейсов и являются самыми важными. Особое внимание предполагается уделить анализу категориальных признаков, стараясь найти более значимые как из существующих, так и вновь получаемых.

**Литература**

1. *Талеб Н. Н.* Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости / Н.Н. Талеб. – М. : КоЛибри, 2009. – 528 с.

2. *Fabien D.* Predicting Flight Delays // Портал: www.kaggle.com. – 2017. – URL: https://www.kaggle.com/fabiendaniel/predicting-flight-delays-tutorial?scriptVersionId=1566193 (дата обращения: 07.10.2020).

3. Google Flights сообщит о задержке рейса раньше авиакомпании // Интернет-журнал о путешествиях: 34travel.me. – 2018. – URL: https://34travel.me/post/google-flights (дата обращения: 07.10.2020)

4. Анализ данных и процессов: учеб. пособие / А. А. Барсегян, М. С. Куприянов, И. И. Холод, М. Д. Тесс, С. И. Елизаров. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.

5. Российская государственная библиотека : официальный сайт. – Москва. – URL: https://www.rsl.ru (дата обращения: 17.09.2020).

УДК 517.958:531.3–324

# ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НАД ПЕСЧАНЫМ ДНОМ

**Ш. Р. Сеттиев[1], Ж. Ш. Ражабов[2]**

[1]*Ташкентский филиал РЭУ им. Г. В. Плеханова*
[2]*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека*

**Аннотация.** В данной работе предложена математическая модель течений вязкой несжимаемой жидкости по наклонной плоскости под действием силы тяжести над песчаным дном. Произведен анализ линейной неустойчивости течения, при этом задача сведена к отысканию собственных значений. Исследованы вопросы волнообразования на свободной и донной поверхностях жидкости. Определены области неустойчивости течений при любых числах Фруда. Полученные результаты сравнивались с экспериментальными данными и с результатами других авторов по данной теме.
**Ключевые слова:** песчаное дно, гидродинамическая неустойчивость, число Фруда, угол наклона, нейтральные кривые, наносы, уравнение Навье — Стокса, коэффициент сопротивления.

## Введение

В настоящее время значительное внимание уделяется изучению гидродинамики природных процессов, где главную роль играет применение методов математического моделирования. Важными и в теоретическом и прикладном аспектах являются вопросы проектирования и стабильной безопасной эксплуатации гидротехнических сооружений. В связи с этим особый теоретический и практический интерес представляет численное моделирование течений в реках и каналах, а также в бороздах с размываемым песчаным дном. При таких течениях главную роль играет число Фруда $Fr$. При достаточно больших скоростях происходит размыв песчаного дна и течение становится хаотическим (турбулентным). При спокойном течении также наблюдается переформирование песчаного дна. Образующиеся в таких течениях волновые структуры по механизму формирования и своим характеристикам подразделяется на две группы. К первой относятся волновые движения, связанные с наличием свободной поверхности потока. Они существуют и при течении жидкости над недеформируемым дном. Эти волны формируются при достаточно больших числах $Fr$.

При небольших скоростях жидкости, при которых число Фруда существенно меньше критического значения $Fr_c$, но достаточно для начала движения донных частиц в узком придонном слое или во взвешенном состоянии, возможно возникновение волновых структур второго типа. Следует отметить, что механизм неустойчивости, ведущий к образованию поверхностных или донных волн, также вызывает деформирование другой границы потока. Здесь и далее неустойчивость означает гидродинамическую неустойчивость, т.е. неустойчивость по отношению к малым возмущениям.

Экспериментальные данные Дж. Кеннеди, Дж. Саймонса, Н. Комарова, Б. Фортерра, О.Пуликуэна и других авторов показывают, что при малых числах Фруда $Fr < Fr_c$ ($Fr_c$ — критическое значение Фруда) наблюдается неустойчивость течения над песчаным дном. В таком случае существенно то, что адекватная математическая модель, если она будет построена, даст возможность обнаруживать неустойчивость течения над песчаным дном при различных числах Фруда в рамках вычислительного эксперимента.

Как известно, при рассмотрении течений вязкой несжимаемой жидкости обычно используется система уравнений Навье — Стокса вместе с уравнениями неразрывности. В данном случае объектом исследования является течение вязкой несжимаемой жидкости по наклонной плоскости под действием силы тяжести над песчаным дном. Такое течение исследовано на основе уравнений Рейнольдса, Экснера, Сен-Венана и т. д. Основной задачей в исследованиях таких течений является изучение волнообразования на донной поверхности жидкости. Мы рассмотрим задачу исследования поведения таких течений на основе уравнений Навье — Стокса с учетом гидравлического сопротивления и взвешенных частиц в потоке жидкости.

Применяемые математические модели отличаются по способам описания движения жидкости и донных наносов. Формирование волн на нижней поверхности потока было получено с использованием модели потенциального течения идеальной жидкости [8, 9, 11] в рамках систем гидравлических уравнений [4, 15] или применением полуэмпирических моделей турбулентности [6, 7, 17]. В потенциальной и гидравлической моделях неустойчивость донной поверхности определялась введением искусственного сдвига между расходом донных частиц и локальными характеристиками потока жидкости. В данной работе предлагается математическая модель течения несжимаемой вязкой жидкости со свободной поверхностью и песчаным дном, которая включает оба механизма неустойчивости и не содержит искусственного сдвига фаз.

### 1. Математическая модель, описывающая течение слоя жидкости над песчаным дном

Рассмотрим течения несжимаемой вязкой жидкости по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Выберем декартовую систему координат $X$, $Y$, $Z$ с осью $X$, направленной по течению. Ось $Z$ ориентирована по направлению нормали к донной поверхности. Обозначим поверхность дна через $h_b(x,y,t)$. Угол наклона плоскости $(X,Y)$ к горизонту обозначим через $\theta$. Свободную поверхность зададим в виде $z=h(x,y,t)$.

Движение вязкой несжимаемой жидкости по наклонной плоскости под действием силы тяжести опишем уравнением Навье — Стокса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+g\sin\theta \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases} \tag{1}$$

где $u,\upsilon,w$ — компоненты вектора скорости, $p$ — давление, $\rho$ — плотность жидкости, $g$ — ускорение свободного падения, $\nu$ — кинематическая вязкость жидкости, $\theta$ — угол наклона плоскости $(X,Y)$ к горизонту.

Будем изучать длинные волны. В работе [21] показано, что для таких волн с очень большой точностью оказывается справедливым выражение для фазовой скорости $c=\sqrt{gh}$, где $g$ — ускорение силы тяжести, $h$ — глубина потока. Как видно, фазовая скорость не зависит от длины волны. Рассмотрим длинные волны, т. е. $\dfrac{\partial}{\partial z}>>\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y}$.

В этом случае имеем

$$x\sim L, \quad y\sim L, \quad z\sim \varepsilon L, \quad \varepsilon<<1,$$
$$u\sim U, \quad \upsilon\sim U, \quad w\sim \varepsilon U, \quad p=\rho U^2.$$

Учитывая это, перепишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g\sin\theta \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}-g\cos\theta=0 \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через $h_s$ свободную поверхность жидкости, $h_b$ донную поверхность, тогда глубина потока есть $h=h_s-h_b$. Из последнего уравнения найдем давление и используем граничные условия для давления:

$$p=A-\rho g\cos\theta\cdot z,\ \ p_a=A-\rho g\cos\theta\cdot h_s \ \ \Rightarrow\ \ p=p_a+\rho g\cos\theta\cdot(h_s-z).$$

Подставляя последнее выражение в систему уравнений (2), получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-g\cos\theta\dfrac{\partial h_s}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+g\sin\theta \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}=-g\cos\theta\dfrac{\partial h_s}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} \end{cases} \tag{3}$$

Если учесть, что $h=h_s-h_b$, то полученная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-g\cos\theta\dfrac{\partial (h_b+h)}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+g\sin\theta \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}=-g\cos\theta\dfrac{\partial (h_b+h)}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} \end{cases} \tag{4}$$

Вместо вязкого сопротивления $\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\nu\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}$ введем гидравлическое сопротивление $-\lambda\dfrac{\partial|\vec{\upsilon}|\vec{\upsilon}}{2(h_s-h_b)}$. При этом уравнение Навье — Стокса называется уравнением гидравлики:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-g\cos\theta\dfrac{\partial (h_b+h)}{\partial x}-\lambda\dfrac{u\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{2h}+g\sin\theta \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}=-g\cos\theta\dfrac{\partial (h_b+h)}{\partial y}-\lambda\dfrac{u\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{2h} \end{cases} \tag{5}$$

Вместе с уравнением Навье — Стокса обычно рассматривают уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial z}=0. \tag{6}$$

Интегрируем уравнение неразрывности по глубине потока. Учитывая следующие граничные условия на верхней и нижней поверхности жидкости

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_s}{\partial t}+u\frac{\partial h_s}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial h_s}{\partial y}=w, \qquad \text{где} \quad z=h_s\left(x,y,t\right) \\ &\frac{\partial h_b}{\partial t}+u\frac{\partial h_b}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial h_b}{\partial y}=w, \qquad \text{где} \quad z=h_b\left(x,y,t\right) \end{aligned} \tag{7}$$

получим

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (uh)}{\partial x}+\frac{\partial (\upsilon h)}{\partial y}=0. \tag{8}$$

Таким образом, получили систему уравнений (5), (8), описывающую движение несжимаемой вязкой жидкости по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Эта система называется системой уравнений гидравлики:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y}=-g\cos\theta\dfrac{\partial(h_b+h)}{\partial x}-\lambda\dfrac{u\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{2h}+g\sin\theta \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}=-g\cos\theta\dfrac{\partial(h_b+h)}{\partial y}-\lambda\dfrac{u\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{2h} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+\dfrac{\partial(uh)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\upsilon h)}{\partial y}=0 \end{cases}$$

Имеем три уравнения с четырьмя неизвестными $u$, $\upsilon$, $h$, $h_b$. Введем безразмерные переменные

$$x=H_c\tilde{x},\ \ y=H_c\tilde{y},\qquad z=H_c\tilde{z},\qquad T=\frac{H_c}{U_c}\tilde{t},$$

$$u(x,y,t)=U_c\tilde{u}(x,y,t),\ \ \upsilon(x,y,t)=U_c\tilde{\upsilon}(x,y,t),$$

$$h_b(x,y,t)=H_c\tilde{h}_b(x,y,t),\ \ h_s(x,y,t)=H_c\tilde{h}_s(x,y,t),$$

где $H_c$ — характерная длина, $U_c$ — характерная скорость течения, $H_b$ — уровень донной поверхности, $H_s$ — уровень свободной поверхности, $T$ — безразмерное время.

Предполагается, что компоненты скорости $u$ и $\upsilon$ — суть средние по глубине слоя значения их истинных величин. Для введенных величин система уравнений Навье — Стокса (иногда называют уравнением гидравлики) имеет вид (волны над переменными опускаем)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\cos\theta}{Fr^2}\dfrac{\partial(h_b+h)}{\partial x}-\lambda\dfrac{u\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{2h}+\dfrac{\sin\theta}{Fr^2} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}=-\dfrac{\cos\theta}{Fr^2}\dfrac{\partial(h_b+h)}{\partial y}-\lambda\dfrac{u\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{2h} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+\dfrac{\partial(uh)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\upsilon h)}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{9}$$

где $Fr=\dfrac{U_c}{\sqrt{gH_c}}$ — число Фруда, $\lambda$ — коэффициент сопротивления. Чтобы замкнуть систему уравнений (1.1.13), необходимо добавить уравнение для определения $h_b$.

К этой системе уравнений добавим соотношение, которое описывает деформацию нижней поверхности $h_b(x,y,t)$ и которое выражает закон сохранения взвешенных и влекомых наносов [1, 2, 5, 8]. Вывод этих уравнений основывается на двухслойной модели движения наносов [2] Прежде чем дать эти уравнения, дадим краткое понятие о видах донных наносов.

Твердые частицы грунта, переносимые водными потоками, называются наносами и они делятся на влекомые и взвешенные. Влекомые наносы движутся непосредственно по дну, а взвешенные — вместе с потоком жидкости.

Закон сохранения влекомых наносов запишем согласно работе [2], где хорошо излагаются выводы и обоснование уравнений. Если перемещения влекомых наносов будем описывать вектором удельного объемного расхода частиц $\vec{q}$, уравнение сохранения будет иметь вид

$$\left(1-p_b\right)\frac{\partial h_b}{\partial t}+div\vec{q}=-q_{bs}, \tag{10}$$

Величину $\vec{q}$ определяем по формуле Бегнольда.

$$\vec{q} = \frac{\lambda\rho\, Fr^2\, \vec{\upsilon}\,(|\vec{\upsilon}| - \upsilon_n)|\vec{\upsilon}|}{2\rho_s g \tan\alpha_b}\left(1 - 5.75\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\lg\frac{0.37h}{kd} - \frac{w_p}{|\vec{\upsilon}|}\right). \tag{11}$$

где $p_b$ — пористость материала дна, $\vec{q}$ — вектор удельного объемного расхода (влекомых) наносов. В силу того, что влекомые наносы перемещаются в тонком слое у дна и быстро приводятся в движение, их расход достигает предельного значения на расстояниях порядка глубины потока. Кроме того за величину $q_x$ мы принимаем компоненты вектора $\vec{q}$ по направлению $X$, дополнительно учитывая [6] в нем влияние локального дна на расход наносов $-\gamma\dfrac{\partial h_b}{\partial x}$.

Запишем закон сохранения массы (в приближении к мелкой воде) для взвешенных наносов, если величины $\vec{\upsilon}$, $h$, $s$ рассматривать как осредненные (по вероятности и времени) значения скорости, глубины и концентрации. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(sh) + div(sh\vec{\upsilon}) = q_{bs} + div\vec{Q}, \tag{12}$$

где $\vec{Q}$ — диффузионный поток частиц в горизонтальной плоскости. Это уравнение называется (плановым) двумерным уравнением турбулентной диффузии. В работе [2] указываются возможности, что в первом приближении можно пренебречь диффузионным переносом, полагая $\vec{Q} = 0$.

Массообмен $q_{bs}$, между донными и взвешенными частицами определяется согласно [2] и имеет следующий безразмерный вид:

$$q_{bs} = 0.65\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\sqrt{u^2 + \upsilon^2}\left(0.00144\frac{Fr^2(u^2 + \upsilon^2)}{\lambda\rho_p h} - \frac{Bs}{1 - e^{-B}}\right), \tag{13}$$

где $B = 1.8\dfrac{w_p}{\lambda\sqrt{u^2 + \upsilon^2}}$ и $\rho_p = \dfrac{\rho_s}{\rho}$.

Для шарообразной формы гидравлическая крупность частиц, $w_p$ т.е. скорость их осаждения в покоящейся жидкости определяется по формуле $w_p = \dfrac{gd^2}{18\nu}\left(\dfrac{\rho}{\rho_s} - 1\right)$, где $d$ — средний диаметр частиц; $\rho_s$ — плотность частицы наносов; $\rho$ — плотность воды, $\nu$ — кинематическая вязкость воды. Эта формула приведена в [20].

Таким образом, имеем систему уравнений вместе с определяющими соотношениями (11) и (13) относительно неизвестных $u$, $\upsilon$, $h$, $h_b$, $s$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\cos\theta}{Fr^2}\dfrac{\partial(h_b + h)}{\partial x} - \lambda\dfrac{u\sqrt{u^2 + \upsilon^2}}{2h} + \dfrac{\sin\theta}{Fr^2} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = -\dfrac{\cos\theta}{Fr^2}\dfrac{\partial(h_b + h)}{\partial y} - \lambda\dfrac{u\sqrt{u^2 + \upsilon^2}}{2h} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial(uh)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\upsilon h)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(sh) + \dfrac{\partial(suh)}{\partial x} + \dfrac{\partial(s\upsilon h)}{\partial y} = q_{bs} \\ (1 - p_b)\dfrac{\partial h_b}{\partial t} + \dfrac{\partial q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial q_y}{\partial y} = -q_{bs} \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $q_x$, $q_y$ — компоненты вектора потока $\vec{q}$ соответственно по направлением $X$ и $Y$:

## 2. Исследование волнообразования как анализ линейной неустойчивости течения слоя жидкости над песчаным дном

В исследованиях гидродинамической теории устойчивости следует сосредоточить внимание на конкретных задачах, для которых можно найти решения, и сопоставить эти решения с экспериментальными данными. Исследования неустойчивости движения в настоящее время основываются на линейном и нелинейном анализе [19]. Линейный анализ проводится на основе линейной теории неустойчивости. Это означает, что в рассматриваемых уравнениях учитываются только линейные члены. Изучим вопрос волнообразования в течениях над песчаным дном на основе линейного анализа устойчивости. Нетрудно заметить, что система уравнений (14) имеет следующее стационарное решение

$$u_0 = 1, \quad \upsilon_0 = 0, \quad (h_b)_0 = 0, \quad (h_s)_0 = 1, \tag{15}$$

которое соответствует течению слоя постоянной толщины $H_c$ над деформируемым дном. Это решение существует при выполнении равенства

$$\frac{\sin\theta}{Fr^2} = \frac{\lambda}{2}. \tag{16}$$

Равенство (16) следует из первого уравнения (14) и определяет выбор характерной скорости

$$U_c = \sqrt{\frac{2gH_c \sin\theta}{\lambda}}.$$

Выражение для $s_0$ получаем из соображения, что стационарное решение удовлетворяет последним двум уравнениям системы (14), т. е. $q_{bs} = 0$.

$$s_0 = \frac{0.00114 Fr^2}{\lambda \rho_p B}\left(1 - \exp^{-B}\right), \tag{17}$$

где $B = \dfrac{1.8 w_p}{\lambda u_0}$ и $s_0$ — задает концентрации взвешенных наносов, иначе говоря, мутность потока. Для исследования линейной неустойчивости течения (15), (17) решение (14) в нестационарном случае представляется в виде

$$u(x,y,t) = u_0 + u_1(x,y,t),\ \upsilon(x,y,t) = \upsilon_0 + \upsilon_1(x,y,t),\ h_b(x,y,t) = h_{b0} + (h_b)_1(x,y,t),$$
$$h = h_0 + h_1(x,y,t),\ s = s_0 + s_1(x,y,t). \tag{18}$$

где $u_1 << 1,\ \upsilon_1 << 1,\ h_1 << 1,\ (h_b)_1 << 1,\ s_1 << 1$ — малые возмущения. Подставим (18) в (14) и будем учитывать только линейные члены в полученных уравнениях.

## 3. Постановка задачи

В большинстве случаев ряд критериев можно установить в одномерном случае. Поэтому начнем с анализа линейной неустойчивости в одномерной постановке. Пусть решение (14) зависит только от двух переменных $(x,t)$ т. е. $u(x,t),\ h(x,t),\ s(x,t),\ h_b(x,t)$.

Этот случай может быть применен для задач, в которых по ширине нет перетока, т. е. $\upsilon(x,y,t) = 0,$ и поэтому остаются неизвестные функции $u(x,t),\ h(x,t),\ s(x,t),\ h_b(x,t)$, кроме того $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial h_b}{\partial y} = 0$ (т. е. по ширине размыв поверхности происходит равномерно одинаково). В одномерной постановке система уравнений (14) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\cos\theta}{Fr^2}\dfrac{\partial(h_b+h)}{\partial x} - \lambda\dfrac{u^2}{2h} + \dfrac{\sin\theta}{Fr^2} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ s\left(\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial(uh)}{\partial x}\right) + h\dfrac{\partial s}{\partial t} + (uh)\dfrac{\partial s}{\partial x} = q_{bs} \\ (1-p_b)\dfrac{\partial h_b}{\partial t} + \dfrac{\partial q_x}{\partial x} = -q_{bs} \end{cases}$$

С учетом $\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial(uh)}{\partial x} = 0$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\cos\theta}{Fr^2}\dfrac{\partial(h_b+h)}{\partial x} - \lambda\dfrac{u^2}{2h} + \dfrac{\sin\theta}{Fr^2} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ h\dfrac{\partial s}{\partial t} + (uh)\dfrac{\partial s}{\partial x} = q_{bs} \\ (1-p_b)\dfrac{\partial h_b}{\partial t} + \dfrac{\partial q_x}{\partial x} = -q_{bs} \end{cases} \tag{19}$$

После подстановки (18) в (19) проводим линеаризацию нелинейных членов.

В итоге получаем систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно малых возмущений $u_1$, $h_1$, $(h_b)_1$, $s_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_0\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = -\dfrac{\cos\theta}{Fr^2}\dfrac{\partial((h_b)_1+h_1)}{\partial x} - \lambda\dfrac{u_0u_1}{h_0} + \lambda\dfrac{u_0^2}{2h_0^2}h_1 \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial t} + u_0\dfrac{\partial h_1}{\partial x} + h_0\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ s_0\dfrac{\partial h_1}{\partial t} + h_0\dfrac{\partial s_1}{\partial t} + u_0s_0\dfrac{\partial h_1}{\partial x} + s_0h_0\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_0h_0\dfrac{\partial s_1}{\partial x} = Q_{01}u_1 + Q_{02}h_1 + Q_{03}s_1 \\ (1-p_b)\dfrac{\partial(h_b)_1}{\partial t} + Q_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + Q_2\dfrac{\partial h_1}{\partial x} - \gamma\dfrac{\partial^2(h_b)_1}{\partial x^2} = -\left(Q_{01}u_1 + Q_{02}h_1 + Q_{03}s_1\right) \end{cases} \tag{20}$$

где $q_{bs}(u_1,h_1,s_1) = Q_0 + Q_{01}u_1 + Q_{02}h_1 + Q_{03}s_1$ и $q_{\delta} = Q + Q_1u_1 + Q_2h_1$

$$Q_0 = 0.65\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(0.00114\frac{u_0^3}{\lambda h_0}\frac{Fr^2}{\rho_p} - \frac{r}{1-e^{-r}}s_0\right)u_0,$$

$$Q_{01} = 0.65\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\cdot\left[0.00342\frac{Fr^2}{\lambda\rho_p}\frac{u_0^2}{h_0} - \frac{r^2s_0e^{-r}}{(1-e^{-r})^2}\right],$$

$$Q_{02} = -0.00114\cdot 0.65\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{Fr^2}{\lambda\rho_p}\frac{u_0^3}{h_0^2},$$

$$Q_{03} = -0.65\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{ru_0}{1-e^{-r}}.$$

$$Q = F\left\{u_0\left(u_0-\upsilon_n\right)\cdot\left(u_0 - 5.75\sqrt{\frac{\lambda}{2}}u_0\lg\left[\frac{0.37}{1.4}\frac{h_0}{d}\left(\frac{\upsilon_n}{u_0}\right)^{0.6}e\right] - w_p\right)\right\}$$

$$Q_1 = F\left\{u_0\left(u_0-\upsilon_n\right)\left(3.45\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\lg e+1-5.75\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\lg\left[\frac{0.37}{1.4}\frac{h_0}{d}\left(\frac{\upsilon_n}{u_0}\right)^{0.6}e\right]\right)+\right.$$

$$\left.+\left(2u_0-\upsilon_n\right)\left(u_0-5.75\sqrt{\frac{\lambda}{2}}u_0\lg\left[\frac{0.37}{1.4}\frac{h_0}{d}\left(\frac{\upsilon_n}{u_0}\right)^{0.6}e\right]-w_p\right)\right\},$$

$$Q_2 = F\left\{u_0^2\left(u_0-\upsilon_n\right)\cdot 5.75\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\frac{\lg e}{h_0}\right\}.$$

Волновое (автомодельное) решение системы (20) ищется в виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2\exp[i\alpha(x-ct)],\\ h_1 &= h_2\exp[i\alpha(x-ct)],\\ s_1 &= s_2\exp[i\alpha(x-ct)],\\ (h_b)_1 &= (h_b)_2\exp[i\alpha(x-ct)]\,. \end{aligned} \tag{21}$$

где $c$ — комплексная частота. После подстановки (21) в (20) имеем систему линейных однородных алгебраических уравнений для амплитуд $u_2,\ h_2,\ (h_b)_2,\ s_2$.

$$\begin{cases} \left(i\alpha u_0+\dfrac{\lambda u_0}{h_0}-i\alpha c\right)u_2+\left(\dfrac{i\alpha\cos\theta}{Fr^2}-\dfrac{\lambda u_0^2)}{2h_0^2}\right)h_2+\dfrac{i\alpha\cos\theta}{Fr^2}h_{b2}=0\\ h_0u_2+\left(u_0-c\right)h_2=0\\ \left(i\alpha h_0s_0-Q_{01}\right)u_2+\left(i\alpha u_0s_0-Q_{02}-i\alpha s_0c\right)h_2+\left(i\alpha u_0h_0-Q_{03}-i\alpha h_0c\right)s_2=0\\ \left(i\alpha Q_1+Q_{01}\right)u_2+\left(i\alpha Q_2+Q_{02}\right)h_2+Q_{03}s_2+\left(\gamma\alpha^2-i\alpha c(1-p_b)\right)h_{b2}=0 \end{cases} \tag{22}$$

Из условия существования нетривиального решения следует характеристическое уравнение для определения значений $c$, т. е. задача на собственные значения. Таким образом, получим комплексный многочлен четвертой степени относительно $c$. В работе [22] рассмотрено частный случай течение жидкости над твердым недеформируемым дном. Кроме того там вместо вязкого члена вводится гидравлическое сопротивление вида $\lambda\dfrac{|\vec{\upsilon}|\vec{\upsilon}}{2h^2}$ и за счет этого критическое значения число Фруда равняется единице.

## 4. Результаты и анализ численных расчетов

Рассмотрим частный случай, когда течение с недеформируемым (твердое дно) дном и $u(x,y),\ h(x,y)$. Тогда система уравнений (14) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\cos\theta}{Fr^2}\dfrac{\partial(h_b+h)}{\partial x}-\lambda\dfrac{u^2}{2h}+\dfrac{\sin\theta}{Fr^2}\\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial(uh)}{\partial x}=0 \end{cases} \tag{23}$$

Стационарные решения: $h_0=1,\ u_0=1$. Эти решения удовлетворяют системе при выполнении равенства $\dfrac{\sin\theta}{Fr^2}=\dfrac{\lambda}{2}$.

Проведя анализ линейной неустойчивости получим значения $c$

$$c=1+\left\{-\frac{i\sin\theta}{\alpha Fr^2}\pm\sqrt{\left(\frac{i\sin\theta}{\alpha Fr^2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\cos\theta}{Fr^2}-\frac{1}{4}}\right\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\theta << 1$, $Fr \geq 1$, $\alpha \geq 1$. В этом случае

$$\sin\theta \approx \theta, \ \ \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Таким образом,

$$c = 1 \pm \frac{1}{Fr}\left(1 + \frac{\theta^2}{2\alpha^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{Fr^2}\right)\right) + \frac{i\theta}{\alpha Fr}\left(-\frac{1}{Fr} \pm \frac{1}{2}\right).$$

Из $\theta << 1$ следует, что

$$c = 1 \pm \frac{1}{Fr} + \frac{i\theta}{\alpha Fr}\left(-\frac{1}{Fr} \pm \frac{1}{2}\right).$$

Неустойчивость рассматриваемого течения определяет мнимая часть величины $c$, т. е. $c_i$. Из (2.3.6) нетрудно заметить, что знак $c_i$ зависит от знака суммы, которая стоит в скобках. Неустойчивость получается, когда $-\frac{1}{Fr} + \frac{1}{2} > 0$ т. е. $Fr > 2$ и это значение число Фруда совпадает с результатами [3, 14, 23].

Рассмотрим общий случай. Неустойчивость рассматриваемого течения определяет мнимая часть $c$, т. е. $c_i$. Если $c_i > 0$, то при $t \to \infty$ из (21) следует неустойчивость рассматриваемого течения, так как возмущение растет со временем. Находим корни многочлена применением численного метода при разных значениях свободных параметров: $\alpha$, $\theta$, $Fr$, $p_b$, $\rho_p$, $\upsilon_n$, $w_p$, $\alpha_b$, $\gamma$.

В численном расчете рассмотрели значения:

угол трения грунта в жидкости — $\alpha_b = 32°$;

средний диаметр частиц — $D = 0.3$ *мм*;

скорость осаждения частицы в покоящейся жидкости — $w_p = 0.0334$ *м/с*;

неразмывающая скорость частиц — $V_n = 0.42$ *м/с*;

плотность жидкости $\rho = 1000 \frac{кг}{м^3}$;

плотность песка $\rho_s = 2650 \frac{кг}{м^3}$;

пористость материала дна $p_b = 0.4$.

При фиксированном угловом наклоне $\theta$ и $\gamma$ производились численные расчеты для различных значений числа $Fr$ и $\alpha$. Почти все возможные варианты рассмотрены в численном расчете. Численные расчеты показали, что задача на собственные значения имеет два неустойчивых решения. Первое получается параметрическим продолжением решения, существующего для течения слоя жидкости над недеформируемым дном; основное влияние на его коэффициент усиления оказывают два параметра — число Фруда $Fr$ и угол наклона $\theta$. Для этого решения, которое будем называть поверхностным, критическое число Фруда близко к его значению для течения над недеформируемым дном $Fr_c = 2$. Неустойчивость второго решения, которое можно назвать донным, существенно зависит от величины $Fr$, $\theta$, $\gamma$ и массообмена.

В качестве результатов приведем примеры зависимости коэффициента усиления $\alpha \cdot C_i$ от волнового числа $\alpha$ для донной моды. Эта зависимость дает некоторый физический смысл происходящего. Положительные коэффициенты усиления указывают на рост возмущений, отрицательные — на их затухание. В линейной теории предполагается, что возмущения с наибольшим коэффициентом усиления близки к наблюдаемым в экспериментах, т.е. их длина волны и скорость такие же, как в реальных течениях. На рис. 1 представлены коэффициенты усиления для различных $\gamma$ и при фиксированном $\theta = 0.01$ и $Fr = 2.5$.

Из рис. 1 нетрудно определить, какое влияние имеет коэффициент $\gamma$, т. е. член $-\gamma\frac{\partial h_b}{\partial x}$. Этот член мы дополнительно учитывали в (11) для $q_x$ компонента вектора $\vec{q}$ по направлению

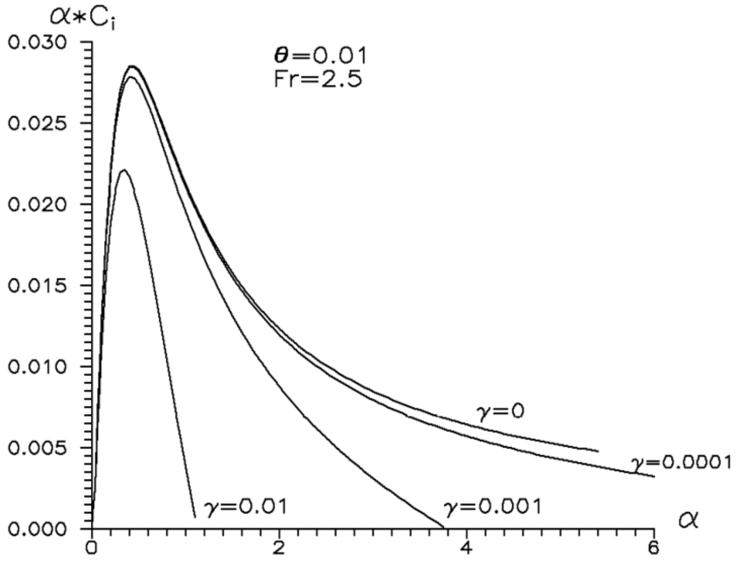


*Рис. 1*

$X$. Основным результатом линейного анализа устойчивости является построение графической зависимости $Fr$ и $\alpha$, так называемых нейтральных кривых (плоскость $(Fr, \alpha)$). Построение нейтральных кривых получается следующим образом: численный расчет ведется при фиксированных $Fr$ и $\gamma$. Волновое число меняется в пределах $0.005 \le \alpha \le 25$ (т. е. запускается цикл по $\alpha$). Далее определяется критическое волновое число, при котором $c_i$ (мнимая часть комплексной частоты) меняет знак. Таким образом, при одном фиксированном значении числа Фруда определяем соответствующее критическое волновое число. Далее рассматриваем другое значение числа $Fr$ Фруда и определяем соответствующее критическое волновое число $\alpha$. Меняя значение числа Фруда в пределах $0.1 \le Fr \le 5$ и определяя соответствующие критические $\alpha$, строим графическую зависимость в плоскости $(Fr, \alpha)$. Физически эта зависимость определяет области неустойчивости или устойчивости течения. Вид нейтральных кривых в плоскости $(Fr, \alpha)$ для поверхностных мод показан на рис. 2. Из этого рисунка можно определить, какому $\alpha$ соответствует критическое значение числа Фруда. Кривая в плоскости $(Fr, \alpha)$ означает переход от устойчивости к неустойчивости расматриваемого течения и сама линия является нейтральной кривой, так как на линии $c_i = 0$.

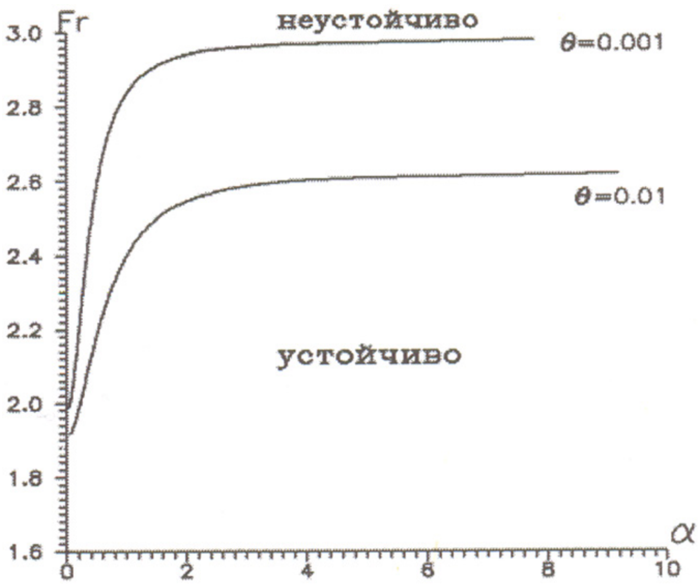


*Рис. 2*

Этот график подтверждает правильность численного расчета, так как значение критических чисел Фруда можно сравнить с результатами, которые получаются из формулы (24). Такое нетрудно заметить, что угол наклона существенно меняет область устойчивости. Если угол наклона $\theta$ мал, то область устойчивости увеличивается. Можно отметить, что критическое значение числа Фруда для поверхностной моды существенно зависит от угла наклона $\theta$, и это нетрудно заметить на графике, так как при $\theta = 0.01$ критическое значение числа Фруда $Fr = 1.92$. При $\theta = 0.001$ критическое значение числа Фруда $Fr \approx 2$. Все критические значения (численные) чисел Фруда в случае недеформируемого дна соответствуют значениям определяемым по формуле (24). При рассмотрении общего случая, как было сказано выше, получаются два неустойчивых решения. Первое получается параметрическим продолжением решения, существующего для течения слоя жидкости над недеформируемым дном. Неустойчивость второго решения можно назвать донным. Вид нейтральных кривых для донных мод показан на рис. 3, когда параметр $\gamma = 0$ и $\theta = 0.001$.

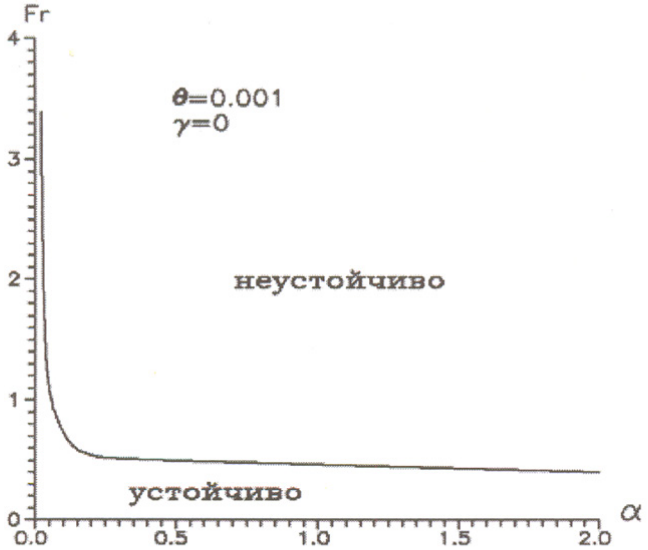



*Рис. 3*

Рис. 3 построен таким же способом, как и рис. 2. Отсюда можно определить значение числа Фруда $Fr \approx 0.45$, нижняя область устойчива. Это значение и график совпадают с результатами работ [10] и [13]. Значения при $\gamma = 0$ означают, что расход влекомых наносов определяется по (11) т. е. без учета влияния локального дна на расход наносов. Из рис. 4 видно влияние локального дна (т. е. $\gamma \neq 0$) на расход наносов, так как в нижней части образуется устойчивая зона.

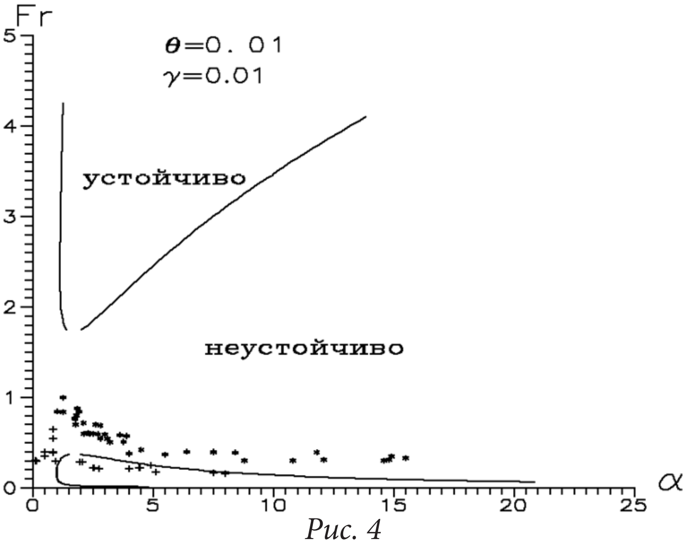



*Рис. 4*

На рис. 4 нанесены данные экспериментов [10] Кеннеди (отмечены *) и Саймонса (+), соответствующие области формирования дюн.

### Заключение

Исследование волнообразования над песчаным дном проводится на основе теории гидродинамической устойчивости. Проводится анализ линейной неустойчивости течений слоя жидкости над песчаным дном. При этом задача сводится к отысканию собственных значений. Проведен численный расчет. Численные расчеты показали, что задача на собственных значений имеет два неустойчивых решения. Первое получается параметрическим продолжением решения, существующего для течения слоя жидкости над недеформируемым дном; основное влияние на его коэффициент усиления оказывают два параметра — число $Fr$ и угол наклона $\theta$. Для этого решения, которое будем называть поверхностным, критическое число Фруда близко к его значению для течения над недеформируемым дном $Fr_c = 2$. Неустойчивость второго решения, которое можно назвать донным, существенно зависит от величины $Fr$, $\theta$, $\gamma$ и учета взвешенных частиц в потоке жидкости. Определены области неустойчивости течений при любых числах Фруда. Результаты сравнивались с экспериментальными данными, работами других авторов и показали хорошее согласование с результатами работ [9, 10, 13, 14]. Критическое значение числа Фруда для донных мод $Fr_{cb} \approx 0.45$ при $\gamma = 0$ согласуется со значением работы [13].

### Литература


1. *Арипов М. М., Сеттиев Ш. Р.* Моделирование процессов описываемых одной системой типа Навье — Стокса // Журнал «Вестник НУУз». – Ташкент. – 2009. – № 1. – С. 13–16.

2. *Беликов В. В.* Численное моделирование течений со свободной поверхностью и деформируемым дном: Дис. канд.физ. - мат. наук. – Москва : мех-мат, МГУ, 1986. – 126 с.

3. *Гаврилова К. Н.* Влияние дисперсии и топографии на динамику тонкого слоя жидкости // Прикладная механика и теоретическая физика. – 2004. – Т. 45, № 1. – С. 46–55.

4. *Gradowczuk M. N.* Wave propagation and boundary instability in erodible-bed channels // Journal of Fluid Mechanics. – 1968. – V. 33, N 1. – P. 93–112.

5. *Гришанин К. В.* Динамика русловых потоков. – Л. : Гидрометеоиздат, 1979. – 312 с.

6. *Engelund F.* Instablity of erodible beds // Journal of Fluid Mechanics. – 1970. – V. 42, N 2. – P. 225–244.

7. *Engelund F., Fredsoe J.* Sediment ripples and dunes // Annuel Reweiw of Fluid Mechanics. – 1982. – V.14. – P. 13–19.

8. *Караушев А. В.* Теория и методы расчета речных наносов. – Л. : Гидрометеоиздат, 1977. – 272 с.

9. *Kennedi J. F.* The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels // Journal of Fluid Mechanics. – 1963. – V.16. – P. 521–544.

10. *Kennedi J. F.* The formation of sediment riples , dunes and antiduns // Annual Rewiew of Fluid Mechanics. – 1969. – V. 1. – P. 147–168.

11. *Komarova N. L. and Newell A. C.* Nonlinear dynamics of sand banks and waves // Journal of Fluid Mechanics. – 2000. – V. 487. – P. 125–145.

12. *Coleman.S., Fenton J.* Potential — flow instability theory and alluvial stream bed forms // Journal of Fluid Mechanics. – 2000. – V. 415. – P. 285–321.

13. *Colombini By. M.* Revisiting the linear theory of sand dune formation // Journal of Fluid Mechanics. – 2004. – V. 502. – P. 1–16.

14. *Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. – 419 с.
15. *Schielen R., Doelman A. and Swart H. E.* On the nonlinear dynamics of free bare in straight // Journal of Fluid Mechanics. – 1993. – V. 252. – P. 325–356.
16. *Simur B. M., Bakiogli M.* On the formation of ripples on an erodible bed // Journal of Fluid Mechanics. – 1984. – V. 144. – P. 177–190.
17. *Smith J. D.* Stability ot a sand bed subjected to a shear flow of law Froude number // Journal of Geophysical Researsh. – 1970. – V. 75, No 30. – P. 5928–5940.
18. *Forterre Y. and Pouliquen O.* Long-surface-wave instability in dense granular flows // Journal of Fluid Mechanics. – 2003. – V. 486. – P. 21–50.
19. *Шкадов В. Я.* Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Научн. труды ин-та механики МГУ. – Москва, 1973. – № 25. – 192 с.
20. *Штеренлихт Д. В.* Гидравлика. – М. : Изд-во Колосс, 2004. – 656 с.
21. *Шуляк Б. А.* Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. – М. : Наука, 1971. – 400 с.
22. *Сеттиев Ш. Р.* О критическом значении числа Фруда в течениях над песчаным дном. // Отдельный выпуск Горного информационно-аналитического бюллетеня «Кузбасс-2», издательство Горная кн. (М.). – 2009. – Вып. 17. – С. 123–126.
23. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М. : Мир, 1977. – 622 с.

УДК 004.942

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ ОТРАБОТАННЫХ ГАЗОВ АВТОТРАНСПОРТА НА ГОРОДСКИХ ТЕРРИТОРИЯХ

**А. И. Ситников[1], С. В. Железный[1], И. В. Сычев[1], А. А. Толстых[2], В. А. Никитенко[1]**

*[1]Воронежский институт министерства внутренних дел Российской Федерации*
*[2]Московский университет министерства внутренних дел Российской Федерации им. В. Я. Кикотя*

**Аннотация.** Предложено уравнение описывающее диффузию непрерывного линейного источника бесконечной протяженности постоянной мощности для описания распространение отработанных газов автотранспорта на прилегающих к автомобильной дороге городских территориях.
**Ключевые слова:** диффузия, вредные вещества.

Основной вклад в загрязнение атмосферного воздуха городских территорий вносят отработанные газы автотранспорта. В связи с этим, актуальной задачей по защите атмосферного воздуха от загрязнений является совершенствование транспортных средств и оптимизация транспортных потоков. Рассмотрим движение одиночного автомобиля. Его движение можно рассмотреть, как непрерывный точечный источник постоянной мощности с постоянной скорость. Тогда концентрацию диффузионного вещества можно описать дифференциальным уравнение первого порядка:

$$\frac{dc}{dQ}=\frac{dc}{qd\xi_\tau}=\left[4\pi D(\tau-\xi_\tau)\right]^{-1}\exp\left[-\frac{r^2}{4\pi D(\tau-\xi_\tau)}\right], \qquad (1)$$

где $q$ — мощность источника, $D$ — коэффициент диффузии.

Проинтегрировав уравнение (1) получим:

$$\frac{c}{q}=\left[4\pi D\tau\right]^{-1}\left[1-erf\left(\frac{r}{2\sqrt{D\tau}}\right)\right]. \qquad (2)$$

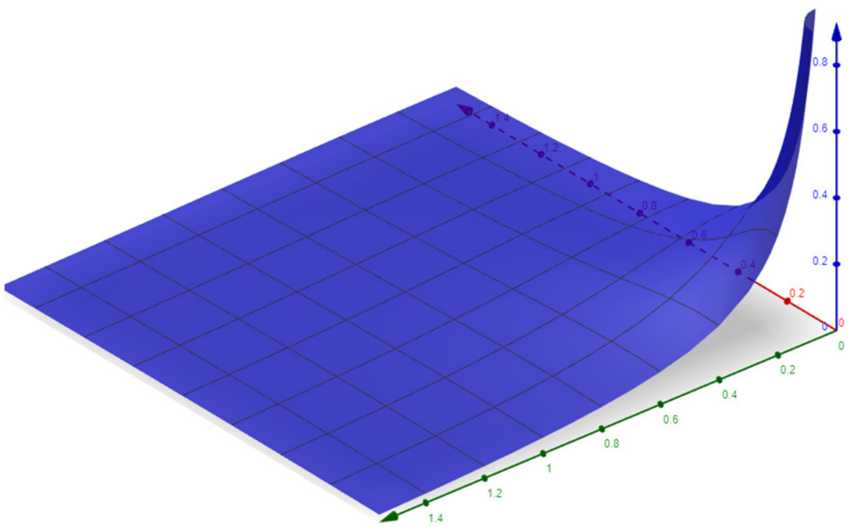


*Рис. 1. Поверхность уравнения (2)*

Одиночный автомобиль не в состоянии оказать влияние на окружающую среду. Совершенно иная ситуация складывается при движении совокупности различных транспортных средств по автомобильным дорогам.

В условиях интенсивного городского движения скорость автомобилей, составляющих плотные транспортные потоки постоянно меняется. Изменение нагрузочно-скоростных режимов работы двигателей приводит к резкому росту выброса вредных веществ.

На реальном участке магистральной улицы плотность автомобилей очень высока и его можно рассматривать как непрерывный линейный источник бесконечной протяженности постоянной мощности.

Рассмотрим уравнение диффузии примесей для осесимметричного случая:

$$\frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}.$$

Его частное решение имеет вид:

$$c=\frac{A}{\tau}\exp\left[-\frac{r^2}{4D\tau}\right]. \tag{3}$$

Подставляя уравнение (3) в закон сохранения массы для единицы длины:

$$2\pi\int_0^\infty crdr=Q'=\text{const}.$$

Получаем:

$$Q'=\frac{2\pi A}{\tau}\int_0^\infty r\cdot\exp\left[-\frac{r^2}{4D\tau}\right]dr=4\pi DA. \tag{4}$$

И подставив $A$ из уравнения (4) в (3) получаем решение:

$$\frac{c}{Q'}=\left[4\pi D\tau\right]^{-1}\exp\left[-\frac{r^2}{4D\tau}\right].$$

Пусть теперь $Q'$ величина убывающая обратно пропорционально расстоянию $r$:

$$Q'=\frac{q}{L}\tau,$$

где $L$ — единица длины протяженности

Будем рассматривать непрерывный источник как сумму бесконечно больного числа следующих друг за другом непрерывно $(r-\xi_\tau)$. На расстояние $d\xi_\tau$ концентрация примеси будет равна $\frac{qd\xi_\tau}{L}$. Общее количество примесей и концентрация изменится на:

$$\frac{dc}{dQ'}=\frac{dc}{\frac{qd\xi_\tau}{L}}=\left[4\pi D(\tau-\xi_\tau)\right]^{-1}\exp\left(-\frac{r^2}{4D(\tau-\xi_\tau)}\right)$$

$$\frac{c}{q}=\int_0^\tau\left[4\pi D(\tau-\xi_\tau)\right]^{-1}\exp\left(-\frac{r^2}{4D(\tau-\xi_\tau)}\right)d\xi_\tau$$

Сделав замену $z=\frac{1}{(\tau-\xi_\tau)}$ получаем:

$$\frac{c}{q}=\int_{\frac{1}{\tau}}^\infty\left[4\pi D\right]^{-1}z\exp\left(\frac{-r^2z}{4D}\right)dz. \tag{5}$$

Проинтегрировав уравнение (5) получаем:

$$\frac{c}{q}=\frac{4D\exp\left(-\frac{r^2}{4D\tau}\right)[4D+\frac{r^2}{\tau}]}{\pi r^4}. \tag{6}$$

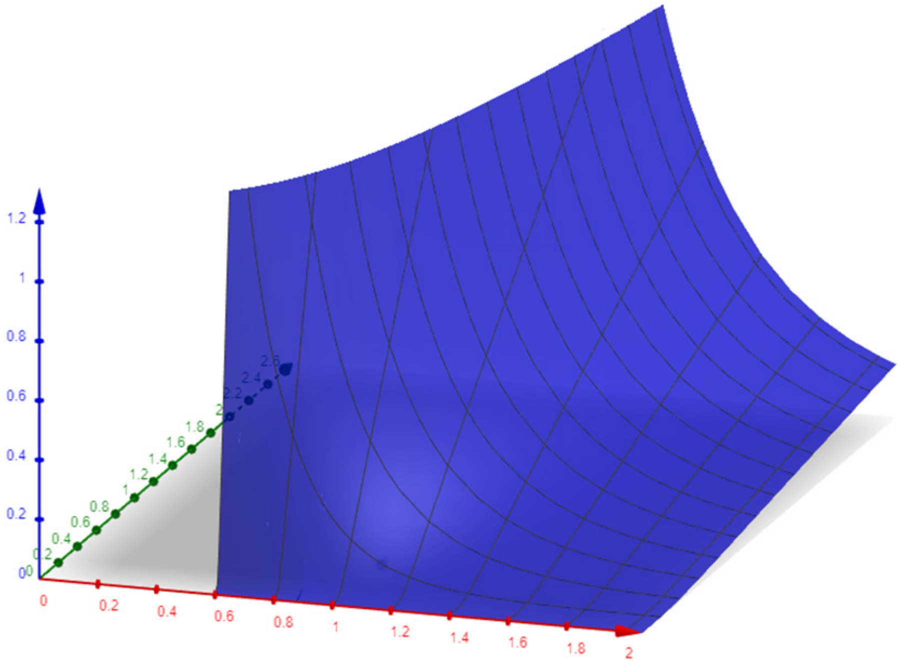



*Рис. 2. Поверхность уравнения (6) (красная — ось расстояния, зеленая — ось времени)*

Полученное уравнение описывает диффузию непрерывного линейного источника бесконечной протяженности постоянной мощности. Данным уравнением можно описать распространение отработанных газов автотранспорта на прилегающих к автомобильной дороге городских территориях, определить критические расстояния, где концентрация вредных веществ не ниже предельно-допустимых значений.

**Литература**

1. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М. : Наука. 1982. – 317 с.

2. *Дородницын А. А.* Математические модели экосистем. Экологические и демографические последствия ядерной войны / А. А. Дородницын. – М.: Наука. 1986. – 176 с.

3. *Ситников А. И.* О возможности оценки загрязнения воздуха городской территории выхлопами автотранспорта на основании данных видеофиксации / Ситников А. И., Толстых А. А., Власов В. А. // Современные технологии обеспечения гражданской обороны и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций. – 2016. – № 1-1 (7). – С. 488–489.

УДК 517.956.3, 517.955, 517.954, 517.958:539.3(1)

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

**Ю. И. Скалько[1], С. Ю. Гриднев[1,2], Н. В. Минаева[3]**

[1]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*
[2]*Воронежский государственный строительный университет*
[3]*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Моделирование систем с кусочно-постоянными параметрами накладывает специальные требования к используемым вычислительным алгоритмам. В местах разрыва параметров переменные модели могут испытывать разрывы или нарушение гладкости. При этом должны выполняться условия сопряжения значений переменных по обе стороны границы разрыва, отражающие физические условия на этой границе. В работе предложены вычислительные алгоритмы для моделирования указанных систем, основанные на использовании обобщенных функций и решении обобщенной задачи Римана с дополнительными условиями на границе.
**Ключевые слова:** кусочно-постоянные параметры, обобщенные функции, обобщенная задача Римана с дополнительными условиями на границе, фундаментальное решение оператора задачи.

## Введение

Численное моделирование систем, в которых параметры, характеризующие физические свойства среды кусочно-постоянны и следовательно скачкообразно меняются при переходе через границу соприкосновения частей системы, безусловно является актуальной задачей и встречается в самых различных прикладных областях. Например при моделировании распространения упругих или электромагнитных возмущений в слоистых средах или средах, состоящих из частей с различными физическими свойствами, поведение упруго-опертых несущих конструкций, состоящих из частей с различными свойствами используемых материалов, распространение тепла в композиционных материалах и многих других. Также весьма распространенным является прием, когда при математическом моделировании, система разбивается на подобласти, внутри каждой такой подобласти параметры системы полагаются постоянными и скачкообразно меняются при переходе через границу, разделяющую части. Особо хотелось бы выделить случай, когда система находится под действием внешних усилий, которые передаются через небольшое в сравнении с размерами системы «пятно контакта», как например в случае несущей конструкции, опертой на упругие опоры. Эта система также относится к рассматриваемым — скачкообразно меняются упругие свойства опор, на которых расположена несущая конструкция.

На границах, разделяющих части системы, на которых скачкообразно меняются параметры системы, могут нарушаться условия гладкости переменных математической модели. Эти скачки переменных или их производных не могут быть произвольными, а должны подчиняться условиям, отражающим физические условия на границе раздела сред. Например, должен быть непрерывен поток тепла через границу сред или должен выполняться третий закон Ньютона — сила, с которой действует одна из соприкасающихся сред на другую, равна и противоположно направлена силе с которой вторая действует на первую. Эти физические условия должны выполняться и для переменных модели. В противном случае будет нарушена консервативность модели и численная модель не будет адекватна исследуемой физической ситуации.

Одним из наиболее часто используемых алгоритмов при численном моделировании систем с кусочно-постоянными параметрами, является полудискретный метод Галеркина и различные его модификации, в котором физически условия на границе раздела сред включаются в уравнения модели в «слабой» форме [1–3, 5, 6]. Такой подход позволяет приближенно удовлетворить условиям на границе раздела сред с точностью, соответствующей точности численной модели.

Особенностью метода Галеркина является то, что он приводит к неявным вычислительным алгоритмам — на каждом шаге по времени необходимо решать систему алгебраических уравнений, что значительно снижает быстродействие.

В работе на примере задачи колебания упругой струны, опертой на промежуточные опоры будет предложен единый подход к численному моделированию систем с кусочно-постоянными параметрами, который позволяет строить явные численные алгоритмы. Этот подход основан на формулировке исходной начально-краевой задачи в форме системы дифференциальных уравнений с частными производными для обобщенных функций, в построении фундаментального решения оператора задачи и представлении решения задачи как свертки фундаментального решения с правой частью системы уравнений для обобщенных функций.

## 1. Постановка задачи

Излагаемые ниже методы построения численных моделей будут продемонстрированы на примере модели колебания упругой струны со свободными концами, опертой на несколько промежуточных упругих опор, каждая из которых соприкасается со струной через небольшое «пятно контакта».

Обозначим через $u(t,x)$ — вертикальные координаты положения точек струны, $\rho(x)$ — кусочно-постоянная плотность струны, $\kappa(x)$ — кусочно-постоянный коэффициент упругости струны, $\eta_s$ — коэффициент упругости $s$-й промежуточной опоры. Тогда математическая модель имеет вид начально-краевой задачи

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\rho g-\eta u; \quad x\in\Omega=(-l,l)\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,x=-l)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,x=l)=0; u(t=0,x)=u_0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0,x)=u_1(x)\end{gathered} \tag{1}$$

$\eta(x)$ — кусочно-постоянный коэффициент упругости промежуточных опор. В области «пятна контакта» $s$-й промежуточной опоры он равен $\eta_s$ и вне этих областей он равен нулю. Уравнения выполняются всюду, кроме точек разрыва коэффициентов уравнения.

В точках $x^*$ разрыва параметров уравнения должны выполняться условия сопряжения:

$$u(t,x^*-0)=u(t,x^*+0), \tag{2}$$

отражающее условие неразрывности струны, и условие, отражающее выполнение третьего закона Ньютона (силы, действующие на границу с обеих сторон равны по величине и противоположно направлены).

$$\kappa(x^*-0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x^*-0)=\kappa(x^*+0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x^*+0). \tag{3}$$

## 2. Обобщенная задача Римана с дополнительными условиями на границе

В основании предлагаемых в работе алгоритмов лежит решение обобщенной задачи Римана с дополнительными условиями на границе. В работах [3, 4, 7] приведена постановка и решение обобщенной задачи Римана с дополнительными условиями на границе в применении к системам уравнений с частными производными 1-го порядка. Ниже изложено решение обобщенной задачи Римана для уравнений с производными 2-го порядка.

В приложении к рассматриваемой проблеме обобщенная задача Римана с дополнительными условиями на границе формулируется следующим образом. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$\begin{gathered}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\kappa(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u(t=0,x)=\sigma(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0,x)=\gamma(x)\end{gathered}\tag{4}$$

Коэфициенты уравнения постоянны в левой и правой полуплоскости $\rho(x<0)=\rho^-$, $\rho(x>0)=\rho^+$, $\kappa(x<0)=\kappa^-$, $\kappa(x>0)=\kappa^+$. Начальные данные $u_0(x)$ и $u_1(x)$ всюду дважды непрерывно дифференцируемы, кроме точки $x=0$. Решение задачи Коши в каждый момент времени $t\ge 0$ в точке $x^*=0$ должно удовлетворять условиям сопряжения (2) и (3).

Пусть функция $u(t,x)$ является решением задачи Коши (4). Построим функции $u^-(t,x)$, $\sigma^-(x)$, $\gamma^-(x)$, которые совпадают соответственно с $u(t,x)$, $\sigma(x)$, $\gamma(x)$ при $x<0$, $t\ge 0$ и равны нулю в противном случае. Также построим функции $u^+(t,x)$, $\sigma^+(x)$, $\gamma^+(x)$, которые совпадают соответственно с $u(t,x)$, $\sigma(x)$, $\gamma(x)$ при $x>0$, $t\ge 0$ и равны нулю в противном случае. Также обозначим через $v_0^-(t)=u(t,x=0-0)$, $v_0^+(t)=u(t,x=0+0)$ и $v_1^-(t)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,x=0-0)$, $v_1^+(t)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,x=0+0)$ — значение решения и его производной соответственно по правую и левую стороны границы.

Функция $u^-(t,x)$, рассматриваемая, как обобщённая функция из $\mathcal{S}'$, удовлетворяет уравнению

$$\rho^-\frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2}-k^-\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2}=\rho^-\sigma^-(x)\delta'(t)+\rho^-\gamma^-(x)\delta(t)+k^-v_0^-(t)\delta'(x)+k^-v_1^-(t)\delta(x)\tag{5}$$

Функция $u^+(t,x)$ рассматриваемая, как обобщённая функция из $\mathcal{S}'$, удовлетворяет уравнению

$$\rho^+\frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2}-k^+\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2}=\rho^+\sigma^+(x)\delta'(t)+\rho^+\gamma^+(x)\delta(t)-k^+v_0^+(t)\delta'(x)-k^+v_1^+(t)\delta(x)\tag{6}$$

Введем обозначение $a^-=\sqrt{\frac{\kappa^-}{\rho^-}}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$E^-(t,x)=\frac{1}{2a^-\rho^-}\theta\left(a^-t-|x|\right)\tag{7}$$

является фундаментальным решением оператора задачи (5). То есть

$$\rho^-\frac{\partial^2 E^-}{\partial t^2}-k^-\frac{\partial^2 E^-}{\partial x^2}=\delta(t,x).\tag{8}$$

Тогда решение уравнения уравнения (5) может быть записано в виде свертки фундаментального решения с правой частью

$$u^-(t,x)=E^-(t,x)*\left(\rho^-\sigma^-(x)\delta'(t)+\rho^-\gamma^-(x)\delta(t)+k^-v_0^-(t)\delta'(x)+k^-v_1^-(t)\delta(x)\right).\tag{9}$$

Учитывая, что

$$E^-(t,x)*\rho^-\sigma^-(x)\delta'(t)=\frac{1}{2}\sigma^-\left(x-a^-t\right)$$

$$E^-(t,x)*\rho^-\gamma^-(x)\delta(t)=\frac{1}{2a^-}\int\limits_{x-a^-t}^{0}\gamma^-(\xi)\,d\xi$$

$$E^-(t,x)*k^-v_0^-(t)\delta'(x)=\frac{1}{2}v_0\left(t-\frac{|x|}{a^-}\right) \tag{10}$$

$$E^-(t,x)*k^-v_1^-(t)\delta(x)=\frac{a^-}{2}\int\limits_0^{t-\frac{|x|}{a^-}} v_1^-(\tau)\,d\tau$$

решение $u^-(t,x<0)$ может быть записано в виде

$$u^-(t,x)=\frac{1}{2}\sigma^-\left(x-a^-t\right)+\frac{1}{2a^-}\int\limits_{x-a^-t}^{0}\gamma^-(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}v_0^-\left(t+\frac{x}{a^-}\right)+\frac{a^-}{2}\int\limits_0^{t+\frac{x}{a^-}}v_1^-(\tau)\,d\tau$$
$$\frac{\partial u^-}{\partial x}(t,x)=\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma^-}{\partial x}\left(x-a^-t\right)-\frac{1}{2a^-}\gamma^-\left(x-a^-t\right)+\frac{1}{2a^-}\frac{\partial v_0^-}{\partial t}\left(t+\frac{x}{a^-}\right)+\frac{1}{2}v_1^-\left(t+\frac{x}{a^-}\right) \tag{11}$$

Переходя в равенствах (11) к пределу при $x\to 0$ слева, получаем

$$v_0^-(t)=\sigma^-\left(-a^-t\right)+\sqrt{\frac{\rho^-}{\kappa^-}}\int\limits_{-a^-t}^{0}\gamma^-(\xi)\,d\xi+\sqrt{\frac{\kappa^-}{\rho^-}}\int\limits_0^t v_1^-(\tau)\,d\tau$$
$$v_1^-(t)=\frac{\partial\sigma^-}{\partial x}\left(-a^-t\right)-\sqrt{\frac{\rho^-}{\kappa^-}}\gamma^-\left(-a^-t\right)+\sqrt{\frac{\rho^-}{\kappa^-}}\frac{\partial v_0^-}{\partial t} \tag{12}$$

Аналогично, решение $u^+(t,x>0)$ уравнения (6) имеет вид

$$u^+(t,x)=\frac{1}{2}\sigma^+\left(x+a^-t\right)+\frac{1}{2a^+}\int\limits_0^{x+a^+t}\gamma^+(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}v_0^+\left(t-\frac{x}{a^+}\right)-\frac{a^+}{2}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a^+}}v_1^+(\tau)\,d\tau$$
$$\frac{\partial u^+}{\partial x}(t,x)=\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma^+}{\partial x}\left(x+a^+t\right)+\frac{1}{2a^+}\gamma^+\left(x+a^+t\right)-\frac{1}{2a^+}\frac{\partial v_0^+}{\partial t}\left(t-\frac{x}{a^+}\right)+\frac{1}{2}v_1^+\left(t-\frac{x}{a^+}\right) \tag{13}$$

Переходя в равенствах (13) к пределу при $x\to 0$ справа, получаем

$$v_0^+(t)=\sigma^+\left(+a^-t\right)+\sqrt{\frac{\rho^+}{\kappa^+}}\int\limits_0^{+a^+t}\gamma^+(\xi)\,d\xi-\sqrt{\frac{\kappa^+}{\rho^+}}\int\limits_0^t v_1^+(\tau)\,d\tau$$
$$v_1^+(t)=\frac{\partial\sigma^+}{\partial x}\left(+a^+t\right)+\sqrt{\frac{\rho^+}{\kappa^+}}\gamma^+\left(+a^+t\right)-\sqrt{\frac{\rho^+}{\kappa^+}}\frac{\partial v_0^+}{\partial t} \tag{14}$$

Умножим первое уравнение в (12) на $\sqrt{\rho^-\kappa^-}$ и прибавим к нему первое уравнение из (14), умноженное на $\sqrt{\rho^+\kappa^+}$. Учтем условия сопряжения (2) и (3)

$$v_0^-=v_0^+=\frac{\rho^-a^-\sigma^-\left(-a^-t\right)+\rho^+a^+\sigma^+\left(+a^-t\right)+\rho^-\int\limits_{-a^-t}^{0}\gamma^-(\xi)\,d\xi+\rho^+\int\limits_0^{+a^+t}\gamma^+(\xi)\,d\xi}{\rho^-a^-+\rho^+a^+}. \tag{15}$$

Умножим второе уравнение в (12) на $\kappa^-$ и прибавим к нему второе уравнение из (14), умноженное на $\kappa^+$. Учтем условия сопряжения (2) и (3)

$$v_1^-=\kappa^+\frac{a^+\frac{\partial\sigma^-}{\partial x}\left(-a^-t\right)+a^-\frac{\partial\sigma^+}{\partial x}\left(+a^+t\right)+a^-a^+\left(-\gamma^-\left(-a^-t\right)+\gamma^+\left(+a^+t\right)\right)}{\kappa^+a^++\kappa^-a^-}$$
$$v_1^+=\kappa^-\frac{a^+\frac{\partial\sigma^-}{\partial x}\left(-a^-t\right)+a^-\frac{\partial\sigma^+}{\partial x}\left(+a^+t\right)+a^-a^+\left(-\gamma^-\left(-a^-t\right)+\gamma^+\left(+a^+t\right)\right)}{\kappa^+a^++\kappa^-a^-} \tag{16}$$

Выражения (15) и (16) дают решение обобщенной задачи Римана и его производной на границе $x=0$ по обе ее стороны. Зная $v_0^-(t)$, $v_1^-(t)$ и $v_0^+(t)$, $v_1^+(t)$, по формулам (11) и (13) можем вычислить решение обобщенной задачи Римана с дополнительными условиями на границе в произвольной точке $(t,x)$.

В пределе $t\to 0$ соотношения (15) и (16) принимают вид

$$v_0^- = v_0^+ = \frac{\rho^- a^-}{\rho^- a^- + \rho^+ a^+} u^-\left(0,-0\right) + \frac{\rho^+ a^+}{\rho^- a^- + \rho^+ a^+} u^+\left(0,+0\right) \tag{17}$$

$$\kappa^- v_1^- = \kappa^+ v_1^+ = \frac{\kappa^- \kappa^+ a^+}{\kappa^+ a^+ + \kappa^- a^-} \frac{\partial u^-}{\partial x}\left(0,-0\right) + \frac{\kappa^- \kappa^+ a^-}{\kappa^+ a^+ + \kappa^- a^-} \frac{\partial u^+}{\partial x}\left(0,+0\right) \tag{18}$$

Соотношения (17) и (18) будут использованы в дальнейшем изложении при построении вычислительных алгоритмов.

## 3. Формулировка задачи в обобщенных функциях

В дальнейшем изложении будут использоваться понятия и утверждения теории обобщенных функций медленного роста, изложение которых можно найти, например в [4] или [10].

Определим пространство основных вектор-функций $\mathbf{S}(R^N)$. Элементами этого пространства будут $M$-мерные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}=\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_M\right)$, компоненты которых $\varphi_1(\mathbf{x}),\ldots,\varphi_M(\mathbf{x})$ принадлежат пространству $S(R^N)$, которое состоит из функций $C^\infty(R^N)$, убывающих при $|\mathbf{x}|\to\infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|\mathbf{x}|^{-1}$.

Обобщенными вектор-функциями $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_M)\in\mathbf{S}'$ будем называть линейные непрерывные функционалы на векторном основном пространстве $\mathbf{S}(R^N)$, при этом функционал $\mathbf{f}$ действует на основную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_M)$ по формуле $(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi})=(f_1,\varphi_1)+\ldots+(f_M,\varphi_M)$.

Разобьём отрезок $\left[-l,l\right]$ узлами $x_i$, $i=1:I+1$ на подобласти $\Omega_i=[x_i,x_{i+1}]$. При этом потребуем, чтобы все точки, в которых какой-нибудь из параметров уравнения (1) терпит разрыв совпадали с каким-то из узлов $x_i$. Тогда внутри каждой из подобластей $\Omega_i$ параметры уравнения постоянны и равны, соответственно $\rho_i$, $k_i$, $\eta_i$.

Пусть функция $u(t,x)$ является решением начально краевой задачи (1). Построим функции $u_i(t,x)$, которые совпадают с $u(t,x)$ при $x\in\Omega_i$, $t\ge 0$ и равны нулю в противном случае. Также построим функции $\sigma_i(x)$ и $\gamma_i(x)$, которые для $x\in\Omega_i$ совпадают соответственно с $\sigma(x)$ или $\gamma(x)$ и равны нулю в противном случае. Определим вектор-функции $\mathbf{u}(t,x)=u_i(t,x)$, $\boldsymbol{\sigma}(x)=\sigma_i(x)$ и $\boldsymbol{\gamma}(x)=\gamma_i(x)$.

Покажем, что вектор-функции $\mathbf{u}(t,x)$, рассматриваемые, как обобщённые функции из $\mathbf{S}'$, удовлетворяет уравнениям

$$\mathbf{D}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}+\mathbf{K}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2}=\sum_{j=1}^{I+1}\mathbf{KR}_j\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\delta\left(x-x_j\right)+\sum_{j=1}^{I+1}\mathbf{KQ}_j\mathbf{u}\delta'\left(x-x_j\right)+\mathbf{Eu}+\mathbf{b}+\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}\delta'\left(t\right)+\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}\delta\left(t\right)$$

$$\rho_{i\cdot}\frac{\partial^2 u_{i\cdot}}{\partial t^2}-\kappa_{i\cdot}\frac{\partial^2 u_{i\cdot}}{\partial x^2}=-g_i-\eta_{i\cdot}u_{i\cdot}+\ldots \tag{19}$$

$$\ldots+\kappa_i\sum_{j=1}^{I+1}R_{i'}^j\frac{\partial u_{i'}}{\partial x}\delta\left(x-x_j\right)+\kappa_i\sum_{\substack{i\\ j=1}}^{I+1}Q_{i'}^j u_{i'}\delta'\left(x-x_j\right)+\rho_{i\cdot}\sigma_{i\cdot}\delta'\left(t\right)+\rho_{i\cdot}\gamma_{i\cdot}\delta\left(t\right)$$

Здесь $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$ — диагональные матрицы, элементы в $i$-й строке которых равны соответственно $\rho_i$, $-\kappa_i$, $-\eta_i$, $\mathbf{b}$ — вектор, элементы в $i$-й строке которых равны $-\rho_i g$. Элементы матриц $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{Q}_i$ определяются коэффициентами уравнения исходной задачи (1).

Действительно, по определению, для произвольной основной функции $\boldsymbol{\varphi}\left(t,x\right)\in\mathbf{S}'$

$$\left(\mathbf{D}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}+\mathbf{K}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2},\boldsymbol{\varphi}\right)=\int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{0}^{\infty}\left(-\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial t^2}\mathbf{D}+\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial x^2}\mathbf{K}\right)\mathbf{u}dtdx. \tag{20}$$

При всех $\boldsymbol{\varphi}(t,x)\in\mathbf{S}'$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial t^2}\mathbf{Du}dtdx=\int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{0}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{D}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}dtdx+\int\limits_{-l}^{l}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial t}\mathbf{Du}\Big|_0^\infty dx-\int\limits_{-l}^{l}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{D}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\Big|_0^\infty dx.$$

Учитывая начальные условия (1), получаем

$$\int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial t^2}\mathbf{Du}dtdx=\int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{0}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{D}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}dtdx-\int\limits_{-l}^{l}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial t}\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}\big|(t=0,x)dx+\int\limits_{-l}^{l}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}\big|(t=0,x)dx. \qquad (21)$$

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial x^2}\mathbf{Ku}dtdx=\int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{0}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{K}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2}dtdx-\sum_{j=1}^{I+1}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial x}\mathbf{K}\left[\mathbf{u}\right]_j-\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{K}\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right]_j\right)dt.$$

Здесь $\left[\mathbf{u}\right]_j=\mathbf{u}(t,x_j+0)-\mathbf{u}(t,x_j-0)$ и $\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right]_j=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}(t,x_j+0)-\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}(t,x_j-0)$ — скачек векторов $\mathbf{u}$ и $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}$ при переходе через точку $x_j$.

Выразим скачек в граничных узлах через значения векторов $\mathbf{u}$ и $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}$ в этих узлах, с учетом граничных условий (1): $\left[\mathbf{u}\right]_j=\mathbf{Q}_J\mathbf{u}(t,x_j)$ и $\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right]_j=\mathbf{R}_j\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}(t,x_j),\ \ j=1,I+1.$ Скачек $\left[\mathbf{u}\right]_j$ и $\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right]_j$ во внутренних узлах выразим через значения векторов $\mathbf{u}(t,x_j)$ и $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}(t,x_j)$, используя решение обобщенной задачи Римана с дополнительными условиями на границе $x=x_j$ (17)–(18): $\left[\mathbf{u}\right]_j=\mathbf{Q}_J\mathbf{u}(t,x_j)$ и $\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right]_j=\mathbf{R}_j\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}(t,x_j),\ \ j=2:I$. В итоге получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial x^2}\mathbf{Ku}dtdx=\int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{0}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{K}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2}dtdx-\sum_{j=1}^{I+1}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial x}\mathbf{KQ}_J\mathbf{u}\big|(t,x_j)-\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{KR}_j\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\Big|(t,x_j)\right)dt. \qquad (22)$$

Складывая уравнения (21), (22) и учитывая, что $u_i(t,x)$ — компоненты вектора $\mathbf{u}(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду, следует справедливость равенства (19).

Опять же, если обобщенные вектор-функции $\mathbf{u}(t,x)$ удовлетворяют системе уравнений (19), то эти обобщенные функции регулярны и функция $u(t,x)=\sum_{i=1}^{I}u_i(t,x),$ как обыкновенная функция удовлетворяет уравнению, начальным и граничным условиям задачи (1) и условиям сопряжения (2)–(3).

### 4. Вычислительный алгоритм

Уравнения (19) положим в основу вычислительного алгоритма нахождения приближенного решения начально-краевой задачи (1).

Пусть функции $H_{i\,m}(x)$ — базисные интерполяционные полиномы на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$, построенные по узлам, расположенным в нулях полинома Чебышева степени $M$ и равные нуля вне отрезка $[x_i,x_{i+1}]$. Также пусть $\tilde{H}^{i'm'}(x)$ сопряженные к ним полиномы. То есть $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\tilde{H}^{i'm'}H_{i\,m}dx=\delta_i^{i'}\delta_m^{m'}$. Продолжим полиномы $\tilde{H}^{i'm'}(x)$ гладко за пределы отрезка $[x_i,x_{i+1}]$ так, чтобы в итоге получить финитную бесконечно дифференцируемую функцию. За полученной таким образом функцией оставим прежнее название $\tilde{H}^{i'm'}(x)$.

Приближенное решение уравнений (19) будем искать в виде вектор-функции $u_i(t,x)=\sum_{m=1}^{M}H_{i\cdot m}(x)u^{i\cdot m}(t)=H_{i\cdot m}(x)u^{i\cdot m}(t).$ В последнем выражении использовано соглашение, что если в выражении какой-либо индекс повторяется два раза, то подразумевается суммирование по всем значениям индекса. Если справа от повторяющихся индексов стоит точка («$i\cdot$»), то суммирование не подразумевается. Это соглашение будем использовать и в дальнейшем изложении. Верхние и нижние индексы не различаются.

В качестве пробных функций из пространства основных функций возьмем финитные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}^{i'm}(t,x) \in \mathbf{S}'$, все элементы которых равны нулю, кроме элемента в $i'$-й строке, равного $\phi^{i'\cdot}(t)\tilde{H}^{i'\cdot m'}(x) \in \mathcal{S}$, где $\phi^{i'}(t)$ — произвольные финитные бесконечно дифференцируемые функции.

Подставляем в уравнение (19), и учитывая, что $\phi^{i'}(t)$ — произвольные финитные бесконечно дифференцируемые функции, получим, что коэффициенты $u^{im}(t)$ должнны быть решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d^2u^{i'm'}}{dt^2} + A^{i'm'}_{im}u^{im} = f^{i'm'} \\ u^{i'm'}(t=0) = \mu(t), \quad \frac{du^{i'm'}}{dt}(t=0) = \nu(t)\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь

$$\begin{aligned}A^{i'm'}_{i''m''} = \frac{\kappa_{i'\cdot}}{\rho_{i'\cdot}}\delta^{i'\cdot}_{i}\left(\int\limits_{x_{i'}}^{x_{i'+1}} \frac{\partial\tilde{H}^{i'\cdot m'}}{\partial x}\frac{\partial H_{i'\cdot m}}{\partial x}dx + \frac{\partial\tilde{H}^{i'\cdot m'}}{\partial x}(x_{i'+1})H_{i'\cdot m}(x_{i'}) - \frac{\partial\tilde{H}^{i'\cdot m'}}{\partial x}(x_{i'+1})H_{i'\cdot m}(x_{i'+1})\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{\kappa_{i'\cdot}}{\rho_{i'\cdot}}\left(\sum_{j=1}^{I+1} Q^{i'\cdot}_{i\cdot j}\tilde{H}^{i'\cdot m'}(x_j)H_{i\cdot m}(x_j) - \sum_{j=1}^{I+1} R^{i'\cdot}_{i\cdot j}\tilde{H}^{i'\cdot m'}(x_j)\frac{\partial H_{i\cdot m}}{\partial x}(x_j) + \frac{\eta_{i'\cdot}}{\kappa_{i'\cdot}}\delta^{i'\cdot}_{i}\delta^{m'\cdot}_{m}\right)\end{aligned} \tag{24}$$

$$f^{i'm'} = -g\int\limits_{x_{i'}}^{x_{i'+1}} \tilde{H}^{i'm'}dx; \quad \mu(t) = \int\limits_{x_{i'}}^{x_{i'+1}} \sigma^{i'\cdot}\tilde{H}^{i'\cdot m'}dx; \quad \nu(t) = \int\limits_{x_{i'}}^{x_{i'+1}} \gamma^{i'\cdot}\tilde{H}^{i'\cdot m'}dx \tag{25}$$

Решаем эту систему ОДУ тем или иным численным методом и по формулам $u_i(t,x) = \sum_{m=1}^{M} H_{i\cdot m}(x)u^{i\cdot m}(t)$ определяем приближенное решение исходной задачи.

Из приведенной схемы построения вычислительного алгоритма видим, что исходная задача сводится к решению задачи Коши для системы ОДУ, разрешенной относительно производных. Если для численного решения задачи Коши использовать явную разностную схему, то и весь алгоритм получается явным, в отличие от алгоритмов, получаемых на основе метода Галеркина. В последнем по причине того, что получаемая система ОДУ не является разрешенной относительно производных, на каждом временном слое необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений.

Описанный алгоритм применим не только для задач с производными второго порядка, но и для задач, в которых исследуемые процессы описываются производными произвольного порядка.

Используя базис из полиномов высокой степени, можем строить вычислительные алгоритмы произвольно высокого порядка аппроксимации.

Вероятно одной из основных особенностей предложенного алгоритма является то, что условия сопряжения, являющееся отражением физических условий, выполняются всюду точно. Это свойство исключает возможность появления искусственных источников возмущений, ведущих к вычислительной неустойчивости.

Алгоритм основан на использовании базиса из разрывных кусочно-гладких функций, этот базис нет необходимости подчинять граничным условиям, что является непростой задачей, особенно в случае многих пространственных переменных (граничные условия входят в «слабой» форме в уравнеб́ния для обобщенных функций) и в итоге приводит системе линейных ОДУ с сильно разреженными матрицами, что допускает эффективную реализацию на параллельных вычислительных комплексах.

**Литература**


1. *Скалько Ю. И., Мендель М. А.* Применение аппарата обобщенных функций для построения приближенных решений задачи переноса излучения // Труды МФТИ. – 2013. – Т. 5, № 4. – С. 133–144.

2. *Скалько Ю. И., Цыбулин И. В., Карасев Р. Н., Акопян А. В. и Мендель М. А.* Маршевый алгоритм решения задачи переноса излучения методом коротких характеристик // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, № 2. – С. 203–215.

3. *Скалько Ю. И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти Компьютерные исследования и моделирование // 2014. – Т. 6, № 3. – С. 347–356.

4. *Скалько Ю. И.* Задача Римана о распаде разрыва в случае многих пространственных переменных // Труды МФТИ. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 169–182.

5. *Гриднев С. Ю., Скалько Ю. И.* Численный анализ нелинейных колебаний упруго опертой деформируемой системы с ограничительными опорами по концам // Морские интеллектуальные технологии. – Санкт-Петербург. – 2017. – Т. 3, № 4(38). – 2017. – С. 37–45.

6. *Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I., Ravodin I. V. and Yanaeva. V. V.* Simulation of vibrations of a continuously elastic supported rod with varying boundary conditions under the action of a movable // MATEC Web of Conferences 196, 01053 (2018) XXVII R-S-P Seminar 2018, Theoretical Foundation of Civil Engineering. – 2018.

7. *Skalko Yu. I., Gridnev S. Yu. and Yagfarova A.* Modeling the Focusing of the Energy of Elastic Waves in Block-Fractured Medium During the Long-Term Vibration Action // Proc. Int. Scient. Conf. Energy Management of Municipal Facilities and Sustain-able Energy Technologies EMMFT 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2019. – V. 983 eds. Murgul V and Pasetti M (Springer Nature Switzerland AG). – P. 534–546.

8. *Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I., Minaeva N. V. and Yanaeva V. V.* Comparative analysis of models of limiting supports in the study of structurally nonlinear oscillations of elastically supported bar from mobile load // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203. – 2019 012030 IOP Publishing doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012030

9. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. Избранные труды т. 2, издательство АН СССР. – 1963.

10. *Vladimirov V. S.* Generalized functions in mathematical physics. – Moscow : Nauka, 1979. – V. 4. – P. 379 [in Russian].

УДК 519.8:622.2315

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ИМПУЛЬСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ «УДАРНИК – ИНСТРУМЕНТ – РАБОЧАЯ СРЕДА»

**А. М. Слиденко[1], В. М. Слиденко[2]**

*[1]Воронежский государственный технический университет*
*[2]Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»*

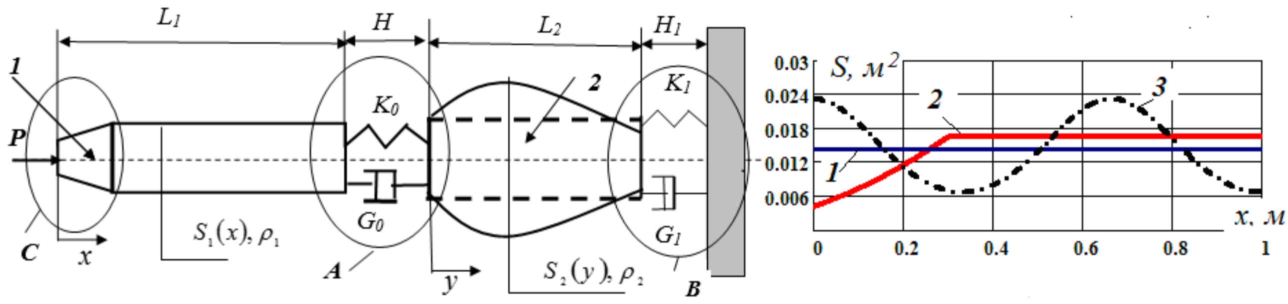
**Аннотация.** В статье приводятся результаты исследования модели ударного устройства с конструктивными элементами стержневого типа. Взаимодействие инструмента с ударником моделируется с помощью нелинейных жестких и диссипативных связей, характеристики которых зависят от разности перемещений контактных торцов стержней. Взаимодействие инструмента с рабочей средой, в частности с горной породой, моделируется аналогичными связями. Данные процессы описываются начально-краевыми задачами с волновыми уравнениями, которые отличаются начальными и краевыми условиями. Для решения задач применяются смешанные разностные схемы. Для стержней переменного сечения определяется распределение напряжений по их длине. Полученные результаты сравниваются с решениями методом Фурье модельных задач.
**Ключевые слова:** ударные нагрузки; ударник; инструмент; волновое уравнение; разностные методы; краевые условия; метод Фурье; колебания; нелинейные связи.

## Введение

Исследованию ударных устройств с конструктивными элементами стержневого типа посвящены работы ряда авторов. В работах [1–4] формулируются начально-краевые задачи для стержней постоянного сечения и их взаимодействия, которое осуществляется через упругие связи. В такой постановке решение задач находится методами Даламбера и Фурье. В работах [5–7] приводятся различные постановки задач для стержневых систем с импульсными нагрузками. В работе [8] применялся разностный метод при импульсной нагрузке на торец стержня, которая моделировалась определением начальной скорости для сечений стержня, расположенных в зоне «начальной нагрузки». В идеальной ситуации величина зоны $\varepsilon \to 0,$ в расчетах принимается значение $\varepsilon,$ при котором получено предельное решение методом Фурье. Целью данной работы является анализ двух схем импульсной нагрузки для стержней переменного сечения и применение для решения начально-краевых задач смешанных разностных схем. В первом случае имитируется отдача от рабочей среды импульса на инструмент и его передача на ударник. Во втором случае ударник контактирует с инструментом и передает ему импульс, если перемещение торца ударника превышает перемещение торца инструмента. В противном случае связь между ударником и инструментом существенно ослабляется и взаимодействие практически прекращается. В этой схеме учитывается сопротивление рабочей среды с последействием [7]. Для сравнения решений и корректировки разностных схем используется решение начально-краевой задачи для стержней постоянного сечения, полученное методом Фурье в [8].

## 1. Математическая модель

Различные схемы нагрузок представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 представлена модель для учета действия реакции рабочей среды, в частности горной породы, на ударник (2) и корпус ударного устройства через инструмент (1). При вычислениях переменные площади поперечных сечений определялись параметрическими формулами с целью обеспечения равного объема стержней. Вид зависимостей площадей поперечного сечения стержня от длины представлен на рис. 1, б.




а б

*Рис. 1. а) Схема нагрузки устройства стержневого типа: А — зона контактного взаимодействия ударника (2) с инструментом (1); С — зона взаимодействия инструмента с «рабочей средой»; В — зона взаимодействия ударника с корпусом устройства; б) Зависимости площади поперечного сечения стержней от длины: (1) — цилиндр; (2) — конусный профиль; (3) — волнообразный профиль*

Схема на рис. 2, а представляет процесс взаимодействия ударника (1) с инструментом (2) и последнего с рабочей средой. В соответствии с моделью Герца ([5, 6]), взаимодействие стержней при ударе определяется зоной контакта. Оценка силы взаимодействия:

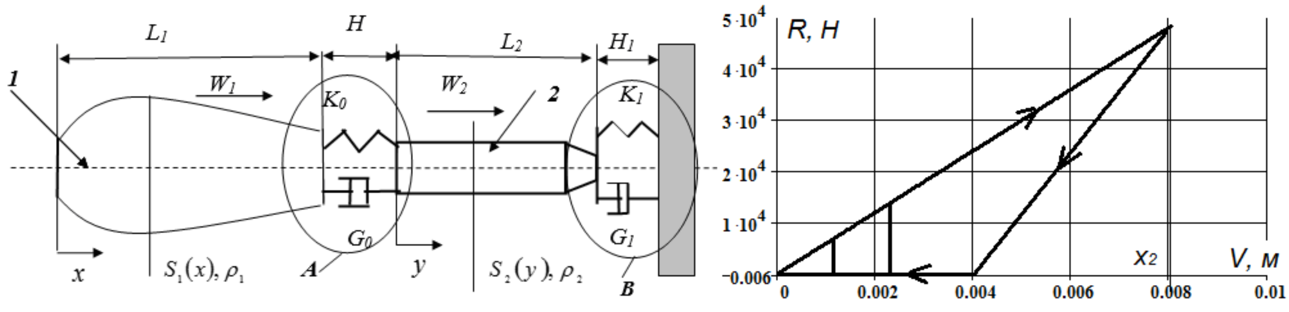
$$P_u = \begin{cases} K_0 \left(U_1 - U_2\right)^{3/2}, & \text{если } U_1 \geq U_2, \\ 0, & \text{если } U_1 < U_2. \end{cases} \tag{1}$$

В этой формуле $U_1$, $U_2$ — смещения центров масс стержней от положения равновесия. Коэффициент $K_0$ принят в расчетах $K_0 = 2 \cdot 10^{10} - 5 \cdot 10^{10}$.

Эффект последействия сопротивления рабочей среды представлен зависимостью

$$R(V,W,X_2) = \begin{cases} c_1 V, & \text{если } \left(0 \leq V \leq X_2\right) \wedge \left(W \geq 0\right), \\ c_2 V + \left(c_2 - c_1\right) X_2, & \text{если } \left(c_2^{-1}\left(c_2 - c_1\right) X_2 \leq V \leq X_2\right) \wedge \left(W < 0\right), \\ 0, & \text{если } \left(0 \leq V < c_2^{-1}\left(c_2 - c_1\right) X_2\right) \wedge W < 0, \\ c_3 V, & \text{если } V < 0. \end{cases} \tag{2}$$

В формуле (2) $V$ — перемещение, $W$ — скорость торца стержня, $c_1$, $c_2$, $c_3$ — характеристики свойств рабочей среды, $X_2 = \max(V)$.




а б

*Рис. 2. а) Схема нагрузки устройства стержневого типа: А — зона контактного взаимодействия ударника (1) с инструментом (2); В — зона взаимодействия инструмента с рабочей средой; б) Зависимость сопротивления рабочей среды от перемещения и направления движения*

Введем обозначения: $U(t,x)$ — смещение сечения $x$ первого стержня (1) от положения равновесия; $V(t,y)$ — смещение сечения $y$ второго стержня (2) от положения равновесия. Запишем уравнения колебаний для стержней

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} = a_1^2\left(\frac{1}{S_1(x)}\frac{dS_1(x)}{dx}\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2}\right),\ 0 \le x \le L_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial t^2} = a_2^2\left(\frac{1}{S_2(y)}\frac{dS_2(y)}{dy}\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y^2}\right),\ 0 \le y \le L_2,\ t \in [0,T]. \tag{4}$$

Здесь $a_i = \sqrt{E_i/\rho_i}$ — скорость распространения упругой волны в материале стержня, $E_i$ – модуль упругости, $\rho_i$ — плотность материала стержня, $S_i(x)$ — площадь поперечного сечения $i$-го стержня, $i = 1,\ 2$.

Рассмотрим начальные условия для нагрузки по схеме, представленной на рис. 1. При $t = 0$ левый торец инструмента нагружается импульсом $P$. Это означает, что малая часть инструмента $\varepsilon$ приобретает начальную скорость, которая определяется по формуле

$$W_1 = P\left(\rho_1\int_0^{\varepsilon} S_1(x)\,dx\right)^{-1}. \tag{5}$$

Начальные условия имеют вид

$$U(0,x) = 0,\ \ \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \begin{cases} W_1, & \text{если}\ \ 0 \le x \le \varepsilon, \\ 0, & \text{если}\ \ x > \varepsilon, \end{cases}\ \ V(0,y) = 0,\ \ \frac{\partial V}{\partial t}(0,y) = 0. \tag{6}$$

Краевое условие для левого торца первого стержня отражает отсутствие нагрузки:

$$S_1(0)E_1\frac{\partial U}{\partial x}(t,0) = 0. \tag{7}$$

На правом торце первого стержня учитывается сопротивление упругого и диссипативного элементов

$$S_1(L_1)E_1\frac{\partial U}{\partial x}(t,L_1) = -K_0\left(U(t,L_1) - V(t,0)\right)^k + G_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}(t,0) - \frac{\partial U}{\partial t}(t,L_1)\right). \tag{8}$$

Для первой схемы нагрузки принималось $k = 1$, для второй схемы $k = 1{,}5$.

Рассмотрим начальные и краевые условия при нагрузке, приведенной на рис. 2.

Начальные условия заключаются в том, что первый стержень-ударник движется со скоростью $W_1$, а второй стержень-инструмент движется со скоростью $W_2 \le W_1$. После контакта стержней происходит их совместное движение. При условии $U(t,L_1) \ge V(t,0)$ коэффициенты сопротивления упругого и диссипативного элементов имитируют процесс удара, а при условии $U(t,L_1) < V(t,0)$ эти коэффициенты существенно меньше и имитируют некоторую технологическую связь. Таким образом, краевое условие (8) сохраняется, но теперь коэффициенты $K_0$ и $G_0$ являются функциями от разности перемещений контактных торцев ударника и инструмента:

$$K_0 = \begin{cases} K_{01}, & \text{если}\ \ U(t,L_1) \ge V(t,0), \\ K_{02}, & \text{если}\ \ U(t,L_1) < V(t,0). \end{cases}\quad G_0 = \begin{cases} G_{01}, & \text{если}\ U(t,L_1) \ge V(t,0), \\ G_{02}, & \text{если}\ \ U(t,L_1) < V(t,0). \end{cases} \tag{9}$$

На контактных торцах предполагается равенство напряжений

$$S_2(0)E_2\frac{\partial V}{\partial y}(t,0) = S_1(L_1)E_1\frac{\partial U}{\partial x}(t,L_1). \tag{10}$$

Условия на правом торце второго стержня моделируют процесс взаимодействия стержня — инструмента с рабочей средой с учетом эффекта последействия:

$$S_2(L_2)E_2\frac{\partial V}{\partial x}(t,L_2)=-K_1V(t,L_2)-G_1\frac{\partial V}{\partial t}(t,L_2)-R\left(V(t,L_2),\frac{\partial V}{\partial t}(t,L_2),x_2\right). \qquad (11)$$

## 2. Разностная задача

Введем сетку в каждой из систем координат и обозначения:

$$h_1=\frac{L_1}{N_1},\ x_0=0,\ x_i=x_{i-1}+h_1,\ i=1,2,...,N_1;\ h_2=\frac{L_2}{N_2},\ y_0=0,\ y_j=y_{j-1}+h_2,\ j=1,2,...,N_2,$$

$$\tau=\frac{T}{M},\ t_0=0,\ t_n=t_{n-1}+\tau,\ n=1,2,...,M;\ Fo_k=\frac{a_k^2\tau^2}{h_k^2},\ k=1,2;$$

$$\Delta S_1(x_i)=\frac{S_1(x_{i+1})-S_1(x_{i-1})}{2h_1},\ \Delta S_2(y_j)=\frac{S_2(y_{j+1})-S_2(y_{j-1})}{2h_2},\ \Delta_2U_i^n=\frac{U_{i+1}^n-2U_i^n+U_{i-1}^n}{h_1^2},$$

$$\Delta_2V_j^n=\frac{V_{j+1}^n-2V_j^n+V_{j-1}^n}{h_2^2},\ \Delta U_i^n=\frac{U_{i+1}^n-U_{i-1}^n}{2h_1},\ \Delta V_j^n=\frac{V_{j+1}^n-V_{j-1}^n}{2h_2}.$$

Запишем разностные уравнения (смешанные разностные схемы) [9, 10]

$$\frac{U_i^{n+1}-2U_i^n+U_i^{n-1}}{\tau^2}=\sigma_1a_1^2\left[\frac{\Delta S_1(x_i)}{S_1(x_i)}\Delta U_i^{n+1}+\Delta_2U_i^{n+1}\right]+(1-\varsigma\sigma_1)a_1^2\left[\frac{\Delta S_1(x_i)}{S_1(x_i)}\Delta U_i^n+\Delta_2U_i^n\right]+$$
$$+(\varsigma-1)\sigma_1a_1^2\left[\frac{\Delta S_1(x_i)}{S_1(x_i)}\Delta U_i^{n-1}+\Delta_2U_i^{n-1}\right],\ i=1,2,...,N_1-1; \qquad (12)$$

$$\frac{V_j^{n+1}-2V_j^n+V_j^{n-1}}{\tau^2}=\sigma_2a_2^2\left[\frac{\Delta S_2(y_j)}{S_2(y_j)}\Delta V_i^{n+1}+\Delta_2V_j^{n+1}\right]+(1-\varsigma\sigma_2)a_2^2\left[\frac{\Delta S_2(y_j)}{S_2(y_j)}\Delta V_j^n+\Delta_2V_j^n\right]+$$
$$+(\varsigma-1)\sigma_2a_2^2\left[\frac{\Delta S_2(y_j)}{S_2(y_j)}\cdot\Delta V_j^{n-1}+\Delta_2V_j^{n-1}\right].\ j=1,2,...,N_2-1. \qquad (13)$$

Параметр $\varsigma$ определяет вид разностной схемы. Весовые коэффициенты $\sigma_1$ и $\sigma_2$ подбираются по результатам анализа решений модельных задач для обеспечения устойчивости схемы и приемлемой точности. Аппроксимация начальных условий принята в виде:

$$U_i^0=0,\ V_j^0=0,\ \frac{V_j^1-V_j^0}{\tau}=0,\ \frac{U_i^1-U_i^0}{\tau}=\begin{cases}W_1, & 0\le x_i\le\varepsilon,\\ 0, & x_i>\varepsilon.\end{cases}.\ i=1,...,N_1-1,\ j=1,...,N_2-1. \qquad (14)$$

Аппроксимация краевых условий на торцах первого стержня:

$$S_1(0)E_1\frac{U_1^{n+1}-U_0^{n+1}}{h_1}=0, \qquad (15)$$

$$S_1(L_1)E_1\left(U_{N_1}^{n+1}-U_{N_1-1}^{n+1}\right)h_1^{-1}=-K_0\left(U_{N_1}^n-V_0^n\right)\sqrt{\left|U_{N_1}^n-V_0^n\right|}+G_0\left(V_0^{n+1}-V_0^n-\left(U_{N_1}^{n+1}-U_{N_1}^n\right)\right)\tau^{-1}, \qquad (16)$$

$$S_2(0)E_2\frac{V_1^{n+1}-V_0^{n+1}}{h_2}=S_1(L_1)E_1\frac{U_{N_1}^{n+1}-U_{N_1-1}^{n+1}}{h_1}. \qquad (17)$$

Аппроксимация краевых условий на правом торце второго стержня:

$$S_2(L_2)E_2\left(V_{N_2}^{n+1}-V_{N_2-1}^{n+1}\right)h_2^{-1}=-K_1V_{N_2}^{n+1}-G_1\left(V_{N_2}^{n+1}-V_{N_2}^n\right)\tau^{-1}-R\left(V_{N_2}^n,\left(V_{N_2}^n-V_{N_2}^{n-1}\right)\tau^{-1},X_2\right),$$
$$n=1,2,...,M. \qquad (18)$$

## 3. Алгоритм решения разностной задачи

Системы уравнений (12) и (13) приведем к стандартному виду:

$$A_i U_{i+1}^{n+1} - B_i U_i^{n+1} + C_i U_{i-1}^{n+1} = -D_i, \tag{19}$$

$$a_j V_{j+1}^{n+1} - b_j V_j^{n+1} + c_j V_{j-1}^{n+1} = -d_j. \tag{20}$$

Рассмотрим метод прогонки для обеих систем и найдем связь между неизвестными параметрами. Решение системы (19) ищем в виде

$$U_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} U_i^{n+1} + \beta_{i-1}, \;\; i = 1, 2, ..., N_1. \tag{21}$$

Запишем формулы для определения коэффициентов метода прогонки

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \;\; \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} + D_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}. \tag{22}$$

Из краевого условия (15) и рекуррентной формулы (21) при $i = 1$ следует система уравнений

$$U_0^{n+1} = U_1^{n+1}, \;\; U_0^{n+1} = \alpha_0 U_1^{n+1} + \beta_0.$$

Из этой системы получаем $\alpha_0 = 1,\; \beta_0 = 0$. По формулам (22) вычисляем $\alpha_i$ и $\beta_i,\; i = 1, 2, ..., N_1 - 1$. Для реализации обратного хода метода прогонки необходимо вычислить $U_{N_1}^{n+1}$ с учетом условий (17) и (18). Решение системы (20) ищем в виде

$$V_j^{n+1} = \delta_j V_{j+1}^{n+1} + \gamma_j, \;\; j = 0, 1, 2, ..., N_2 - 1. \tag{23}$$

Из системы уравнений (16), (17), (21) при $i = N_1$, и (23) при $j = 0$ найдем решение, которое зависит от коэффициентов обратной прогонки для системы (23) $\delta_0$ и $\gamma_0$:

$$U_{N_1}^{n+1} = \frac{\dfrac{G_2 \tau}{G_0} + \dfrac{\gamma_0}{1-\delta_0} + \beta_{N_1 - 1} q \left( \dfrac{\tau}{G_0} - \dfrac{\delta_0}{p(1-\delta_0)} \right)}{\alpha_{N_1-1} q \left( \dfrac{\delta_0}{p(1-\delta_0)} - \dfrac{\tau}{G_0} \right) + q \left( \dfrac{1}{q} - \dfrac{\delta_0}{p(1-\delta_0)} + \dfrac{\tau}{G_0} \right)}, \;\; U_{N_1-1}^{n+1} = \alpha_{N_1-1} U_{N_1} + \beta_{N_1-1}, \tag{24}$$

где $p = \dfrac{S_2(0) E_2}{h_2},\;\; q = \dfrac{S_1(L_1) E_1}{h_1},\;\; G_2 = -K_0 \left( U_{N_1}^n - V_0^n \right) \sqrt{U_{N_1}^n - V_0^n} + \dfrac{G_0}{\tau} \left( U_{N_1}^n - V_0^n \right),$

$$K_0 = \begin{cases} K_{01}, & \text{если } \; U_{N1}^n \ge V_0^n, \\ K_{02}, & \text{если } \; U_{N1}^n < V_0^n. \end{cases} \;\; G_0 = \begin{cases} G_{01}, & \text{если } \; U_{N1}^n \ge V_0^n, \\ G_{02}, & \text{если } \; U_{N1}^n < V_0^n. \end{cases} \tag{25}$$

Получаем зависимости:

$$V_1^{n+1} = -q \left( \frac{1}{p} + \frac{\tau}{G_0} \right) U_{N_1-1}^{n+1} + \left( 1 + \frac{q}{p} + \frac{\tau q}{G_0} \right) U_{N_1}^{n+1} - \frac{G_2 \tau}{G_0}, \;\; V_0^{n+1} = V_1^{n+1} - q \left( U_{N_1}^{n+1} - U_{N_1-1}^{n+1} \right) p^{-1}. \tag{26}$$

Для определения коэффициентов $\delta_0$ и $\gamma_0$ необходимо учесть краевые условия (18) на правом торце второго стержня и предполагаемое решение второй системы уравнений (20):

$$S_2(L_2) E_2 \left( V_{N_2}^{n+1} - V_{N_2-1}^{n+1} \right) h_2^{-1} = -K_1 V_{N_2}^{n+1} - G_1 \left( V_{N_2}^{n+1} - V_{N_2}^n \right) \tau^{-1} - R \left( V_{N_2}^n, \left( V_{N_2}^n - V_{N_2}^{n-1} \right) \tau^{-1}, X_2 \right),$$

$$V_{N_2-1}^{n+1} = \delta_{N_2-1} V_{N_2}^{n+1} + \gamma_{N_2-1}. \tag{27}$$

Из системы (27) следует

$$\delta_{N_2-1} = \left( E_2 S_2(L_2) + K_1 h_2 + \frac{G_1 h_2}{\tau} \right) \left( E_2 S_2(L_2) \right)^{-1}, \tag{28}$$

$$\gamma_{N_2-1} = -\frac{G_1 h_2}{\tau E_2 S_2(L_2)} V_{N_2}^n - R \left( V_{N_2}^n, \left( V_{N_2}^n - V_{N_2}^{n-1} \right) \tau^{-1}, X_2 \right) \frac{h_2}{E_2 S_2(L_2)}. \tag{29}$$

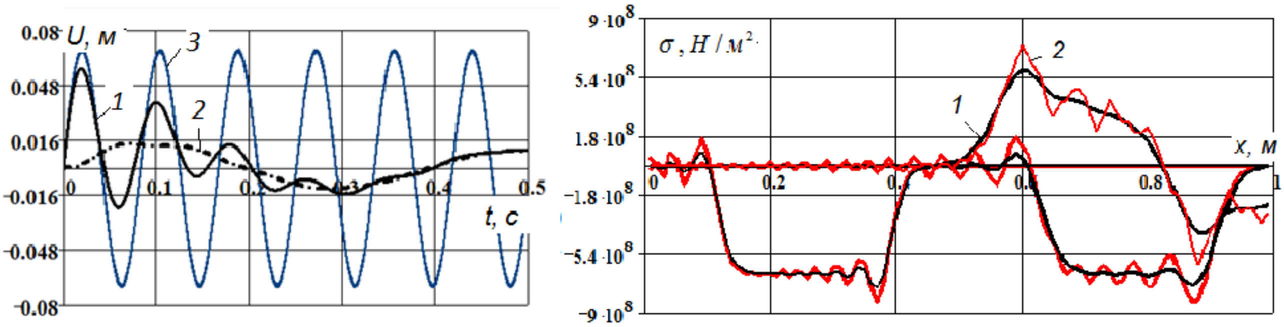
Из системы (20), (23) для коэффициентов прогонки справедливы формулы

$$\delta_{j-1} = \left(b_j\delta_j - a_j\right)\left(\delta_j c_j\right)^{-1},\ \gamma_{j-1} = \left[\gamma_j\left(b_j - c_j\delta_{j-1}\right) - d_j\right]\left(c_j\right)^{-1},\ j = N_2 - 1, N_2 - 2, \ldots, 2, 1. \qquad (30)$$

Для выбора параметров при реализации разностной схемы используются модельные задачи, аналитическое решение которых получено методом Фурье [8, 11, 12]. Алгоритм реализован в системе Mathcad [13].

## 4. Результаты вычислений

Для получения достоверных результатов проводилось исследование модельных задач, решение которых найдено методом Фурье. Это позволило выбрать рациональные параметры разностной схемы. В первой схеме удар производится по левому торцу первого стержня и моделируется известным способом: начальная скорость приписывается малой части стержня. Колебания, полученные разностным методом, сравниваются с решением Фурье модельной задачи для первого стержня при наличии только жесткого сопротивления на правом торце [8]. Графики решений задач представлены на рис. 3.




*а* *б*

*Рис.3. а) Колебания контактных торцев стержней (двухслойная схема)*
*(1) – инструмент; (2) – корпус устройства; (3) — решение Фурье модельной задачи;*
*б) Распределение напряжений по длине стержня; 1 — двухслойная схема; 2 — трехслойная схема. Параметры:* $P = 550$ *Нс;* $L_1 = 0{,}96$ *м,* $L_2 = 1$ *м;* $K_0 = 600000$ *Н/м;* $S_1 = 0.014$ *м²* $S_2 = 0{,}29$ *м²*

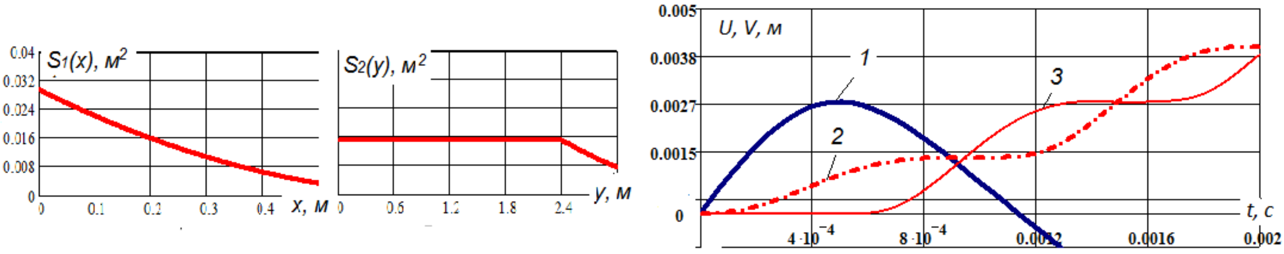
При расчете по второй схеме нагрузки моделируется процесс удара и развитие высокочастотных колебаний поперечных сечений ударника и инструмента.

На рис. 4, 5 показаны решения начально-краевых задач при нелинейной жесткости промежуточного элемента и наличии диссипативного элемента. На рис.4,б представлена зависимость перемещений контактных торцев инструмента и ударника (1,2), инструмента с рабочей средой (3). Показано возникновение высокочастотных колебаний (800–900 Гц).

Период контактного взаимодействия стержней можно оценить величиной $t = (6-10)\cdot 10^{-4}$ с, (рис.4, б).

На рис. 5 представлено распределение напряжений в сечениях ударника и инструмента при конусной форме (рис. 5 а, б) и цилиндрической (рис. 5, в, г).

Существенное отличие распределения напряжений получено только для поперечных сечений ударника. При выполнении условия $U_{N_1} \geq V_0$ происходит сжатие контактных торцев ударника и инструмента. При нарушении этого условия контакт прекращается.




а б

*Рис. 4.Колебания контактных торцев стержней: а) ударник и инструмент конусной формы; б) 1 — $U_{N1}$, 2 — $V_0$, 3 — $V_{N2}$; Основные параметры: $L_1 = 0,5$ м; $L_2 = 3$ м; $S_1 = S_2 = 0,014$ м²; $W_1 = 9,9$ м/с; $W_2 = 0$ м/с; $G_1 = 1 \cdot 10^3$ Нс/м; $h_1 = 0,005$ м; $h_2 = 0,03$ м; $\tau = 1 \cdot 10^{-7}$ с; $K_1 = 1,2 \cdot 10^6$ Н/м; $G_{01} = 1 \cdot 10^3$ Нс/м; $G_{02} = 1 \cdot 10^3$ Нс/м; $K_{01} = 2 \cdot 10^{10}$ Н/м; $K_{02} = 6$ Н/м*

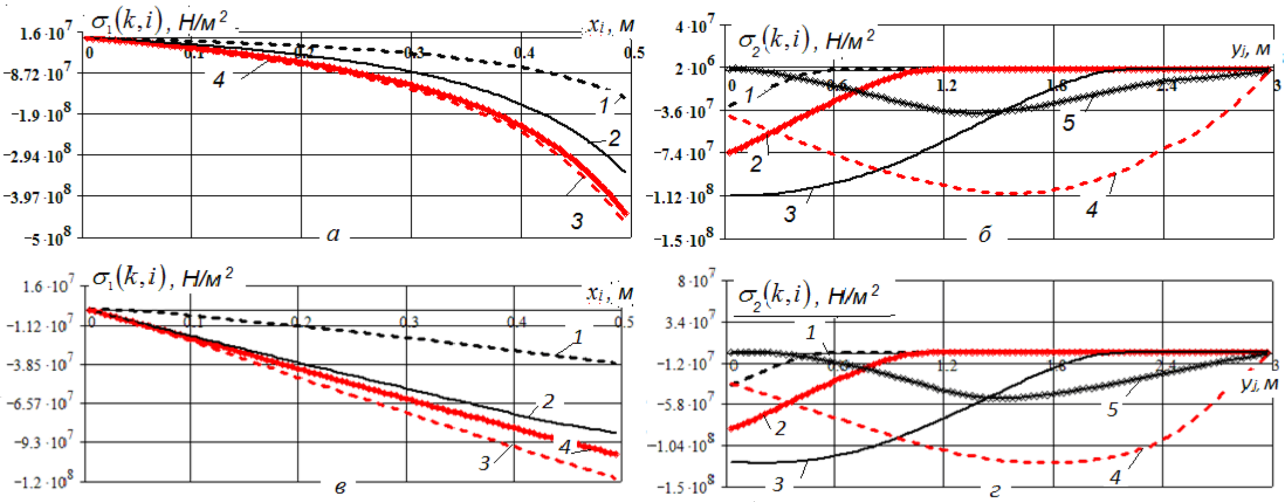



*Рис. 5. а, в) Распределение напряжений по длине ударника в различные моменты времени 1) $t = 100$ Мкс; 2) $t = 200$ Мкс; 3) $t = 300$ Мкс 4) $t = 400$ Мкс*

*б, г) Распределение напряжений по длине инструмента в различные моменты времени 1) $t = 100$ Мкс 2) $t = 200$ Мкс 3) $t = 400$ Мкс 4) $t = 700$ Мкс 5) $t = 900$ Мкс*

## Заключение

1. Предложен алгоритм численного исследования модели импульсного взаимодействия ударника и инструмента при наличии нелинейной жесткой и диссипативной связей с учетом последействия сопротивления рабочей среды. Основой алгоритма является метод конечных разностей при контрольных решениях модельных задач методом Фурье.

2. Применение метода аппроксимации нелинейного слагаемого в краевом условии контакта по явной схеме с использованием метода последовательной прогонки позволило провести расчеты первой стадии импульсного взаимодействия контактных торцев ударника и инструмента. Оценка длительности контактного взаимодействия ударника и инструмента составила $(6-10) \cdot 10^{-4}$ с.

3. Проверен вариант зависимости коэффициентов жесткости и диссипации от разности перемещений контактных торцев ударника и инструмента переменных поперечных сечений. Разработанная программа позволяет провести вычисления для различных сочетаний зависимостей площадей поперечных сечений ударника и инструмента (цилиндр, конус, волнообразный профиль). Показана эффективность применения двухслойной и трехслойной разностных схем для приближенного решения начально-краевой задачи, описывающей импульсное взаимодействие ударника и инструмента с переменными поперечными сечениями.

**Литература**

1. *Араманович, И. Г.* Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.

2. *Zhukov, I. A.* Rationaldesigningtwo-stageanvilblocksofimpactmechanisms / I. A. Zhukov, V. V. Molchanov//AdvancedMaterialsResearch. – 2014. – V. 1040. – P. 699–702.

3. *Иванов, А. П.* Динамика систем с механическими соударениями / А. П. Иванов. – М. : Международная программа образования, 1997. – 336 с.

4. *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. Г. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.

5. *Манжосов, В. К.* Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В. К. Манжосов, В. В. Слепухин. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – 208 с.

6. *Манжосов, В. К.* Модели продольного удара: монография / В. К. Манжосов. –Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 160 с.

7. *Манжосов, В. К.* Моделирование переходных процессов и предельных циклов движения виброударных систем с разрывными характеристиками: монография/ В. К. Манжосов, Д. А. Новиков. – Ульяновск : УлГТУ, 2015. – 236 с.

8. *Slidenko, A. M.* Numerical research method of an impact device model // A. M. Slidenko, V. M. Slidenko // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – 1203 012086.

9. *Samarskii, A.* A.The Theory of Difference Schemes / A. A. Samarskii. – New York – Basel : Marcel Dekker, Inc, 2001. – 761 p.

10. *Самарский, А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.

11. *Сліденко, В. М.* Математичне моделювання ударно-хвильових процесів гідроімпульсних систем гірничих машин: монографія / В. М. Сліденко, О. М. Сліденко. – Київ. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2017. – 220 с.

12. *Слиденко, А. М.* Исследование дискретно-непрерывной модели адаптивного ударного устройства / А. М. Слиденко, В. М. Слиденко // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 1. – С. 54–64.

13. *Охорзин, В. А.* Прикладная математика в системе MATHCAD: Учебное пособие, 2-е изд., исп. и доп. / В. А. Охорзин. – СПб. : Издательство «Лань», 2008. – 352 с.

УДК 515.14, 004.8

# ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ

**П. М. Снопов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Алгебраическая топология — раздел математики, изучающая различные топологические инварианты (например группы гомологий) с использованием алгебраических техник. Она нашла своё применение и в анализе данных, в задачах кластеризации, понижения размерности, визуализации. В данной статье приводятся основные теоретические сведения из алгебраической топологии, необходимые для использования в задачах анализа данных, включая алгоритмы, а также приводится обзор наиболее популярных пакетов, посвященных топологическому анализу данных.
**Ключевые слова:** алгебраическая топология, анализ данных, персистентные гомологии, Mapper.

## Введение

Роль данных в современном мире становится все более значимой. Растут объемы информации, сама структура данных постоянно усложняется, что обуславливает развитие математических методов для работы с такой информацией. Одна из таких областей — топологический анализ данных (ТАД). Эта дисциплина возникла на стыке чистой математики — алгебраической топологии, гомологической алгебры, теории Морса — и прикладной — вычислительной геометрии, анализе данных.

Пусть $X$ — некоторый объект, описываемый облаком точек в достаточно большом метрическом пространстве. ТАД позволяет аппроксимировать его в пространстве меньшей размерности, при этом сохраняя информацию о структуре — его топологические свойства, которые являются топологическими инвариантами.

Топологический анализ данных предоставляет различные алгоритмы, отличительной особенностью которых является устойчивость к шуму в данных. Существует ряд пакетов для различных языков программирования, позволяющие применять ТАД к различным задачах, таким как задачи визуализации, кластеризации, снижении размерности.

## 1. Некоторые теоретические сведения

Основными объектами в ТАД являются симплициальные комплексы.

**Определение 1.** *Топологический симплициальный комплекс $K$ — это множество симплексов, т.е. выпуклых оболочек набора $n+1$ точек, таких, что векторы $x_1 - x_0$, ..., $x_n - x_0$ линейно независимы, при этом:*

- *Для каждого симплекса из $K$ его грани тоже лежат в $K$,*
- *Пересечение любых двух симплексов $\sigma, \tau \in K$ либо пусто, либо является гранью и $\sigma$, и $\tau$.*

*Каждому топологическому симплициальному комплексу $K$ можно поставить в соответствие абстрактный симплициальный комплекс $A(K)$, под которым подразумевается пара $(V, S)$, где $V$ — множество вершин, а $S$ — набор его конечных подмножеств, такой, что если $Y \in S$ и $X \subset Y$, то $X \in S$.*

Рассмотрим некоторое топологическое пространство $X$.

Говорят, что набор его подмножеств $\{U_i : i \in J\}$ является покрытием, если $\bigcup_{i \in J} U_i = X$. Покрытие называется открытым, если оно состоит из открытых множеств.

По покрытию пространства можно построить нерв покрытия (рис. 1) — симплициальный комплекс, соответствующий топологическому пространству и имеющий различные интересные топологические свойства. Пусть $\left[m\right] := \{, \ldots, m\}$ — $m$-элементное множество.

**Определение 2.** *Нерв покрытия* $N(U)$, *соответствующий топологическому пространству* $X$, *— это абстрактный симплициальный комплекс на* $[m]$, *такой что* $\{k_1, \ldots, k_s\} \in N(U)$ *если* $U_{k_1} \cap \ldots \cap U_{k_s} \neq \varnothing$.

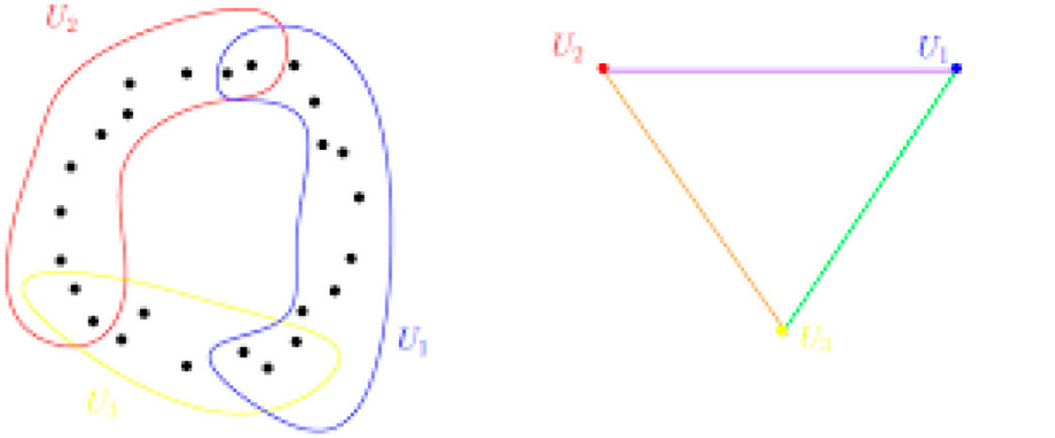



*Рис. 1. Покрытие пространства и нерв покрытия*

Напомним, что если имеется 2 непрерывных отображения $f, g : X \to Y$, то говорят, что $f$ гомотопно $g$, если существует такое отображение $H : X \times I \to Y$, что $H(x,0) = f$ и $H(x,1) = g$. В таких случаях пишут, что $f \sim g$ (гомотопия задает отношение эквивалентности на множестве непрерывных отображений $C(X,Y)$).

Два топологических пространства $X, Y$ гомотопически эквивалентны $(X \sim Y)$, если существует такая пара $(f, g) \in C(X,Y)^2$, такая, что $f \circ g \sim id_Y$ и $g \circ f \sim id_X$.

С понятием нерва покрытия связана очень важная лемма:

**Лемма (о нерве).** *Если* $U$ *— открытое покрытие, такое, что любое пересечение его подмножеств либо пусто, либо гомотопически эквивалентно точке, то нерв покрытия пространства* $X$ *гомотопически эквивалентен самому пространству*

$$\forall I \in N(U)\left(\bigcap_{i \in I} U_i = \varnothing \vee \bigcap_{i \in I} U_i \sim pt \to N(U) \sim X\right).$$

Кратко напомним, что такое гомологии. Пусть $K$ — (конечный) симплициальный комплекс и есть число $k \geq 0$. *Пространством* $k$*-цепей* $C_k(K)$ *симплициального комплекса* $K$ называют векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$, элементами которого являются формальные конечные суммы $k$-симплексов $K$, т. е.

$$c = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \sigma_i, \;\; \varepsilon_i \in \mathbb{Z}_2, \;\; c \in C_k(K).$$

*Границей* $k$-симплекса $\sigma = [v_0, \ldots, v_k]$ называют $(k-1)$-цепь:

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_k],$$

где $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_k]$ — $(k-1)$-симплекс, порожденный всеми вершинами, кроме вершины $v_i$. Так как рассматриваются коэффициенты из $\mathbb{Z}_2$, то для любого $i$ имеет место $(-1)^i = 1$. Отображение $\partial_k : C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ называют *граничным оператором*. Ядро этого оператора $\ker \partial_k$ называют *пространством* $k$*-циклов* симплекса $K$, обозначают $Z_k(K)$, а $\operatorname{Im} \partial_{k+1}$ — образ граничного оператора — *пространством* $k$*-границ* $K$, обозначают $B_k(K)$. Граничный оператор удовлетворяет следующему фундаментальному свойству (лемма Пуанкаре)

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0,$$

То есть $\operatorname{Im}\partial_{k+1} \subseteq \ker\partial_k \subseteq C_k(K)$. Можно сопоставить последовательность $C_k(K)$ и $\partial_k$ и получить *цепной комплекс*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0.$$

**Определение 3.** *$k$-й группой гомологий симплициального комплекса $K$ называют следующее фактор-пространство:*

$$H_k(K) = \ker\partial_k / \operatorname{Im}\partial_{k+1} = Z_k(K) / B_k(K).$$

*Тогда $k$-е число Бетти — размерность $k$-й группы гомологий:* $\beta_k(K) = \dim H_k(K)$.

При $k = 0$ число Бетти описывает количество компонент связности данного пространства. При $k = 1$ — количество циклов. При $k = 2$ число Бетти описывает количество «полостей».

Группы гомологий и числа Бетти являются топологическими инвариантами, т. е. свойствами пространства, которые сохраняются при гомеоморфизмах. Такой инструмент очень полезен при классификации пространств: если два пространства гомеоморфны, то они имеют одинаковые числа Бетти и группы гомологий. Соответственно, если у двух пространств отличаются $k$-е числа Бетти, то можно точно говорить о том, что они не гомеоморфны. Так, граница треугольника и диск не гомеоморфны. При этом диск не гомеоморфен точке (но гомотопически эквивалентен), но их числа Бетти совпадают.

Таблица 1

*Первые числа Бетти для некоторых пространств*

| Пространство | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|
| Pt | 1 | 0 | 0 |
| $D^2$ | 1 | 0 | 0 |
| Треугольник | 1 | 0 | 0 |
| Граница треугольника | 1 | 1 | 0 |
| $S^1$ | 1 | 1 | 0 |
| $S^2$ | 1 | 0 | 1 |
| $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ | 1 | 2 | 1 |

*Фильтрацией симплициального комплекса $K$* называют вложенное семейство подкомплексов $(K_\tau)_{\tau\in T}$, где $T \subseteq \mathbb{R}$, такое, что если $\tau < \tau'$, то $K_\tau \subseteq K_{\tau'}$.

Имея фильтрацию $(K_\tau)_{\tau\in T}$, можно отслеживать изменение $H_k(K_\tau)$ с ростом $\tau$: могут появляться новые компоненты связности, уже существующие могут объединяться в одну компоненту, могут появляться циклы и «пустоты», соответствующие 1 и 2 группе гомологий.

**Определение 4.** *Персистентный модуль $\mathbb{V}$ над $T$ — это проиндексированное семейство векторных пространств $V_t$ вместе с семейством линейных отображений $v_s^t : V_t \to V_s$, такими, что $t \le s$, удовлетворяющих условиям $v_s^s = id$ и $v_s^t \circ v_t^p = v_s^p$ при $s \le t \le p$.*

Как было сказано выше, фильтрация определяет набор групп гомологий, а включение $K_\tau \subseteq K_{\tau'}$ задает гомоморфизм $H_k(K_\tau) \to H_k(K_{\tau'})$. Основная теорема про персистентные модули — интервальное разложение персистентных модулей. Для этого обозначим за $\mathbb{V}(I)$ персистентный модуль, имеющий вид

$$\mathbb{V}(I)_t = \begin{cases} F, & t \in I, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $F$ — поле, над которым рассматриваются векторные пространства персистентного модуля. Такие персистентные модули называются интервальными.

**Теорема (об интервальном разложении).** *Конечнопорожденный персистентный модуль $\mathbb{V}$ раскладывается в прямую сумму некоторого семейства интервальных персистентных модулей, причем это разложение единственно с точностью до перестановки:*

$$\mathbb{V} \cong \bigoplus_{s \in S} \mathbb{V}(I_s).$$

О фильтрациях и персистентных модулях более подробно изложено в [3, 8].

## 2. Некоторые алгоритмы и приложения топологического анализа данных

### *2.1. Построение симплициальных комплексов*

Как было отмечено выше, главными объектами топологического анализа данных являются симплициальные комплексы. Имея облако точек $X$, существует много способов построения симплициальных комплексов по нему. Наиболее популярные — симплициальные комплексы *Вьеториса — Рипса* и *Чеха* (рис. 2).

Комплекс Вьеториса — Рипса $Rips_\alpha(X)$ — набор симплексов $[x_0, \ldots, x_k]$, таких, что $\forall i, j$ имеет место неравенство $d_X(x_i, x_j) \leq \alpha$. Комплекс Чеха $Cech_\alpha(X)$ — это набор симплексов $[x_0, \ldots, x_k]$, таких, что $k+1$ замкнутый шар $B_\alpha(x_i)$ имеет непустое пересечение. Заметим, что эти два комплекса связаны между собой соотношением

$$Rips_\alpha(X) \subseteq Cech_\alpha(X) \subseteq Rips_{2\alpha}(X).$$

Комплекс Чеха является комплексом, построенном по покрытию топологического пространства, а, следовательно, к нему применима лемма о нерве: комплекс Чеха гомотопически эквивалентен объединению шаров $\cup B(x, a)$.

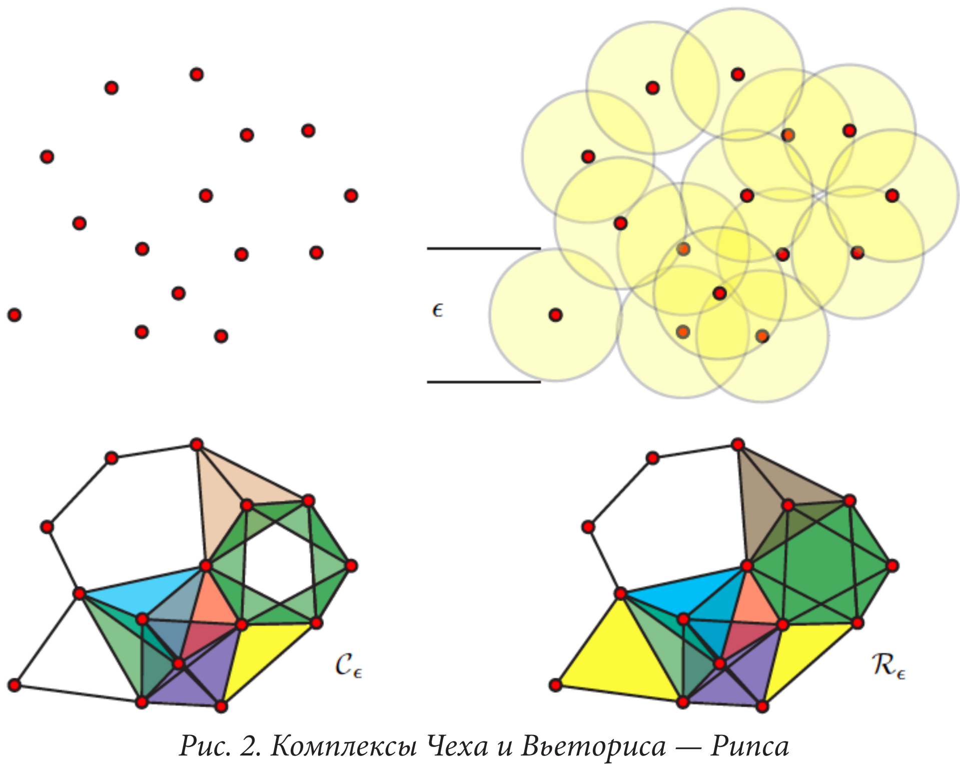



*Рис. 2. Комплексы Чеха и Вьеториса — Рипса*

На практике чаще используют комплексы Вьеториса — Рипса, так как их проще вычислять. Комплексы Чеха удобнее с теоретической точки зрения. Различные виды комплексов, в том числе и комплексы Вьеториса — Рипса представлены в различных пакетах, посвященных топологическому анализу данных (Giotto-tda [5], GUDHI [6]).

Алгоритм 1

*Алгоритм построения комплекса Вьеториса — Рипса*

**Исходные параметры:** Облако точек $X$, вещественное число $\alpha > 0$.
**Результат:** Симплициальный комплекс Вьеториса — Рипса
Для каждой точки $x$ строим ее $\alpha$-окрестность $B_\alpha(x)$;
*keepDoing* = *True*;
$i = 1$;
**до тех пор, пока** *keepDoing* **выполнять**
  **если** $i+1$ *окрестностей попарно имеют непустое пересечение* **тогда**
    строим $i$-й симплекс на соответствующих вершинах;
    $i \leftarrow i+1$;
  **иначе**
    keepDoing=False;
  **конец**
**конец**

### *2.2. Персистентные гомологии*

Одним из главных и мощных инструментов топологического анализа данных являются персистентные (также говорят устойчивые) гомологии, которые несут в себе информацию о топологических свойствах вложенных семейств симплициальных комплексов и топологических пространств. Персистентные гомологии не только позволяют эффективно вычислять числа Бетти для каждого комплекса, но и позволяют наблюдать за эволюцией гомологических групп.

**Определение 5.** *$k$-ми устойчивыми гомологиями фильтрованного комплекса $(K_\tau)_{\tau\in T}$ называют персистентный модуль* $H_n(T) = \{(H_n(K_\tau))_{\tau\in T},\ (H_n(K_\tau) \to H_n(K'_\tau))_{\tau\le\tau'}\}$.

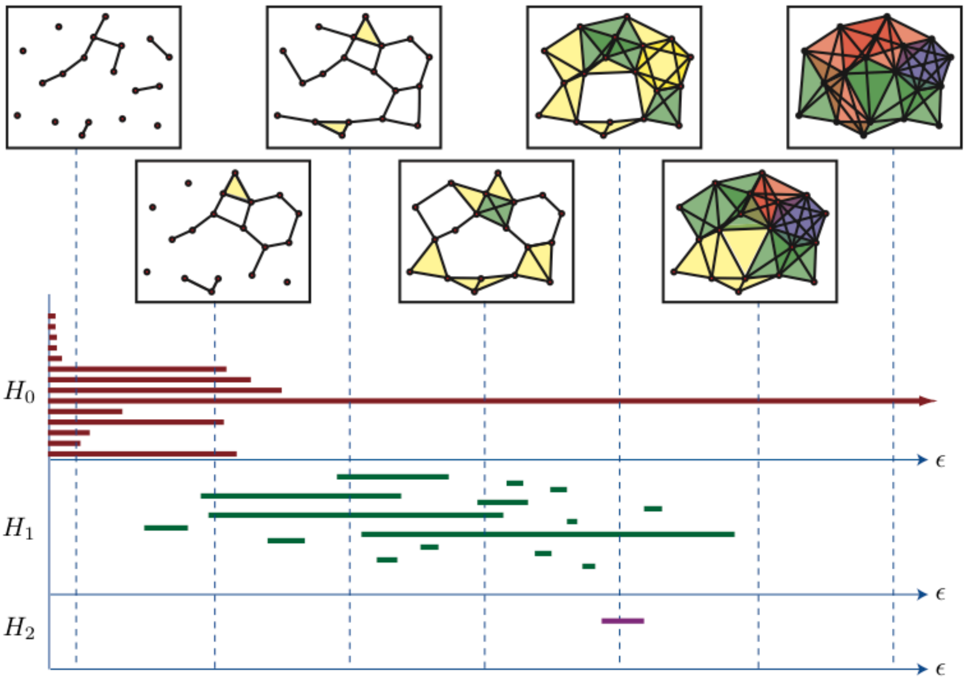



*Рис. 3. Баркод*

Так как персистентные гомологии — это персистентный модуль, то для них также верна теорема об интервальном разложении. Так как персистентные гомологии — последовательность групп гомологий комплексов фильтрации, то можно записывать полученную информацию в виде диаграммы, называемой баркодом (рис. 3). Здесь горизонтальная ось отвечает за выбранный радиус $\tau$, вертикальная — за появление («рождение»), устойчивость и исчезновение («смерть») интервала, соответствующего числу Бетти.

Из имеющегося баркода можно получить диаграмму персистентности (рис. 4). Она строится следующим образом: каждый интервал баркода имеет начало $t_{birth}$ и конец $t_{death}$. На персистентной диаграмме каждый интервал баркода изображается в виде точки с координатами $(t_{birth},\ t_{death})$. Чем дальше точка на персистентной диаграмме от диагонали, тем она важнее – эта точка сигнализирует о наличии «$n$-мерной дырки». Теорема об интервальном разложении корректно определяет такие персистентные диаграммы. Более подробно материал о персистентных гомологиях изложен в [3, 4].

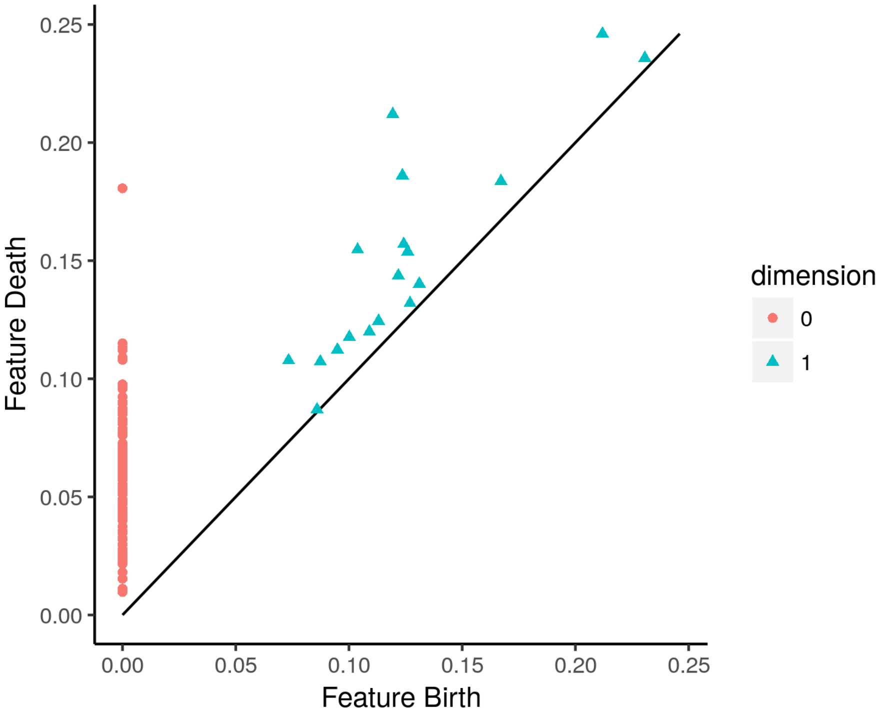



*Рис. 4. Персистентная диаграмма*

Для вычисления персистентных гомологий, данное должно представляться в виде облака точек. По данному облаку точек строят симплициальный комплекс Вьеториса — Рипса. Персистентные гомологии вычисляются именно по построенному комплексу.

Существуют различные пакеты, предоставляющие необходимый функционал для вычисления персистентных гомологий: GUDHI [6] и Dionysus [16] для C++ и Python, Giotto-TDA [5] на Python, HomCloud [5] на Python, R-TDA [15] на R. В последнее время появляется все больше и больше различных приложений персистентных гомологий и чисел Бетти.

В [10] используются числа Бетти для автоматического распознавания рака прямой кишки. В ней авторы предлагают совмещать методы топологического анализа данных и машинного обучению, что дает точность 94 %, по сравнению с использованием лишь методом машинного обучения (точность 91 %). В [11] используются числа Бетти для изучения темной энергии. В [12] с помощью персистентных гомологий изучают и анализируют структуру белка. В [17] и [18] с помощью персистентных гомологий изучают нейроны места — один из видов нейронов в гиппокамповой формации, активизирующиеся в момент, когда животное находится в некотором месте. Исследователи составляли абстрактный симплициальный комплекс, симплексы которого — множества нейронов, которые активизировались одновременно. По лемме о нерве гомотопический тип этого комплекса совпадает с гомотопическим типом комнаты, таким образом по активности нейронов можно восстановить гомотопический тип комнаты. В [19] исследователи использовали персистентные гомологии уже для совсем иных целей: в этой работе персистентные гомологии использовались для изучения ситуации переобучения глубоких нейронных сетей. Исследователями был разработан первый алгоритм вычисления точности работы глубокой нейронной сети, предназначенной для задач компьютерного зрения, без использования отложенной выборки.

### *2.3. Алгоритм Mapper*

Ранее был определен нерв покрытия и введена важная лемма о нем — лемма о нерве. Её можно использовать для того, чтобы аккумулировать, визуализировать и изучать информацию о данном облаке точек. Это позволяет сделать алгоритм Mapper (рис. 5), впервые изложенный в [7]. Приведем самую простую версию алгоритма.

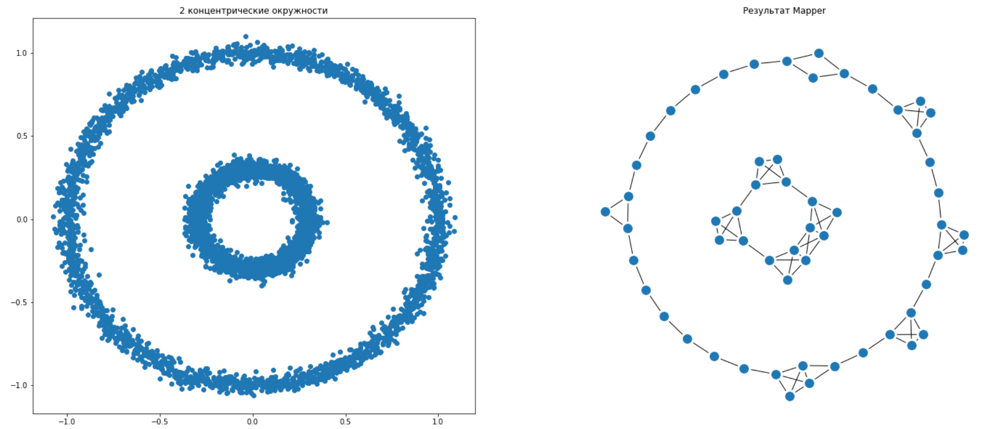



*Рис. 5. Применение Mapper на облаке точек из 2 концентрических кругов*

Алгоритм 2

Алгоритм Mapper

---

**Исходные параметры:** Облако точек $X$, фильтр-функция $f : X \to [a,b]$,
покрытие $U$ отрезка $[a,b]$.
**Результат:** Граф, гомотопически эквивалентный некоторому многообразию,
которое описывается данным облаком точек.
Обозначить за $G = (V, E)$ — будущий граф, $V = \varnothing$ — вершины графа, $E = \varnothing$ — ребра;
**для каждого** $U_i \in U$ **выполнять**
  Провести над $f^{-1}(U_i)$ кластеризацию: $Clust(U_i) := \{C_{U_i,1}, \ldots, C_{U_i,k}\}$;
  $V \leftarrow v_{ij}$, если $C_{U_i,j} \in Clust(U_i)$
  $E \leftarrow ((i-1, j),(i,k))$, если $C_{U_{i-1},j} \cap C_{U_i,k} \neq \varnothing$
**конец**

---

Библиотеки Giotto-tda [5], GUDHI [6], а также KeplerMapper [9] имеют необходимый функционал для применения данного алгоритма. Mapper стал известен благодаря статье \cite{breast}, в которой авторами была найдена новая классификация раков молочной железы, которая позволила гораздо более точно предсказывать выживаемость.

### Заключение

Топологический анализ данных предоставляет набор различных мощных техник, позволяющих лучше понять геометрию и топологию объекта, описываемого облаком точек. Часть этих техник была рассмотрена в данной обзорной статье. Топологический анализ данных является быстро развиваемой областью анализа данных. Все больше и больше становится разнообразных пакетов, предоставляющих необходимые инструменты для извлечения топологической информации из набора данных: пакет GUDHI [6] и Dionysus [16] для C++ и Python, пакеты Giotto-TDA [5], KeplerMapper [9], HomCloud [14] на Python, R-TDA [15] на R. Топологический анализ данных, благодаря своему серьезному математическому основанию, имеет все шансы стать незаменимым инструментом в решении задач анализа данных.

**Литература**


1. *Хатчер, А.* Алгебраическая топология / А. Хатчер. – Москва : МЦНМО , 2011. – 688 с.

2. *Chazal, F.* An introduction to Topological Data Analysis: fundamental and practical aspects for data scientists / F.Chazal, B. Michel. – URL : https://arxiv.org/pdf/1710.04019.pdf

3. *Edelsbrunner, H.* Computational Topology An Introduction / H. Edelsbrunner, J. Harer. – AMS : Providence, 2009. – 241 c.

4. *Zomorodian, A.* Computing persistent homology / A. Zomorodian, G. Carlsson // Discrete Comput. Geom. – 2005. – V. 33, No 2. – P. 249 – 274. – URL : https://geometry.stanford.edu/papers/zc-cph-05/zc-cph-05.pdf

5. Giotto-tda — библиотека для топологического анализа данных на Python. – URL : https://github.com/giotto-ai/giotto-tda

6. GUDHI — библиотека для топологического анализа данных на C++ с интерфейсом для Python. – URL : https://gudhi.inria.fr/

7. Singh G. Topological Methods for the Analysis of High Dimensional Data Sets and 3D Object Recognition / G. Singh, F. Memoli, G. Carlsson. – URL: https://research.math.osu.edu/tgda/mapper-PBG.pdf

8. *Chazal, F.* The Structure and Stability of Persistence Modules / F. Chazal, V. de Silva, M. Glisse, S. Outdot. – URL : https://arxiv.org/pdf/1207.3674.pdf

9. KeplerMatter — библиотека на Python, имплементирующая алгоритм Mapper. – URL : https://kepler-mapper.scikit-tda.org/

10. *Qaiser, T.* Persistent Homology for Fast Tumor Segmentation in Whole Slide Histology Images / T. Qaiser, K. Sirinukunwattana, K. Nakane, Y. Tsang, D. Epstein, N. Rajpoot // Procedia Computer Science. – 2016. – V. 90. – P. 119–124. – URL : {https://www.researchgate.net/publication/305645903_Persistent_Homology_for_Fast_Tumor_Segmentation_in_Whole_Slide_Histology_Images

11. *van de Weygaert, R.* Probing Dark Energy with Alpha Shapes and Betti Numbers / R. van de Weygaert, P. Pranav, B. J.T. Jones, E.G. Patrick Bos, G. Vegter, H. Edelsbrunner, M. Teillaud, W. A. Hellwing, C. Park, J. Hidding, M. Wintraecken. – URL : https://arxiv.org/pdf/1110.5528.pdf

12. *Xia, K.* Persistent homology analysis of protein structure, flexibility and folding / K. Xia, G. Wei // International journal for numerical methods in biomedical engineering. – 2014. – V. 30, No 8. – P. 814–844. – URL : https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4131872/

13. *Nicolau, M.* Topology based data analysis identifies a subgroup of breast cancers with a unique mutational profile and excellent survival / M. Nicolau, A. J Levine, G. Carlsson // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 2011. – V. 108, No 17. – P.7265–7270. – URL : https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/21482760/

14. HomCloud — пакет для вычисления персистентных гомологий на Python. – URL : https://homcloud.dev/install-guide/index.en.html

15. TDA — пакет для вычисления персистентных гомологий на R. – URL : https://cran.r-project.org/web/packages/TDA/

16. Dionysus 2 — библиотека для вычисления устойчивых гомологий, написанная на C++ и имеющая интерфейс на Python. – URL : https://www.mrzv.org/software/dionysus/

17. *Dabaghian, Y.* A Topological Paradigm for Hippocampal Spatial Map Formation Using Persistent Homology / Y. Dabaghian, F. Memoli, L. Frank, G. Carlsson // PLOS Computational Biology. – 2012. – V. 8, No 8. – URL : https://journals.plos.org/ploscompbiol/article?id=10.1371/journal.pcbi.1002581

18. *Dabaghian, Y.* Reconceiving the hippocampal map as a topological template / Y. Dabaghian, V. L. Brandt, L. M. Frank // eLife. – 2014. – URL : https://elifesciences.org/articles/03476

19. *Corneanu, C.* Computing the Testing Error without a Testing Set / C. Corneanu, M. Madadi, S. Escalera. – URL : https://arxiv.org/pdf/2005.00450.pdf

УДК 519.86

# РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АНАЛИЗА КОРНЕВОЙ ПРИЧИНЫ ПРОБЛЕМЫ

**В. П. Квитко, В. В. Степин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Анализ корневой причины проблемы является важнейшим этапом процесса принятия управленческих решебний. Формализованные инструменты поиска основной причины проблемы представляют собой набор методик: структуризации, визуализации и аналитической обработки информации о проблеме, в частности, обработки результатов экспертного оценивания. В рамках данной статьи описывается разработанная авторами информационная аналитическая система, позволяющая автоматизировать основные этапы поиска основной причины: определения сущности проблемы; генерации идей о вероятных причинах проблемы и достижение консенсуса относительно данных причин, структуризации информации о причинах анализируемой проблеме и заключительного причино-следственного анализа. Предложенная информационная аналитическая система является эффективным средством поддержки принятия решений для слабоструктурированных проблем.
**Ключевые слова:** слабоструктурированная проблема, основная причина, информационно-аналитическая система поддержки принятия решений.

## Введение

Анализ корневых (основных) причин (Root Cause Analysis или RCA) позволяет определить не только лежащие на поверхности симптомы, но и глубинные причины, порождающие возникновение проблемы. Устранение симптомов проблемы позволит лишь на небольшое время устранить проявление проблемы, устранение основных причин позволить решить проблему и избежать ее новых проявлений в будущем [1].

Существует множество инструментов анализа корневой причин, которые используются для проведения RCA [2, 3]. Каждый из инструментов имеет свои особенности в проведении анализа и выявлении корневой причины. Некоторые из методов являются инструментами структуризации и визуализации информации, которые позволяют представить информацию в виде, удобном для дальнейшего анализа. Целая группа инструментов служит для обработки экспертных суждебний о различных аспектах проявления проблемы и достижения консенсуса. Специализированные инструменты позволяют также оценивать связи между выделенными причинами и симптомами проблемы, выстраивать последовательные цепочки причин и демонстрировать переход по цепочке причинно-следственных связей к основной причине. В качестве примера основных инструментов можно привести: блок-схемы, метод «Критический случай», метод «Матрица влияния», радарные диаграммы, диаграммы Парето. В рамках данного исследования построены функциональные модели процесса применения инструментов и на их основе построена информационная аналитическая система [4] поиска основной причины.

## Функциональные модели основных инструментов поиска корневой причины

В целом функционирование информационной аналитической системы, базирующейся на инструментах поиска корневой причины можно представить в виде следующей диаграммы верхнего уровня (рис. 1).

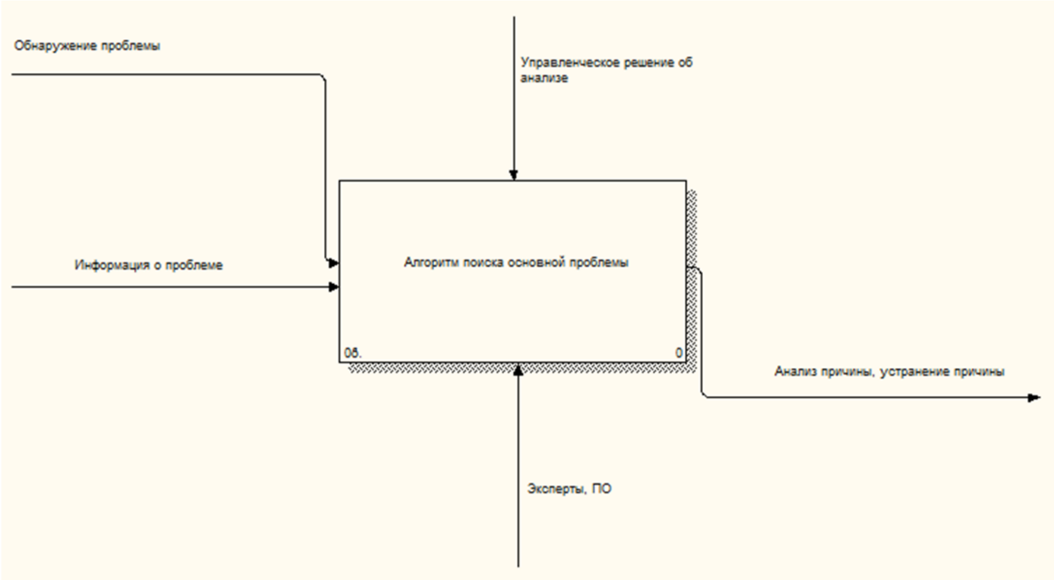



*Рис. 1. Верхний уровень декомпозиции функциональной модели информационной аналитической системы поиска корневой причины проблемы*

Декомпозиция диаграммы верхнего уровня отражает основные блоки анализа корневой причины.

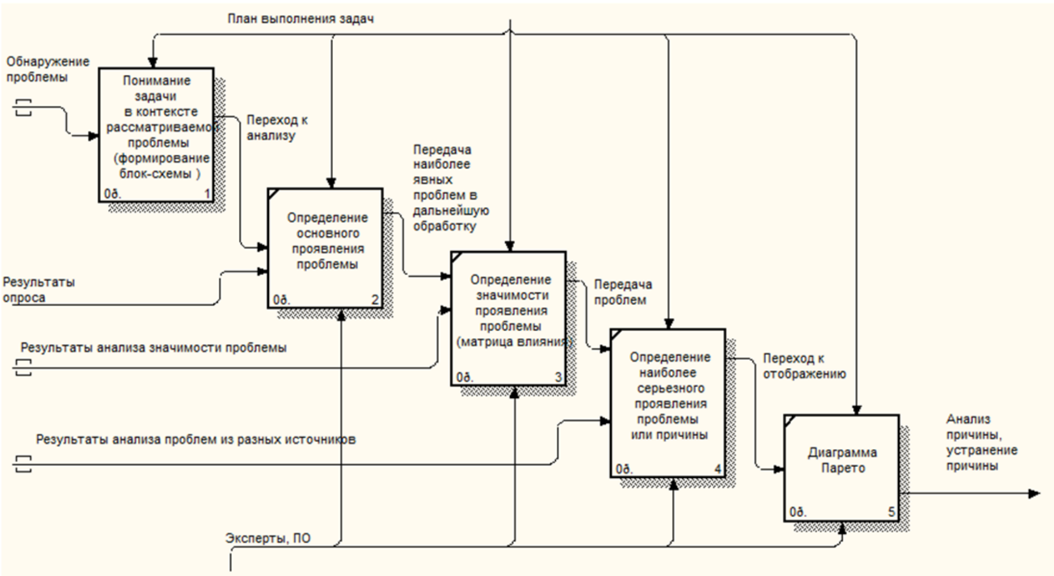



*Рис. 2. Основные блоки анализа основной причины проблемы*

Блок-схемы, представленные одним из квадратов на рис. 2, являются важнейшим инструментом определения процесса (звена, позиции), где в процессе функционирования организации возникает проблема. Различают несколько вариантов блок-схем:

1. Обычная блок-схема просто изображает последовательность действий или задач и не содержит другой информации.

2. Функциональная блок-схема дополнительно для каждого действия отражают: инструменты управления; ресурсы, которые поступают на вход каждого действия; механизмы реализации; информационные, ресурсные компоненты, которые идут на выход; ответственного исполнителя и директивные сроки выполнения. Функциональные блок-схемы, как правило, носят многоуровневый характер. При переходе на более глубокие уровни информация о действиях детализируется.

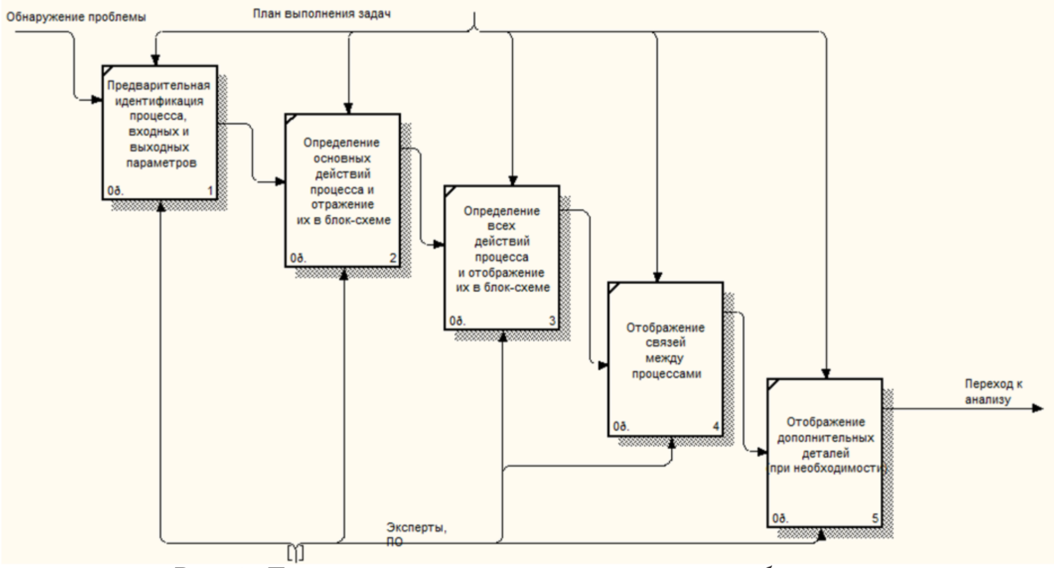


*Рис. 3. Декомпозиция процесса построения блок-схем*

Метод критического случая служит для анализа наиболее часто возникающих симптомов проблемы. Процедура реализации метода критического случая укрупненно отображена на рис. 4. Процедура носит экспертный характер. В качестве экспертов выступают люди, которые сталкивались с проявлением проблемы. Экспертная группа должна покрывать все зоны ответственности, имеющие отношение к проблеме. В результате применения метода критического случая все симптомы проявления проблемы будут проранжированы по степени их критичности.

Радарная диаграмма является методом сравнительного анализа, который позволяет сравнить ситуацию с рассматриваемой проблемой в анализируемой организации с другими аналогичными организациями. Если по каким-то параметрам рассматриваемая организация проигрывает другим или средним показателям, то нужно проанализировать возможности улучшения ситуации по данным показателям. Считается, что если выбранные для сравнения организации смогли улучшить проблемные показатели, то и рассматриваемая организация тоже может добиться подобных результатов. Функциональная модель работы с радарной диаграммой приведена на рис. 5.

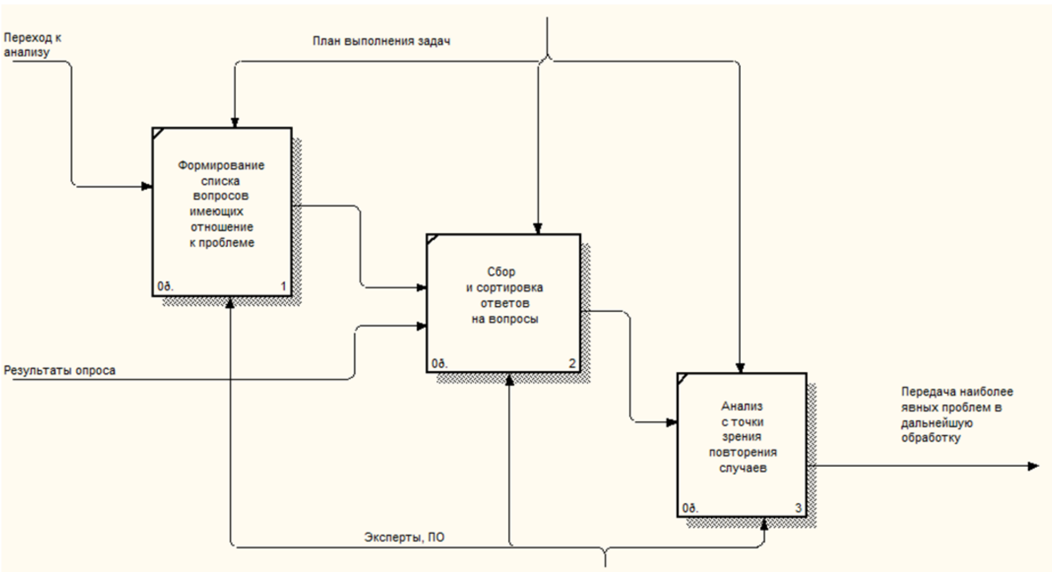


*Рис. 4. Декомпозиция процесса реализации метода критический случая*

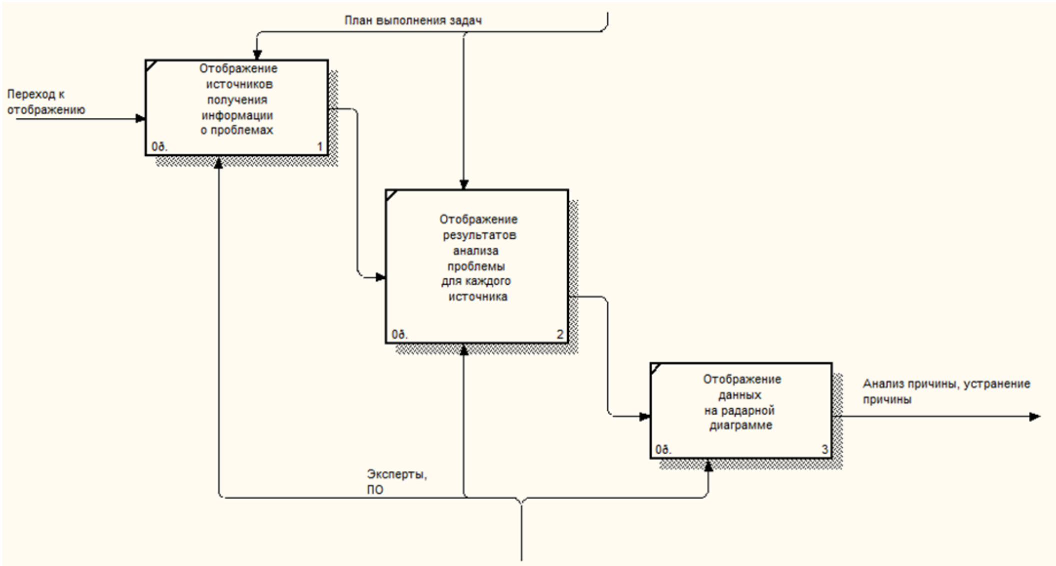


*Рис. 5. Декомпозиция процесса построения радарной диаграммы*

Возможности анализа с помощью радарной диаграммы можно дополнить анализом с помощью матрицы влияния. Матрица влияния позволяет проанализировать проблемные аспекты деятельности не только с позиции их уровня, но и позиции их важности для организации. Функциональная модель матрицы влияния приведена на рис. 6. Матрица влияния позволяет все аспекты проблемы разделить на четыре сектора: «несущественный» — низкий уровень — низкая значимость; «избыточный» — высокий уровень — низкая значимость; «ок» — высокий уровень — высокая значимость; «должен быть улучшен» — низкий уровень-высокая значимость». Наиболее проблемными, требующими анализа, являются аспекты, попавшие в сектор «должен быть улучшен». Если данный сектор пустой, то ведется работа с аспектами, попавшими в сектор «ок».

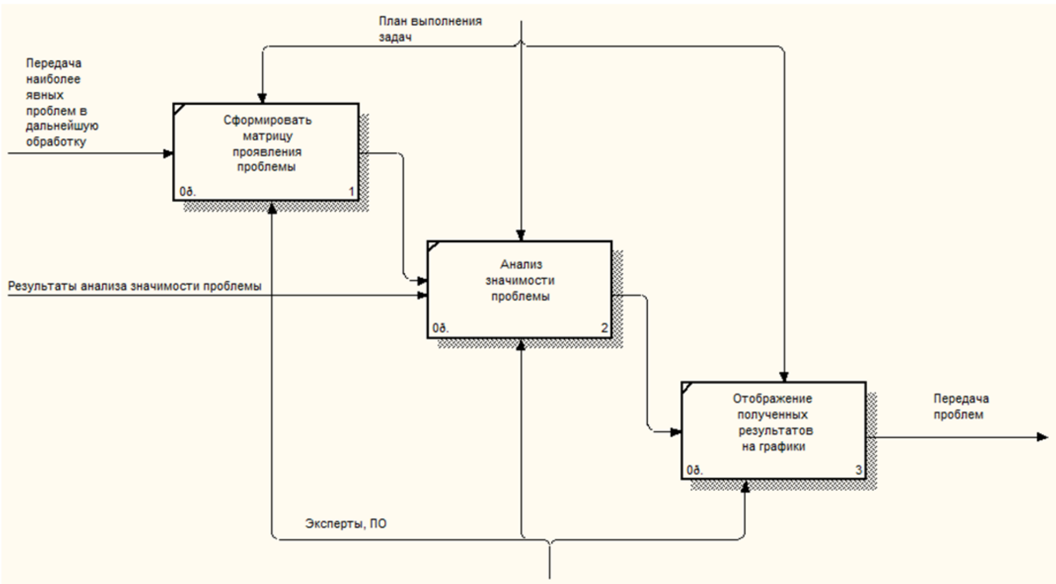


*Рис. 6. Декомпозиция процесса построения матрицы влияния*

Диаграмма Парето — это эффективный инструмент, который позволяет найти небольшую группу причин проблемы, которые объясняют 80 процентов ее последствий. Предполагается, что корневая причина должна быть среди данной группы причин. Функциональная модель построения диаграммы Парето приведена на рис. 7–8.

Метод формальной группы служит для обработки экспертной информации и достижения консенсуса относительно сгенерированных, например, методом мозгового штурма, вероятных причин проблемы. В результате применения метода формальной группы остаются вероятные причины, поддержанные большинством голосов. В процессе работы метода, эксперты из сгенерированного списка причин могут выбрать не более 5 и выставить им балл важности, затем, по каждой причине подсчитывается суммарное по всем участникам количество баллов, которое используется для ранжирования причин.

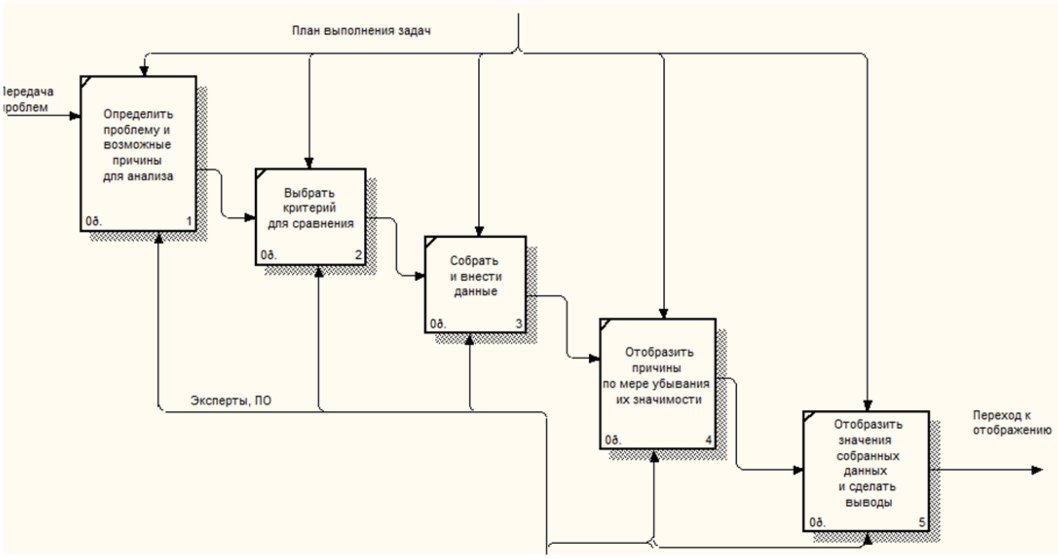



*Рис. 7. Декомпозиция процесса построения диаграммы Парето*

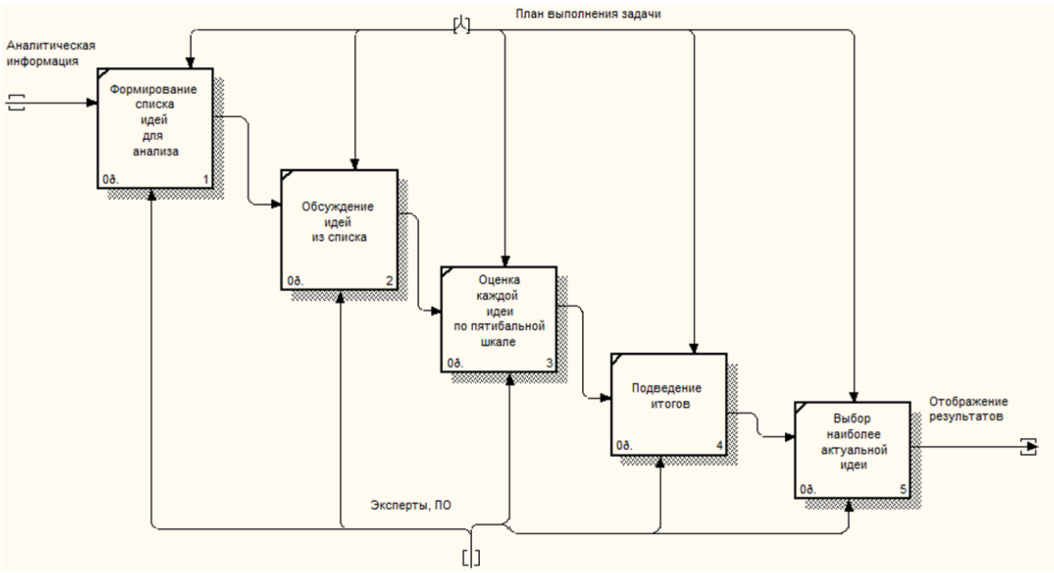



*Рис. 8. Декомпозиция процесса реализация метода формальной группы*

Причинно-следственная диаграмма — это инструмент структуризации всех причин проблемы по группам основных причин. Декомпозиция данного метода приведена на рис. 9.

Завершает анализ поиска корневых причин метод «Пять почему», приведенный ниже на рис. 10. Это логический инструмент, который позволяет, двигаясь, по логически взаимосвязанным причинам проблемы, дойти до основной причины.

На основании описанных выше функциональных моделей разработано программное обеспечение, которое позволяет автоматизировать работу с методами поиска основной причины в удобном для пользователя режиме. Пользователю предоставляется широкий спектр возмож-

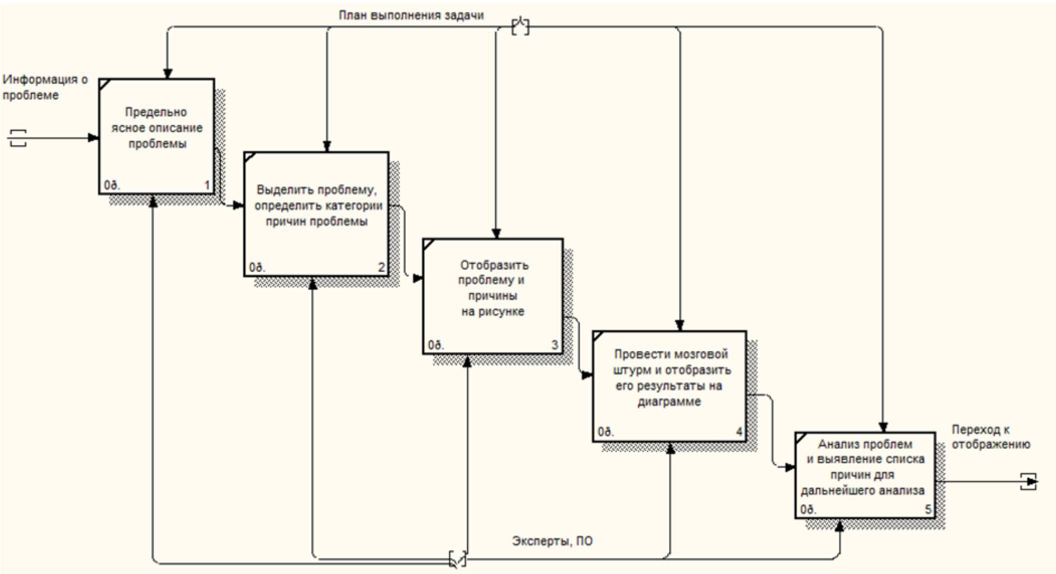



*Рис. 9. Декомпозиция процесса построения причинно-следственной диаграммы*

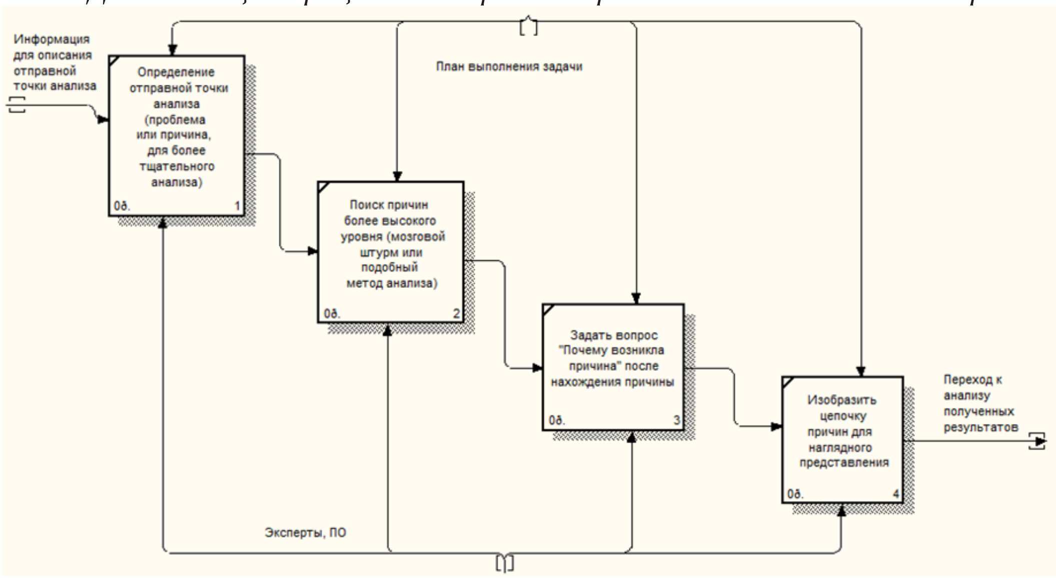



*Рис. 10. Декомпозиция процесса выполнения метода «Пять почему»*

ностей настройки параметров инструментов, визуализации и предварительного формирования формализованных аналитических выводов по результатам исследования. На рис. 11–13 приведены фрагменты работы программного обеспечения.

## Заключение

В статье описана разработанная авторами информационная аналитическая система, реализующая в автоматизированном режиме применение инструментов поиска корневой причины, как одного из этапов поддержки принятия решений. Все реализованные в рамках системы методы помогают подобрать адекватное и оптимальное с позиции выбранных критериев решение для сложных проблем. Применение блок-смех помогают увидеть, являются ли этапы процесса логичными, выявить проблемы или недопонимание, определить границы процесса и разработать общую базу знаний о процессе. Метод критических инцидентов показывает себя надежным инструментом при создании всеобъемлющего и подробного описания предметной области. Радарные диаграммы являются прекрасным методом для детальной оценки и сравнения двух или более многомерных наборов данных.

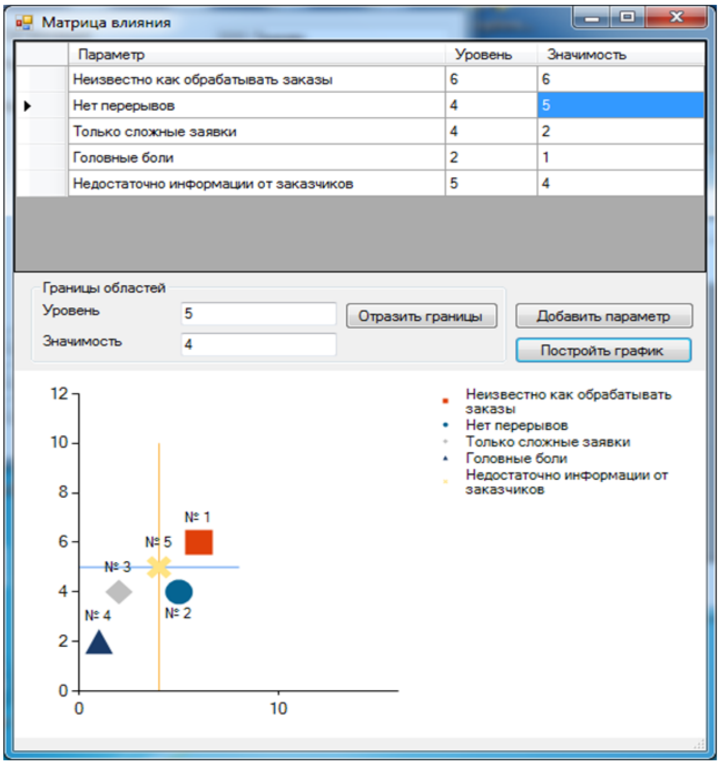



*Рис. 11. Фрагмент программной реализации метода «Матрица влияния»*

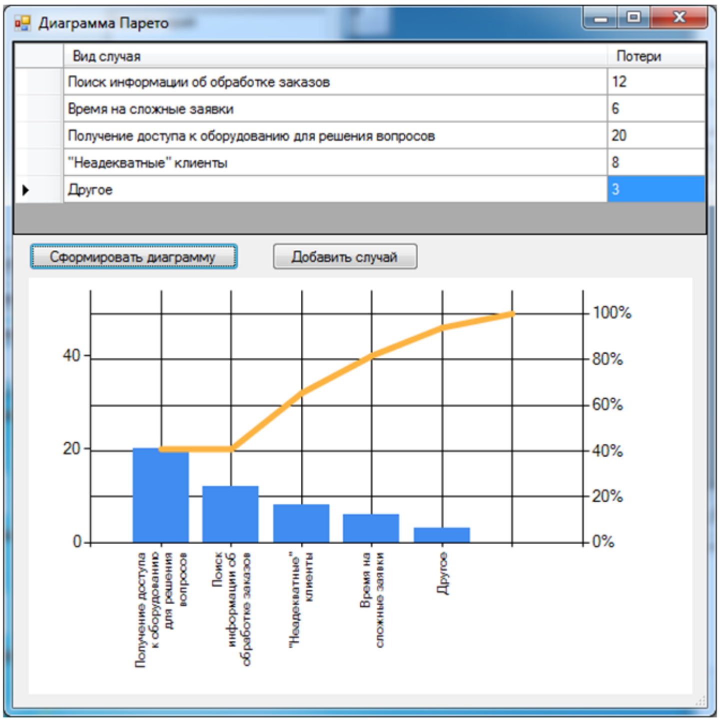



*Рис. 12. Фрагмент программной реализации метода «Диаграмма Парето»*

Невозможно по-настоящему устранить проблемы и предотвратить их появление в будущем без предварительного понимания того, что они собой представляют и почему они возникают. Стоит еще раз подчеркнуть тот факт, что приведенные методы несомненно помогают проводить всесторонний системный анализа проблем, возможностей и требований, тем не менее неправильное их использование может привести к иллюзии решения проблемы без преимуществ, которые могут предоставить данные методы.

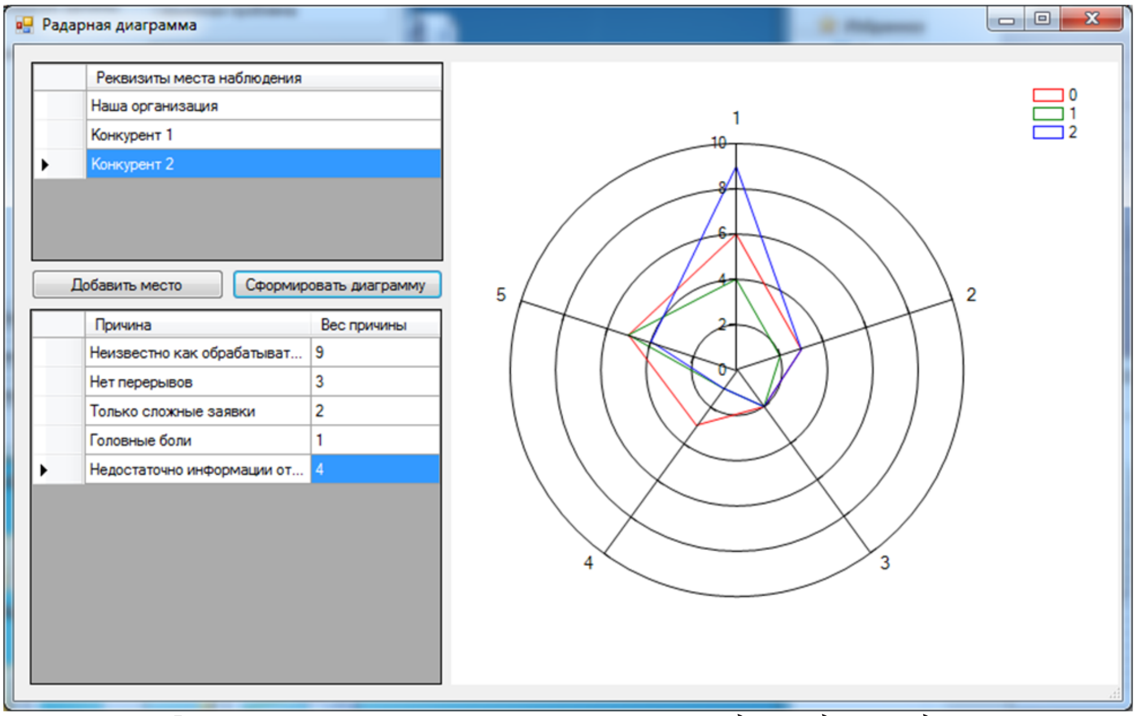



*Рис. 13. Фрагмент программной реализации метода «Радарная диаграмма»*

## Литература


1. *Doggett, A. M.* Root Cause Analysis: A Framework for Tool Selection / A. M. Doggett // Quality Management Journal. – 2018. – V. 12, No 4. – P. 34–35.

2. *Kostamo, K.* Using the critical incident technique for qualitative process evaluation of interventions / K. Kostamo, P. Jallinoja, K. M. Vesala, V. Aurajo-Soares, F. F. Sniehotta, N. Hanjonen // Social Science. – 2019. – V. 232, No 7. – P. 389–397.

3. *Tewari, A.* Critical incident reporting: What should we do? / A. Tewari, A. Sinha // Social Science. – 2013. –V. 29, No 2. – P. 147–156.

4. *Шилова, Л. А.* Базовые инструментальные средства информационного обеспечения управления : учеб.-метод. пособие / Л. А. Шилова. – Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2019. – 64 с.

УДК 519.6

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДУКТИВНОСТИ ЗООПЛАНКТОНА В АЗОВСКОМ МОРЕ В ЛЕТНИЙ ПЕРИОД НА ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

**А. И. Сухинов[1], А. А. Филина[2], И. А. Ляпунова[3], Ю. В. Белова[1], А. В. Никитина[2,3]**

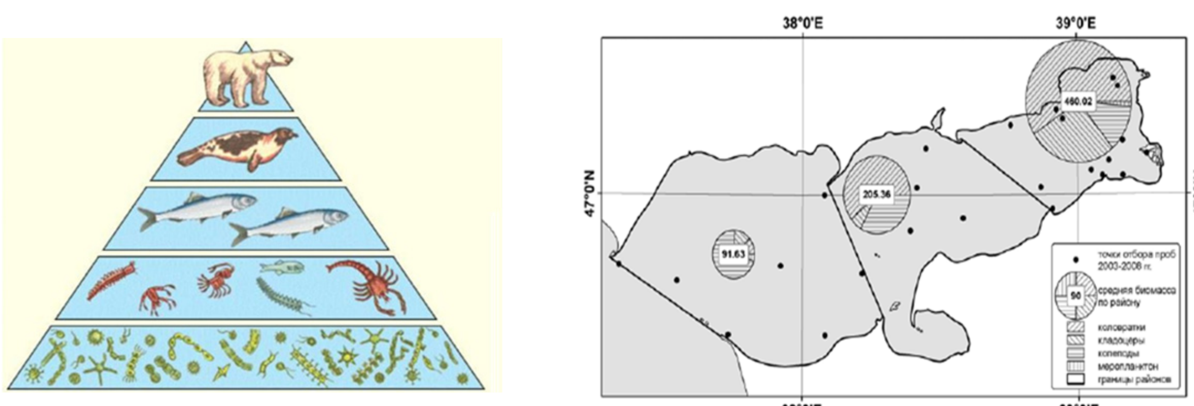
*[1]Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*
*[2]Научно-исследовательский центр супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров, Таганрог*
*[3]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация.** Работа посвящена моделированию продуктивности популяций эвритермного и стенотермного зоопланктона Азовского моря в летний период. Дискретизация поставленной задачи выполнялась с использованием разработанных схем повышенного порядка точности, учитывающих заполненность расчетных ячеек. Сеточные уравнения, полученные в результате дискретизации предложенной математической модели биологической кинетики, решались модифицированным адаптивным переменно-треугольным методом, обладающим более высокой скорость сходимости по сравнению с существующими методами вариационного типа. Разработан параллельный алгоритм решения поставленной задачи на высокопроизводительной вычислительной системе, что позволило значительно сократить время численного решения задачи. С помощью математического моделирования выполнен анализ различных путей развития экосистемы Азовского моря, изучено влияние желетелого инвазианта на продукционно-деструкционные процессы фито- и зоопланктона. Разработанный программный модуль, ориентированный на много процессорную вычислительную систему, может эффективно применяться для предсказательного моделирования гидрофизических и биогеохимических процессов мелководного водоема в летний период.
**Ключевые слова:** математическая модель; биологическая кинетика; эвритермный и стенотермный зоопланктон; параллельный алгоритм; многопроцессорная вычислительная система; Азовское море.

## Введение

Географическое положение и относительно небольшие размеры мелководных водоемов, подобных Азовскому морю, обусловливают высокую пространственно-временную изменчивость основных абиотических факторов экосистемы моря, а также солености, которую определяют речной сток, водообмен с другими акваториями и флюктуации общей увлажненности бассейна. Нарушение естественных условий обитания гидробионтов в водоемах влекут за собой изменения их продукционных показателей и структурные перестройки. К одной из важнейших групп в сообществе водных животных относится зоопланктон, выполняющий в экосистеме функцию трансформатора энергии в пищевой цепи от продуцентов к вторичным консументам, в частности рыбам. Зоопланктон составляет кормовую базу рыб планктофагов и молоди других ценных промысловых видов, что является один из важнейших факторов, определяющих рыбопродуктивность водоемов [1, 2]. Первые работы, посвященные трансформации зоопланктона в условиях меняющегося режима моря, появились в середине 50-х гг. XX в. Показано влияние гидростроительства и сокращения стока р. Дон на размножение, развитие и распределение зоопланктона. На основании этих данных сделана попытка прогноза изменения зоопланктона Азовского моря в условиях зарегулированного стока рек, исследована реакция отдельных видов на изменение солености, составлены фаунистические списки зоопланктона Азовского моря, подведены первые итоги исследований планктонных сообществ. В период повышения солености моря, которая составила 13,8 %, в конце 70-х гг. XX в., сообществе зоопланктона произошли существенные структурно-функциональные изменения, в основе которых находилась замена аборигенных видов вселенцами из Черного моря. В результате такой смены состава сообществ снизилось не только разнообразие, но и продуктивность зоопланктона: в Таганрогском заливе она уменьшилась в 1,5 раза, в собственно море — в 1,2 раза. Инвазия хищного гребневика-зоопланктофага *Mnemiopsis leidyi* (*M. leidyi*) и его активное развитие в весенне-летний период способствует существенному перераспределению потоков вещества и энергии в трофической сети пелагиали: мнемиопсис заходит в Азовское море из Черного и дает вспышку численности, выедая зоопланктон. В результате биомасса зоопланктона со второй половины лета и до осени снижается до значительно малых величин (в море — до 5–10 мг/м$^3$, что в среднем на два порядка ниже значений в период до вселения мнемиопсиса), существенно меняется структура сообществ в сторону преобладания меропланктона, снижается рыбопродуктивность водоема.

Для того, чтобы количественно оценить роль зоопланктона в круговороте органического вещества водоемов, необходимо знать не только численность и биомассу отдельных популяций, но и скорость продуцирования ими органического вещества, степень использования этой продукции хищными видами зоопланктона и рыбами, вклад каждой популяции в общую продукцию зоопланктона. При этом необходимо учитывать изменения этих продукционных характеристик в течение года в зависимости от конкретных условий. Провести всестороннее исследование зоопланктона, основываясь только на результатах обработки стандартных проб невозможно. В этой ситуации методы математического моделирования оказываются единственной возможностью анализа и попыткой поиска ответов на многие конкретные вопросы гидробиологии. Исследованием факторов, влияющих на гетерогенность распределения видов, среди которых главным образом выделяют температуру, освещенность, диффузионные процессы, взаимодействия между видами, а также суточные вертикальные миграции некоторых видов зоопланктона, занимались многие российские и зарубежные ученые, такие как Мордухай-Болтовской Ф. Д., Крючкова Н. М., Одум Ю., Винберг Г. Г., Petzold T., Cheriton O. M., Richards Sh. A. и др. Используемые на сегодняшний день таблицы средних весов зоопланктонных организмов для вычисления биомассы популяций Азово-Черноморского региона позволяют получить завышенные значения биомассы сообществ. Наиболее распространенные модели динамики зоопланктонных сообществ учитывают пищевую пирамиду акватории водоемов (рис.1 а)), нижние уровни пищевой цепи: фитопланктон, зоопланктон. На рис. 1 б) представлены средние значения сетного зоопланктона Таганрогского залива Азовского моря в летний период (мг/м3) [2].




*а)* *б)*

*Рис. 1. а) Экологическая пирамида водоема; б) исследования видового состава и концентрации зоопланктона*

Имеющиеся на сегодняшний день данные о продукционных характеристиках планктона требуют уточнения в связи с изменениями видового состава зоопланктона в результате колебаний климатических и океанографических факторов в изучаемой акватории.

## 1. Модель взаимодействия зоопланктона

Модель для описания эколого-биологического процесса взаимодействия эвритермных (устойчивых к колебаниям температуры воды) и стенотермных видов (чувствительные к колебаниям температуры воды) зоопланктона и желетелого инвазианта, ограничивающего развитие зоопланктона в летний период, имеет вид [3]:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + div\left(\mathbf{U}P_i\right) = \mu_i \Delta P_i + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \frac{\partial P_i}{\partial z}\right) + \psi_i,\ i \in \overline{1,9}. \tag{1}$$

$$\psi_1\left(P_1,P_3,P_4\right) = \left\{\alpha_1 P_4 - \delta_1 P_3 - \varepsilon_1\right\} P_1,\ \psi_2\left(P_2,P_3,P_4\right) = \left\{\alpha_2 P_4 - \delta_2 P_3 - \varepsilon_2\right\} P_2,$$

$$\psi_3\left(P_1,P_2,P_3\right) = \left\{\alpha_3\left(P_1+P_2\right) - \delta_3 - \varepsilon_3\right\} P_3,\ \psi_4\left(P_1,P_2,P_4,P_5\right) = \left\{\alpha_4 P_5 - \delta_4\left(P_1+P_2\right) - \varepsilon_4\right\} P_4,$$

$$\alpha_4 = \left(\alpha_{04} + \gamma_4 M_4\right),\ \psi_5\left(P_1,P_2,...,P_9\right) = \sum_{i=1,i\neq 5}^{9} \varepsilon_i P_i - \delta_5 P_4 P_5 + B\left(\overline{P}_5 - P_5\right) + f,$$

$$\psi_m\left(P_1,P_2,P_3,P_4,P_6,...,P_9\right) = \sum_{l=1}^{4} k_l P_l - \varepsilon_m P_m;\ m \in \overline{6,9},$$

где $P_i$ — значения концентраций, $i \in \overline{1,9}$: 1, 2 — зоопланктона, 1 — эвритермных (копепод *Copepoda*); 2 — стенотермных (коловраток *Rotifera* и кладоцер *Cladocera*); 3 — желетелого планктона — гребневика мнемиопсиса (*Mnemiopsis leidyi*); 4 — фитопланктона; 5 — биогенного вещества; 6, 7, 8, 9 — метаболитов зоопланктона (6, 7) и гребневика (8) и фитопланктона (9); $\psi_i$ — функции трофических взаимодействий; $\alpha_l$ — функция роста планктона (фито-, зоопланктона) и гребневика, $l = \overline{1,4}$; $\alpha_{04}, \gamma_4$ — скорость роста фитопланктона в отсутствие метаболита и параметр воздействия; $B$ — скорость поступления биогенных веществ $P_5$; $\overline{P}_5$ — предельно возможная концентрация биогенных веществ; $\varepsilon_l$ — коэффициент, учитывающий смертность $l$-го вида; $\varepsilon_m$ — коэффициенты разложения метаболита, $m = \overline{6,9}$; $k_l$ — коэффициенты экскреции $l$-го вида (зоопланктона, $l = \overline{1,2}$), гребневика ($l = 3$), фитопланктона ($l = 4$); $\delta_l$ — коэффициенты убыли за счет выедания, $l = \overline{1,4}$; $f = f(x,y,z,t)$ — функция источника $P_5$ (загрязнения); $\mathbf{u}$ — поле скоростей водного потока; $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{0i}$, $\mathbf{U} = \left(U_1,U_2,U_3\right)$ — скорость конвективного переноса; $\mathbf{u}_{0i}$ — скорость осаждения $i$-й субстанции; $\mu_i\ \nu_i$ — диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях $i$-й субстанции.

Расчетная область $G$ представляет собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема $\Sigma_0$, дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x,y)$ и цилиндрической поверхностью $\sigma$ для $0 < t \le T_0$. $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$ — кусочно-гладкая граница области $G$.

К системе (1) добавим граничные условия:

$$P_i = 0 \text{ } на\ \sigma,\ \mathbf{U_n} < 0;\ \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{n}} = \varphi_i\left(P_i\right) \text{ } на\ \sigma,\ \mathbf{U_n} \ge 0;\ \frac{\partial P_i}{\partial z} = 0 \text{ } на\ \Sigma_0;\ \frac{\partial P_i}{\partial z} = -\beta_i P_i \text{ } на\ \Sigma_H,\ i = \overline{1,9}, \tag{2}$$

где $\beta_i$ — коэффициент поглощения $i$-й компоненты донными отложениями; $\varphi_i$ — заданные функции; $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности $\Sigma$.

Необходимо также добавить начальные условия:

$$P_i\big|_{t=0} = P_{i0}(x,y,z),\ i = \overline{1,9}, \tag{3}$$

где $P_{i0}(x,y,z)$ — заданные функции.

## 2. Решение задачи диффузии-конвекции

Задача (1)–(3) для двумерного случая может быть представлена уравнением диффузии-конвекции-реакции [4]:

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = \left(\mu c'_x\right)'_x + \left(\mu c'_y\right)'_y + f \tag{4}$$

с граничными условиями:

$$c'_n\left(x, y, t\right) = \alpha_n c + \beta_n,$$

где $u, v$ — компоненты вектора скорости, $\mu$ — коэффициент турбулентного обмена, $f$ — функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи вводится равномерная сетка:

$$w_h = \left\{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y;\ n = \overline{0, N_t}, i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y};\ N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\right\}, \tag{5}$$

где $\tau$ — шаг по времени, $h_x$, $h_y$ — шаги по пространству, $N_t$ — верхняя граница по времени, $N_x$, $N_y$ — границы по пространству.

Дискретные аналоги операторов конвективного $uc'_x$ и диффузионного переноса $\left(\mu c'_x\right)'_x$ в случае частичной заполненности ячеек могут быть записаны в следующем виде [5]:

$$\left(q_0\right)_{i,j} uc'_x \simeq \left(q_1\right)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + \left(q_2\right)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x},$$

$$\left(q_0\right)_{i,j} \left(\mu c'_x\right)'_x \simeq \left(q_1\right)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - \left(q_2\right)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - \left|\left(q_1\right)_{i,j} - \left(q_2\right)_{i,j}\right| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}.$$

Для аппроксимации оператора конвективного переноса разностной схемой, обладающей четвертым порядком точности, необходимо аппроксимировать оператор $uc' - c'u''h^2/4 - uc'''h^2/6 - u'c''h^2/4$ схемой второго порядка точности. Для аппроксимации оператора диффузионного переноса разностной схемой, обладающей четвертым порядком точности, необходимо аппроксимировать оператор $\left(\mu c'\right)' - \mu c^{(IV)}h^2/12 - \mu''c''h^2/4 - \mu'c'''h^2/6 - \mu'''c'h^2/6$ схемой второго порядка точности. Сеточные уравнения, полученные в результате дискретизации математических моделей гидрофизики и биологической кинетики, решались модифицированным адаптивным переменно-треугольным методом (МПТМ) [6]. При параллельной реализации разработанных численных алгоритмов решения задачи взаимодействия зоопланктонных популяций в Азовском море были использованы методы декомпозиции расчетных областей для различных вычислительно трудоемких задач гидрофизики с учетом архитектуры и параметров супер-ЭВМ. Установлено, что максимальное ускорение достигалось на 512 процессорах и составило 63 раза (табл. 1).

На рис. 3 представлены графики зависимости ускорения и эффективности от количества процессоров для разработанного параллельного алгоритма МПТМ решения задачи транспорта ЗВ в прибрежных системах.

Для моделирования динамики зоопланктонных популяций в Азовском море разработан программный комплекс, позволяющий производить расчеты концентраций основных гидробионтов, включая фито- и зоопланктон, желетелый макропланктон (виды-вселенцы — гребневики) в областях сложной формы, реализованный на многопроцессорной вычислительной системе (МВС) Южного федерального университета. Комплекс программ позволяет осуществлять: совершенствование и внедрение системы комплексного рыбохозяйственного мониторинга в водоемах (наблюдение, оценка и прогноз состояния режима экосистем, кормовой базы и запасов промысловых объектов); совершенствование методологии природоохранных исследований, разработку новых, апробацию и внедрение перспективных методов изучения состояния водных экосистем и отдельных компонентов; разработку и совершенствование методов диагностики токсического воздействия биогенных веществ на гидробионты, в том числе ранней и дифференциальной диагностики токсикоза, а также поиск средств антидотной защиты водных экосистем; разработку предложений и мероприятий по снижению и предупреждению таких воздействий.

Таблица 1

*Ускорение и эффективность параллельного алгоритма МПТМ*

| Число процессоров | Время, с | Ускорение (практическое) | Эффективность | Ускорение (теоретическое) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,700073 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1,880677 | 1,967 | 0,984 | 1,803 |
| 4 | 1,2655 | 2,924 | 0,944 | 3,241 |
| 8 | 0,489768 | 7,555 | 0,731 | 7,841 |
| 16 | 0,472151 | 7,837 | 0,49 | 9,837 |
| 32 | 0,318709 | 11,61 | 0,378 | 14,252 |
| 64 | 0,182296 | 20,297 | 0,363 | 26,894 |
| 128 | 0,076545 | 48,338 | 0,317 | 55,458 |
| 256 | 0,06318 | 58,563 | 0,229 | 65,563 |
| 512 | 0,058805 | 62,921 | 0,123 | 72,921 |

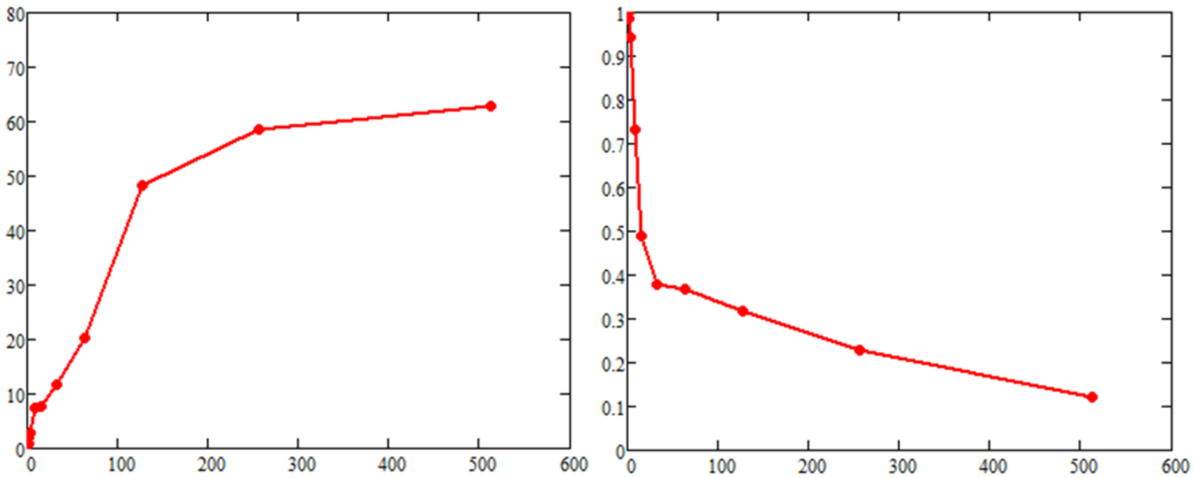
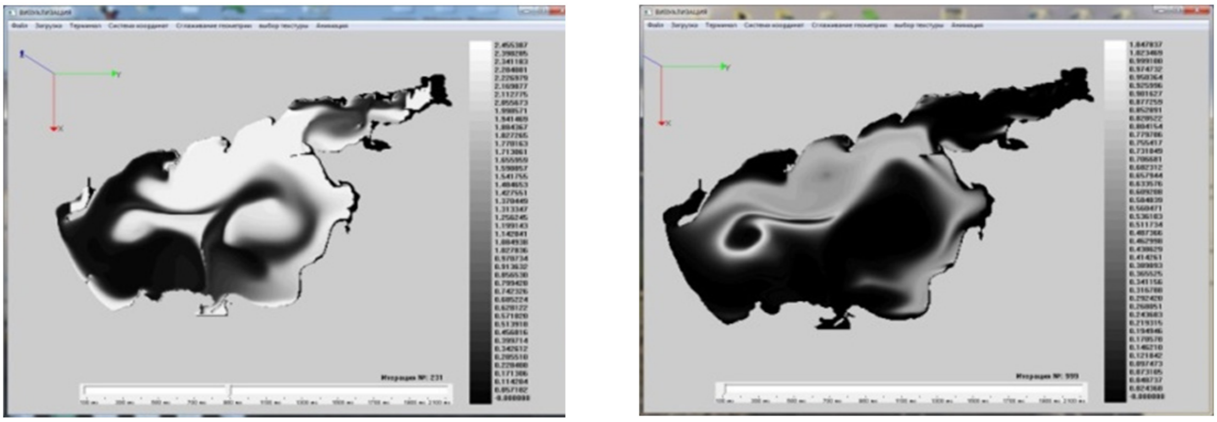



*Рис. 2. Графики зависимости ускорения и эффективности от числа процессоров для разработанного параллельного алгоритма адаптивного МПТМ*

Для моделирования гидробиологических и гидродинамических процессов в трехмерной области сложной формы (Азовское море и Таганрогский залив) использовались последовательно сгущающиеся прямоугольные сетки размерностями: $251\times351\times15$, $502\times702\times30$, $1004\times1404\times60$, $\ldots$. Поля скоростей водного потока [6] относятся к входным данным для модели (1), (2). Начальное распределение загрязняющих биогенных веществ, фито-, зоопланктона и гребневиков было учтено в форме, соответствующей пространственно-временным масштабам моделируемых процессов. Отметим, что реализованный алгоритм численного решения позволяет свободно варьировать граничные условия, вид управляющих функций и значения соответствующих параметров.

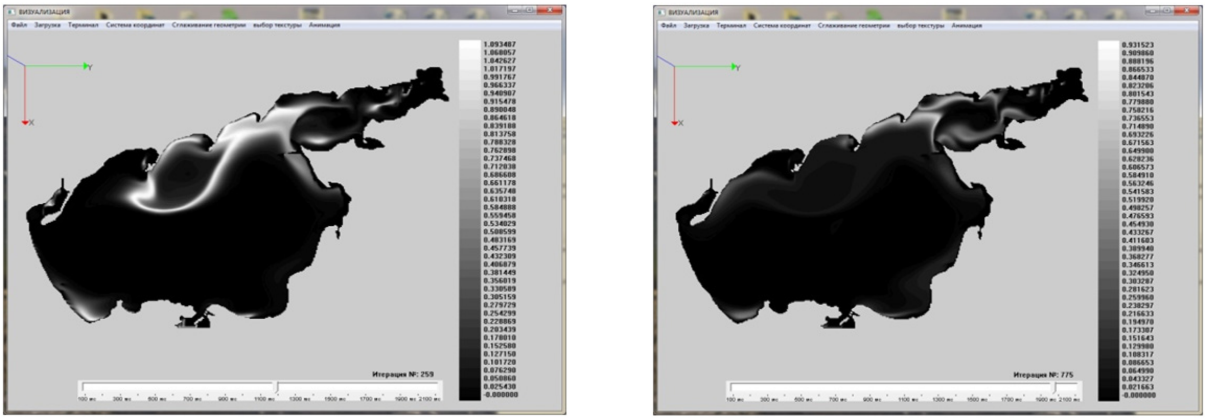
### 3. Результаты численных экспериментов

При моделировании пространственно-неоднородных процессов взаимодействия основных гидробионтов Азовского моря (1)–(3) учитывалась внешняя периодичность, приводящая к усложнению системы. Результаты моделирования динамики загрязняющих биогенных веществ в различные моменты времени в Азовском море представлены на рис. 3 а) ($N$ — номер итерации, начальное распределение полей течений водного потока при северном направлении ветра). Результаты моделирования динамики фитопланктона в Азовском море представлены на рис. 3 б). Распределение концентрации стенотермного зоопланктона $(P_2)$ в различные моменты времени представлено на рис. 4.



*а) загрязняющих биогенных веществ* *б) фитопланктона*

*Рис. 3. Распределение концентрации*



*а) номер итерации N = 259* *б) номер итерации N = 775*

*Рис. 4. Распределение концентрации стенотермного зоопланктона $(P_2)$ в различные моменты времени*

При моделировании процессов биологической кинетики учитывался вегетационный период фитопланктона. Колебания плотности планктона могут быть столь велики, что не могут быть объяснены случайными флуктуациями, и визуальная картина такова, что сравнительно небольшие площади высокой плотности («пятна», «облака») разделены пространствами с низкими плотностями, иногда не фиксируемыми стандартными методами наблюдений. Особенно ярко это явление выражено в тех местах водоема, для которых характерна потребность в биогенных элементах. В результате проведенных исследований установлено, что индексы биоразнообразия фитопланктона выше в местах массового скопления мнемиопсиса. В результате интенсивного развития фитопланктона показатели хлорофилла «а» также значительно выше в районах обитания мнемиопсиса, что хорошо прослеживается как по картам прямых измерений хлорофилла, так и спутниковым данным. Белым цветом выделены максимальные значения концентраций биогенного вещества и фитопланктона черным — минимальные. Устойчивая неоднородность пространственного распределения загрязняющего биогенного вещества и фитопланктона также обусловлена диффузионными процессами и наличием у фитопланктона механизма эктокринного регулирования, т. е. регулирования скорости роста посредством выделения в среду биологически активных метаболитов.

Диффузные процессы в водоеме действуют в направлении сглаживания пространственного распределения и рассеивания «пятен» фитопланктона, свидетельствующие об активном передвижении гетеротрофных организмов (зоопланктона и рыб) в направлении градиента «пищи», что обеспечивает закрепление пространственной неоднородности биогенных веществ в водной среде.

## Заключение

Согласно проведенным численным экспериментам было выявлено существенное влияние абиотических факторов, включая температуру, соленость, освещенность, на рост и смертность фито-, зоопланктона и гребневиков. При изучении механизмов взаимодействия планктона и гребневиков на основе разработанного программного комплекса были выявлены оптимальные режимы, при которых экосистема находится в стабильном состоянии. При моделировании пространственно-неоднородных процессов взаимодействия основных гидробионтов Азовского моря учитывалась внешняя периодичность, приводящая к усложнению системы. При параллельной реализации разработанных численных алгоритмов решения задачи взаимодействия зоопланктонных популяций в Азовском море были использованы методы декомпозиции расчетных областей для различных вычислительно-трудоемких задач гидрофизики с учетом архитектуры и параметров супер-ЭВМ. Установлено, что максимальное ускорение достигалось на 512 процессорах и составило 63 раза. Данные о текущем уровне развития зоопланктона, его сезонной динамике и продуктивности, могут эффективно применяться при оценке рыбопродуктивности и прогнозировании динамики ценных промысловых видов рыб, распределения видов-вселенцев, разработки схем рационального природопользования и охраны природных ресурсов Азовского моря.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00421).

## Литература

1. *Бердников, С. В.* Экспедиционные исследования южного научного центра РАН в 2018 г. Итоги экспедиционных исследований в 2018 году в Мировом океане, внутренних водах и на архипелаге Шпицберген / С. В. Бердников // Материалы конференции: электронный ресурс. – 2019. – С. 12–27.

2. *Поважный, В. В.* Соотношение минимальных пищевых потребностей гребневика Mnemiopsis leidyi и продукции мезопланктонного сообщества Таганрогского залива Азовского моря осенью 2006 г. / В. В. Поважный // «Естественные и инвазивные процессы формирования биоразнообразия водных и наземных экосистем», тез. докл. – Ростов-на-Дону : Изд-во ЮНЦ РАН, 2007. С. 243–245.

3. Clustering due to acceleration in the response to population gradient: a simple self-organization model / Yu. Tyutyunov, I. Senina, R. Arditi // The American Naturalist. – 2004. – V. 164. – P. 722–735.
4. *Никитина, А. В.* Модели биологической кинетики, стабилизирующие экологическую систему Таганрогского залива / А. В. Никитина // Известия ЮФУ. – 2009. – №8 (97). – С. 130–134.
5. *Никитина, А. В.* Параллельная реализация модели динамики токсичной водоросли в Азовском море с применением многопоточности в операционной системе Windows / А. В. Никитина, И. С. Семенов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №1 (138). – С. 130–135.
6. Supercomputer modeling of hydrochemical condition of shallow waters in summer taking into account the influence of the environment / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, Yu. V. Belova, V. V. Sumbaev, A. A. Semenyakina // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – V. 910. – P. 336–351
7. Game-theoretic regulations for control mechanisms of sustainable development for shallow water ecosystems / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, G. A. Ugol'nitskii, A. B. Usov, A. V. Nikitina, M. V. Puchkin, I. S. Semenov // Automation and Remote Control. – 2017. – T. 78, No 6. – P. 1059–1071.

УДК 519.6

# ИССЛЕДОВАНИЕ 3D ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВОДОЕМОВ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ЗАПОЛНЕННОСТЬ ЯЧЕЕК

**А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, С. В. Проценко**

*Донской государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе рассмотрена пространственно-неоднородная трехмерная математическая модель волновой гидродинамики мелководного водоема и представлена ее дискретизация. При построении дискретных математических моделей гидродинамики учитывалась заполненность контрольных ячеек. Проверено необходимое условие применимости принципа максимума. Из данного условия следует ограничение на шаг по пространственной координате. Получены оценки, из которых следует, что процесс вычисления вектора скорости устойчив, отсутствуют два и более стационарных режимов, при которых все силы уравновешены, и решение дискретной задачи существует и единственно и стремится к решению непрерывной задачи при выходе на стационарный режим Проверено сохранение потока трехмерной математической моделью движения водной среды. В результате проверки основных балансовых соотношений для задачи диффузии-конвекции было установлено, что оператор диффузии консервативен, а оператор конвекции консервативен при условии несжимаемости водная среда. В работе рассмотрены разностные схемы, учитывающие степень заполненности ячеек, для решения задач волновой гидродинамики с динамически перестраиваемой геометрией расчетной области. Показано, что решения, полученные на основе данных схем, лишены дефектов, связанных со ступенчатой аппроксимацией границы. В качестве механизма перестроения геометрии водоема использован динамический пересчет заполненности ячеек. Данная модель показала достаточно высокую точность и большой запас устойчивости.

**Ключевые слова:** дискретные математические модели гидродинамики, стационарный режим, заполненность ячеек, дискретный аналог математической модели.

## Введение

Современные методы и средства прогнозного моделирования гидродинамики указывают на необходимость исследования дискретных аналогов моделей, обладающих свойствами консервативности, устойчивости и сходимости. Алгоритмы решения должны обеспечивать повышение точности прогнозного моделирования.

В работе рассмотрены разностные схемы, учитывающие степень заполненности ячеек, для решения задач волновой гидродинамики с динамически перестраиваемой геометрией расчетной области. Для решения поставленных задач используются прямоугольные сетки, учитывающие заполненность ячеек. Аппроксимация задач по времени выполнена на основе схем расщепления по физическим процессам, а по пространственным переменным — на основе интегро-интерполяционного метода с учетом заполненности ячеек и без ее учета.

В статье рассматривается непрерывная трехмерная математическая модель гидродинамики и ее дискретизация. Рассматриваемые дискретные математические модели гидродинамики учитывают заполнение контрольных ячеек. Это повысило точность решения в случае сложной геометрии за счет улучшения аппроксимации границы. Из полученных оценок компонент вектора скорости следует, что не существует двух и более стационарных режимов, в которых все силы уравновешены, а решение дискретной задачи существует, единственно и стремится к решению непрерывной задачи при выходе на стационарный режим. Доказано сохранение течения на дискретном уровне разработанной гидродинамической модели. Доказано отсутствие неконсервативных диссипативных членов, получаемых в результате дискретизации системы уравнений.

## 1. Трехмерная математическая модель гидродинамики мелководных водоемов

Пространственно-неоднородная трехмерная математическая модель волновой гидродинамики мелководного водоема включает [1, 3]:

- уравнения движения (Навье — Стокса):

$$
\begin{gathered}
u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z = -\frac{1}{\rho}p'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (\nu u'_z)'_z, \\
v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = -\frac{1}{\rho}p'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\nu v'_z)'_z, \\
w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho}p'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\nu w'_z)'_z + g;
\end{gathered} \tag{1}
$$

- уравнение неразрывности:

$$
\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \tag{2}
$$

где $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости водного потока мелководного водоема; $\rho$ — плотность водной среды; $p$ — гидродинамическое давление; $g$ — ускорение свободного падения; $\mu$, $\lambda$ — коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности, описывающей границу расчетной области.

К системе (1)–(2) добавим граничные условия:

- на входе (левая граница): $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0,\ p'_{\mathbf{n}} = 0,$
- донная граница: $\rho\mu(\mathbf{V}_\tau)'_{\mathbf{n}} = -\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{V}_{\mathbf{n}} = 0,\ p'_{\mathbf{n}} = 0,$
- боковая граница: $(\mathbf{V}_\tau)'_{\mathbf{n}} = 0,\ \mathbf{V}_{\mathbf{n}} = 0,\ p'_{\mathbf{n}} = 0,$
- верхняя граница: $\rho\mu(\mathbf{V}_\tau)'_{\mathbf{n}} = -\boldsymbol{\tau},\ w = -\omega - p'_t / \rho\mathrm{g},\ p'_{\mathbf{n}} = 0,$ (3)
- на поверхности надводной конструкции: $\rho\mu(\mathbf{V}_\tau)'_{\mathbf{n}} = -\boldsymbol{\tau},\ w = 0,\ p'_{\mathbf{n}} = 0,$

где $\omega$ — интенсивность испарения жидкости, $\mathbf{V}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{V}_\tau$ — нормальная и тангенциальная составляющая вектора скорости, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_x, \tau_y, \tau_z\}$ — вектор тангенциального напряжения.

## 2. Дискретная математической модель задачи гидродинамики

Расчетная область вписана в параллелепипед. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи гидродинамики вводится равномерная сетка:

$$
\begin{gathered}
\overline{w}_h = \{t^n = n\tau,\ x_i = ih_x,\ y_j = jh_y,\ z_k = kh_z;\ n = \overline{0..N_t},\ i = \overline{0..N_x},\ j = \overline{0..N_y},\ k = \overline{0..N_z}; \\
N_t\tau = T,\ \ N_x h_x = l_x,\ \ N_y h_y = l_y,\ \ N_z h_z = l_z\},
\end{gathered}
$$

где $\tau$ — шаг по времени, $h_x$, $h_y$, $h_z$ — шаги по пространству, $N_t$ — количество временных слоев, $T$ — верхняя граница по временной координате, $N_x$, $N_y$, $N_z$ — количество узлов по пространственным координатам, $l_x$, $l_y$, $l_z$ — длины ребер параллелепипеда в направлении осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно [6].

Для решения задачи гидродинамики использовался метод поправки к давлению. Вариант данного метода в случае переменной плотности примет вид [8]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u\overline{u}'_x + v\overline{u}'_y + w\overline{u}'_z = (\mu\overline{u}'_x)'_x + (\mu\overline{u}'_y)'_y + (\nu\overline{u}'_z)'_z, \\
\frac{\tilde{v} - v}{\tau} + u\overline{v}'_x + v\overline{v}'_y + w\overline{v}'_z = (\mu\overline{v}'_x)'_x + (\mu\overline{v}'_y)'_y + (\nu\overline{v}'_z)'_z, \\
\frac{\tilde{w} - w}{\tau} + u\overline{w}'_x + v\overline{w}'_y + w\overline{w}'_z = (\mu\overline{w}'_x)'_x + (\mu\overline{w}'_y)'_y + (\nu\overline{w}'_z)'_z + g, \quad (4) \\
p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau},
\end{gathered}
$$

$$\frac{\hat{u}-\tilde{u}}{\tau}=-\frac{1}{\rho}\hat{p}'_x,\quad \frac{\hat{v}-\tilde{v}}{\tau}=-\frac{1}{\rho}\hat{p}'_y,\quad \frac{\hat{w}-\tilde{w}}{\tau}=-\frac{1}{\rho}\hat{p}'_z,$$

где $V=\{u,v,w\}$ — компоненты вектора скорости, $\{\hat{u},\hat{v},\hat{w}\}$, $\{\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}\}$ — компоненты полей вектора скорости на «новом» и промежуточном временных слоях соответственно, $\bar{u}=(\tilde{u}+u)/2$, $\hat{\rho}$ и $\rho$ — распределение плотности водной среды на новом и предыдущем временных слоях соответственно.

Вводятся коэффициенты $q_0$, $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$, $q_5$, $q_6$, описывающие заполненность областей, находящихся в окрестности ячейки (контрольных областей). Значение $q_0$ характеризует заполненность области [4, 5].

В случае граничных условий третьего рода $c'_n(x,y,z,t)=\alpha_n c+\beta_n$ дискретные аналоги операторов конвективного $uc'_x$ и диффузионного $(\mu c'_x)'_x$ переноса, полученные при помощи интегро-интерполяционного метода, учитывающие частичную заполненность ячеек, могут быть записаны в следующем виде [7]:

$$(q_0)_i\, uc'_x \simeq (q_1)_i\, u_{i+1/2}\frac{c_{i+1}-c_i}{2h_x}+(q_2)_i\, u_{i-1/2}\frac{c_i-c_{i-1}}{2h_x},$$

$$(q_0)_i\,(\mu c'_x)'_x \simeq (q_1)_i\,\mu_{i+1/2}\frac{c_{i+1}-c_i}{h_x^2}-(q_2)_i\,\mu_{i-1/2}\frac{c_i-c_{i-1}}{h_x^2}-\left|(q_1)_i-(q_2)_i\right|\mu_i\frac{\alpha_x c_i+\beta_x}{h_x}.$$

Аналогичным образом запишутся аппроксимации конвективных и диффузионных членов по оставшимся координатным направлениям.

## 3. Учет заполненности ячеек для решения задач гидродинамики

В работе рассматривается развитие и применение метода учета заполненности прямоугольных ячеек материальной средой, в частности, жидкостью для повышения гладкости и точности конечноразностного решения задач гидродинамики со сложной формой граничной поверхности. Для решения поставленных задач используются прямоугольные сетки, учитывающие заполненность ячеек. Аппроксимация задач по времени выполнена на основе схем расщепления по физическим процессам, а по пространственным переменным — на основе интегро-интерполяционного метода с учетом заполненности ячеек и без ее учета. Для оценки точности численного решения первой задачи в качестве эталона используется аналитическое решение, описывающее течение Куэтта — Тейлора [2].

В таблице представлены значения погрешностей численного решения задачи течения жидкости между двумя соосными полуцилиндрами, полученные на последовательности сгущающихся расчетных сеток размерами: 11×21, 21×41, 41×81 и 81×161 узлов в случаях гладкой и ступенчатой границы.

Таблица

*Погрешности решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами*

| Размеры сетки | 11×21 | 21×41 | 41×81 | 81×161 |
|---|---|---|---|---|
| Максимальное значение погрешности в случае гладкой границы, м/с | 0.053 | 0.052 | 0.058 | 0.056 |
| Среднее значение погрешности в случае гладкой границы, м/с | 0.023 | 0.012 | 0.006 | 0.003 |
| Максимальное значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с | 0.272 | 0.731 | 0.717 | 0.75 |
| Среднее значение погрешности в случае ступенчатой границы, м/с | 0.165 | 0.132 | 0.069 | 0.056 |

Анализ результатов расчетов погрешности численного решения задачи течения жидкости между двумя цилиндрами на последовательности сгущающихся сеток, представленных в таблице, позволяет сделать вывод об эффективности использования разностных схем, учитывающих заполненность ячеек. При решении модельной задачи дробление сетки в 8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к повышению точности, которой обладают решения, полученные на сетках, учитывающих заполненность ячеек

В случае непосредственного использования прямоугольных сеток (ступенчатой аппроксимации границ) относительная погрешность расчетов достигает 70 %; при тех же условиях использование предлагаемого метода позволяет уменьшить погрешность до 6 %. Показано, что дробление прямоугольной сетки в 2–8 раз по каждому из пространственных направлений не приводит к такому же повышению точности, которой обладают численные решения, полученные с учетом заполненности ячеек.

### 4. Устойчивость трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов

Проверим необходимое условие применимости принципа максимума. Из данного условия следует ограничение на шаг по пространственной координате:

$$h_x < 2\min\left(\mu / |u|\right) \le 2\frac{\mu_{i+1/2,j,k}}{\left|u_{i+1/2,j,k}\right|}. \tag{5}$$

Проверяя положительность оставшихся коэффициентов, получим следующие ограничения на шаги по пространственным координатам: $h_y < 2\min\left(\mu / |v|\right)$, $h_z < 2\min\left(\nu / |w|\right)$.

Полученные ограничения запишем через числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{u \cdot l}{\mu}$, где $u$ — скорость распространения водной среды, $l$ — характерный размер области, $\mu$ — коэффициент турбулентного обмена

$$\mathrm{Re} = \frac{u \cdot l}{\mu} = \frac{u \cdot h}{\mu} N \le \frac{u}{\mu}\left\|\frac{2\mu}{u}\right\| N = 2N. \tag{6}$$

где $N$ — характерное число узлов сетки.

Применяя полученное неравенство для оценки $\left\|\tilde{u}^n\right\|, \left\|\tilde{u}^{n-1}\right\|$ и т. д. получим оценку решения и придем к неравенству:

$$\left\|\tilde{u}^{n+1}\right\|_c \le \left\|\tilde{u}^1\right\|_c + \tau\sum_{k=1}^{n}\left\| 2\Omega(v^k\sin\theta - w^k\cos\theta) - \left(q_5 - q_6\right)H\left(q_5 - q_6\right)\frac{\rho_v C_p\left(\left|\vec{V}\right|\right)u^k\left|\vec{V}\right|}{\rho h_z} + \right.$$

$$\left. + \left(q_5 - q_6\right)H\left(q_5 - q_6\right)\frac{\rho_a C_p\left(\left|\vec{V}_a - \vec{V}\right|\right)\left(u_a - u^k\right)\left|\vec{V}_a - \vec{V}\right|}{\rho h_z} - \frac{p_x^k}{\rho^k}\right\|_c . \tag{7}$$

Аналогичным образом нетрудно получить оценку оставшихся двух компонент вектора скорости, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\left\|\tilde{v}^{n+1}\right\|_c \le \left\|\tilde{v}^1\right\|_c + \tau\sum_{k=1}^{n}\left\| -2\Omega u^k\sin\theta - \left(q_5 - q_6\right)H\left(q_5 - q_6\right)\frac{\rho_v C_p\left(\left|\vec{V}\right|\right)v^k\left|\vec{V}\right|}{\rho h_z} + \right.$$

$$\left. + \left(q_5 - q_6\right)H\left(q_5 - q_6\right)\frac{\rho_a C_p\left(\left|\vec{V}_a - \vec{V}\right|\right)\left(v_a - v^k\right)\left|\vec{V}_a - \vec{V}\right|}{\rho h_z} - \frac{p_y^k}{\rho^k}\right\|_c , \tag{8}$$

$$\left\|\tilde{w}^{n+1}\right\|_c \le \left\|\tilde{w}^1\right\|_c + \tau\sum_{k=1}^{n}\left\| 2\Omega u^k\cos\theta - (q_5-q_6)H(q_5-q_6)\frac{\rho_v C_p\left(\left|\vec{V}\right|\right)w^k\left|\vec{V}\right|}{\rho h_z} + \right.$$

$$\left. +(q_5-q_6)H(q_5-q_6)\frac{\rho_a C_p\left(\left|\vec{V}_a-\vec{V}\right|\right)\left(w_a-w^k\right)\left|\vec{V}_a-\vec{V}\right|}{\rho h_z} - \frac{p_z^k}{\rho^k}\right\|_c, \tag{9}$$

Из полученных оценок следует, что если полученные частичные суммы в правых частях неравенств ограничены для любого $n$, то процесс вычисления вектора скорости устойчив. Под знаком суммы стоят члены, ответственные за внешние и внутренние силы. Можно утверждать, что отсутствуют два и более стационарных решений (режимов) при которых все силы уравновешены, и решение дискретной задачи существует и единственно и стремится к решению непрерывной задачи при выходе на стационарный режим.

## 5. Консервативность трехмерной дискретной математической модели движения водной среды

Проверим сохранение потока трехмерной математической моделью движения водной среды. Для этого запишем сеточное уравнение для расчета давления

$$(q_1)_{i,j,k}\frac{\hat{p}_{i+1,j,k}-\hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k}\frac{\hat{p}_{i,j,k}-\hat{p}_{i-1,j,k}}{h_x^2} + (q_3)_{i,j,k}\frac{\hat{p}_{i,j+1,k}-\hat{p}_{i,j,k}}{h_y^2} -$$

$$-(q_4)_{i,j,k}\frac{\hat{p}_{i,j,k}-\hat{p}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + (q_5)_{i,j,k}\frac{\hat{p}_{i,j,k+1}-\hat{p}_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k}\frac{\hat{p}_{i,j,k}-\hat{p}_{i,j,k-1}}{h_z^2} +$$

$$+\left((q_5)_{i,j,k}-(q_6)_{i,j,k}\right)H\left((q_5)_{i,j,k}-(q_6)_{i,j,k}\right)\left(\frac{\hat{p}_{i,j,k}-p_{i,j,k}}{\tau^2 h_z g} + \frac{\omega\hat{\rho}_{i,j,k}}{\tau h_z}\right) = \tag{10}$$

$$=(q_0)_{i,j,k}\frac{\hat{\rho}_{i,j,k}-\rho_{i,j,k}}{\tau^2} + \frac{(q_1)_{i,j,k}(\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k} - (q_2)_{i,j,k}(\hat{\rho}\tilde{u})_{i-1/2,j,k}}{\tau h_x} +$$

$$+\frac{(q_3)_{i,j,k}(\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j+1/2,k} - (q_4)_{i,j,k}(\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j-1/2,k}}{\tau h_y} + \frac{(q_5)_{i,j,k}(\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k+1/2} - (q_6)_{i,j,k}(\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k-1/2}}{\tau h_z} +$$

$$+\left(\frac{(q_2)_{i,j,k}-(q_1)_{i,j,k}}{\tau h_x}(\hat{\rho}\tilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k}-(q_3)_{i,j,k}}{\tau h_y}(\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k}\right)m_{i,j,k},$$

где $(\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k} = \left(\hat{\rho}_{i+1,j,k}\tilde{u}_{i+1,j,k} + \hat{\rho}_{i,j,k}\tilde{u}_{i,j,k}\right)/2$, $p$ — превышение давления над гидростатическим давлением невозмущенной жидкости, $\omega$ — интенсивность испарения жидкости, $m_{i,j,k}$ — маска граничного условия.

Просуммируем уравнение (10) по расчетной области D: $i\in[1,N_x-1]$, $j\in[1,N_y-1]$, $k\in[1,N_z-1]$ и выполним вспомогательные преобразования:

$$\sum_D\left((q_5)_{i,j,k}-(q_6)_{i,j,k}\right)H\left((q_5)_{i,j,k}-(q_6)_{i,j,k}\right)\left(\frac{\hat{p}_{i,j,k}-p_{i,j,k}}{\tau h_z g}\right) =$$

$$= -\sum_D\left((q_5)_{i,j,k}-(q_6)_{i,j,k}\right)H\left((q_5)_{i,j,k}-(q_6)_{i,j,k}\right)\left(\frac{\omega\hat{\rho}_{i,j,k}}{h_z}\right) + \tag{11}$$

$$+\sum_D\left(\frac{(q_2)_{i,j,k}-(q_1)_{i,j,k}}{h_x}(\hat{\rho}\tilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k}-(q_3)_{i,j,k}}{h_y}(\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k}\right)m_{i,j,k} + \sum_D(q_0)_{i,j,k}\frac{\hat{\rho}_{i,j,k}-\rho_{i,j,k}}{\tau}.$$

Из выражения (11) и формулы для расчета заполненности ячеек $o_{i,j} = \frac{p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k} + p_{i,j-1,k} + p_{i-1,j-1,k}}{4\rho g h_z}$ можно сделать вывод о том, что рассчитанное таким образом давление отвечает за выполнение закона сохранения количества вещества. Из выражения (11) также следует сохранение потока (отсутствие нефизических источников) дискретной математической моделью движения водной среды. Поток на выходной границе зависит от следующих факторов: потока на входной границе, подъема уровня, испарения и сжимаемости водной среды.

## Заключение

В работе исследована дискретная трехмерная математическая модель гидродинамики мелководных водоемов и ее дискретизация. Можно сделать вывод, что давление отвечает за материальный баланс водной среды. Сохранение потока, то есть отсутствие нефизических источников, также подтверждается дискретной математической моделью движения водной среды. На выходной границе поток зависит от потока на входной границе, возвышения уровня, испарения и сжимаемости водной среды. Обобщая сказанное выше, отметим, что в результате проверки основных балансовых соотношений для задачи диффузии-конвекции было установлено, что оператор диффузии консервативен, а оператор конвекции консервативен при условии несжимаемости водной среды.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-31-90091).

## Литература

1. *Sukhinov A., Chistyakov A., Nikitina A., Semenyakina A., Korovin I., Schaefer G.* Modelling of oil spill spread (5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV). 2016. – P. 1134–1139. DOI: 10.1109/ICIEV.2016.7760176

2. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А., Сидорякина В. В., Проценко С. В.* Метод учета заполненности ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области // Матем. Моделирование. – 2019. – 31:8. P. 79–100.

3. *Gasilov V. A., Gasilova I. V., Klochkova L. V., Poveshchenko Yu. A., Tishkin V. F.* Difference schemes based on the support operator method for fluids dynamics problems in a collector containing gas hydrates // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2015. – V. 55, Is. 8. – P. 1310–1323.

4. *Sukhinov A. I., Khachunts D. S., Chistyakov A. E.* A mathematical model of pollutant propagation in near-ground atmospheric layer of a coastal region and its software implementation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2015. – 55 (7). P. 1216–1231. DOI: 10.1134/S096554251507012X

5. *Golubev V. I., Petrov I. B., Khokhlov N. I.* Compact grid-characteristic schemes of higher orders for 3D linear transport equation // Math. Models Comput. Simul. – 2016. – 8:5. – P. 577–584.

6. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.* Разностная схема для решения задач гидродинамики при больших сеточных числах Пекле // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – Т.11, № 5. – С. 833–848. DOI: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-5-833-848

7. *Krasnov M. M., Kuchugov P. A., Ladonkina M. E., Tishkin V. F.* Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids: Using the operator programming method // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2017. – V. 9, Is. 5. – P. 529–543.

8. *Sukhinov A. I., Nikitina A. V., Semenyakina A. A., Chistyakov A. E.* Complex of models, explicit regularized schemes of high-order of accuracy and applications for predictive modeling of after-math of emergency oil spill // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – 1576. – P. 308–319.

УДК 519.6

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДУКЦИОННОГО ПРОЦЕССА ВИНОГРАДНОЙ УЛИТКИ ПРИ ПОМОЩИ RIDGE И LASSO РЕГРЕССИИ

**С. Н. Ткаченко, И. А. Ткаченко, С. Г. Шпилевая, В. П. Дедков**

*Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта*

**Аннотация.** Данная работа является продолжением серии работ по изучению и моделированию продукционного процесса виноградной улитки (*Helix pomatia L.*). В работе рассмотрена применимость трех моделей для моделирования среднего веса групп виноградных улиток на основе значений параметров окружающей среды, параметров питания улиток и специфических факторов, характерных для моллюсков. Основной акцент при моделировании сделан на двух моделях: RIDGE И LASSO регрессии. Доказано, что наилучшие результаты при моделировании дает RIDGE регрессия. Совокупность указанных качественных и количественных параметров является достаточной для моделирования продукционного процесса.

**Ключевые слова:** продукционный процесс, математическая модель, виноградная улитка, Helix pomatia L., RIDGE регрессия, LASSO регрессия, линейная регрессия, машинное обучение, регуляризация, температура воздуха, относительная влажность воздуха, средний вес.

## Введение

В предыдущей работе [1] рассматривался вопрос о принципиальной применимости регрессионных моделей для моделирования продукционного процесса биологических объектов. В качестве модельного вида была взята виноградная улитка (*Helix pomatia L.*).

Подробное описание самого эксперимента с улитками, особенностей их содержания, кормления и измерения среднего веса представлено в [2].

Виноградная улитка широко распространена в странах Европы, Калининградская область Российской Федерации является одной из границ ее ареала. Человечество активно использует данный вид моллюсков в различных сферах от гастрономии до косметологии.

Поскольку природная емкость виноградной улитки давно исчерпана, то существует потребность в ее искусственном разведении, что в свою очередь приводит к необходимости создания модели продукционного процесса для данного вида моллюсков.

Под продукционным процессом понимается набор веса в условиях искусственного разведения, то есть содержания в контролируемых условиях фермы. При этом возможно контролировать различные параметры, которые оказывают влияние на вес улитки. Как правило, это параметры окружающей среды (температура и влажность), а также факторы, связанные с жизнедеятельностью самой улитки (условия содержания, питания и т. д.).

Моделирование продукционного процесса сводится к разработке математической модели на основе ряда переменных, по которым рассчитывается средний вес группы улиток. Всего рассматривается шесть групп улиток. В каждой группе было по десять улиток. Группы обозначались при помощи сочетания буквенного символа и цифры, например «Л1». Три группы были помечены литерой «Р», что соответствовало месту сбора моллюсков (поселок Рыбачий), еще три группы — литерой «Л» (Ладушскинский городской округ, оба населенных пункта расположены в Калининградской области). За буквой следует цифра, соответствующая определенной диете: 1 — растительная диета, 2 — овощная диета, 3 — микс растительной и овощной диеты.

За каждой из шести групп проводились наблюдения в течение 68 дней. По результатам наблюдений фиксировались параметры окружающей среды, а также средний вес каждой группы, особенности питания и поведения улиток. Таким образом, исходные данные для моделирования представляют собой набор из 68 точек, соответствующих дням проведения эксперимента [2]. Для каждой группы улиток использовался свой набор данных.

В предыдущей работе [1] была показана ограниченность применения регрессионных моделей для моделирования продукционного процесса рассматриваемого биологического объекта. Также была выявлена необходимость дополнительного введения независимых переменных. В данной работе сделана попытка модернизировать модель с учетом дополнительных факторов и подбора наиболее подходящего математического аппарата.

## 1. Подготовка данных для моделирования

В предыдущей работе [1] были получены хорошие результаты по моделированию величины среднего веса, но только при условии добавления в рассматриваемый массив данных, так называемого «шума» — дополнительных переменных, не имеющих какой-либо физической или биологической интерпретации.

В [1] к исходным данным были добавлены номер дня, недели, месяца, и преобразованное UNIX-время (время в секундах с 1 января 1970 года), а также были выполнены сдвиги основных переменных — температуры и влажности.

В виду того, что подобный подход нельзя назвать удовлетворительным, но при этом осознавая необходимость в модернизации исходных данных было принято решение о замене переменной, ассоциированной с диетой улиток на непосредственный вес пищи.

То есть качественный признак, который обозначал один из видов диеты, а именно: растительную или овощную или смешанную (микс овощной и растительной диеты) был убран из исходного массива данных.

Вместо него были добавлены два признака, один из которых — это вес пищи в граммах, которую давали группе улиток в конкретную дату, второй — вес остатков пищи, которые убирались от улиток на следующий день после выдачи порции еды (переменная OUT). Удаление остатков важный процесс, так как улитки не должны питаться несвежей пищей, также важно чтобы в месте, где живут улитки не было плесени.

Вес пищи был разбит на две независимые переменные (IN1, IN2) в зависимости от диеты: IN1 — вес выдаваемых овощей, IN2 — вес растительной пищи при ее наличии. Другими словами, если вес овощей в конкретную дату равен нулю, то это означает факт, что они в эту дату не выдавались.

В случае если улитки съедали всю выданную им пищу, то значение переменной OUT на данную дату выставлялось равным нулю.

Таким образом, набор данных представляет из себя восьмимерный временной ряд со следующими переменными:

- Date — имеет формат даты «ДД.ММ.ГГГГ», является временной меткой ряда, покрывает период с 03.07.2017 по 08.09.2017 с дискретностью в один день;
- Средний вес группы улиток — целевая переменная (обозначается литерой W, после которой идет обозначение соответствующей группы улиток Л1..3 или Р1..3), значение которой требуется спрогнозировать, а также выявить зависимости от других переменных и параметров модели.
- T — температура воздуха;
- $\varphi$ — относительная влажность воздуха;
- A — параметр, характеризующий условия адаптации улиток к изменившимся условиям среды, принимающий значения от –1 до 1;
- R — дискретная переменная, обозначающая количество улиток участвующих в процессе размножения по состоянию на конкретную дату, принимающая значения от 0 до 1 с шагом 0.1;
- IN1, IN2, OUT — значения соответствующего веса.

Для работы с данными и создания моделей использовался язык Python версии 3.7 с дополнительными открытыми библиотеками: numpy, pandas и др. [3].

Поскольку данные представляют собой временной ряд и количество точек невелико, то в процессе обучения моделей использовалась кросс-валидация и разбиение множества точек на 5 фолдов. Для оценки моделей, как и ранее в [1] использовался горизонт прогнозирования, состоящий из 12 последних по времени точек. Это обусловлено тем, что в тестовое множество должен был попасть участок без резкого подъема веса и с его наличием. Поскольку исследуется временной ряд, то горизонт прогнозирования может состоять только из крайних правых точек (последних по времени).

## 2. Моделирование продукционного процесса и обсуждение результатов

Как в [1] было решено использовать регрессионные модели. В настоящее время регрессия получила широкое применение, включая задачи прогнозирования и управления. Целью регрессионного анализа является определение зависимости между исходной переменной и множеством внешних факторов (регрессоров) [4], что как раз и требуется в данной задаче.

Чаще всего используется линейный вариант, то есть, линейная регрессия. В основном, из-за своей простоты в интерпретации, обучаемости и хорошей точности. Классическая иллюстрация линейной регрессии в случае, когда на вход подается классический временной ряд или набор значений некоторой функции, поведение которой нужно спрогнозировать, представлен на рис. 1. По множеству входных значений выстраивается некая усредненная линия $y = w_1 \cdot x + w_2$, с опорой на которую производится дальнейшее прогнозирование.

Также существуют другие методы, основе которых лежит метод линейной регрессии. Например, методы Lasso, Ridge [5].

Метод Lasso использует так называемую L1 регуляризацию. Метод Ridge — L2 регуляризацию. Они довольно похожи [6]: обе представляют собой дополнительное слагаемое в формулах вычисления значений функций потерь:

$$J_{LASSO} = \sum_{i=1}^{n} \left( y_n - \hat{y}_n \right)^2 + \lambda \left\| w \right\|_1$$

$$J_{RIDGE} = \sum_{i=1}^{n} \left( y_n - \hat{y}_n \right)^2 + \lambda \left\| w \right\|_2^2$$

В качестве метрик для оценки точности результатов использовались MAPE (Mean Absolute Percentage Error) и ME (Max Error), которые подходят для оценки всех используемых в работе моделей. MAPE вычисляется как среднее от модуля отношения разности действительных и предсказанных значений к действительным значениям, умноженное на 100 %. Другими словами, по значению MAPE можно оценить, насколько сильно модель ошибается в среднем. ME — максимальное значение модуля разности между действительными и предсказанными значениями. То есть, значение ME отражает максимальное отклонение предсказанного значения от действительного, что позволит оценить точность модели в худшем случае. Более традиционные метрики, типа R2 являются наименее информативными.

Далее приводятся примеры и результаты для среднего веса группы улиток Л2. Моделирование значений среднего веса для групп Л2 и Р2 являются наиболее сложными, поскольку для этих групп все значения переменной IN2 равны нулю (исходя из выбранной диеты). Для остальных пяти групп выводы, которые демонстрируются для группы Л2 — идентичны.

Сначала был проведен анализ зависимостей переменных друг от друга. Наиболее интересным оказался график зависимости между переменными «T», «$\varphi$» и «WЛ2» (рис. 1). По нему можно выдвинуть гипотезу, что, при уменьшении значения «T» и одновременном увеличении «$\varphi$», значение «WL2» возрастает.

Была построена матрица корреляции различных переменных во всем наборе данных, а также отдельно в тренировочной части набора данных. Практически все переменные имеют примерно одинаковый уровень корреляции с целевой переменной WЛ2, что еще раз подтверждает вывод о том, что сложно выделить прямую зависимость между значениями отдельных переменных, так как они все влияют друг на друга в совокупности.

Исходя из результатов анализа матриц корреляции выделяется переменная T, имеющая довольно высокий уровень корреляции с WЛ2, и переменная $\varphi$, коррелирующая, в свою очередь, с T и WЛ2. Эта тройка взаимосвязанных переменных также была выделена путем экспериментов с построением точек в трехмерном пространстве, как одна из самых наглядных (см. рис. 1), что еще раз подтверждает их влияние друг на друга.

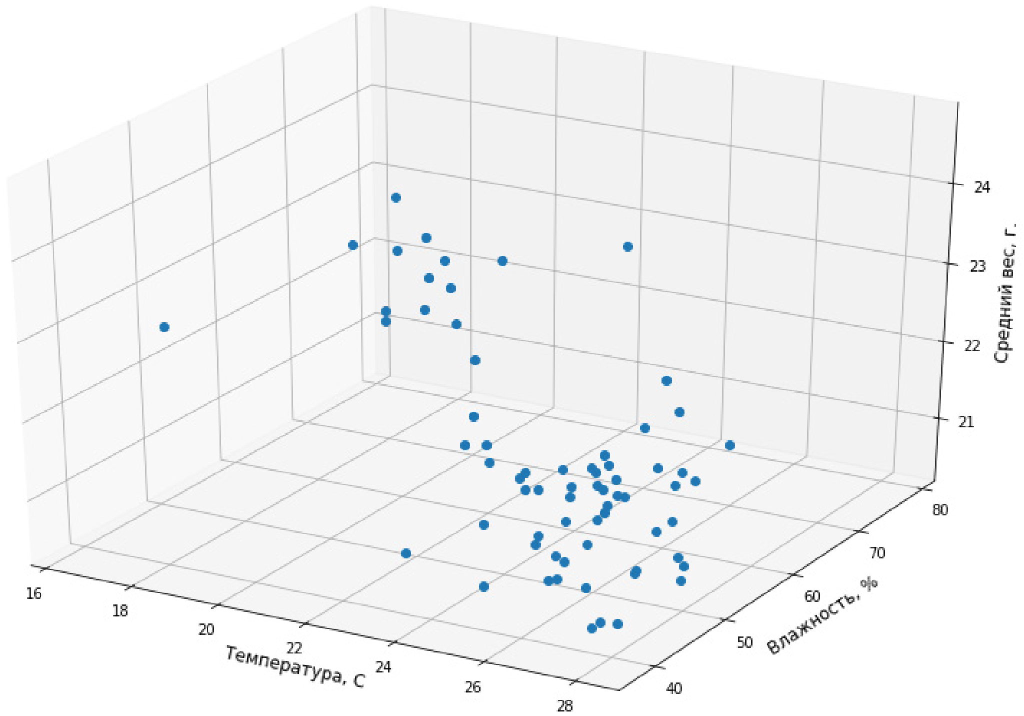



*Рис. 1. Трехмерный график точек в пространстве переменных «T», «$\varphi$» и «WЛ2»*

Перед началом моделирования данные (кроме целевой переменной) были нормализованы при помощи стандартного алгоритма [7].

Для единообразия тестирования моделей был введен дополнительный метод plotModelResults, который вычислял спрогнозированные значения, значения двух выбранных метрик, а также строил график действительных и предсказанных значений с доверительными интервалами.

Значения метрик после обучения моделей представлены в табл. 1.

Таблица 1

*Значения метрик после обучения моделей*

| Модель | Mean Absolute Percentage Error | Max Error (без нормализации целевой переменной) |
|---|---|---|
| Linear Regression | 4.50 % | 1.49 |
| Lasso Regression | 4.72 % | 1.55 |
| Ridge Regression | 3.69 % | 1.31 |

Наиболее точной моделью, как по показателям метрик, так и судя по графику предсказанных значений, оказалась модель RIDGE. Классическая линейная регрессия и LASSO регрессия дают более высокое значение ошибки в среднем.

Линейная регрессия дает неудовлетворительные результаты в виду того, что не смогла корректно учесть все данные, которые подавались в модель. Высокие значения ошибки для LASSO можно объяснить тем, что алгоритм LASSO вместо того, чтобы начислять штрафы за каждый признак в данных, начислял штрафы лишь за признаки с большим значением коэффициентов, что не совсем полезно в данном случае.

Результаты работы модели, основанной на RIDGE-регрессии представлены на рис. 2. Красными пунктирными линиями выделен доверительный интервал, видно, что исходные экспериментальные значения хорошо укладываются в его ширину (для остальных моделей это не выполняется). Это говорит о хорошем качестве модели. Для сравнения на рис. 3 приведен дополнительно график значений, предсказанных на основе модели LASSO. Для LASSO только две точки укладываются в ее доверительный интервал, поэтому делается вывод о ее неприменимости для данного набора данных. Основная разница между RIDGE и LASSO регрессией с точки зрения самой модели заключается в том, что при RIDGE учитывается максимально возможное количество независимых переменных, а именно шесть (для Л2 все значения IN2 равны нулю), в то время как модель на основе LASSO в силу ее математического аппарата использует лишь три независимых переменных: A, T и IN1.

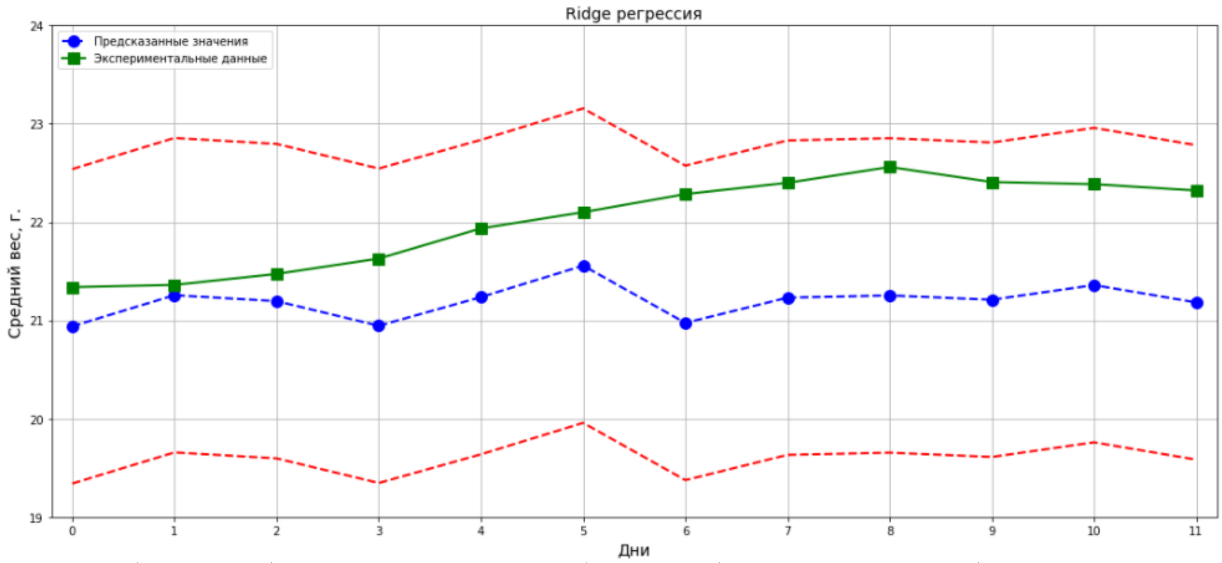



*Рис. 2. Исходные и предсказанные значения среднего веса для группы Л2 методом RIDGE регрессии*

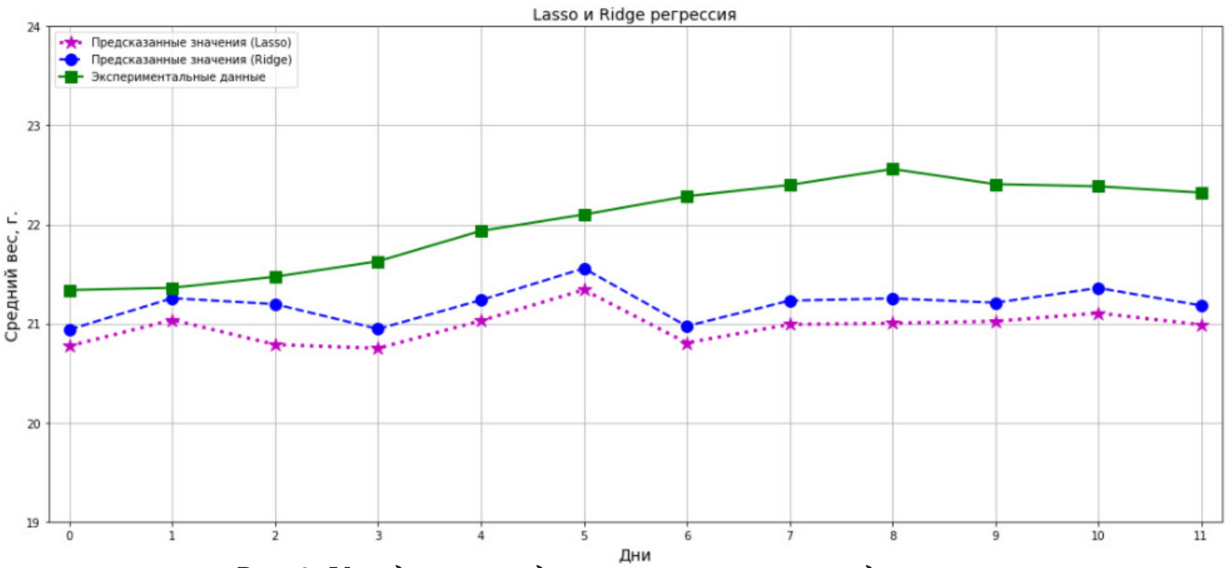



*Рис. 3. Исходные и предсказанные значения среднего веса для группы Л2 методами RIDGE и LASSO регрессии*

Что касается факторов, влияющих на целевую переменную, то графики, приводимые в ходе описания работы, показали, что нет конкретной зависимости между какими-либо переменными из набора данных. Все переменные в совокупности влияют на целевую переменную, которая, в свою очередь, не имеет выраженной периодичности и заранее предсказуемого поведения.

## Заключение

Таким образом модель, основанная на RIDGE-регрессии, наиболее точно (в сравнении с другими исследованными моделями) отражает влияние внешних факторов на продукционный процесс группы виноградных улиток. Действительно, с увеличением относительной влажности воздуха (до 60–70 %) и уменьшением его температуры (до 22–24 °C) создаются благоприятные условия для набора веса и размножения. При этом в модели возникает ситуация, когда средний вес группы улиток сразу же реагирует на изменение температуры воздуха, но с регулярным опозданием — на изменения влажности воздуха. Такое поведение можно объяснить воздействием эндогенных факторов — выделением улитками слизи, которая увлажняет почву и создаёт определённый микроклимат. Однако учесть в математической модели влияние эндогенных факторов достаточно сложно, так как затруднительно объективно определить количество выделяемой моллюсками слизи за единицу времени, например, за одни сутки или получить значение чистого веса в каждый конкретный временной отрезок. Однако формализация данного признака могла бы еще улучшить и уточнить построенную модель.

Также стоит отметить необходимость параметра А, который характеризует условия адаптации улиток к изменившимся условиям среды. Именно он является ключевым параметром, связанным со средним весом группы моллюсков в первые дни (вес идёт вниз). Попав в новые для себя условия, улитки должны приспособиться к окружающей среде и новому корму, на что уходит определённое время. В этот период многие моллюски в группе отказываются от пищи, что сказывается на значении среднего веса. Таким образом, была объективна доказана необходимость включения данного параметра в модель.

В период размножения (спаривания) и кладки яиц улитки также могут отказываться от еды. В эти моменты достаточно получить вес конкретных особей. Потому была введена дискретная переменная R, обозначающая количество улиток участвующих в процессе размножения по состоянию на конкретную дату, принимающая значения от 0 до 1 с шагом 0.1.

Учёт всех независимых переменных в модели RIDGE позволил ей наиболее точно предсказать значения целевой переменной — среднего веса. Другие модели показали более высокое значение ошибки, так как учитывали далеко не все переменные (LASSO в силу своего аппарата учитывала только три показателя - A, T и IN1) или в силу ограниченности своего аппарата (как линейная регрессия). Тем не менее доказано, что учет всех количественных и качественных факторов влияет более значительно, чем стохастическое уменьшение ошибки, как для модели SGD регрессии.

Таким образом, можно сделать вывод, что RIDGE регрессия показала лучшие результаты для моделирования данных продукционного процесса виноградной улитки.

## Литература

1. *Ткаченко, И. А.* Моделирование продукционного процесса виноградной улитки при помощи регрессионных моделей / Ткаченко И. А., Ткаченко С. Н., Копытов Г. В. // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. сборник трудов Международной научной конференции. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет». – 2020. – С. 1121–1125.

2. *Ткаченко, И. А.* Влияние рациона и параметров окружающей среды на вес улитки Helix Pomatia (LINNAEUS 1758) в условиях искусственного разведения / И. А. Ткаченко, В. П. Дедков, С. Н. Ткаченко // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. – 2018. – № 6 (68). – С. 34–42.

3. *McKinney, W.* Python for Data Analysis Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython / W. McKinney. – O'Reilly, 2017 – 960 p.

4. *Gheyas, I. A.* A Neural Network Approach to Time Series Forecasting / I. A. Gheyas, L. S. Smith // Proceedings of the World Congress on Engineering, London, – 2009. – V. 2. – P. 1292–1296.

5. Scikit-learn. Machine Learning in Python – 2020. – [Электронный ресурс]. URL: https://scikit-learn.org/stable/index.html (дата обращения 04.09.2020).

6. *Demir-Kavuk, O.* Prediction using step-wise L1, L2 regularization and feature selection for small data sets with large number of features / Demir-Kavuk, O., Kamada, M., Akutsu, T., & Knapp, E. // BMC Bioinformatics, – 2011. – Vol. 12. – P. 412-422.

7. *Никулин, В. Н.* Методы балансировки и нормализации данных для улучшения качества классификации / В. Н. Никулин, И. С. Канищев, И. В. Багаев // Компьютерные инструменты в образовании. – 2016. – № 3. – С. 16–24.

УДК 614.849

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОЖАРНЫХ РИСКОВ В ЖИЛОМ СЕКТОРЕ НА ОСНОВЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**С. Н. Тростянский, Е. Р. Лихачев**

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»*

**Аннотация.** Проведена оценка возможности среднесрочного прогнозирования интегральных пожарных рисков в жилом секторе. В работе использовался статистический анализ панельных данных по регионам Российской Федерации для моделей со случайными эффектами. Панельные данные включают в себя регистрируемые за многолетний период наборы региональных социально-экономических показателей, а также региональные показатели пожарных рисков и времени оперативного реагирования на пожары со стороны подразделений ГПС МЧС России.
**Ключевые слова:** прогнозирование, интегральные пожарные риски, эконометрический анализ, панельные данные, модели со случайными эффектами.

## Введение

Для выработки долгосрочной стратегии управления пожарными рисками в жилом секторе регионов Российской Федерации (РФ), с целью их минимизации, актуально исследование возможностей среднесрочного прогнозирования этих рисков. В настоящей работе для среднесрочного прогнозирования влияния социально-экономических факторов на интегральные пожарные риски в жилом секторе регионов РФ, использовался эконометрический подход с применением статистического анализа панельных данных для моделей со случайными эффектами [1]. Информационную базу для анализа составили панельные данные по 82 регионам РФ (исключен 1 регион, не имеющий полного набора данных) за 2006–2012 гг. Информация по пожарной статистике и показателям времени оперативного реагирования на пожары была получена из данных регистрируемых Государственной противопожарной службой МЧС России, а социальные и экономические показатели для регионов и показатели инфляции были взяты из публикаций Росстата.

При прогнозировании интегральных пожарных рисков целесообразно включить в модели со случайными эффектами только те независимые переменные, которые определяют детерминирующие пожары факторы, а сами не зависят от пожарных рисков. Причем для этих переменных должна существовать возможность корректной оценки и задания их значений для прогнозируемого года и региона.

## 1. Результаты, полученные на основе панельных данных

Построим в линейном приближении следующие модели для прогнозирования на $m$ лет интегральных пожарных рисков в зависимости от планируемых или прогнозируемых на $m$ лет факторов, детерминирующих эти пожарные риски:

$$R_{1i(t+m)} = c_{1t}D_{i(t+m)} + c_{2t}J_{i(t+m)} + c_{3t}A_{i(t+m)} + c_{4t}Z_{i(t+m)} + c_{5t}G_{i(t+m)} + c_{6t}S_{i(t+m)} + c_{7t}T_{i(t+m)} + c_{8t}\tau_{i(t+m)} + C_1, \quad (1)$$

$$R_{3i(t+m)} = d_{1t}D_{i(t+m)} + d_{2t}J_{i(t+m)} + d_{3t}A_{i(t+m)} + d_{4t}Z_{i(t+m)} + d_{5t}G_{i(t+m)} + d_{6t}S_{i(t+m)} + d_{7t}T_{i(t+m)} + d_{8t}\tau_{i(t+m)} + C_2, \quad (2)$$

где нижние индексы $i$ и $t$ (или $t+m$) обозначают регион и год соответственно.

В уравнении (1) $R_{1i(t+m)}$ — риск столкновения человека с пожаром в жилом секторе за прогнозируемый год. В уравнении (2) $R_{3i(t+m)}$ — риск гибели человека при пожаре в жилом секторе за прогнозируемый год. $R_{1i(t+m)}$ и $R_{3i(t+m)}$ являются зависимыми переменными. Независимые переменные в (1) и (2): $D_{i(t+m)}$ — средние денежные доходы населения в тыс. рублей, с учетом инфляции относительно 2006 года; $J_{i(t+m)}$ — коэффициент Джини; $A_{i(t+m)}$ — число больных с впервые в жизни установленным диагнозом психотического расстройства, взятых под диспансерное наблюдение, приходящихся на $10^5$ человек населения; $Z_{i(t+m)}$ — доля ветхого и аварийного жилья; $G_{i(t+m)}$ — доля городского населения; $S_{i(t+m)}$ — доля студентов образовательных учреждений высшего профессионального образования в населении региона; $T_{i(t+m)}$ — средняя температура в январе (в °C); $\tau_{i(t+m)}$ — среднее время (в минутах) прибытия на пожар первых пожарных подразделений. Все вышеперечисленные переменные относятся к $i$-му региону. $C_j$ — постоянная, включающая неучтенные факторы.

Коэффициенты $c_{jt}$ и $d_{jt}$ в уравнениях (1) и (2) находятся с помощью обобщенного метода наименьших квадратов на основе ретроспективных панельных данных за период $T > 3$ лет до года $t$, а за значения детерминирующих факторов принимаются оцениваемые значения этих факторов на прогнозируемый год $t+m$.

Вычисленные значения коэффициентов $c_{jt}$ и $d_{jt}$ для пожарных рисков $R_1$ и $R_3$ за 2012 год, представленные в соответствии с моделями (1) и (2), приведены в табл. 1 с указанием величины стандартной ошибки (в скобках), значимости $(z)$ и доверительной вероятности $(p)$. Расчет проведен на основе панельных данных по жилому сектору регионов России за 2006–2010 годы (панель 1). При этом в (1) и (2) индекс $t$ соответствует 2010 году, а $m = 2$. Для сравнения в табл. 1 также приведены аналогичные результаты, вычисленные по панельным данным за 2006–2012 годы (панель 2), индекс $t$ соответствует 2012 году, а $m = 0$. Расчет проведен с применением программы DPD98 [2]. Для асимптотической состоятельности получаемых оценок необходимо, чтобы было достаточное число временных периодов $(T > 4)$ и большое число объектов $(N_{об} > T)$.

Таблица 1

Результаты применения моделей со случайными эффектами для пожарных рисков $R_1$ и $R_3$ в жилом секторе регионов России за 2012 год на основе анализа панелей 1 и 2

| **Факторы** | **Модель (1)**<br>уравнение (1) для $R_{1i(t+m)}$ [пожар/($10^3$ человек · год)] | **Модель (2)**<br>уравнение (2) для $R_{3i(t+m)}$ [жертва/($10^5$ человек · год)] |
|---|---|---|
| **1** | **2**<br>верхний набор значений получен из панели 1 $(m = 2)$; нижний набор значений получен из панели 2 $(m = 0)$ | **3**<br>верхний набор значений получен из панели 1 $(m = 2)$; нижний набор значений получен из панели 2 $(m = 0)$ |
| $D_{i(t+m)}$ [тыс.руб] | –0,0395397 $p = 0,000$<br>(0,0062484) $z = -6,33$<br>–0,0506747 $p = 0,000$<br>(0,0046673) $z = -10,86$ | –0,3922951 $p = 0,000$<br>(0,0690578) $z = -5,68$<br>–0,4769852 $p = 0,000$<br>(0,0519816) $z = -9,18$ |
| $J_{i(t+m)}$ | –0,7731285 $p = 0,341$<br>(0,8112281) $z = -0,95$<br>1,786367 $p = 0,000$<br>(0,2572431) $z = 6,94$ | –8,784987 $p = 0,334$<br>(9,098219) $z = -0,97$<br>11,10616 $p = 0,000$<br>(2,989159) $z = 3,72$ |
| $A_{i(t+m)}$ [больных/105 человек] | 0,0016536 $p = 0,000$<br>(0,0002426) $z = 6,82$<br>0,0023161 $p = 0,000$<br>(0,0002233) $z = 10,37$ | 0,0185021 $p = 0,000$<br>(0,0027073) $z = 6,83$<br>0,0256531 $p = 0,000$<br>(0,002522) $z = 10,17$ |

| | | |
|---|---|---|
| $Z_{i(t+m)}$ [%] | 0,0019524 $p = 0,746$<br>(0,0060305) $z = 0,32$<br>0,0004308 $p = 0,949$<br>(0,0066894) $z = 0,06$ | –0,0285728 $p = 0,677$<br>(0,0686844) $z = -0,42$<br>0,1054026 $p = 0,175$<br>(0,0776331) $z = 1,36$ |
| $G_{i(t+m)}$ [%] | 0,0167498 $p = 0,000$<br>(0.0035004) $z = 4,79$<br>0,015856 $p = 0,000$<br>(0,003105) $z = 5,11$ | 0,1449518 $p = 0,000$<br>(0,0362943) $z = 3,99$<br>0,1353536 $p = 0,000$<br>(0,0320392) $z = 4,22$ |
| $S_{i(t+m)}$ [%] | 0,0143899 $p = 0,182$<br>(0,0107893) $z = 1,33$<br>0,01909 $p = 0,092$<br>(0,0113372) $z = 1,68$ | 0,3143834 $p = 0,008$<br>(0,1194473) $z = 2,63$<br>0,1043453 $p = 0,407$<br>(0,1259152) $z = 0,83$ |
| $T_{i(t+m)}$ [°C] | 0,0016947 $p = 0,145$<br>(0,001162) $z = 1,46$<br>0,0005929 $p = 0,654$<br>(0,001322) $z = 0,45$ | 0,0202411 $p = 0,125$<br>(0,0132059) $z = 1,53$<br>0,015954 $p = 0,298$<br>(0,0153224) $z = 1,04$ |
| $\tau_{i(t+m)}$ [мин.] | 0,0049291 $p = 0,032$<br>(0,0022954) $z = 2,15$<br>0,0078335 $p = 0,001$<br>(0,0023079) $z = 3,39$ | 0,1245049 $p = 0,000$<br>(0,0261543) $z = 4,76$<br>0,1723768 $p = 0,000$<br>(0,0268534) $z = 6,42$ |
| $C_j$ | 0,3191333 $p = 0,403$<br>(0,381902) $z = 0,84$<br>–0,6638575 $p = 0,006$<br>(0,2404367) $z = -2,76$ | 3,254277 $p = 0,432$<br>(4,14283) $z = 0,79$<br>–4,535053 $p = 0,070$<br>(2,50244) $z = -1,81$ |
| $R^2$ — коэффициент детерминации | within = 0,3719<br>between = 0,2603<br>overall = 0,2656<br>within = 0,4811<br>between = 0,2697<br>overall = 0,2917 | within = 0,3778<br>between = 0,2751<br>overall = 0,2808<br>within = 0,4485<br>between = 0,3142<br>overall = 0,3299 |
| Тест Ваальда, $\chi_j$ | 213,70<br>468,35 | 221,20<br>424,24 |

Об адекватности моделей 1 и 2 свидетельствуют высокие значения статистики Ваальда. При этом, как видно из табл. 1, для моделей, полученных на основе данных панели 2 значения статистики Ваальда выше, что связано с большим объемом данных в этой панели.

## 2. Анализ возможностей среднесрочного прогнозирования пожарных рисков

Проведем анализ на изменение за прогнозируемый двухлетний период для значений коэффициентов при независимых переменных, с высокими значениями доверительной вероятности $p$ ($p = 0{,}000$), что свидетельствует о значимой зависимости $R_{1i(t+m)}$ и $R_{3i(t+m)}$ от этих коэффициентов. Для этого вычислим относительное изменение значений соответствующих коэффициентов, полученных на основе данных панелей 1 и 2, по формуле: $\delta k_j = \frac{\left| k_{j(2012)} - k_{j(2010)} \right|}{k_{j(2012)}} \cdot 100\ \%$. При этом найдены следующие значения: $\delta c_1 = 21{,}9\ \%$; $\delta c_3 = 28{,}6\ \%$; $\delta c_5 = 5{,}6\ \%$; $\delta d_1 = 17{,}4\ \%$; $\delta d_3 = 27{,}8\ \%$; $\delta d_5 = 7{,}0\ \%$; $\delta d_8 = 27{,}7\ \%$.

Относительные ошибки оценки самих этих коэффициентов $\Delta k_{jt} = \frac{1}{z} 100\ \%$, полученных по данным панели 1: $\Delta c_{1(2010)} = 15{,}8\ \%$; $\Delta c_{3(2010)} = 14{,}7\ \%$; $\Delta c_{5(2010)} = 20{,}9\ \%$; $\Delta d_{1(2010)} = 17{,}6\ \%$; $\Delta d_{3(2010)} = 14{,}6\ \%$; $\Delta d_{5(2010)} = 25{,}0\ \%$; $\Delta d_{8(2010)} = 21{,}0\ \%$. Эти значения примерно согласуются с величинами соответствующих $\delta k_j$. Относительные ошибки оценки $\Delta k_{jt}$ для соответствующих коэффициентов, полученных по данным панели 2, оказываются несколько ниже: $\Delta c_{1(2012)} = 9{,}2\ \%$; $\Delta c_{3(2012)} = 9{,}6\ \%$; $\Delta c_{5(2012)} = 19{,}5\ \%$; $\Delta d_{1(2012)} = 10{,}8\ \%$; $\Delta d_{3(2012)} = 9{,}8\ \%$; $\Delta d_{5(2012)} = 23{,}6\ \%$; $\Delta d_{8(2012)} = 15{,}5\ \%$.

Таким образом, максимальные относительные ошибки $\delta k_j$ и $\Delta k_{jt}$ для коэффициентов с высокими значениями доверительной вероятности в прогностических моделях (1) и (2) за прогнозируемый двухлетний период, для $R_1$ не превышают 29 %, а для $R_3$ не превышают 28 %.

Сравнение экспериментальных значений $R_{1e}$ и $R_{3e}$, полученных из пожарной статистики для жилого сектора РФ в целом за 2012 год и значений $R_{1m}$ и $R_{3m}$, полученных из расчетов по моделям 1 и 2, на основе данных панели 1 показало, что модули относительных ошибок результатов моделирования значений интегральных пожарных рисков составляют: $\Delta R_1 = \frac{|R_{1e2012} - R_{1m2012}|}{R_{1e2012}} \cdot 100\ \% = 12{,}6\ \%$; $\Delta R_3 = \frac{|R_{3e2012} - R_{3m2012}|}{R_{3e2012}} \cdot 100\ \% = 2{,}8\ \%$; при этом относительное изменение с 2010 по 2012 год величин интегральных пожарных рисков: $\delta R_1 = \frac{|R_{1e2012} - R_{1e2010}|}{R_{1e2012}} \cdot 100\ \% = 13{,}6\ \%$; $\delta R_3 = \frac{|R_{3e2012} - R_{3e2010}|}{R_{3e2012}} \cdot 100\ \% = 13\ \%$.

## Заключение

Результаты анализа панельных данных по регионам России, включающих пожарную статистику в жилом секторе и статистику набора региональных социально-экономических показателей, а также показателей времени оперативного реагирования ГПС МЧС РФ на пожары, на основе моделей со случайными эффектами, позволяют представить количественные зависимости риска столкновения человека за год с пожаром в жилом секторе и риска гибели человека за год при пожаре в жилом секторе, как линейные функции от набора соответствующих региональных показателей. Анализ возможностей использования моделей со случайным эффектом для среднесрочного прогнозирования интегральных пожарных рисков показывает, что величина ошибок прогноза позволяет дать значимую информацию. Таким образом, модели со случайным эффектом могут быть использованы для среднесрочного прогнозирования интегральных пожарных рисков $R_1$ и $R_3$ в жилом секторе. Подобные прогнозы являются наиболее перспективными при резких изменениях социально-экономических факторов.

## Литература

1. *Магнус, Я. Р.* Эконометрика. Начальный курс / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. – М. : Дело, 2004. – 576 с.

2. *Arellano, M.* Dynamic Panel Data Estimation Using DPD98 for Gauss: a Guide for Users / M. Arellano, S. Bond. – Institute for Fiscal Studies, London, 1998. – 46 p.

УДК 532.613.5

# МЕТАСТАБИЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКЦИИ МАРАНГОНИ

**А. И. Федюшкин**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

**Аннотация.** В данной работе на основе численного моделирования показано влияние термокапиллярной и гравитационной конвекций на деформацию и положение границы раздела в двухслойной системе «воздух-вода» при внезапном боковом нагреве. Показано, что равновесное положение границы раздела в двухслойной системе «воздух-вода» параллельное потоку тепла (массы) при наличии термокапиллярной (концентрационно-капиллярной) конвекции в невесомости является метастастабильным. Гравитационная конвекция (даже при наличии термо-капиллярной конвекции) обладает стабилизирующим фактором для горизонтального положения свободной границы.
**Ключевые слова:** свободная поверхность, метастабильность, конвекция Марангони.

## Введение

Объемы жидкости со свободными поверхностями могут образовывать различные формы: равновесные, неравновесные, устойчивые, неустойчивые, в том числе метастабильные, а также состояния свободных поверхностей могут быть стационарными и нестационарными. Метастабильное состояние физической системы — это состояние квазиустойчивого равновесия. Система в метастабильном состоянии может находиться длительное время при не очень больших возмущениях, в отличие от неустойчивого равновесия. И в отличие от устойчивого состояния равновесия механической системы, метастабильное равновесие может терять устойчивость при определенных конечных (не малых) возмущениях. Метастабильные состояния физических систем широко известны, и проявляются в разных физических процессах, например, при неравновесных фазовых переходах, как ликвация магмы и металлов; как гистерезисы при вязкоупругой деформации материалов, в магнитной и квантовой физике, в термодинамике и в других областях.

Конвекция, в том числе и конвекция Марангони, стремится выровнять и минимизировать энергетический потенциал жидкостной системы. Конвективные течения могут влиять на положение свободной поверхности. Форма свободной поверхности зависит от условий окружающей среды и свойств жидкости [1]. Равновесное состояние жидкого объёма соответствует минимуму потенциальной энергии, вследствие чего площадь свободной поверхности сокращается до минимально возможной под действием сил межмолекулярного взаимодействия [1, 2]. Силы поверхностного натяжения жидкости во взаимодействии с силами давления, вязкости создают энергетически выгодную форму жидкого объёма. На форму жидкости, находящейся в ограниченном объёме, могут влиять: конвекция, размеры и соотношение объёмов газа и жидкости, краевой угол смачивания [1–4]. В условиях невесомости влияние поверхностных сил на форму свободной поверхности обычно проявляется сильнее, чем в земных условиях и в этом случае конвекция Марангони может играть доминирующую роль [1, 3]. Устойчивость тепловой и концентрационной конвекции Марангони и ее влияние на деформацию свободной поверхности показано во многих работах, например, в [4–7]. Конвекция Марангони может иметь пороговый эффект [3–5]. Причинами порогового эффекта изменения конвекции Марангони могут быть различные условия, например, направления подводимых потоков тепла или (и) концентрации [3], реологические свойства жидкости [5], внешние условия (гравитационные, электромагнитные поля), а также условия смачиваемости, если присутствуют контактирующие с жидкостью твердые тела [1, 3]. Изучение поведения свободной поверхности в двухслойных жидких системах важно не только для фундаментальных исследований гидродинамики, но и для решения многих прикладных задач, например, для авиации и космонавтики (положение топлива в баках самолетов и ракет при изменении силы гравитации), здравоохранения, химической промышленности, для технологий получения материалов и лекарств, и т. д.

В данной работе на основе численного моделирования показано что, положение границы раздела в двухслойной системе «воздух-вода» параллельное потоку тепла (массы) при наличии термокапиллярной (концентрационно-капиллярной) конвекции в невесомости является метастастабильно неустойчивым. Горизонтальное положение свободной поверхности в земных условиях при наличии гравитационной конвекции является устойчивым.

## 1. Постановка задачи

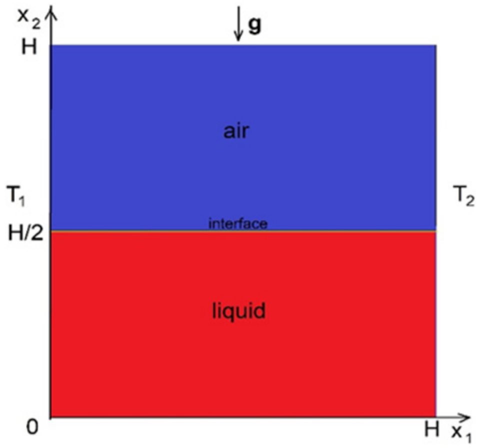



*Рис. 1. Схема расчетной области и начальное распределение фаз*

Рассмотрена задача о влиянии внезапного нагрева двухслойной системы «воздух-вода» в квадратной полости с границами без трения (с проскальзыванием) на форму границы раздела при термокапиллярной конвекции без гравитационной конвекции (ускорение силы тяжести $g = 0$), а также и с наличием гравитационной конвекции ($g \neq 0$). Математическая модель основана на системе уравнений Навье — Стокса для двухфазной системы «воздух-вода» в квадратной области. Схема модели представлена на рис. 1. В начальный момент граница раздела плоская и горизонтальная. Вода занимает половину области, как показано на рис.1. Граничные условия на поверхности раздела «вода-воздух» в виде равновесия поверхностных сил и давления. Моделирование изменения формы границы раздела «воздух-вода» выполнялось, используя VOF-модель жидких объемов (*VOF — Volume Of Fluid метод*).

## 2. Математическая модель

Математическая модель основана на численном решении системы нестационарных уравнений Навье-Стокса для двухфазной системы «жидкость-газ» с уравнением переноса энергии. Используется модель VOF (Volume Of Fluid) метод для определения интерфейса «жидкость-газ» [8]. Для этого решается уравнение переноса доли газовой фракции. Численное решение осуществляется методом контрольных объёмов.

Численная модель основана на решении уравнений Навье — Стокса для двухкомпонентной системы «вода-воздух». Систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$div\ \mathbf{U} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \rho g_j + F_j$$

$$\frac{\partial \rho_\alpha c_{p\alpha} \varepsilon_\alpha \mathrm{T}_\alpha}{\partial \mathrm{t}} + \nabla \cdot (\rho_\alpha c_{p\varepsilon} \varepsilon_\alpha \vec{\mathrm{V}}_\alpha \mathrm{T}_\alpha) = \mathrm{div}\left(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha \nabla \mathrm{T}\right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial x_i} = F_{\varepsilon_\alpha}, \quad u_i = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha u_{i\alpha}, \quad \mu = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \mu_\alpha, \quad \sum_\alpha \varepsilon_\alpha = 1.$$

На границе вода-воздух ставится условие равновесия сил давления и сил натяжения:

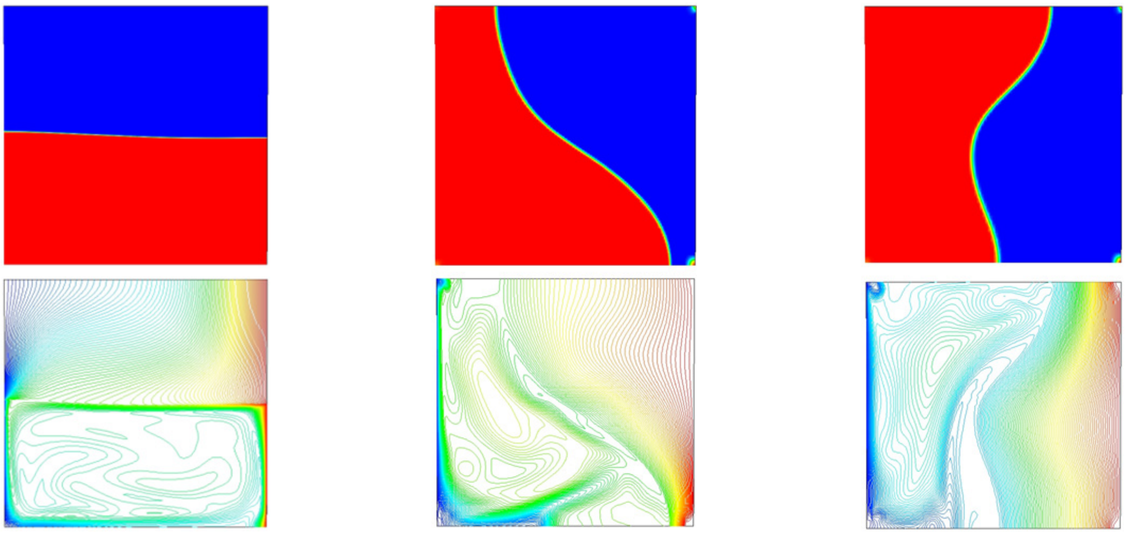
$$(p_1 - p_2 + \sigma k)\mathrm{n}_i = (\tau_{1ij} - \tau_{2ij})\mathrm{n}_j + \partial\sigma / \partial x_i$$

где $\mathbf{U}(u_1, u_2)$ — скорость, $\mathbf{F}$ — вектор сила с компонентами $F_j$, действующая на поверхности раздела несмешивающихся жидкостей («жидкость-газ») и задается из условия равновесия поверхностных сил и давления, $i$, $j$ — индексы координатных компонент, $\mathrm{n}_\alpha$ — единичный вектор нормали, $k = -\nabla \mathrm{n}_1 = 1/R_1 + 1/R_2$ — кривизна, $R_1$, $R_2$ — радиусы кривизны для поверхности раздела «жидкость-газ», $\tau_{\alpha ik}$ — тензор вязких напряжений, $\varepsilon_\alpha$ — объёмная доля, $\alpha$ — индекс фракции: $\alpha = 1$ — воздух, $\alpha = 1$ — вода. Подробнее математическая модель описана в работах [6–8].

Задача характеризуются геометрическими параметрами, относительными величинами свойств данной двухслойной системы и безразмерными числами Марангони $Ma = -\dfrac{\partial\sigma}{\partial T}\dfrac{H\Delta T}{\mu a}$, Рэлея $Ra = g\beta\rho_0\Delta T H^3 / \mu a$, Прандтля $\mathrm{Pr} = \mu\rho_0 / a$, где $\sigma$, $\beta$, $\mu$, $a$ — коэффициенты поверхностного натяжения, теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, H, $\Delta T$ — масштабы геометрии и температуры, $\rho_0$ — средняя плотность. Число Прандтля для воды было равно 7, а для воздуха 1.

### 3. Результаты

Рассмотрим случай с термокапиллярной конвекцией (рис. 1). В начальный мо-мент температура одинаковая. При мгновенном изменении разницы температур между вертикальными стенками, на поверхности раздела возникает капиллярная конвекция. Вследствие этого поверхность раздела искривляется и осциллирует во времени. Со временем, воздух и вода прогреваются. На рис. 2 показаны положения границы «воздух-вода» (вверху) и поля изотерм (внизу) для моментов времени: $t = 5$, 12.3 и 16.4 сек ($Ma = 10^6$, $Ra = 0$).



*а) $t = 5$ сек* *б) $t = 12.3$ сек* *в) $t = 16.4$ сек*

*Рис. 2. Расположение свободной поверхности (воздух синий цвет, вода — красный) (вверху) и изотерм (внизу) в разные моменты времени: до (а) и после (б, в) нарушения метастабильного равновесия свободной поверхности при $Ma = 10^6$, $Ra = 0$*

На рис. 2 представлены мгновенные положения интерфейса «воздух-вода» и изотермы для трёх моментов времени: а) $t = 5$ сек, б) $t = 12.3$ сек, в) $t = 16.4$ сек *до (а)* и после (б, в) нарушения метастабильного равновесия свободной поверхности при $Ma = 10^6$, $Ra = 0$. Видно, что интерфейс после потери метастабильной устойчивости около горизонтального положения совершает колебания около вертикали. Изотермы после прогрева приобретают преимущественно условно вертикальное направление. К этому времени условно горизонтальное положение интерфейса становится метастабильно неустойчивым. Свободная поверхность может повернуться на 90 градусов и принять энергетически выгодное преимущественно условно вертикальное положение (подстраиваясь вдоль изотерм, вдоль которых интенсивность термокапиллярной конвекции минимизируется). Нарушение метастабильного положения свободной поверхности может быть вызвано внешним кратковременным воздействием на двухслойную систему, например, такими как, вибрации или ускоренное вращение, кроме этого интенсивная капиллярная конвекция Марангони также может быть причиной нарушения метастабильного равновесия, но в последнем случае требуются большие времена.

На рис. 3 показаны изотермы (справа) и цветные изолинии значений объёмной доли жидкости (слева), осредненные по времени на интервале от $t = 0$ до $t = 16$ сек ($Ma = 10^6$, $Ra = 0$). Интерфейс совершает колебания.

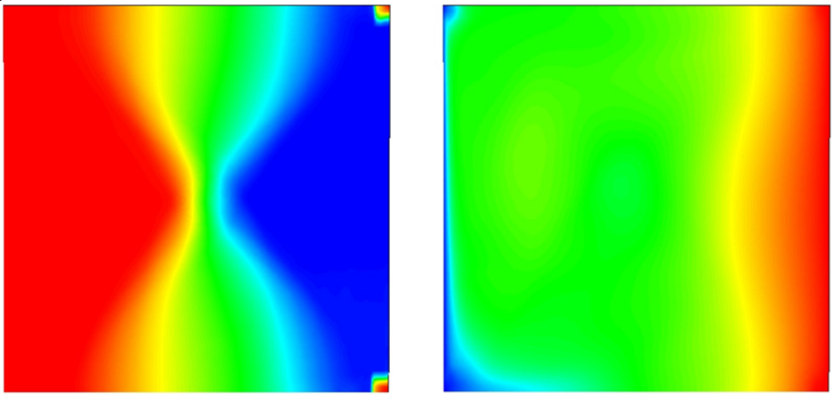


*Рис. 3. Изолинии значений объёмной доли воды (слева) (воздух синий цвет, вода — красный) и изотермы (справа) (красный — максимальные, синий — минимальные значения), осредненные по времени на интервале от $t = 0$ до $t = 16$ сек ($Ma = 10^6$, $Ra = 0$)*

На рис. 3 показаны изолинии отклонений от среднего положения интерфейса усреднённые по времени на интервале от $t = 0$ до $t = 5$ сек ($Ma = 10^6$, слева — $Ra = 0$, справа — $Ra = 10^7$). При наличии гравитационной конвекции ($Ra = 10^7$) и термокапиллярной конвекции ($Ma = 10^6$) свободная граница остается практически в горизонтальном положении (рис. 4 справа) или при «включении» гравитации переходит из состояния, изображенного на рис. 3, в состояние, изображённое на рис. 4.

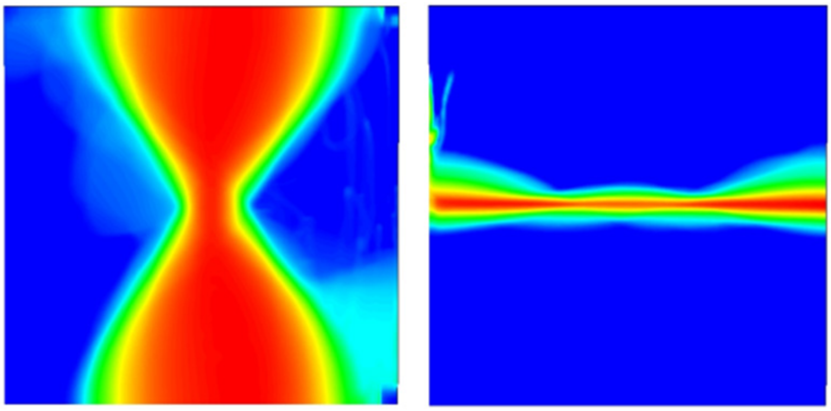


*Рис. 4. Изолинии отклонений от среднего положения интерфейса (красный – максимальные, синий – минимальные значения) усреднённые по времени на интервале от $t = 0$ до $t = 16$ сек $Ma = 10^6$ (слева — $Ra = 0$, справа — $Ra = 10^7$)*

## Заключение

При боковом нагреве двухслойной системы «воздух-вода» в объеме со свободными стенками, положение границы раздела в двухслойной системе «воздух-вода» параллельное потоку тепла (массы) при наличии термокапиллярной (концентрационно-капиллярной) конвекции в невесомости является метастастабильно неустойчивым. Гравитационная конвекция (даже при наличии термо-капиллярной конвекции) обладает стабилизирующим фактором для горизонтального положения свободной границы. На основе подобия переноса тепла и массы, результаты данной работы с термокапиллярной конвекции могут быть перенесены и на случай концентрационно-капиллярной конвекции с потоком массы, параллельным свободной поверхности.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы по теме AAA-A-A20-120011690131-7 и гранта РФФИ № 20-04-60128

## Литература

1. *Мышкис, А. Д.* Гидромеханика невесомости / А. Д. Мышкис (ред), В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский [и др]. – М. : Наука, 1976. – 504 с.

2. *Ландау, Л. Д.* Гидродинамика / Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. – М. : Наука, ГРФМЛ. – 2000. – 733 с.

3. *Полежаев, В. И.* Конвективные процессы в невесомости / В. И. Полежаев, М. С. Белло, Н. А. Верезуб [и др]. – М. : Наука, 1991. – 240 с.

4. *Братухин, Ю. К.* Гидродинамическая устойчивость межфазных поверхностей / Ю. К. Братухин, С. О. Макаров. – Пермь : Перм. ун-та, 2005. – 239 с.

5. *Birikh, R. V.* Modeling of the Marangoni Instability of Uniform Diffusion through an Interface in Weightlessness Conditions. / R. V Birikh., M. O. Denisova, K. G. Kostarev // J Appl Mech Tech Phy. – 2019. – V. 60. – P. 1264–1277. – https://doi.org/10.1134/S0021894419070034

6. *Fedyushkin, A. I.* The effect of convection on the position of the free liquid surface under zero and terrestrial gravity / A. I. Fedyushkin //J. Phys. Conf. Ser. – 2020. (в печати).

7. *Fedyushkin, A. I.* Numerical simulation of gas-liquid flows and boiling under effect of vibrations and gravity / A. I. Fedyushkin // J. Phys.: Conf. Ser. 1479 012094. – 2020. doi:10.1088/1742-6596/1479/1/012094

8. *Федюшкин, А. И.* Коалесценция капель ньютоновской жидкости / А. И. Федюшкин, А. Н. Рожков // Препринт ИПМех РАН. – Москва, 2014. – № 1087. – 27 с.

УДК 519.25

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В КАРДИОЛОГИИ

**М. А. Фирюлина, И. Л. Каширина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В современном мире искусственный интеллект и машинное обучение затрагивают многие области жизнедеятельности. Медицина не исключение, она является одним из самых важных направлений применения интеллектуальных технологий. В данной статье рассматривается опыт построения моделей машинного обучения в кардиологии и обсуждаются особенности их разработки, проводится анализ различных алгоритмов машинного обучения, применяемых в задачах кардиологической практики, исследуются способы повышения их точности и эффективности.

**Ключевые слова:** машинное обучение, искусственный интеллект, кардиология, сердечно-сосудистые заболевания, анализ медицинских данных.

## Введение

Как известно, среди причин смертности населения наибольший процент составляют сердечно-сосудистые заболевания (ССЗ) (более 30 %) [1]. Именно поэтому внедрение улучшенных методов обследования пациентов с помощью современных информационных технологий играет важную роль в развитии кариологии. Данному вопросу посвящено много исследований, как в России, так и за рубежом [2]. Использование искусственного интеллекта (ИИ) и методов машинного обучения в кардиологии должно обеспечить набор инструментов для увеличения и расширения эффективности лечения пациентов с ССЗ.

Существует ряд причин, оправдывающих необходимость в этом. Многие ССЗ, такие как ишемическая болезнь сердца, аритмия, инфаркт миокарда, требуют распознавания и принятия соответствующих профилактических мер на ранних стадиях. Не всегда можно установить точный диагноз на основе стандартных клинических исследований. Использование систем ИИ поможет быстрее установить диагноз, сократив при этом время на дополнительные исследования. Передача биометрических данных через мобильные устройства, поможет пациентам самостоятельно контролировать состояние своего здоровья и оповещать в случае наступления факторов риска ухудшения состояния [3].

Внедрение искусственного интеллекта в сердечно-сосудистую медицину повлияет на все аспекты кардиологии, от исследований и разработок до клинической практики и здоровья населения. На рис. 1 изображена схема, каким образом ИИ внедряется в сферу медицинских технологий.

Большое число работ во всем мире посвящено выявлению предикторов риска заболеваний сердечно-сосудистой системы [4]. Для более точного и полного анализа необходим достаточный объем данных. Начатая в последние годы информатизация медицинских учреждений в России привела к тому, что именно сейчас, в текущий момент, накопились большие массивы данных. Также сейчас появилась возможность использовать международные открытые базы данных, позволяющие проводить настройку алгоритмов машинного обучения для прогнозирования сердечно-сосудистого риска. Например, MIMIC-III («Медицинский информационный центр для интенсивной терапии») объединяет клинические данные пациентов, поступивших в медицинский центр Beth Israel Deaconess в Бостоне, и делает его широко доступным для исследователей на международном уровне [5]. Согласно этим данным, три наиболее частых диагноза пациентов центра интенсивной терапии — это острый инфаркт миокарда, артериальная гипертония и атеросклероз, которым предполагается уделить особое внимание в настоящем исследовании.

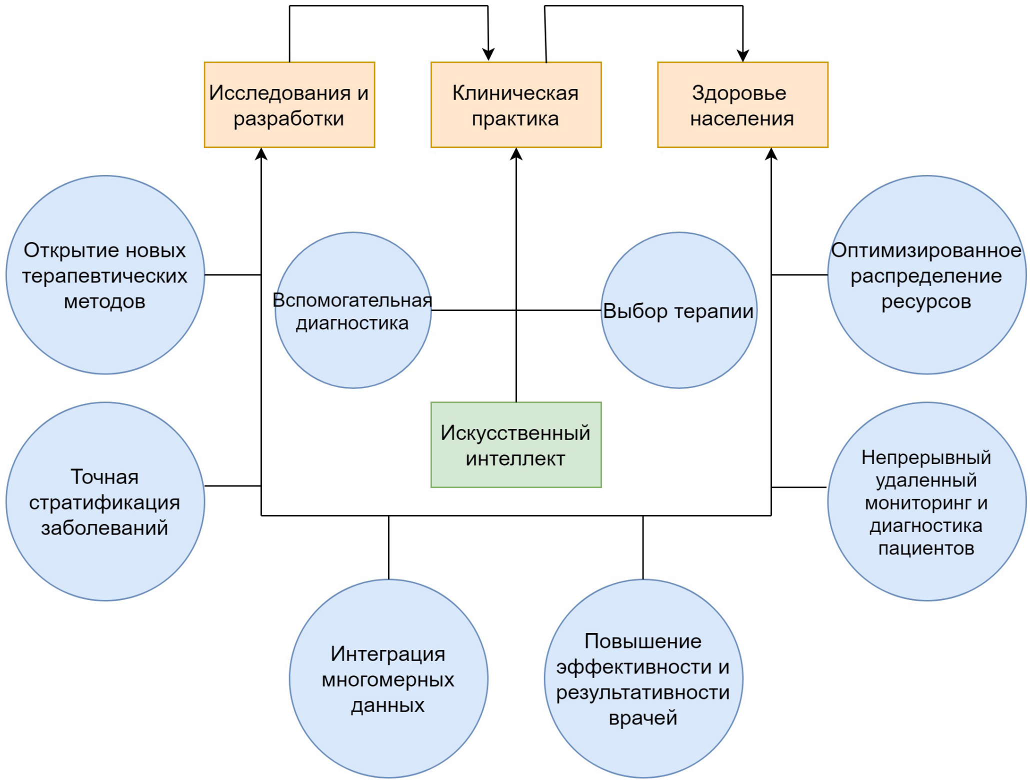



*Рис. 1. Роль искусственного интеллекта в сердечно-сосудистой медицине*

В данной статье предлагается обзор исследований, проделанных ее авторами в области разработки моделей машинного обучения для различных задач в сфере кардиологии. Все описанные модели и методы разработаны на основе неперсонифицированных данных, предоставленных кардиологическими отделениями различных медицинских учреждений Воронежской области. В данной статье описываются рассмотренные задачи и полученные результаты в рамках проведенных исследований. А также обсуждается перспектива практического использования полученных результатов для разработки программного комплекса автоматизированного рабочего места врача кардиолога.

## 1. Описание решенных задач

В ходе исследования «Разработка и исследование методов машинного обучения в задачах диагностики и сопровождения пациентов с заболеваниями сердечно-сосудистой системы» было рассмотрено и реализовано несколько задач.

1. Разработаны модели и алгоритмы прогнозирования развития инфаркта миокарда (ИМ) на определённую дату в зависимости от исходных клинических характеристик больного и с учётом мониторинга метеорологических данных. Были проанализированы данные Воронежского областного регистра инфарктов миокарда, содержащие деперсонифицированую информацию обо всех пациентах, поступивших с диагнозом инфаркт миокарда в больницы Воронежской области в 2014–2017 гг. Исходная выборка была дополнена метеорологическими данными. Набор данных содержит описание 14633 случаев инфаркта миокарда, из них 2451 с летальным исходом (16.8 %).

2. Разработан комплекс моделей и алгоритмов прогнозирования риска одногодичной смертности после ИМ, отличающихся учётом закономерностей влияния социально-демографических и клинических факторов, метеорологических данных, а также качества оказания медицинской помощи. Для получения наиболее достоверных результатов исходная выборка из

п. 1. была дополнена информаций о зарегистрированных смертельных случаях после выписки пациентов на основе данных, предоставленных ВОКБ № 1. Случаи смертельного исхода через несколько дней после выписки важны для анализа [6].

3. Разработана модель прогнозирования возникновения определенных типов мерцательной аритмии. Исследование проводилось на данных о пациентах, представленные ВОКБ № 1 г. Воронежа. Исходный файл содержал информацию по 39 атрибутам, характеризующим состояние пациентов. Прогнозируемая переменная — форма мерцательной аритмии, имеет три различных значения: постоянная, пароксизмальная, персистирующая. Причем постоянная сложнее всего поддается терапии и существенно ухудшает качество жизни пациентов, поэтому важно выделить класс пациентов, находящихся в зоне риска по развитию именно этой формы аритмии. В ходе исследования проведен анализ точности различных моделей машинного обучения. На основе методов машинного обучения были выделены персонифицированные факторы риска для пациентов с мерцательной аритмией и разработана модель, учитывающая факторы риска при выборе терапии хронических заболеваний.

4. Разработана модель оценки комплаентности, направленная на выявление приверженности пациентов с сердечно-сосудистыми заболеваниями лечению определенными группами препаратов. На основе собранных наблюдений, включающих возраст, пол пациента, причины госпитализации в стационар, наблюдаемые пациентом побочные действия препаратов, наличие выданных врачом наглядных рекомендаций, ощущение улучшения самочувствия на фоне приема препаратов, стаж артериальной гипертензии, наличие хронических сопутствующих заболевания и т. п., выявлены тенденции и закономерности влияния различных факторов на комплаентность пациентов с сердечно-сосудистыми заболеваниями. Анализ проводился по семи группам препаратов, которые были рекомендованы для дальнейшего самостоятельного приема пациентам после выписки из кардиологического стационара.

5. Разработана модель назначения лечения гипертонической болезни в кардиологическом стационаре. Исходный файл содержал данные для 262 пациентов по 83 клиническим и социально-демографическим показателям. На основе методов машинного обучения выбраны признаки, оказывающие значимое влияние на назначение определенной терапии, а также построены модели назначения терапии пациентам в кардиологическом стационаре при лечении гипертонической болезни. Модели построены для 6 основных групп препаратов, которые назначаются пациентам при стационарном лечении.

На рис. 2 изображены схематически реализованные задачи и некоторые методы, использовавшиеся для их решения. Для подготовки исходных данных, агрегирования и первичного статистического анализа использовалась СУБД Oracle 12c, для построения моделей МО и нейронных сетей использовались встроенных библиотеки языка программирования Python 3.6. Графики и диаграммы для графического анализа также строились с помощью Python 3.6. на платформе Google Colab. Дополнительные данные для исследования, такие как метеорологические показатели, скачены с архивов данных сайта rp5.ru.

## 2. Обзор методов, использованных для решения задач

1. Методы статистического анализа данных.

Статистический анализ данных используется на начальных этапах исследования. Различные методы статистического анализа данных были применены для каждой рассмотренной задачи. В качестве примера рассмотрим результаты применения статистических методов для первичного анализа данных в первой и второй задачах.

Для первых двух задач проводился поиск факторов, влияющих на зависимую переменную. Были выбраны три внешних фактора влияния для исследования: месяц, день недели, сезон. По результатам исследования можно сделать вывод, месяц и сезон влияют на среднее коли-

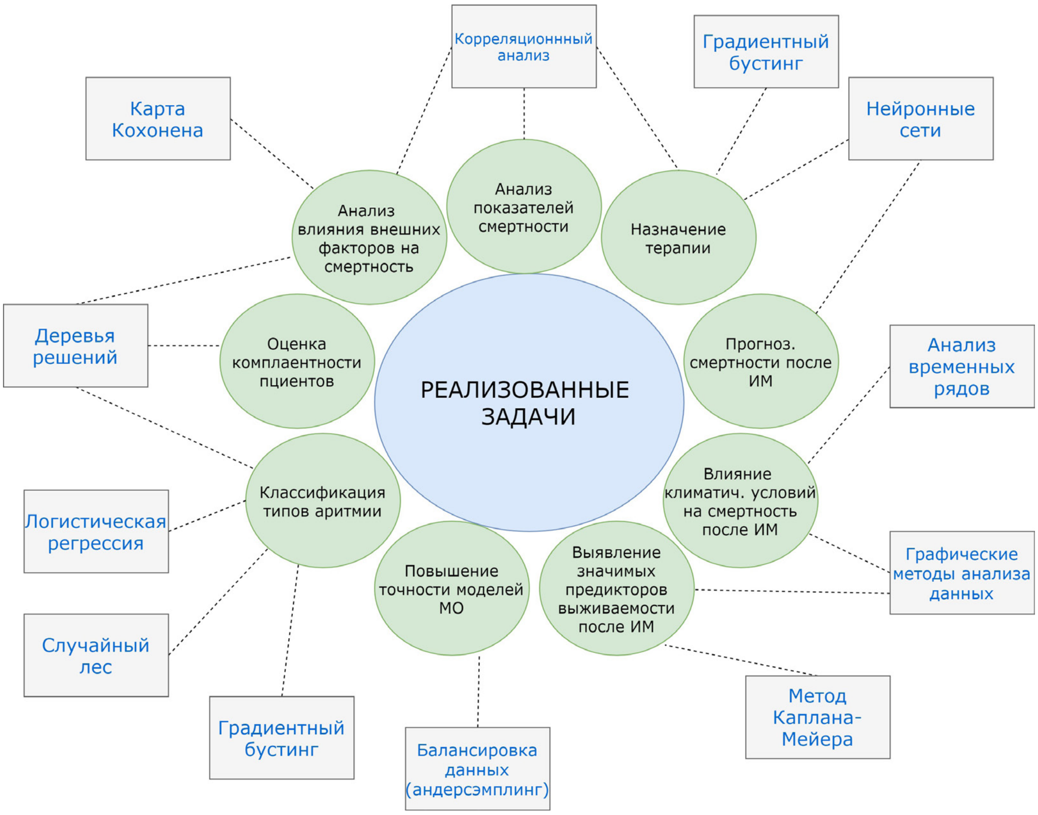



*Рис. 2. Реализованные задачи и методы их реализации*

чество умерших в этот месяц (или сезон), но общей зависимости для четырех лет выявить не удалось. Средние количества инфарктов миокарда в разные дни недели имеют значимые различия ($p < 0.05$), этом максимальное количество ИМ в Воронежской области фиксируется в понедельник, а минимальное — в выходные дни, разница количества ИМ между понедельником и выходными днями в среднем составляет около 25 %. Обнаружены корреляционные зависимости количества ИМ в день и риска смертности после ИМ от скачков температуры воздуха и атмосферного давления.

Проверка по критерию Хи-квадрат показала, что случайная величина, характеризующая среднее число инфарктов миокарда в сутки, подчиняется закону распределения Пуассона ($p > 0{,}05$), что согласуется с результатами подобных исследований в других регионах.

Одним из статистических методов оценки влияния факторов на выживаемость пациента, является метод Каплана — Мейера. Метод Каплана — Мейера производит оценку функции выживаемости, основываясь на времени выживания для полных и цензурированных данных. Период наблюдений был выбран 20 дней, так как у подавляющего большинства пациентов срок госпитализации был меньше или равен 29 суток. Для оценки различия в рассматриваемых группах использовался критерий Гехана — Вилкоксона. Анализ показал, что для последующего построения прогностической системы могут быть использованы признаки: пол, возрастная группа, является ли инфаркт миокарда повторным, локализация, есть ли в анамнезе у пациента сахарный диабет, фибрилляция предсердий, ХСН, и проводились ли ему чрескожные коронарные вмешательства (ЧКВ). В целом выживаемость пациентов значительно ниже в первые пять дней от момента наступления ИМ. Этот период является наиболее критичным.

2. Методы машинного обучения.

Главная перспектива машинного обучения в медицине состоит в том, чтобы включить данные из различных источников (клинические измерения и наблюдения, биологические данные, экспериментальные результаты, экологическая информация, носимые устройства) в модели для описания и прогнозирования заболеваний человека. Типичный рабочий процесс машинного обучения, описанный на рис. 3, начинается со сбора данных, переходит к обработке исходных данных, а затем к выбору алгоритма и разработке модели и, наконец, приводит к оценке модели и ее применению.

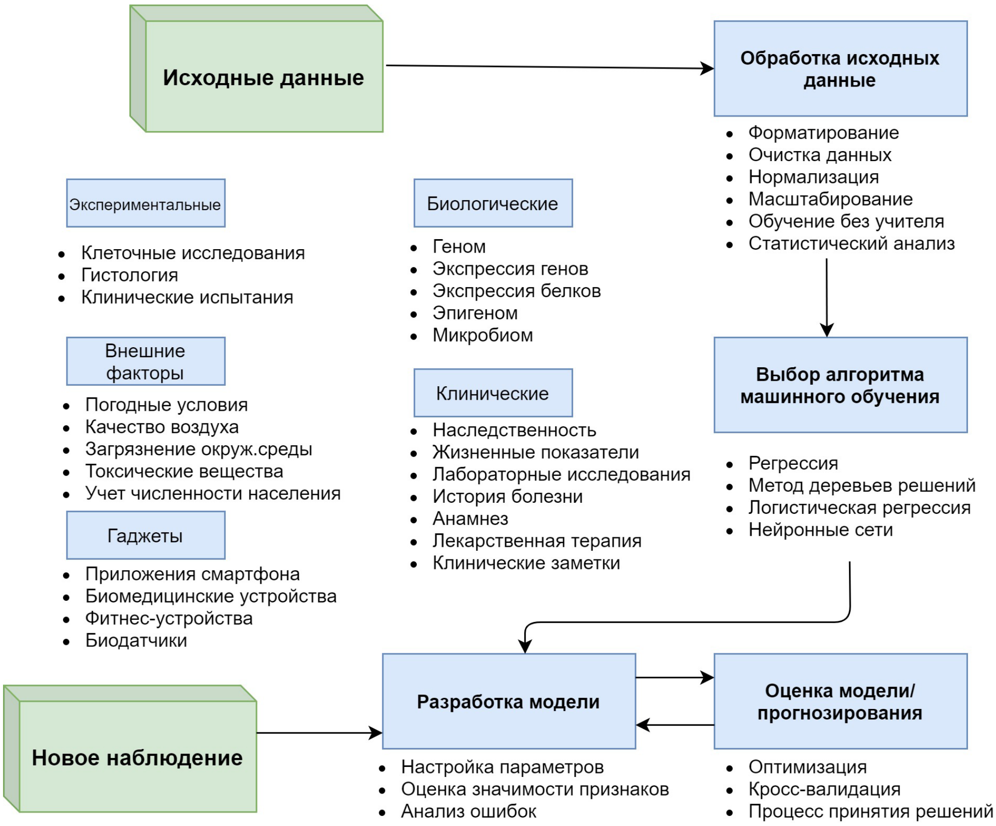



*Рис. 3. Обзор рабочего процесса машинного обучения*

Так, например, для решения задачи предсказания типа мерцательной аритмии были использованы 39 атрибутов, включающих следующие категории признаков: гемодинамические (частота сердечных сокращений), социально-демографические (пол, возраст, курильщик, GH — субъективный показатель качества жизни), лабораторные (холестерин, глюкоза, креатинин, мочевина), функциональные (фракция выброса, конечно-диастолический размер левого и правого желудочков, толщина задней стенки левого желудочка), клинические (длительность мерцательной аритмии, артериальная гипертония, стенокардия, наличие сопутствующих заболеваний) и др. — все, что может оказать влияние на тип мерцательной аритмии.

Для решения задач 1–5 использовалось несколько моделей машинного обучения. Чаще всего строились модели деревьев классификации, логистической регрессии, случайного леса и градиентного бустинга.

Деревья классификации (деревья решений) — наглядная и легко интерпретируемая модель для решения задач регрессии и классификации. Достоинствами этого метода являются: естественный учет зависимостей признаков — в случае сложных взаимодействий предикторов другие модели могут давать худшие результаты, гибкость — категориальные и числовые признаки учитываются одинаково. Деревья классификации легко интерпретировать — результат классификации можно представить в виде цепочки правил, что имеет важную роль при решении задач медицинского характера и делает этот метод одним из самых популярных в данной области.

Случайный лес — алгоритм машинного обучения, заключающийся в использовании ансамбля решающих деревьев [7]. Данный алгоритм использует механизм бутстрепа, позволяющий на основе исходного обучающего набора данных с использованием случайного отбора с повторениями сформировать несколько выборок такого же размера. При этом некоторые наблюдения могут попасть в одну из выборок несколько раз, а некоторые не попасть ни разу. Каждое из деревьев решений обучается на одной из данных выборок, используя некоторое случайное подмножество входных признаков. Каждое дерево ансамбля относит классифицируемый объект к одному из классов, и определяется класс, за который проголосовало наибольшее число деревьев. Достоинством данного алгоритма является высокая точность обучения (по сравнению с точностью отдельных деревьев).

Логистическая регрессия — это один из наиболее популярных методов линейной классификации. Результатом предсказания данного метода является вероятность того, что входной объект принадлежит к определенному классу. Это свойство важно в медицинских приложениях, где наряду с классификацией объекта требуется оценить связанный с этим риск ошибочной классификации. Кроме того, этот метод менее склонен к переобучению, чем другие методы.

Градиентный бустинг — это техника машинного обучения, основная идея которой заключается в итеративном процессе последовательного построения частных моделей. Каждая новая модель обучается с использованием информации об ошибках, сделанных на предыдущем этапе, а результирующая функция представляет собой линейную комбинацию всего ансамбля моделей с учетом минимизации некоторой штрафной функции [8]. Данный алгоритм выделяется высокой точностью, в большинстве случаев превосходящей точность остальных методов.

В табл. 2 в качестве примера приводятся результаты сравнительной эффективности описанных методов в задаче классификации формы мерцательной аритмии [9] (посчитанные для класса «постоянная аритмия»). Точность метода оценивалась методом 5-кратной кросс-проверки, так как размер предоставленной обучающей выборки недостаточно велик (всего 112 пациентов). В качестве базовых метрик в медицинских исследованиях в задачах классификации обычно используются чувствительность (доля элементов определенного класса, найденных алгоритмом), (доля элементов, правильно отмеченных алгоритмом как определенный класс) и AUC_ROC — метрика, агрегирующая чувствительность и специфичность.

Наилучшую метрику AUC_ROC по кросс-проверке в данной задаче показал, как ни странно, именно метод логистической регрессии (0.754). Возможно, этот результат как раз связан с небольшой величиной выборки, а логистическая регрессия метод, менее склонный к переобучению, чем остальные). Модель деревьев классификации в целом спрогнозировала форму аритмии хуже других методов, однако данный алгоритм выявил несколько наглядных и точных правил прогнозирования развития постоянной аритмии. В табл. 1 представлены результаты исследования.

На этапе разработки каждой модели была проведена оценка значимости признаков для сокращения числа входных предикторов. Данный шаг необходим для упрощения модели и повешения ее качества.

Таблица 1

*Метрики качества различных моделей машинного обучения*

| Метрика | Градиентный бустинг | Логистическая регрессия | Деревья решений | Случайный лес |
|---|---|---|---|---|
| Чувствительность, Recall | 0.759 | 0.727 | 0.590 | 0.595 |
| Специфичность, True Negative Rate | 0.840 | 0.760 | 0.589 | 0.691 |
| AUC_ROC (при кросс-проверке) | 0.747 | 0.754 | 0.589 | 0.688 |

### 3. Проблемы, возникающие при построении моделей машинного обучения

1. Несбалансированность.

При работе с реальной выборкой данных часто возникает ситуация, когда значений одного класса в ней намного больше (или меньше), чем значений других классов. Такие данные называются несбалансированными. Построение модели в подобной ситуации может оказаться неэффективным и погрешность на тестовыз данных будет велика. Для задач медицинского характера этап балансировки данных имеет важное значение. Преобладание количества случаев одного класса приводит к смещению модели в сторону класса большинства. Например, задача 2 (прогнозирование смертности после ИМ) относится к типу задач «раннего предупреждения» наступления события. Важнее предсказать наступление летального исхода, чем предположить, что пациент выживет и получить обратный результат.

В исходной выборке количество умерших пациентов было намного меньше, чем количество выживших, и необходимо было отбалансировать данные для корректного построения прогнозирующей модели и уменьшения ложных отрицательных результатов. Восстановление баланса можно произвести двумя способами: андерсэмплинг и оверсэмплинг. Оверсэмплинг — это дублирование примеров миноритарного класса. Андерсэмплинг — это удаление примеров мажоритарного класса. Андерсэмплинг считается наиболее простым и одновременно наиболее корректным в задачах медицинских исследований. Дублирование примеров может потенциально привести к потере информации и неточности результатов. Поэтому именно этот способ был выбран для решения задачи. Техника андерсэмплинг может быть реализована несколькими методами [10]. Чтобы достичь наибольшей корректности прогнозирования было рассмотрено пять алгоритмов и произведено сравнение точности их работы. В табл. 2 приведены результаты исследования.

Таблица 2

*Метрики качества различных стратегий сэмплинга*

| Метод | Чувствительность | Специфичность | AUC_ROC |
|---|---|---|---|
| Алгоритм случайного удаления примеров | 0.5 | 0.91 | 0.81 |
| Метод кластерных центроидов | 0.68 | 0.75 | 0.79 |
| Стратегия поиска связей Томека | 0.4 | 0.98 | 0.82 |
| Правило «очищающего соседа» | 0.15 | 0.99 | 0.75 |
| Правило сосредоточенного ближайшего соседа | 0.48 | 0.88 | 0.76 |

По результатам метрик качества модели, можно сделать вывод, что наилучшие показатели точности AUC_ROC достигаются при использовании стратегий случайного удаления и связей Томека. При этом, однако, наибольшую чувствительность обеспечивает метод кластерных центроидов (то есть он нашел 68 % пациентов в тестовой выборке, у которых впоследствии был зафиксирован летальный исход). Однако он же и продемонстрировал худщую специфичность (только 75 % процентов пациентов, которым он предсказал смерть от ИМ, на самом деле умерли)

2. Требование интерпретируемости.

Еще одна проблема заключается в том, что иногда для эффективного использования моделей машинного обучения недостаточно такого критерия оценки качества как точность. Медицина относится к таким сферам, где интерпретируемость результатов имеет важное значение. Врачам недостаточно использовать систему как «черный ящик», важно понять почему модель предсказала определенный результат.

В частности, при построении модели исследования комплаентности пациентов (задача 4) медиками было поставлено обязательное условие интерпретируемости (объяснимости и наглядности) полученных результатов. Поэтому для решения этой задачи был выбран метод построения деревьев решений. Под термином комплаентность понимается степень приверженности пациента к лечению и выполнению врачебных назначений. В процессе интерпретации данных об уровне комплаентности пациентов с ССЗ выявлены наиболее значимые признаки по каждому из семи исследуемых групп препаратов. На рис. 4 приведен пример интерпретации полученной модели по для препаратов — *антагонистов кальция* (класс 0 — пациенты, которые будут соблюдать рекомендации по лечению этими препаратами, класс 1 — нет). Из рис. 3 видно, например, что пациенты в возрасте не более 76 лет, получавшие амбулаторно эти препараты, склонны к их самостоятельному длительному приему. Наглядное представление результатов в виде деревьев решений помогает врачам понять причину возникновения проблемы и улучшить эффективность лечения, используя экспертное мнение [11].

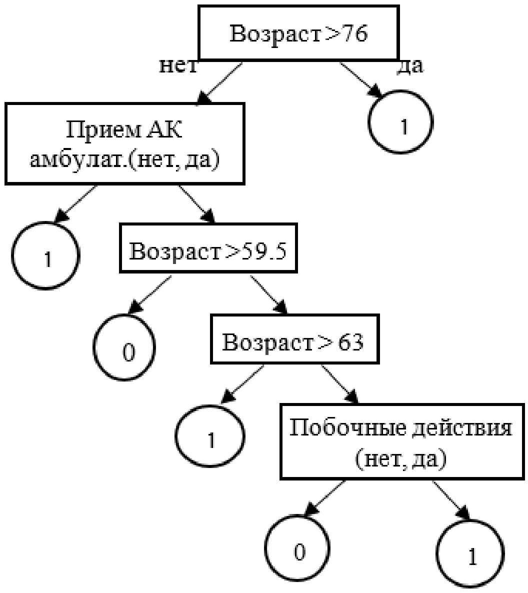



*Рис. 4. Комплаентность пациентов к антагонистам кальция*

### 4. Использование полученных результатов в практической медицине

Итоговым результатом исследования, описанного в данной работе, является разработка автоматизированного приложения для врача-кардиолога, помогающего в обследовании и лечении пациентов с профильной патологией (заболеваниями сердечно-сосудистой системы), сокращающего время на выполнение вспомогательных операций, связанных с вводом, хранением, поиском и анализом медицинских данных, с элементами поддержки принятия врачебных решений на основе искусственного интеллекта и функцией дистанционного мониторинга за состоянием больных.

На настоящий момент частично реализована информационная система, позволяющая осуществлять мониторинг данных клинического состояния пациента (уровень АД, ЧСС, массы тела, режима приема лекарственных средств, метеорологических факторов и т.п.) и на основе алгоритмов искусственного интеллекта, вырабатывать индивидуальные для каждого подключенного к системе пациента рекомендации по коррекции терапии и предотвращению обострения сердечно-сосудистого заболевания, в том числе проводя в нужный момент оповещение лечащего врача. Диаграмма взаимодействия пользователей и основных компонентов рассматриваемой автоматизированной системы приведена на рис. 5.

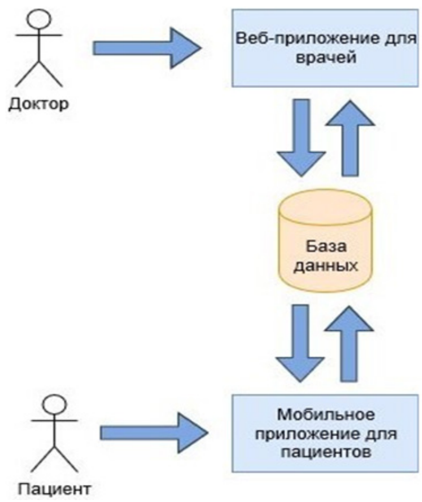



*Рис. 5. Схема взаимодействия пользователей и основных компонентов системы*

Веб-приложение разработано с помощью платформы .NET Framework 4.6.1 и Angular 6.0.2. Для хранения и обработки медицинских данных была использована СУБД MS SQL Server 2016. На текущий момент функциональность приложения заключается в создании медицинской карточки с минимально необходимой информацией о пациенте; возможности отслеживания посещения пациентом докторов с целью консультации, наблюдения, проведения диагностических или других медицинских процедур; возможности ведения списка медицинских назначений по лечению пациента. Данная система предполагает доработку существующей функциональности, а также дальнейшее расширение с учетом исходных требований к полной версии программного продукта [12].

## Заключение

С каждым новым этапом технологического прогресса, кардиология и медицина в целом становится более независима от человека и приближается к автоматизированной сфере, управляемой искусственным интеллектом. Несмотря на все сложности использования комплексов на основе машинного обучения, это значительно облегчит работу врачей, повысит эффективность диагностики и поспособствует выбору эффективных лечебных мероприятий.

В данной статье рассмотрен обзор задач, реализованных в ходе исследования «Разработка и исследование методов машинного обучения в задачах диагностики и сопровождения пациентов с заболеваниями сердечно-сосудистой системы». В настоящий момент исследование продолжается, и по мере накопления наблюдений будет произведено уточнение моделей машинного обучения, решение новых задач по назначению терапии и дополнение функционала разработанной автоматизированной системы.

## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-37-90029 Аспиранты.

## Литература

1. *Фирюлина, М. А.* Анализ показателей смертности Воронежской области в сравнении с развитыми странами / М. А. Фирюлина, И. Л. Каширина // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2018. – № 2 (25). – С. 150–153.

2. *Глазкова, Т. Г.* Оценка качества методов диагностики и прогноза в медицине / Т. Г. Глазкова // Вестник ОНЦ АМН России. – 1994. – № 2. – С. 3–11.

3. Health care using telephone and telemonitoring technology benefits heart failure patients. – URL: https://www.eurekalert.org/pub_releases/2010-08/w-hut080310.php

4. *Enquselassie, F.* Seasons, temperature and coronary disease / F. Enquselassie, A. J. Dobson, H. M. Alexander, P. Steele // Int J Epidemiol. – 1993. – № 22. – С. 632–636.

5. *Johnson, A. E.* W.et al. MIMIC-III, a freely accessible critical care database. Sci. Data 3, 160035 (2016).

6. *Каширина, И. Л.* Прогнозирование развития инфаркта миокарда на основании анализа метеорологических факторов и данных областного регистра / И. Л. Каширина, Р. А. Хохлов, А. О. Казакова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 3. – С. 116–123.

7. *Leo Breiman*. Random Forests // Machine Learning. – 2001. – P. 5–32.

8. Классификация, регрессия, алгоритмы Data Mining с использованием R / В. К. Шитиков, С. Э. Мастицкий. – 2017 – URL: https://github.com/ranalytics/data-mining (дата обращения 09.09.2020)

9. *Фирюлина, М. А.* Классификация сердечной аритмии с использованием методов машинного обучения / М. А. Фирюлина, И. Л. Каширина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики; сборник трудов Международной научно-технической конференции. – 2020. – С. 1167–1175.

10. *Garcia, S.* Evolutionary Undersampling for Classification with Imbalanced Datasets: Proposals and Taxonomy / S. Garcia, F. Herrera // Evolutionary Computation. – 2009. – № 17. – P. 275–306.

11. *Фирюлина, М. А.* Оценка комплаентности пациентов с сердечно-сосудистыми заболеваниями на основе методов интеллектуального анализа данных / М. А. Фирюлина, И. Л. Каширина, Е.В. Конобеева // Системный анализ и управление в биомедицинских системах. – 2019. – № 3. – С. 177–183.

12. *Хохлов, Р. А.* Разработка автоматизированного рабочего места врача кардиолога/ Р. А. Хохлов, М. А. Фирюлина, М. В. Демченко // Информатика: проблемы, методы, технологии Материалы XX Международной научно-методическая конференция, Воронеж. – 2020. – С. 1311–1318.

УДК 544.4

# ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КИНЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА ГРАФАХ ВОЛЬПЕРТА

**З. А. Хамидуллина, А. С. Исмагилова**

*Башкирский государственный университет*

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена моделированию кинетики сложных химических реакций. Предмет исследования работы — анализ информативности сложных химических реакций. В работе разработан теоретико-графовый метод, позволяющий определить функциональные зависимости кинетических параметров непосредственно из графа Вольперта механизма реакции. На основе предложенного алгоритма создана программа определения базиса нелинейных параметрических функций кинетических параметров химических реакций. В программе реализована теоретико-графовая интерпретация механизмов сложных химических реакций для построения моделей химических реакций.
**Ключевые слова:** сложные механизмы химических реакций, информативность, граф Вольперта, базис нелинейных параметрических функций.

## Введение

Основная проблема, возникающая при исследовании обратных задач химической кинетики — недоинформативность доступных кинетических измерений. Сложность состоит в том, что измерению доступны только исходные вещества и продукты реакции. Промежуточные вещества, которые образуются в ходе химических реакций, невозможно проанализировать. Недоинформативность приводит к неопределенности при решении обратных задач химической кинетики.

Под анализом информативности понимается определение функциональной зависимости кинетических параметров, допускающих однозначное оценивание при заданной структуре кинетического эксперимента.

В работах С. И. Спивака и В. Г. Горского определены типы неоднозначности решения обратной задачи, разработаны алгоритмы определения базиса нелинейных параметрических функций кинетических параметров[1, 2]. Речь идет об аналитических вычислениях с нелинейными выражениями, что затрудняет решаемую задачу.

Общим геометрическим описанием механизмов химических реакций стали графы Вольперта [3]. Граф Вольперта представляет собой ориентированный двудольный граф — граф, на котором указаны направления всех его ребер, и вершины которого можно разделить на два типа: вершины, характеризующие вещества ($X$- и $Y$-вершины, где $X$ — исходные вещества и продукты реакции, $Y$ — промежуточные вещества), и вершины, характеризующие реакции ($W$-вершины). Если вещество расходуется в реакции, то отрезок направлен от вершины-вещества к вершине-реакции. Если вещество образуется в реакции, то отрезок направлен от вершины-реакции к вершине-веществу. Если вещество не участвует в реакции, то соответствующие вершина-вещества и вершина-реакции не соединены.

В цикле работ С. И. Спивака и А. С. Исмагиловой [4, 5] разработан метод декомпозиции, позволяющий разделить механизм сложной химической реакции на системы подмеханизмов, число которых равно числу базисных маршрутов. Доказано, что базис нелинейных параметрических функций исходной сложной системы реакций совпадает с объединением базисов нелинейных параметрических функций подмеханизмов.

В настоящей работе разработан алгоритм определения базиса нелинейных параметрических функций на основе теории графов. Алгоритм состоит в выделении подграфа графа Вольперта и выписывании матрицы связей непосредственно из полученного подграфа. Согласно общей теории анализа информативности кинетических измерений из матрицы связей составляется система дифференциальных уравнений. Частное решение системы дифференциальных уравнений образует базис нелинейных параметрических функций, допускающих однозначное оценивание обратной задачи относительно доступного массива кинетических измерений.

## 1. Общая теория анализа информативности

Кинетическая модель механизма химической реакции может быть представлена в виде:

$$\frac{da}{dt} = f(a,k),$$

где $a$ — вектор концентраций веществ, $k$ — вектор кинетических констант, $f$ выписываются в соответствии с законом действующих масс.

Если измеряются концентрации части веществ, то $a = (x, y)^T$, где $x = (x_1 \ldots x_{n_1})^T$ — вектор концентраций исходных веществ и продуктов реакции, $y = (y_1 \ldots y_{n_2})^T$ — вектор концентраций промежуточных веществ, $n_1 + n_2 = n$ — число участников реакции. Обратная задача химической кинетики сводится к определению вектора параметров $k = (k_1 \ldots k_s)$ ($s$ — число элементарных стадий), который будучи подставлен в систему дифференциальных уравнений воспроизведет экспериментально измеренный $x$.

При исследовании химических реакций обычно сталкиваются со сложными механизмами. Так эксперимент неизбежно сопряжен с погрешностью. Если данные получены с погрешностью, то измеряется $x' = x + x \cdot \varepsilon$, где $0 \le |\varepsilon| \le \varepsilon_1$, $\varepsilon_1$ — предельно допустимая погрешность эксперимента. Таким образом, $\varepsilon = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n_1})^T$ становится дополнительным параметром – входит в вектор определяемых параметров $k' = (k_1 \ldots k_s, \varepsilon)$.

Для концентраций $y$ промежуточных веществ в стационарном режиме выполняется равенство $dy/dt = 0$, означающее, что алгебраическая сумма скоростей образования и распада промежуточных веществ равна нулю. Тогда система кинетических уравнений перепишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= f_1(x', y, k'), \\ 0 &= f_2(x', y, k'), \end{aligned} \qquad (1)$$

с начальным условием $x'(0) = x'_0$.

Для того чтобы определить базис нелинейных параметрических функций необязательно иметь явный вид зависимости $x$ от $k$, достаточно исследовать матрицу Якоби:

$$U = \left(\frac{df_1}{dk'}\right) - \left(\frac{df_1}{dy}\right)\left(\frac{df_2}{dy}\right)^{-1}\left(\frac{df_2}{dk'}\right), \qquad (2)$$

явный вид которой полностью определяется правыми частями системы (1). Число нелинейных параметрических функций определяется как число независимых столбцов матрицы (2). Это число меньше общего числа определяемых параметров, если существует ненулевая матрица $A$, называемая матрицей связей, зависящая только от $k$ и $\varepsilon$, такая, что

$$U \cdot A(k, \varepsilon) \equiv 0. \qquad (3)$$

Выполнение условия (3) следует из того, что концентрации промежуточных веществ определяются из специальных условий типа условий квазистационарности, равновесия и т.п.

Если матрица $A$ найдена, то система нелинейных параметрических функций определяется как базис независимых частных решений (зависящих только от $k$ и $\varepsilon$) системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\rho}{dk'} \cdot A \equiv 0, \qquad (4)$$

где $\rho_1(k,\varepsilon),...,\rho_\mu(k,\varepsilon)$ — базис нелинейных параметрических функций, $\mu$ — число линейно независимых столбцов матрицы (2).

Следовательно, для определения числа и вида нелинейных параметрических функций необходимо:

1) найти матрицу Якоби $U$ по формуле (2);

2) определить число независимых столбцов в $U$, найти матрицу связей $A$ (3);

3) решить систему (4), независимые решения которой и есть базис нелинейных параметрических функций.

Очевидно, что в вычислительном плане определение базиса нелинейных параметрических функций крайне трудоемкий процесс. Здесь речь идет об аналитических вычислениях с нелинейными выражениями.

## 2. Теоретико-графовый алгоритм определения базиса нелинейных параметрических функций кинетических констант

1. Построить граф Вольперта механизма сложной химической реакции.

2. Выделить подграфы графа Вольперта путем исключения всех $Y$-вершин и $X$-вершин, имеющие только входящие ребра (вещества, которые являются продуктами в стадиях и не являются исходными веществами ни в какой другой стадии), а также $W$-вершин, для которых нет предшествующих $X$-вершин. Соответственно, исключить ребра инцидентные этим вершинам.

3. Выписать из полученного несвязного графа матрицу связей $A$. Строкам данной матрицы соответствуют константы скоростей стадий и члены, обусловленные погрешностью измерения исходных веществ и продуктов реакции. Количество столбцов матрицы равно количеству $X$-вершин. Расположение ненулевых элементов в матрице связей определяют $W$-вершины и $X$-вершины, смежные в полученном графе. Значение элемента определяется ребром, соединяющим $X$-вершину с $W$-вершиной (кинетическая константа).

4. Базис нелинейных параметрических функций определяется как совокупность частных решений системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (4).

Алгоритм определения базиса нелинейных параметрических функций реализован в среде Microsoft Visual C++ 2012 на языке программирования C++ [6]. Входными данными, вводимыми пользователем, являются название механизма реакции, количество стадий в механизме реакции, общее количество участников механизма, количество промежуточных веществ.

В программе реализовано наглядное изображение графа Вольперта. Основным результатом работы программы является определение базиса нелинейных параметрических функций кинетических констант. Из матрицы связей $A$ выписывается система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка $(d\rho/dk')\cdot A\equiv 0$, где $\rho_i(k,\varepsilon)$ — базис нелинейных параметрических функций, $1\le i\le\mu$, $\mu$ — число столбцов матрицы связей $A$. В программе решение системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка реализовано методом характеристик.

Проиллюстрируем работу алгоритма и программы на примере механизма реакции окисления сероводорода с учетом адсорбции реагентов:

$$1)\quad O_2+2Z\to 2ZO,$$

$$2)\quad H_2S+Z\to ZH_2S,$$

$$3)\quad O_2+2ZH_2S\to 2H_2O+Z+ZS_2,$$

$$4)\quad H_2S+ZO\to H_2O+ZS,$$

$$5)\quad ZO + ZH_2S \to H_2O + ZS + Z,$$

$$6)\quad 2ZS \to Z + ZS_2,$$

$$7)\quad ZS_2 \to S_2 + Z.$$

Введем обозначения $\{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \{O_2, H_2S, H_2O, S_2\}$ — исходные вещества и продукты реакции, $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5\} = \{Z, ZO, ZH_2S,, ZS_2, ZS\}$ — промежуточные вещества, $\{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7\}$ — стадии.

На рис. 1 представлена программная реализация теоретико-графовой интерпретации механизма реакции. Жирными линиями выделен преобразованный подграф.

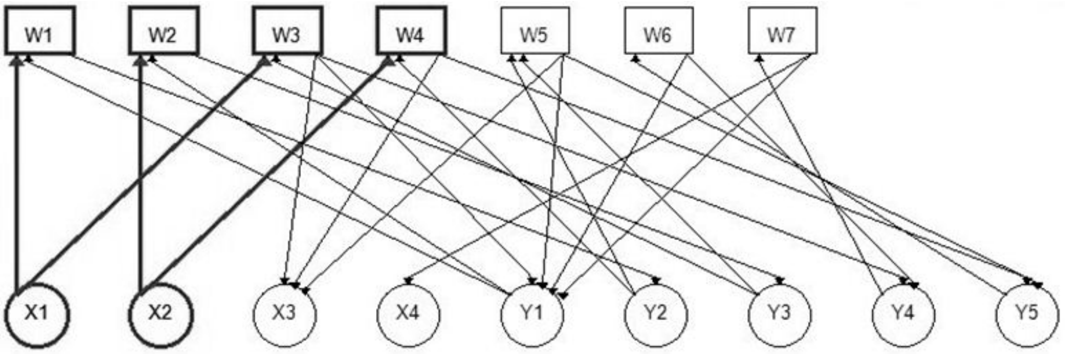



*Рис. 1. Граф Вольперта механизма реакции окисления сероводорода с учетом адсорбции реагентов*

Матрица связей $A$, определенная на основе анализа графа Вольперта:

$$A(k, \varepsilon) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \\ k_3 & 0 \\ 0 & k_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -(1+\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & -(1+\varepsilon_2) \end{pmatrix}.$$

Соответствующая ей система:

$$k_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial k_1} + k_3 \frac{\partial \rho_1}{\partial k_3} - (1+\varepsilon_1) \frac{\partial \rho_1}{\partial \varepsilon_1} = 0,$$

$$k_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial k_2} + k_4 \frac{\partial \rho_2}{\partial k_4} - (1+\varepsilon_2) \frac{\partial \rho_2}{\partial \varepsilon_2} = 0.$$

Частное решение можно представить как систему:

$$\rho_1 = \frac{k_1}{k_5} + k_5(1+\varepsilon_1),$$

$$\rho_2 = \frac{k_2}{k_4} + k_4(1+\varepsilon_2),$$

$$\rho_3 = \frac{k_{30}}{k_{50}} + \frac{k_{40}}{k_{50}} + k_{50}(1+\varepsilon_3).$$

Эта система и есть базис независимых комбинаций кинетических параметров, однозначно определяемый на основании исходной информации об измеряемых веществах $O_2$ и $H_2S$, обозначенных как $X_1$ и $X_2$ соответственно.

## Заключение

В настоящей работе предложен оригинальный метод выделения функциональной зависимости кинетических параметров с помощью теоретико-графового анализа механизма химической реакции. Разработанный метод позволяет связать информативность кинетических параметров с геометрической интерпретацией механизма реакции, выделить базис нелинейных параметрических функций.

Автоматизация предложенного метода определения функциональных зависимостей кинетических параметров обеспечивает доступность теории широкому кругу специалистов, разрабатывающих высокоточные математические модели кинетики химических процессов.

Разработанный комплекс программ становится элементом анализа информативности кинетических констант механизмов химических реакций. Результаты работы важны для идентификации параметров химических реакций, служат теоретической основой для развития промышленного катализа.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-07-00584 А).

## Литература

1. *Спивак, С. И.* Исследование идентифицируемости – один из важнейших этапов построения математических моделей в химии / С. И. Спивак, В. Г. Горский // Журнал структурной химии. – 1988. – Т. 29, № 6. – С. 119–125.

2. *Спивак, С. И.* Неединственность решения задачи восстановления кинетических констант / С. И. Спивак, В. Г. Горский // Доклады Академии наук. – 1981. – Т. 257, № 2. – С. 412–415.

3. *Вольперт, А. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. / А. И. Вольперт, С. И. Худяев – М. : Наука, 1975. – 395 с.

4. *Спивак, С. И.* Анализ информативности кинетических измерений при решении обратных задач химической кинетики для многомаршрутных реакций / С. И. Спивак, А. С. Исмагилова, А. А. Ахмеров // Кинетика и катализ. – 2014. – Т. 55, № 5. – С. 566–576.

5. *Спивак, С. И.* Теоретико-графовый метод определения маршрутов сложных химических реакций / С. И. Спивак, А. С. Исмагилова, И. А. Хамитова // Доклады Академии наук. – 2010. – Т.434, № 4. – С. 499–501.

6. *Хамидуллина, З. А.* Определение базиса нелинейных параметрических функций для сложных каталитических реакций/ З. А. Хамидуллина, А. С. Исмагилова : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. ФСИС (Роспатент) № 2018614581, дата рег. 10.04.2018.

УДК 517.11

# СРЕДНИЕ, КВАЗИСКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И КОВАРИАЦИЯ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

**В. Л. Хацкевич**

*Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж*

**Аннотация.** В данной работе мы обсуждаем экстремальные свойства средних нечетких чисел. Предложено новое определение квазискалярного произведения и ковариации между нечеткими числами, а также рассмотрены их свойства. В качестве приложения введенных понятий рассматривается задача оптимальной линейной аппроксимации нечеткого числа заданной системой нечетких чисел.

**Ключевые слова:** нечеткие числа, средства нечетких чисел, квазискалярное произведение, ковариация.

В настоящей работе мы будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы $\alpha$-уровня нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями

$$Z_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{z}} \geq \alpha\}\ (\alpha \in (0,1]), \quad Z_0 = supp(A).$$

Согласно обычным предположениям (см., напр., [1] § 1) все $\alpha$-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую границу интервала через $z^-(\alpha)$, а правую — $z^+(\alpha)$, т. о. $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Иногда $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют, соответственно, левым и правым индексами нечеткого числа.

Ниже будем предполагать, что индексы рассматриваемых нечетких чисел квадратично суммируемы на [0, 1]. Множество таких нечетких чисел обозначим $J_2$.

Пусть $f:[0,1] \to R$ неотрицательная квадратично суммируемая весовая функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_0^1 f(\alpha)d\alpha = 1$.

Как известно, взвешенное среднее значение нечеткого числа $\tilde{z}$, используя интервальное представление, можно определить следующим способом

$$m_f(\tilde{z}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (z^-(\alpha) + z^+(\alpha)) f(\alpha) d\alpha. \tag{1}$$

Отметим, что среднее (1) является линейным.

*Пример 1.* Рассмотрим нечеткое треугольное число $\tilde{z}$, характеризуемое тройкой $(a, b, c)$ при $a < b < c$, определяющей функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b,c]; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае нижняя и, соответственно, верхняя граница $\alpha$-интервала имеет вид

$$z^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad z^+(\alpha) = -(c-b)\alpha + c.$$

Нетрудно подсчитать, что среднее (1) для нечеткого треугольного числа в случае $f(\alpha) \equiv 1$ равно $m_1(\tilde{z}) = \dfrac{1}{4}(a + 2b + c)$.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояния Хаусдорфа между множествами $\alpha$-уровня нечетких чисел (см., напр., [2] гл. 2, § 2.5). Однако, хотелось бы рассмотреть такое определение расстояния, чтобы среднее (1) минимизировало некоторую ошибку по соответствующей метрике. В качестве такого расстояния удобно рассмотреть следующее.

Пусть $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ два нечетких числа. Зададим взвешенное расстояние $\rho_f(\tilde{z},\tilde{u})$ между ними формулой

$$\rho_f(\tilde{z},\tilde{u}) = \left(\int_0^1 ((z^-(\alpha)-u^-(\alpha))^2 + (z^+(\alpha)-u^+(\alpha))^2) f(\alpha) d\alpha\right)^{1/2}. \qquad (2)$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы $\alpha$-уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, соответственно.

Такое определение расстояния между нечеткими числами при $f \equiv 1$ используется, например, в [3].

Обозначим через $\hat{y}$ синглтон, отвечающий числу $y \in R$, т. е. нечеткое число, функция принадлежности $\mu_{\hat{y}}(x)$ которого равна 1 при $x = y$ и 0 в противном случае. Отметим, что левый и правый индексы $\hat{y}$ при всех $\alpha \in [0,1]$ совпадают с $y$.

**Утверждение 1.** *Среднее значение (1) нечеткого числа* $\tilde{z}$ *минимизирует величину*

$$\delta(y) = \rho_f^2(\tilde{z},\hat{y}) = \int_0^1 ((z^-(\alpha)-y)^2 + (z^+(\alpha)-y)^2) f(\alpha) d\alpha \;\; \forall y \in R.$$

*Оно является единственным решением этой экстремальной задачи.*

Доказательство следует из условия минимума для функции $\delta(y)$, т. к. $\delta'(y) = y - m(\tilde{z})$, а вторая производная $\delta''(y) = 4$ $(\forall y \in R)$. Единственность влечет сильная выпуклость функции $\delta(y)$.

В ряде работ, в том числе в [4], применялось следующее определение расстояния между нечеткими числами

$$d_f(\tilde{z},\tilde{u}) = \left(\int_0^1 f(\alpha) \int_0^1 (\lambda(z^+(\alpha)-u^+(\alpha)) + (1-\lambda)(z^-(\alpha)-u^-(\alpha)))^2 d\lambda d\alpha\right)^{1/2}, \qquad (3)$$

где параметр $\lambda \in [0,1]$. Интересный факт состоит в том, что среднее (1) обладает экстремальным свойством и относительно расстояния (3).

**Утверждение 2.** *Среднее (1) является решением оптимальной задачи*

$$d_f(\tilde{z},\hat{y}) \to \min \quad (y \in R).$$

Доказательство следует из условия минимума для функции $\delta_1(y) = d_f(\tilde{z},\hat{y})$.

Отметим, что несмотря на значительное число работ, посвященныз средним нечетких чисел (см., напр., [5–7] гл. 7) экстремальные свойства типа утверждений 1, 2 ранее не отмечались.

Пусть нечеткому числу $\tilde{z}$ отвечают $\alpha$-уровни $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Положим как это принято в интервальном анализе

$$mid\, Z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha) + z^-(\alpha)), \qquad rad\, Z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha) - z^-(\alpha)).$$

Здесь $mid\, Z_\alpha$ характеризует среднее, при каждом $\alpha \in [0,1]$, а $rad\, Z_\alpha$ — размах.

Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ из $J_2$ определим взвешенное квазискалярное произведение

$$\langle \tilde{z},\tilde{u}\rangle_f = \int_0^1 (mid\, Z_\alpha\, mid\, U_\alpha + radZ_\alpha radU_\alpha) f(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= 0.5\int_0^1 (z^+(\alpha)u^+(\alpha) + z^-(\alpha)u^-(\alpha)) f(\alpha) d\alpha. \qquad (4)$$

При этом взвешенная квазинорма $\tilde{z}$ есть $\langle \tilde{z},\tilde{z}\rangle_1^{1/2}$.

*Пример 2.* Рассмотрим два треугольных числа $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, характеризуемые тройками $a_i$, $b_i$, $c_i$ при $a_i < b_i < c_i$ $(i = 1,2)$. По определению их правых и левых индексов (см. пример 1) и согласно (4) квазискалярное произведение $\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle_f$ при $f \equiv 1$ подсчитывается по формуле

$$\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle_1 = \frac{2}{3} b_1 b_2 + \frac{1}{3}(a_1 a_2 + c_1 c_2) + \frac{1}{6}(a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2).$$

При этом квазинорма $\tilde{z}_1$ определяется равенством $\|\tilde{z}_1\|^2 = \dfrac{1}{3}(2b_1^2 + a_1^2 + c_1^2 + a_1 b_1 + b_1 c_1)$.

**Теорема 1.** *Справедливы следующие свойства квазискалярного произведения (4).*

*1)* $\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle_f = \langle \tilde{u}, \tilde{z} \rangle_f \quad \forall \tilde{u}, \tilde{z} \in J_2$;

*2)* $\langle c_1 \tilde{z}, c_2 \tilde{u} \rangle_f = c_1 c_2 \langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle_f$, *при условии, что произведение чисел* $c_1 c_2 > 0$;

*3)* $\langle \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, \tilde{u} \rangle_f = \langle \tilde{z}_1, \tilde{u} \rangle + \langle \tilde{z}_2, \tilde{u} \rangle_f \quad \forall \tilde{u}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J_2$;

*4)* $\langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle_f \geq 0$, *причем условие* $\langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle_f = 0$ *эквивалентно равенству нулю левого и правого индексов* $\tilde{z}$;

*5) Обобщенное неравенство Коши — Буняковского* $|\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle_f| \leq \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle_f^{1/2} \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_f^{1/2} \quad \forall \tilde{u}, \tilde{z} \in J_2$.

Нечеткому числу $\tilde{z}$ с интервалами $\alpha$-уровня $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ поставим в соответствие векторную функцию $\overline{z}(\alpha) = (z^+(\alpha), z^-(\alpha))^T$. Для векторных функций $\overline{z}$, $\overline{u}$ формула

$$\langle \overline{z}, \overline{u} \rangle_1 = 0.5 \int_0^1 (z^+(\alpha) u^+(\alpha) + z^-(\alpha) u^-(\alpha)) d\alpha$$

— обычное скалярное произведение, а $\|\overline{z}\|_1 = \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle^{1/2}$ — норма. Отметим, что расстояние $\rho_1^2(\tilde{z}, \tilde{u}) = 2\|\overline{z} - \overline{u}\|_1^2$.

Близкое к (4) полускалярное произведение нечетких чисел используется в работе [8]. Оно имеет вид

$$\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle = 0.25 \int_0^1 (z^+(\alpha) + z^-(\alpha))(u^+(\alpha) + u^-(\alpha)) d\alpha = \int_0^1 midZ_\alpha midU_\alpha d\alpha.$$

Однако, это выражение не учитывает размаха нечетких чисел. При этом равенство $\langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle^{1/2} = 0$ не гарантирует равенства нулю левого и правого индексов $\tilde{z}$.

В литературе рассматриваются и другие определения скалярного произведения между нечеткими числами (см., напр., [9]). Наше определение удобно тем, что оно связано с расстоянием (3) и вводимой ниже ковариацией между нечеткими числами.

Рассмотрим задачу о нелинейной регрессии нечеткого числа $\tilde{z}$ по произвольным борелевским функциям от нечеткого числа $\tilde{y}$. Назовем условным средним $\tilde{z}$ на $\tilde{y}$ и обозначим $m[\tilde{z} / \tilde{y}]$ такое нечеткое число, для которого $\langle \tilde{z} - m[\tilde{z} / \tilde{y}], \phi(\tilde{y}) \rangle_1 = 0$ по всем борелевским функциям $\phi$.

**Утверждение 3.** *Условное среднее* $\tilde{z}$ *на* $\tilde{y}$ *есть решение следующей оптимизационной задачи*

$$\rho_1(\tilde{z}, \phi(\tilde{y})) \to \min,$$

*по всем борелевским функциям* $\phi$.

Это утверждение аналогично соответствующему утверждению для случайных величин (см., напр., [10] гл. I, § 6).

Для нечетких чисел $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ со средними значениями $m_1$ и $m_2$ определим их ковариацию формулой

$$cov_1[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]_f = \langle \tilde{z}_1 - \hat{m}_1, \tilde{z}_2 - \hat{m}_2 \rangle_f =$$

$$= 0{,}5 \int_0^1 ((z_1^+ - m_1)(z_2^+ - m_2) + (z_1^- - m_1)(z_2^- - m_2)) f(\alpha) d\alpha. \tag{5}$$

Обозначим дисперсию $D_f(\tilde{z}) = cov[\tilde{z}, \tilde{z}]_f$ и $\sigma_f(\tilde{z}) = \sqrt{D_f(\tilde{z})}$ — среднее квадратичное отклонение.

**Теорема 2.** *Справедливы следующие свойства ковариации (5)*

*1.* $cov_f[\tilde{z}_1+\tilde{z}_2,\tilde{u}] = cov_f[\tilde{z}_1,\tilde{u}] + cov_f[\tilde{z}_2,\tilde{u}]$ $(\forall \tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\tilde{u}\in J_2)$;

*2.* $cov_f[c_1\tilde{z},c_2\tilde{u}] = c_1c_2cov_f[\tilde{z},\tilde{u}]$, $(\forall \tilde{z}_1,\tilde{u}\in J_2)$ *для любых вещественных* $c_1$, $c_2$, *таких что* $c_1c_2>0$.

*И специфическое свойство ковариации*

*3.* $cov_f[\tilde{z}_1,\tilde{z}_2] = \langle \tilde{z}_1,\tilde{z}_2\rangle_f - m_1m_2$, $(\forall \tilde{z}_1,\tilde{z}_2\in J_2)$, *где* $m_1$ *и* $m_2$ *— взвешенные средние значения нечетких чисел* $\tilde{z}_1$ *и* $\tilde{z}_2$.

**Теорема 3.** *Имеют место обычные свойства дисперсии:*

*1.* $D_f(c\tilde{z}) = c^2D_f(\tilde{z})$ *для любого вещественного числа* $c$.

*2.* $D_f(\tilde{z}+\tilde{u}) = D_f(\tilde{z}) + D_f(\tilde{u}) + 2cov_f[\tilde{z},\tilde{u}]$ *для* $\forall \tilde{z},\tilde{u}\in J_2$.

*И специфическое свойство*

*3.* $cov_f[\tilde{z},\tilde{z}] = D_f(\tilde{z}) = \dfrac{1}{2}\rho_f^2(\tilde{z},\hat{m})$ $(\forall \tilde{z}\in J_2)$, *где* $m$ *— среднее нечеткого числа* $\tilde{z}$.

Определим коэффициент корреляции между нечеткими числами $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ формулой

$$k_f(\tilde{z}_1,\tilde{z}_2) = \frac{cov_f[\tilde{z}_1,\tilde{z}_2]}{\sigma_f(\tilde{z}_1)\sigma_f(\tilde{z}_2)}. \tag{6}$$

**Теорема 4.** *Справедливы следующие свойства коэффициента корреляции (6):*

*1.* $|k_f|\le 1$.

*2. Коэффициент корреляции* $k_f=1$ *тогда и только тогда, когда найдется* $\lambda>0$, *для которого* $(\tilde{z}_1-\hat{m}_1) = \lambda(\tilde{z}_2-\hat{m}_2)$, *где* $m_i$ *— взвешенные средние нечетких чисел* $\tilde{z}_i$ $(i=1,2)$.

*3. Коэффициент корреляции* $k_f=-1$ *тогда и только тогда, когда при почти всех* $\alpha\in[0,1]$

$$\frac{z_1^+}{\sigma(\tilde{z}_1(\alpha))} = -\frac{z_2^+}{\sigma(\tilde{z}_2(\alpha))} + m_1 + m_2,\ \frac{z_1^-}{\sigma(\tilde{z}_1(\alpha))} = -\frac{z_2^-}{\sigma(\tilde{z}_2(\alpha))} + m_1 + m_2.$$

Отметим, что свойство 1) следует из обобщенного неравенства Коши — Буняковского.

В ряде работ (см., напр., [6, 12]) в качестве взвешенной ковариации нечетких чисел $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ рассматривается следующее выражение

$$cov_f[\tilde{z}_1,\tilde{z}_2] = \int_0^1\left(\frac{z_1^+(\alpha)-z_1^-(\alpha)}{2}\right)\left(\frac{z_2^+(\alpha)-z_2^-(\alpha)}{2}\right)f(\alpha)d\alpha. \tag{7}$$

Соответственно, дисперсия

$$D_f(\tilde{z}_1) = cov_f[\tilde{z}_1,\tilde{z}_2].$$

При таком определении $cov_f[\tilde{z}_1,\tilde{z}_2]$ всегда неотрицательна, что не соответствует стандартным свойствам ковариации (для случайных величин). Поэтому определение (7) не обеспечивает возможность ввести коэффициент корреляции, обладающим стандартными свойствами.

В ряде работ (см., напр., [11]) рассматривается понятие ковариации между нечетко-случайными величинами и изучаются соответствующие свойства. Однако, это качественно другой объект исследования по сравнению с нечеткими числами.

Определение квазискалярного произведения и ковариации нечетких чисел, введенные выше, могут быть полезны, например, в задаче об аппроксимации нечетких чисел. Отметим, что даже в случае весовой функции $f(\alpha)\equiv 1$, упомянутые определения нам представляются новыми.

## Литература


1. *Борисов, В. В.* Основы нечеткой арифметики / В.В. Борисов, М.М. Зернов, А.С. Федулов. – М. : Горячая линия-Телеком, 2019. – 98 с.

2. *Язенин, А. В.* Основные понятия теории возможностей: математический аппарат для принятия решений в условиях гибридной неопределенности / А. В. Язенин. – М. : Физматлит, 2016. – 144 с.

3. *Bargiela, A.* Multiple Regression with fuzzy data / A. Bargiela, T. Nakashima, W. Pedrycz.// Fuzzy sets and systems. – 2007. – P. 2169–2188.

4. *Colubi, A.* Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applica analysis of fuzzy-and real-valued data/ A. Colubi // Fuzzy Sets and sytems. – 2009. – 160. – P. 344–356.

5. *Dubois, D.* The mean value of fuzzy number/ D. Dubois, H. Prade// Fuzzy sets and systems. – 1987. – P. 279–300.

6. *Fuller, R.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers/ R. Fuller, P. Majlender// Fuzzy sets and systems. – 2003. – V. 136. – P. 363–374.

7. *Nguyen, H. T.* Fundamentals of statistics with fuzzy data /H. T. Nguyen ,B. Wu. – Berlin : Springer, 2006. – 204 p.

8. *Шведов, А. С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин / А. С.Шведов // Прикладная эконометрика. – 2016. – Т. 42. – С. 121–138

9. *Nather, W.* Regression with fuzzy data / W. Nather // Computational Statistics and Data Analysis. – 2006. – V. 51, Issue 1. – P. 235–252.

10. *Розанов, Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика / Ю.А. Розанов. – Наука, ГРФМЛ, 1989. – 320 с.

11. *Feng, Y.* The variance and covariance of fuzzy random variables / Y. Feng, L. Hu, H. Shu // Fuzzy Systems. – 2001. – 120. – P. 487–497.

12. *Carlsson, C.* On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers /C. Carlsson, R. Fuller// Fuzzy sets and Systems. – 2001. – 122. – P. 315–326.

УДК 519.6

# АЛГОРИТМ РАСПОЛОЖЕНИЯ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ СИСТЕМЫ НАРУЖНОГО ПРОТИВОПОЖАРНОГО ВОДОСНАБЖЕНИЯ

**Е. А. Черепанов[1], Е. В. Дмитриев[2], А. В. Калач[1,2]**

*[1]Уральский институт Государственной противопожарной службы МЧС России*
*[2]Воронежский институт ФСИН России*

**Аннотация.** Предложены новые графические алгоритмы планирования, оптимального размещения насосов для внешнего пожаротушения и предложены математические модели оптимизации при построении различных сетей наружного противопожарного водоснабжения гидрантов в отдельном микрорайоне, не содержащем крупных или специальных дорог.
**Ключевые слова:** алгоритм расположения, насосная станция, оптимизация, система противопожарного водоснабжения.

## Введение

Современная тенденция строительства новых городских районов предполагает комплексное предварительное планирование всех систем и сетей энергоснабжения, водоснабжения, водоотводных комплексов, прокладки сетей связи и других коммуникационных сетей объектов строительства согласовывать с планировкой размещения жилых домов. Проблема защиты населения и территорий от пожаров и чрезвычайных ситуаций представляет собой неотъемлемое направление государственной политики в сфере предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций. Особенную опасность в ближайшее время представляют пожары различного генезиса.

Для борьбы с крупными пожарами, как правило, необходимы большие расходы огнетушащих веществ, основным видом которых является вода. Основным источником воды в данном случае являются системы наружного противопожарного водоснабжения (НППВ). Расчетные математические модели и методы оценки водоотдачи кольцевой и тупиковой сети наружного противопожарного водоснабжения известны и хорошо изучены, их можно найти в обширной работе [1–3].

## 1. Оптимизация кольцевого построения с помощью задачи коммивояжера для различных метрик

Для актуальности построения оптимальных сетей меньшей длины приведем стандартную формулу из работы [1]. Коэффициент гидравлического сопротивления учитывает линейные и местные гидравлические потери на участке трубопровода между отводами и в отводе и может быть определен из выражения:

$$A = \frac{\rho}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k(l)+\xi_k(m)}{F_k^2}. \qquad (1)$$

Здесь $n$ — количество отрезков трубопровода, образующих рассматриваемый участок сети НППВ; $\xi_k(l)$ — коэффициент линейного сопротивления на $i$-м отрезке трубопровода; $\xi_k(m)$ — сумма коэффициентов местных сопротивлений на $i$-м отрезке трубопровода; $F_k^2$ — площадь проходного сечения трубопровода на $i$-м отрезке трубопровода. Это выражение, как и многие другие, показывают актуальность задачи минимизировать суммарную длину отрезков труб. Построение минимального по длине кольцевого соединения всех ПГ в виде замкнутого графа, без циклов, в каждую точку которого входит и выходит одно ребре — это известная задача коммивояжера [4].

Или построение оптимального по длине графа Гамильтона (рис. 1).

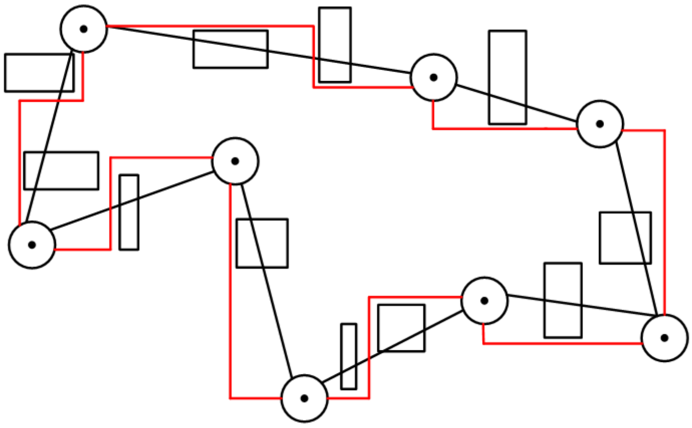


*Рис. 1. Пример графа Гамильтона*

Эта задача может быть решена простым компьютерным перебором, или с помощью специальных известных алгоритмов [4]. Однако на практике задача усложняется, так как размеры, формы и расположения современных зданий не позволяют моделировать задачу оптимизации в метрике Евклида (или просто по прямой) (рис. 1).

И в этом случае задачу коммивояжера нужно решать не в метрике Евклида, а в метрике пространства $l_1^n$. И программу компьютерного решения задачи нужно писать, используя эту метрику. Расстояние в этой программе вычисляется с помощью формулы (2).

$$\rho_m(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \qquad (2)$$

Компьютерная программа может работать с любой метрикой. Расположения ломаной прокладки можно менять (рис. 2).

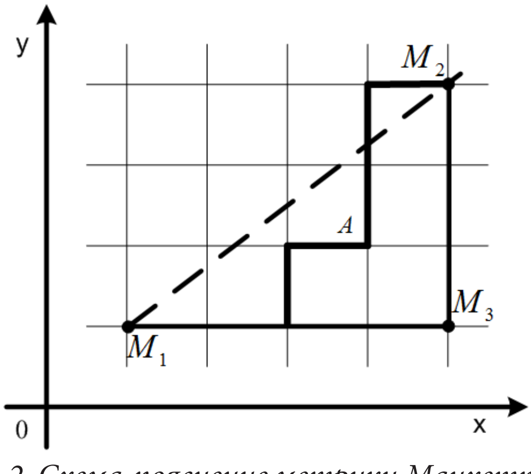



*Рис. 2. Схема-пояснение метрики Манхеттена*

Авторы, в известной им литературе, не обнаружили подобного описания построения кольцевого соединения, а также оптимизации его длины с помощью модифицированной задачи коммивояжера.

Заметим, что в современном градостроительстве микрорайонов выделяют несколько основных видов застройки: строчная, групповая, регулярная, свободная, и др., Следовательно, к каждому типу застройки надо планировать индивидуальную схему подачи воды к гидрантам наружного водоснабжения.

Так, по мнению авторов, кольцевое построение подачи воды наиболее подходит к групповой и строчной застройки микрорайона).

## 2. Построение тупиковых сетей специального вида

Предположим, что нам разрешено строить насосную станцию нового типа. Эта станция специального действия, которая по сигналу избранно может осуществлять доставку ППВ в гидранты, которые расположены в непосредственной близости от очага возгорания и не посылать воду в остальные пункты тем самым экономя все возможные затраты. Где должна находиться эта станция, что бы суммарная длина отрезков труб была наименьшей (рис. 3).

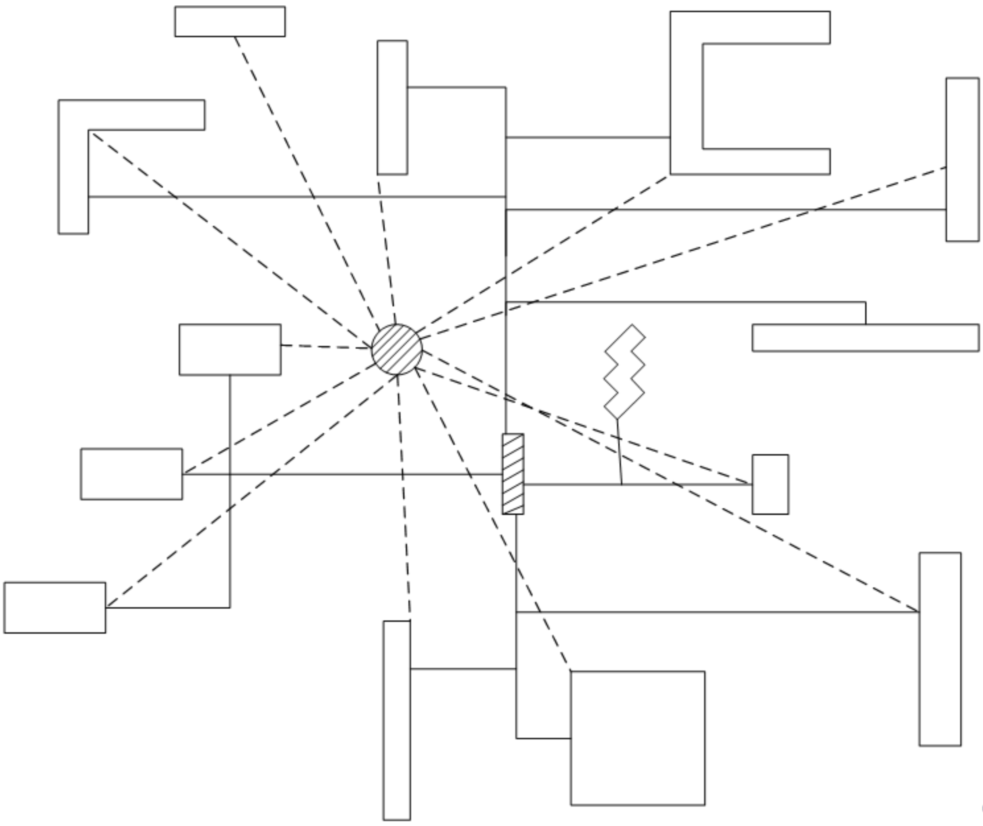


*Рис. 3. Схематичное отображение нахождения места расположения насосной станции: окружностью обозначено расположение насосной станции (в метрике Евклида), прямоугольником — обозначено расположение насосной станции в метрике $l_1$*

Задача нахождения координат такой станции — это задача определения координат точки Ферма — Торичелли — Штейнера, которая решена аналитически для треугольника, $n = 3$. Для общего числа точек $n \geq 4$ задача определения координат точки с оптимальной суммой расстояний до фиксированных $n$ точек не решена до сих пор даже для плоскости. Некоторые результаты рассмотрены в [5–8].

Напомним общий вид задачи Ферма — Торичелли — Штейнера: *в координатном банаховом пространстве определить координаты точки М сумма расстояний, в метрике этого пространства, от которой до фиксированных n точек* $(A_1, A_2, ..., A_n)$ *минимальна.*

Банахово пространство — это пространство с нормой его можно предполагать любой размерности. Также возможно рассмотрение различных метрик (норм) для измерения расстояния.

Очевидно, что во многих работах опускается рассмотрение двух аспектов:

1) существует ли вообще такая точка:

2) если да то является ли она единственной.

Если на первый вопрос при практическом поиске мы программой находим точку, то второй вопрос не менее для практики важен.

Существование нескольких различных решений может вызвать большие неприятности во всех областях практической деятельности: в строительстве, приборостроении, атомной и космической отраслями, военной технике, финансовой деятельности, теории игр и др.

Теорема 1. Пусть все точки $M$ и $P_k$ расположены в пространстве $l_n^2$. Тогда минимум функции $\sum_{j=1}^{N} \rho_2(M, P_j)$ существует и единственен.

Сформулируем задачу в общем виде: в координатном банаховом пространстве определить координаты точки $M$ сумма расстояний, в метрике этого пространства, от которой до фиксированных $n$ точек $(A_1, A_2, ..., A_n)$ минимальна.

В работах [6, 7] получены компьютерные алгоритмы и описаны программы для компьютерного (приближенного) решения этой задачи на языках Java2 и C++, для любого количества точек, и с любой заданной точностью. Точность можно задавать в программе, опираясь на практическую целесообразность.

На рис. 3 пунктиром обозначен вариант прокладки наружного противопожарного трубопровода по прямой, сплошной линией в метрике $l_1$. Может ли место положения насосной станции, гарантированное оптимизацией, быть различным — в случае если измерения происходят в разных метриках. Это отражено на рис. 4. Для пояснения этого явления ниже рассмотрим два аналитических пункта.

### 3. О несовпадении точек Ферма — Торичелли — Штейнера в различных метриках

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Константы эквивалентности зависят от размерности и растут с ростом размерности- $N$.

Например, справедливо неравенство с точными по порядку константами эквивалентности для пространств $l_1 \subset l_2 \subset l_\infty$, $\left\|\vec{C}\right\|_{l_1} \le \sqrt{N}\left\|\vec{C}\right\|_{l_2} \le N\left\|\vec{C}\right\|_{l_\infty}$. Возникает вопрос: будут ли координаты точки Ф.Ш. различны при измерении расстояний в различных метриках? Или эти точки могут совпадать? В работах [9] доказано, что даже если «точки потребители» расположены на окружности, то точки Ф.Ш. не совпадают, имеют различные координаты, при измерении в различных метриках. Первоначально явление было обнаружено (см. [6–9]) с помощью компьютерной графики (рис. 5). Аналитическое доказательства в работе [9].

Построение точки Ф.Ш. происходит с помощью итерационных программ, в которых на каждом шаге сужается пространство поиска, и вычисляются значения целевых функция следующего вида:

$$F_{l_1}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| + |y - y_k|,$$

$$F_{l_2}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2},$$

Для случая пространства $l_1$ (правый рис. 4) и пространства $l_2$ (левый рис. 4).

Для задачи с прокладыванием труб в случае, когда сложность зависит от направления прокладки можно рассмотреть целевую функцию оптимизации с коэффициентами сложностей (весами) вида:

$$F_s(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}. \tag{3}$$

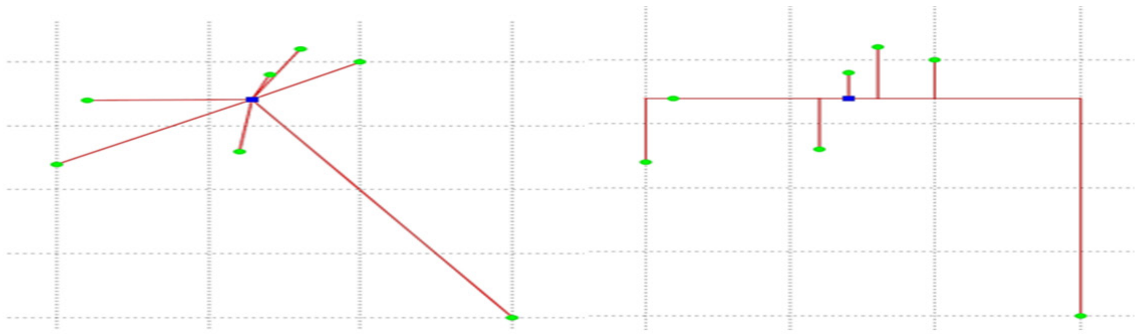


*Рис. 4. Левый рисунок определение точки Ф.Ш. и трассировка в метрике Евклида, правый в метрике пространства $l_1$*

Компьютерный рисунок представлен на рис. 5.

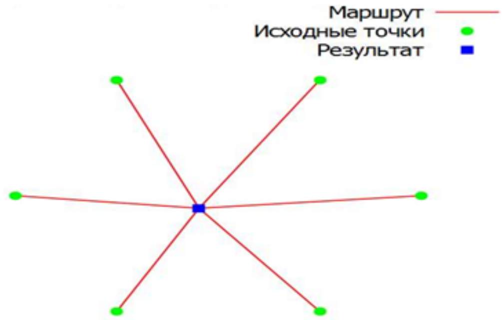



*Рис. 5. Появление таких коэффициентов известно, например извилистость пожарного рукава — 1,2*

Для этого применили формулу (3). В программу был задан вектор сложности: $\bar{\mu} = (1; 1,5; 1,2; 2; 2; 1,4)$.

Заметим, по мнению авторов, тупиковое построение подачи воды наиболее подходит к периметральной и свободной застройки микрорайона.

## Заключение

Таким образом, в статье рассмотрены особенности проектирования различных специальных тупиковых сетей наружного противопожарного водоснабжения зонального действия. В данных сетях возможно выборочная подача воды именно в тот район, где произошло возгорание, что значительно экономит различные задачи, как строительства сетей, так и их обслуживания. Опираясь на развитие современных методов и способов передачи информации, авторы обосновывают преимущества этих сетей. При проектировании этих сетей в зависимости от сложности прокладки труб, геометрии размещения и размеров и форм зданий предлагается использовать различные метрики измерения длин на плоскости. Построения используют задачу нахождения координат точки Ферма — Штейнера для различных метрик. Эта задача решается компьютерными программами для численного определения координат с итерационной проверкой значения целевой функции. Вид функции зависит от способа (метрики) измерения расстояния.

Заметим, что построение сетей Штейнера в различных метриках давно и успешно применяется для разных прикладных задач, например для проведения оптимальных сетей нефтепроводов. Привязка по виды более доходящего способа подачи воды учитывает способ застройки микрорайона.

**Литература**

1. *Пивоваров Н. Ю.* Модели и методы оценки достаточности водоснабжения при тушении крупных пожаров на предприятиях нефтехимической промышленности // Дисс. на соискание ученой степени кандидата техн. наук Санкт-Петербург, 2020. – 131 с.

2. *Пивоваров Н. Ю., Таранцев А. А.* Моделирование водоотдачи кольцевых сетей наружного противопожарного водопровода // Пожаровзрывобезопасность. – 2014. – № 12. – С. 69–76.

3. *Таранцев А. А., Пивоваров Н. Ю.* Расчетная оценка водоотдачи тупиковых сетей наружного противопожарного водоснабжения // Пожаровзрывобезопасность. – 2012. – № 9. – С. 73–78.

4. Математическая Энциклопедия т. 1. Ред. Коллегия И. Н. Виноградов. – М. : 1977.

5. *Родин А. В., Калач А. Ю., Акулов Е. А., Черепанов Е. А.* Алгоритмы оптимального расположения гидрантов наружного противопожарного водоснабжения // Вестник Воронежского института ФСИН России. – 2019. – № 4. – С. 124–131.

6. *Бондаренко Е. С., Гречаный С. А., Родин В. А.* Численное моделирование задач оптимального размещения обслуживающего объекта с использованием аналогов точек Ферма — Штейнера // Вестник ВИ МВД России. – 2017. – № 2. – С. 154–161.

7. *Гришанов М. В., Родин В. А.* Численное моделирование задач оптимального размещения с использованием аналогов точек Ферма — Штейнера // Физ. мат. модел. систем. Материалы Межд. Семин. XVIII. – 2018. – С. 37–39.

8. *Уланов Е. А., Утешев А. Ю.* Аналитическое решение обобщенной задачи Ферма — Торричелли — Штейнера // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов. // Под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. – СПб. : Издат. дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. – С. 201–206.

9. *Родин В. А., Родина Е. В.* О точках Ферма — Штейнера в банаховых пространствах с различной метрикой // Системы управления и информационные технологии. 2016. – №1(63). – С. 17–20.

УДК 519.658.4

# СХОДИМОСТЬ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ПИЯВСКОГО ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ

**П. А. Чернышевский, Т. Р. Фаррухшина**

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева — КАИ*

**Аннотация.** R. J. Vanderbei показал, что всякая равномерно-непрерывная на отрезке функция обладает свойством $\varepsilon$-липшицевости, являющегося обобщением классического свойства липшицевой непрерывности. Это свойство позволило ему построить метод поиска глобального минимума функции на отрезке, однако им не были описаны некоторые проблемы, которые могут появится в работе алгоритма. В данной работе приведено альтернативное описание алгоритма для случая положительной $\varepsilon$-константы, доказана сходимость предложенного метода и приведены результаты расчетов с помощью созданной программы.

**Ключевые слова:** $\varepsilon$-липшицевость, непрерывная функция, минимизация, сходимость.

## Введение

На сегодняшний день липшицевость функции активно используется для поиска глобального экстремума функции. Методы оптимизации, основывающиеся на этом свойстве, успешно применяются как для одномерного случая (см., например, [1–4]) так и для функций многих переменных [5]. Однако все перечисленные работы предполагают либо априорное знание постоянной Липшица, либо используют градиент для нахождения оценки константы, или же рассчитывают эту оценку в ходе вычислений, считая, что целевая функция липшицева на области поиска.

Однако представляет большой интерес создание численных методов минимизации функций, не являющихся липшицевыми, хотя при этом остающимися непрерывными на заданном множестве, как например, $f(x)=\sqrt{x}$ или $f(x)=\arcsin x$. Более того, хорошо известны примеры непрерывных, но нигде не дифференцируемых на заданном отрезке функций, которые не будут липшицевыми, например [6, стр. 52].

Для класса равномерно-непрерывных функций, который расширяет класс липшицевой непрерывности, в работе [7] было введено понятие $\varepsilon$-липшицевой функции — функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $A\subset\mathbb{R}^n$, называется $\varepsilon$-липшицевой, если

$$\forall\varepsilon>0\exists L(\varepsilon)<+\infty\forall x,y\in A:\left|f(x)-f(y)\right|\le L(\varepsilon)\left\|x-y\right\|+\varepsilon. \tag{1}$$

Если $A$ — выпуклый компакт, то как следует из [7], всякая непрерывная функция на $A$ является $\varepsilon$-липшицевой и наоборот.

Свойство (1) позволяет обобщить некоторые известны методы оптимизации с липшицевого случая на случай $\varepsilon$-липшицевой функции. Так, в той же работе [7] была предложена модификация метода Пиявского поиска глобального минимума функции на отрезке, а в работе [8] было показано, как можно развить метод Евтушенко. Оба упомянутых метода требуют знание зависимости величины $L(\varepsilon)$ для заданного $\varepsilon>0$. В явной форме такая зависимость для функций $f(x)=x^{\alpha}, x\in\left[0;b\right], 0<\alpha<1$ и $\ln^{-1}(x), x\in(0;a]$ были получены в [7]; в работе [8] были найдены зависимости для функций вида $f(x)=\min\{\sqrt{\left|x-a_1\right|}+b_1,\sqrt{\left|x-a_2\right|}+b_2,\sqrt{\left|x-a_3\right|}+b_3\}$; в работе [9] найдена оценка $L(\varepsilon)$ для $f(x)=\arcsin x$ на $\left[-1;1\right]$. В общем случае, когда подобную зависимость найти не удаётся, целесообразно использовать алгоритм из работы [10].

Поскольку, похожие трудности со знанием константы имеют место и для липшицевых функций, в книге [4] рассматривается метод оптимизации (метод Стронгина), не требующий предварительного знания оценки константы Липшица и вычисляющего некоторое приближения этой оценки на каждом шаге работы алгоритма. Одна из его реализаций для случая $\varepsilon$-липшицевой функции была предложена в работе [11]. В ней же было показано, что обычный перенос схемы метода Пиявского на случай равномерно-непрерывной функции может столкнуться с некоторыми проблемами, в некоторых ситуациях делающими дальнейшую работу алгоритма невозможной. В работе [7] эти препятствия, которые мы опишем ниже, отдельно оговорены не были.

В данной работе мы предлагаем альтернативную формулировку алгоритма из [7], обосновываем его сходимость, а также приводим результаты расчетов предложенным методом для тестовой функции с помощью разработанного программного обеспечения.

### 1. Описание алгоритма и его обоснование

Прежде всего отметим, что нас будет интересовать минимальная оценка $l(\varepsilon)=\inf\{L(\varepsilon)\}$, где множество $\{L(\varepsilon)\}$ есть множество оценок $L(\varepsilon)$ при фиксированном $\varepsilon>0$. Так как из (1) не следует положительность $l(\varepsilon)$, мы будем, как и в [10, 11] требовать, чтобы величина $\varepsilon>0$ и функция $f$ были согласованны на множестве $A$, т. е. чтобы существовали такие $x_0, y_0 \in A$, что $0<\varepsilon<\left|f(x_0)-f(y_0)\right|$. Из [10] следует, что в этом случае оценка $l(\varepsilon)$ достижима и $l(\varepsilon)>0$.

Теперь сформулируем шаги предлагаемого метода.

**Алгоритм А.**

**Вход:**

1) функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$;

2) величина $\varepsilon>0$, согласованная с функцией $f(x)$ на отрезке $[a;b]$;

3) оценка $L(\varepsilon)$ величины $l(\varepsilon)$;

4) точность $\delta \ge \varepsilon > 0$.

**Выход:**

1) приближенное значение величины $f_*=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$;

2) точка $x_*$ отрезка $[a;b]$, в которой достигается указанное приближенное значение.

**Шаг 0.** Выбрать точки $u_0=v_0=a$ и $u_1=v_1=b$. Аналогично [7] положить первую поисковую точку $v_*=a$, если $f(a)<f(b)$, иначе $v_*=b$. Положить $k=1$.

**Шаг 1.** Для каждого отрезка $[u_{i-1};u_i]$ вычислить характеристику

$$R_k(i,\varepsilon)=\frac{f(u_i)+f(u_{i-1})}{2}-\frac{L(\varepsilon)(u_i-u_{i-1})}{2}-\varepsilon,\ i=1,\dots,k, \tag{2}$$

практически повторяющую величину $u(y_l, y_r)$ из работы [7]. Далее определить минимальный номер $s$ такой, что:

$$R_k(s,\varepsilon)=\min_{1\le i\le k} R_k(i,\varepsilon),\ \ R_k(i,\varepsilon)>R_k(s,\varepsilon),\ i=1,\dots,s-1. \tag{3}$$

**Шаг 2.** Проверить условие останова

$$f(v_*)-R_k(s,\varepsilon)<\delta. \tag{4}$$

Если оно выполняется, то положить $x_*=v_*$, $f_*=f(v_*)$ и завершить алгоритм, иначе перейти к шагу 3.

**Шаг 3.** Вычислить очередную поисковую точку

$$v_{k+1}=\frac{(u_s+u_{s-1})}{2}-\frac{(f(u_s)-f(u_{s-1}))}{2L(\varepsilon)}. \tag{5}$$

Если $f(v_{k+1})<f(v_*)$, то положить $v_*=v_{k+1}$ и перейти к шагу 4.

**Шаг 4.** Перенумеровать точки $u_0,\dots,u_k,v_{k+1}$ в порядке их возрастания, чтобы $u_0=a<u_1<\dots<u_k<u_{k+1}=b$, положить $k=k+1$ и перейти к шагу 1. Алгоритм описан.

Заметим, что, как и в [11], очередная поисковая точка $v_{k+1}$ при таком построении может оказаться за пределами поискового интервала $(u_{s-1}; u_s)$. Однако в этом случае сработает условие останова (4) и алгоритм завершит работу. Вводя в рассмотрение функцию $g(x, x_0, \varepsilon) = f(x_0) - L(\varepsilon)|x - x_0| - \varepsilon,$ можно показать, что в силу неравенства

$$f(x) - g(x, x_0, \varepsilon) = f(x) - f(x_0) + L(\varepsilon)|x - x_0| + \varepsilon \geq 0, \tag{6}$$

а также в силу построения метода, если на каком-либо $k$-м шаге окажется, что точка $v_{k+1}$ из (5) будет вне пределов $(u_{s-1}; u_s)$, то выполнится либо неравенство $f(v_*) - R_k(s, \varepsilon) \leq f(u_{s-1}) - R_k(s, \varepsilon) \leq \varepsilon < \delta,$ либо $f(v_*) - R_k(s, \varepsilon) \leq f(u_s) - R_k(s, \varepsilon) \leq \varepsilon < \delta,$ что согласно условию (4) приведет к завершению работы алгоритма до построения $v_{k+1}$.

Далее, для доказательства сходимости введем аналогично [12, стр. 29] функцию

$$p_n(x, \varepsilon) = \max\{g(x, u_n, \varepsilon), p_{n-1}(x, \varepsilon)\} = \max_{0 \leq i \leq n} g(x, u_i, \varepsilon).$$

Обозначив через $f_* = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ глобальный минимум на отрезке и через $x_*$ точку, в которой он достигается, сформулируем предложение 1, обобщающее в некотором смысле теорему 3 из [12, стр. 30–31].

**Предложение 1.** *Пусть* $f(x)$ *— функция, удовлетворяющая на отрезке* $[a;b]$ *условию (1) с* $l(\varepsilon) > 0$ *и задана точность* $\delta > \varepsilon > 0.$ *Тогда последовательность* $\{v_k\},$ *полученная с помощью алгоритма А, такова, что:*

$$0 \leq f_* - \lim \min_{x \in [a;b]} p_k(x, \varepsilon) \leq \varepsilon < \delta. \tag{7}$$

**Доказательство.** В случае, когда все поисковые точки $v_{k+1}$ принадлежат интервалам, идея доказательства практически полностью повторяет доказательство теоремы 3 из [12, стр. 30–31]. Если же, на каком-то шаге очередная поисковая точка не принадлежит интервалу поиска, можно показать, что $f_* - R_k(s, \varepsilon) \leq f(v_*) - R_k(s, \varepsilon) \leq \varepsilon < \delta$ и, вводя стационарную последовательность точек $\{v_k\},$ далее показать, что $f_* \geq \lim \min\limits_{x \in [a;b]} p_k(x, \varepsilon) \geq R_k(s, \varepsilon),$ из чего уже непосредственно следует оценка (7). Предложение доказано.

## 2. Расчет тестовых примеров

Для описанного в предыдущем пункте метода было разработано программное обеспечение, с помощью которого был найден минимум функции

$$f(x) = \min\{\sqrt{|x+4|} - 1; \sqrt{|x+1|} - 1.005; \sqrt{|x-3|} + 0.5\}$$

из работы [8], где оптимизация этой функции проводилась обобщенным методом Евтушенко на различных отрезках. Из той же работы для нее известна формула для расчета значения $L(\varepsilon)$ при заданном $\varepsilon > 0$. Результаты вычислений представлены в табл. 1, а на рис. 1 представлен график функции $f(x)$. Обозначения в таблице: $\delta$ — заданная точность; $f_*$ — приближенное значение глобального минимума; $x_*$ — точка, в котором достигается указанное значение $f_*$; $L(\varepsilon)$ — значение оценки минимальной постоянной $l(\varepsilon)$. Как видно из табл. 1, результаты совпадают с полученными в [8].

Таблица 1

*Результаты вычислений с помощью алгоритма А для функции* $f(x)$

| Отрезок | Точность $\delta$ | $\varepsilon$ | $x_*$ | $f_*$ | Число шагов | $L(\varepsilon)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [–5;5] | 0.1 | 0.05 | –4.0029204 | –0.9459593 | 41 | 5 |
| | | 0.08 | –1.0053113 | –0.9321212 | 29 | 3.125 |
| | 0.01 | 0.005 | –1.0000782 | –0.9961556 | 431 | 50 |
| | | 0.004 | –0.9999462 | –0.9976639 | 539 | 62.5 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.001 | 0.0011 | –1.0000005 | –1.0043005 | 1932 | 227.273 |
| | | 0.0008 | –0.9999998 | –1.0046055 | 2599 | 312.5 |
| [–10;10] | 0.1 | 0.08 | –0.9994795 | –0.9821862 | 41 | 3.125 |
| | | 0.02 | –4.0001106 | –0.9894826 | 135 | 12.5 |
| | 0.01 | 0.005 | –1.0000498 | –0.9979416 | 591 | 50 |
| | | 0.004 | –1.0000083 | –1.0021107 | 729 | 62.5 |
| | 0.001 | 0.0009 | –0.9999998 | –1.0045797 | 3271 | 277.778 |
| | | | –0.9999997 | –1.0044704 | 4212 | 357.143 |

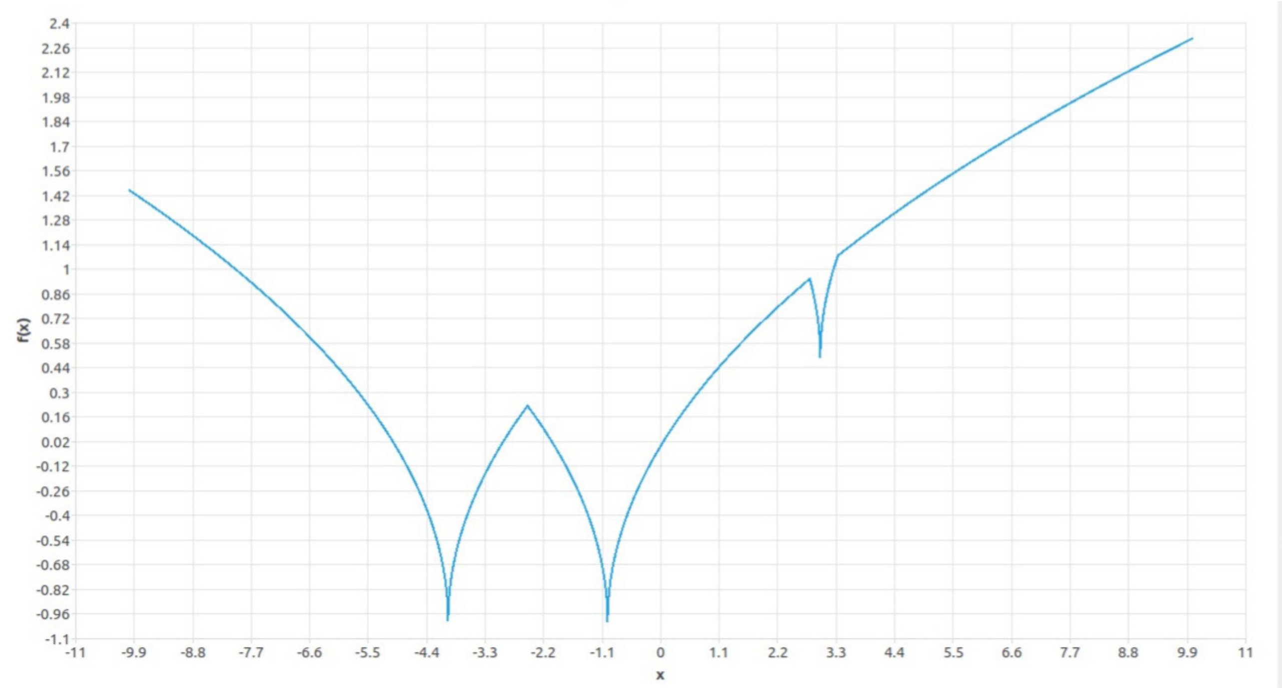



*Рис. 1. График функции* $f(x)$

**Литература**


1. *Пиявский С. А.* Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1972. – Т. 12, № 4. – С. 885–896.

2. *Евтушенко Ю. Г.* Численный метод поиска глобального экстремума функции (перебор на неравномерной сетке) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1971. – Т. 11, № 6. – С. 1390–1703.

3. *Shubert B.* A sequential method seeking the global maximum of a function // SIAM J. Numer. Anal. – 1972. – V. 9. – P. 379–388.

4. *Стронгин Р. Г.* Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М. : Наука, 1978. – 240 с.

5. *Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 352 с.

6. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. – М. : Мир, 1967. – 251 с.

7. *Vanderbei R. J.* Extension of Piyavskii's Algorithm to Continuous Global Optimization / R. J. Vanderbei // Journal of Global Optimization. – 1999. – V. 14. – P. 205–216.

8. *Арутюнова Н. К.* Метод Евтушенко поиска глобального минимума ε-липшицевой функции и его приложения / Н. К. Арутюнова // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2013. – № 2, вып. 2. – С. 154–157.

9. *Arutyunova N. K., Dulliev A. M., Zabotin V. I.* Models and methods for three external ballistics inverse problems / N. K. Arutyunova, A. M. Dulliev, V. I. Zabotin // Вестник южно-уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10, № 4. – С. 78–91.

10. *Заботин, В. И., Чернышевский, П. А.* Алгоритм вычисления минимальной оценки $\varepsilon$-постоянной Липшица непрерывной функции // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2018. – № 2. – С. 127–132.

11. *Zabotin V. I., Chernyshevskij P. A.* Extension of Strongin's Global Optimization Algorithm to a Function Continuous on a Compact Interval / V. I. Zabotin, P. A. Chernyshevskij // Computer Research and Modeling. – 2019. – V. 11, No. 6. – P. 1111–1119.

12. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. –552 с.

УДК 621.396; 511.3

# СИНУС- И КОСИНУС- ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТЬЮ И ВОЗМОЖНОСТЬЮ ИХ МНОГОКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

**А. Д. Чернышов, М. И. Попов, Д. А. Литвинов**

*Воронежский государственный университет инженерных технологий*

**Аннотация.** Приведены быстрые тригонометрические интерполяции на конечном отрезке с различными базисными функциями и повышенной точностью. Синус-интерполяция точно совпадает в точках интерполяции с данной функцией, во втором примере производные от косинус-интерполяции в точках интерполяции точно совпадают с производными от данной функции. Интерполяции во всех случаях допускают дифференцирование заданное число раз. Здесь ряды Фурье быстро сходятся и потому в них можно ограничиваться небольшим количеством членов. Подобные особенные свойства позволяют применять их для решения сложных прикладных многомерных задач интегро-дифференциального типа. Приводятся компактные формулы тригонометрических интерполяций в явном виде, дается оценка погрешности, сформулированы Алгоритмы применения предложенных интерполяций.

**Ключевые слова:** быстрые разложения, синус-, косинус- интерполяции на конечном отрезке, базисные функции, дифференцирование, граничная функция, оценка погрешности, абсолютная сходимость рядов.

## Введение

Решения нелинейных задач механики, а также в случаях тел криволинейной формы успешно могут применяться быстрые тригонометрические интерполяции. Классические тригонометрические интерполяции на конечном отрезке имеют два существенных недостатка: в общем случае они не допускают дифференцирование и имеют большую ошибку между интерполяционными точками. По этим причинам их применение в различных инженерных задачах интегро-дифференциального типа проблематично. В [1] даются основы классической теории тригонометрической интерполяция, в [2] интерполяцию представляют полным рядом Фурье, но формулы получаются громоздкими, что затрудняет их использование. Другие авторы также предпочитают тригонометрическую интерполяцию с полным рядом Фурье [3–5] и др. В [3] получено выражение для вычисления коэффициента линейных искажений при использовании тригонометрических интерполяций. Построение многомерных интерполяционных формул для периодических функций, точных на классах многочленов Фурье, предложено в [4]. Применение тригонометрической интерполяции в задачах дискретного измерения рассмотрено в [5], где обсуждается проблема возникновения неустранимой ошибки.

Вопросы дифференцирования интерполяций в научной литературе обсуждаются в случаях использования полиномов Лагранжа, Чебышева, Ньютона и других полиномов [6–8] и др. Исследования по тригонометрической интерполяции с возможностью дифференцирования пока не были известны, что является особенно важным обстоятельством при рассмотрении дифференциальных задач. В [1] предлагается почленное дифференцирование тригонометрической интерполяционной суммы, но нет анализа правомерности подобной операции, так как при дифференцировании может появиться большая ошибка. Отмечается, что в точках интерполяции функция принимает точные значения, но между точками возможны большие отклонения, что и порождает погрешность, особенно в определении производных, и тем самым создает предпосылки для возникновения неустранимой ошибки. В [9] также используется полный классический ряд Фурье для восстановления периодического сигнала и отмечается медленная сходимость ряда.

В данной работе в тригонометрических интерполяциях используются быстрые разложения, где ряд Фурье быстро сходится и допускает многократное дифференцирование [10]. В случаях использования интерполяций, в которых не предусмотрена возможность дифференцирования, в общем случае нельзя вычислять производные, т.к. это приводит к накоплению ошибки и физически неправдоподобным результатам.

### 1. Применимость метода.

Тригонометрическую интерполяцию с различными базисными функциями в гильбертовом пространстве $H$ на конечном отрезке будем рассматривать в прикладных целях. Особенно удобно применять тригонометрическую интерполяцию при рассмотрении нелинейных, а также многомерных краевых задач, для криволинейных областей. Подобные примеры будут приведены в последующих работах. Быстрые разложения позволяют получать приближенное решение задачи в аналитическом виде с минимальными численными затратами на ЭВМ с высокой точностью, что доказано теоретически [10] и проверялось многократно сравнением с тестовыми задачами [11–15] и др.

**Замечание 1.** о применимости метода. Метод синус-интерполяции применим при задании значений $f(x_j)$ в отдельных равномерно распределенных точках $x_j \in [0,a]$. Система точек $\{x_j\}$ должна быть такой, чтобы между любыми двумя соседними точками интерполяции $f(x)$ изменялась незначительно и достаточно плавно. Косинус- интерполяции применимы при задании производных $f'(x_j)$ в отдельных равномерно распределенных точках $x_j \in \left[0,a\right]$. Информация о достаточно плавном характере поведения $f(x)$ и ее производных $f'(x_j)$ между точками интерполяции может быть взята из экспериментальных или навигационных данных, либо из опыта ранних наработок, из физических соображений и др.

**Замечание 2.** Интерполяционная сумма $S_{int}(x)$, аппроксимирующая $f(x)$, отличается от частичной суммы ряда Фурье $S_{Fo}(x)$ с теми же базисными функциями и с таким же количеством членов в тригонометрической сумме тем, что $S_{int}(x)$ или $S'_{int}(x)$ точно равны значениям $f(x)$ или $f'(x)$ (соответственно) в точках интерполяции, тогда как $S_{Fo}(x)$ — приближенно. Но в интегральном среднем синус-интерполяция $S_{Fo}(x)$ точнее приближает к $f(x)$ по сравнению с $S_{int}(x)$. В случае косинус-интерполяции производная $S'_{Fo}(x)$ в интегральном среднем точнее приближает к $f'(x)$ по сравнению с $S'_{int}(x)$ [16].

**Замечание 3.** Основная причина невозможности почленного дифференцирования некоторой интерполяции объясняется тем, что если даже разность $f(x)-S_{int}(x)=\delta(x)$ мала, но в классических интерполяциях она может оказаться быстро осциллирующей, и тогда производная будет совершать сильные изменения. Почленное дифференцирование такой интерполяции нецелесообразно.

**Замечание 4.** Если в равномерной интерполяции количество точек $x_j$ стремить к бесконечности, то получим интерполяционный ряд. Тогда возникает проблема о сходимости такого ряда и о возможности его почленного дифференцирования. Если интерполяционный ряд расходится, то увеличение количества точек не приведет к увеличению точности, так как возникает неустранимая ошибка.

**Замечание 5.** При выборе интерполяции необходимо исследовать, является ли используемая интерполяционная система функций полной. В противном случае будет возникать неустранимая ошибка, тогда увеличение числа членов интерполяции не будет приводить к уменьшению погрешности.

**Замечание 6.** Если информация о характере поведения $f(x)$ между точками интерполяции отсутствует, то имеется риск в правомерности применения данного метода.

Невыполнение хотя бы одного из 6 данных условий приведет к неудовлетворительному результату, интерполяция будет нецелесообразной.

Интерполяционные ряды на конечном отрезке $x \in [0, a]$ предполагается использовать для прикладных целей, в этой связи возникают три условия.

**Условие 1.** Выбранная интерполяционная система функций должна быть полной. В противном случае может возникнуть неустранимая ошибка.

**Условие 2.** Необходим анализ сходимости интерполяционного ряда к значениям $f(x)$ или к значению её производных внутри и на концах отрезка. Если предполагаемый ряд не сходится к $f(x)$ или к её производным внутри отрезка, а также и на его концах, то возникает неустранимая ошибка и граничные условия на концах отрезка данной задачи невозможно будет выполнить.

Данное условие 2 может быть реализовано при задании $f(x)$ непрерывной кривой, когда появляется возможность получить любое конечное число интерполяционных точек.

**Условие 3.** О возможности почленного дифференцирования ряда.

Выполнение условия 3 позволяет применять тригонометрическую интерполяцию для решения интегро-дифференциальных задач.

В этой связи для одновременного выполнения всех трех условий ниже предлагается использовать наиболее эффективные быстрые разложения.

Пусть $f(x) \in L_2^{q+2}([0, a])$ — классы функций Соболева — Лиувилля [17]. Для определения быстрого разложения $f(x)$ в $H[0, a]$ используем понятия: граничной функции $M_q(x) = \sum_{i=1}^{q+2} A_i P_i(x)$, предназначенной для увеличения скорости сходимости рядов Фурье, быстрых полиномов $P_i(x)$ и ряда Фурье для разности $f(x) - M_q(x) = \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m R_m(x)$ по некоторым базисным функциям $R_m(x)$, где $q$ — порядок граничной функции $M_q(x)$, равный порядку старшей производной, используемой в определении $M_q(x)$ [10].

От граничных условий предполагаемой задачи для данной $f(x)$ на концах отрезка $[0, a]$ зависят: выбор быстрых полиномов $P_i(x)$, вид граничной функции $M_q(x)$ и выбор базисных функций $R_m(x)$, используемых в ряде Фурье для $\psi(x)$. В данной работе это будет показано на двух примерах интерполяций — при $R_m(x) = \sin m\pi x/a$ и $R_m(x) = \cos m\pi x/a$.

**Определение быстрого разложения.** Быстрым разложением $f(x)$ в $H[0, a]$ для данных базисных функций $R_m(x)$ будем называть сумму граничной функции $M_q(x) = \sum_{l=1}^{q+2} A_l P_l(x)$ и ряда Фурье для разности $f(x) - M_q(x) = \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m R_m(x)$, т. е.

$$f(x) = M_q(x) + \psi(x), \quad M_q(x) = \sum_{l=1}^{q+2} A_l P_l(x), \quad \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m R_m(x).$$

Основное назначение граничной функции $M_q(x)$ и быстрых полиномов $P_l(x)$ — повысить скорость сходимости ряда Фурье для $\psi(x)$ за счет быстрого уменьшения коэффициентов $\psi_m$ с ростом номера $m$. Ниже будет показано, как найти $\psi_m$, и что $\psi_m \sim m^{-(q+2)}$.

При задании условий Дирихле на концах отрезка $[0, a]$ используется ряд по синусам, при задании условий Неймана используется ряд по косинусам. Для этих случаев в [10] приведены рекуррентные интегральные выражения быстрых полиномов $P_l(x)$ и соответственный вид граничных функций.

## 2. Синус-интерполяция

Синус-интерполяция одна из наиболее простых тригонометрических интерполяций, которую удобно применять, когда в точках интерполяции $x_j$ заданы значения функции $f(x_j)$, при этом в дифференциальных уравнениях и граничных условиях некоторой задачи используются производные четного порядка. В прикладных задачах механики сплошных сред, физики, для тел конечных размеров особенно ценными являются математические методы быстрых тригонометрических разложений.

Пусть существует некоторая функция $f(x) \in L_2^{q+2}([0,a])$, где $L_2^{q+2}$ — классы функций Соболева — Лиувилля [17], и пусть известны значения $f(x_j)$ только в дискретных точках отрезка $[0,a]$ при его равномерном делении на четное число $2K$ отрезков точками $x_j = ja/2K$, $j = 0 \div 2K-1$, $f(x)\big|_{x=x_j} = f(x_j)$, $x_j = ja/2K$, $j = 0 \div 2K-1$, $f(x) \in L_2^{q+2}([0,a])$.

Представим $f(x)$ $(x \in [0,a])$ быстрым синус-разложением в виде суммы граничной функции $M_2(x)$ второго порядка (здесь $q = 2$) и некоторой $\psi(x)$, записанной синус-рядом Фурье [10]:

$$f(x) = M_2(x) + \psi(x) \quad , \quad \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \sin m\pi \frac{x}{a} \quad , \quad f(x) \in L_p^{\alpha}\left(x \in [0,a]\right) ,$$
$$M_2(x) = f(0)\left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a} + f''(0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + f''(a)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right). \tag{1}$$

**Теорема 1.** *Если $f(x) \in L_2^4([0,a])$, то быстрое разложение $f(x)$ по синусам в (1) можно почленно дифференцировать 2 раза, оставаясь в пространстве быстрых разложений, и всего дифференцировать 4 раза.*

**Доказательство.** Запишем $\psi(x)$ из (1) в виде

$$\psi(x) = f(x) - M_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \sin m\pi \frac{x}{a}. \tag{2}$$

Коэффициенты $\psi_m$ для разности $f(x) - M_2(x)$ вычислим интегралами $\psi_m = \frac{2}{a}\int_0^a \left(f(x) - M_2(x)\right)\sin m\pi \frac{x}{a}dx.$ Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\psi_m = \frac{2}{a}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^4 \int_0^a f^{(4)}(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx. \tag{3}$$

При помощи последнего выражения $\psi_m$ ряд Фурье для $\psi(x)$ в (2) можно записать равенством

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \sin m\pi \frac{x}{a} = \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^4 \left(\int_0^a f^{(4)}(t) \sin m\pi \frac{t}{a} dt\right) \sin m\pi \frac{x}{a}.$$

Так как $f(x) \in L_2^4$ и перед интегралом стоит множитель $\left(a/m\pi\right)^4$, который с ростом $m$ быстро убывает, то отсюда получаем доказательство, что ряд Фурье для $\psi(x)$ допускает почленное дифференцирование два раза, оставаясь в пространстве быстрых разложений, и в общей сложности его можно дифференцировать четыре раза.

**Следствие 1.** Если в (1) использовать граничную функцию $M_q(x)$ более высокого порядка $q$, то ряд Фурье для $\psi(x)$ после $q$ кратного дифференцирования остается в пространстве быстрых разложений, и $\psi(x)$ можно почленно дифференцировать всего $q+2$ раза. Скорость сходимости такого ряда, как и при $q = 2$, чрезвычайно высокая, так как $\psi_m \sim m^{-(q+2)}$. Все производные до $q$ порядка включительно остаются в пространстве быстрых разложений и потому их разложения быстро и абсолютно сходятся.

**Следствие 2.** Если $f(x) \in L_2^4([0,a])$, то ряд Фурье $\psi(x)$ по синусам из быстрого разложения (1) и производные $\psi'(x)$, $\psi''(x)$ до второго порядка включительно на отрезке $[0,a]$ абсолютно сходятся.

### 3. Постановка задачи синус-интерполяции

Пусть $f(x)$, $x \in [0,a]$ — неизвестная функция, для которой коэффициенты ряда Фурье по синусам неизвестн, и пусть известно, что $f(x) \in L_2^4([0,a])$ — гладкая функция, и известны значения $f(x_j)$:

$$\tilde{f}(x)\Big|_{x=x_j} = f(x_j), \quad x_j = j\,a/2K, \quad j = 0 \div 2K-1 \tag{4}$$

на равномерной сетке $x_j$, состоящей из четного количества $2K$ отрезков длиной $\Delta$ каждый. Между любыми двумя точками интерполяции $x_j$ значения $f(x)$ неизвестны.

Требуется определить приближенно гладкую функцию $\tilde{f}(x) \in L_2^4([0,a])$ в $H$ с базисными функциями $\{\sin m\pi\, x/a\}$ в виде

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^{2K-1} \tilde{\psi}_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad f(x) \in L_2^4([0,a]) \tag{5}$$

компактной формулой из решения замкнутой системы (4), которая принимает вид

$$\psi(x_j) = f(x_j) - M_2(x_j) = \sum_{m=1}^{2K-1} \tilde{\psi}_m \sin m\pi \frac{x_j}{a}, \quad x_j = j\frac{a}{2K}, \quad j = 1 \div 2K-1. \tag{6}$$

Для сохранения свойства ортогональности в суммах (5) и (6) не используется крайняя правая точка $x = a$ данного отрезка при $m = 2K$. Однако быстрое разложение (5) и равенства (6) тождественно выполняются на концах отрезка при $x = 0$, $x = a$. Выполнение системы (6) означает, что в точках интерполяции $x = x_j$, $j = 0 \div 2K-1$ имеют место точные равенства $f(x_j) = \tilde{f}(x_j)$, $j = 0 \div 2K$. Если $(f(x), \tilde{f}(x)) \in L_2^4([0,a])$, то при достаточно большом $K$ вполне можно считать законными следующие приближенные равенства [1] $f(x) \approx \tilde{f}(x)$, $x \in [0,a]$ и два предельных равенства $\lim\limits_{K\to\infty} \tilde{\psi}_m = \psi_m$, $m = 0,1,\ldots$, $\lim\limits_{K\to\infty} \tilde{f}(x) = f(x)$ при $\Delta \to 0$. Чтобы воспользоваться выражением $\tilde{f}(x)$ из (5) для прикладных целей, надо найти $\tilde{\psi}_m$ из системы (6), что целесообразно делать в двух случаях:

1) Когда не удается вычислить коэффициенты Фурье $\psi_m$ в конечном виде через элементарные функции по последнему интегральному выражению из (3). Такая ситуация возникает при рассмотрении нелинейных задач, а также в случаях криволинейных областей.

2) Когда аналитический вид $\psi(x)$ неизвестен, а известны только значения $\psi(x_j)$ в дискретных точках $x_j$ из некоторых экспериментальных данных, наиболее часто встречающийся в классической литературе и инженерной практике. Но в этом случае необходимо иметь дополнительную информацию о достаточно гладком поведении $\psi(x)$ между точками $x_j$, что может быть оправдано, если $2K$ достаточно велико.

В пространстве $H([0,a])$ система дискретных функций $\{\sin n\pi\, x_j/a\}\big|_H$ на отрезке $[0, a(1-1/2K)]$ ортогональная. Вычислим в $H$ квадрат нормы $\mathbf{N}^2\big|_j$:

$$\mathbf{N}^2\Big|_j = \sum_{j=1}^{2K-1} \sin^2\left(m\frac{\pi j}{2K}\right) = -\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{2K-1}\left(\exp\left(2im\frac{\pi j}{K}\right) - 2 + \exp\left(-2im\frac{\pi j}{K}\right)\right) = K.$$

Отметим, если в [1] квадрат нормы $\mathbf{N}^2$ равен количеству слагаемых в тригонометрической интерполяции, то в данном подходе (5) он равен половине количества слагаемых под знаком суммы. Решение системы (6) принимает явный вид в конечной форме

$$\tilde{\psi}_m = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{2K-1} \psi(x_j) \sin m\frac{\pi j}{2K}, \quad \psi(x_j) = f(x_j) - M_q(x_j), \quad m = 0 \div 2K-1.$$

Теперь формулу синус-интерполяции (5), с учетом быстрого разложения (1) можно записать в компактном виде:

$$\tilde{f}(x) = M_2(x) + \frac{1}{K}\sum_{m=1}^{2K-1}\left(\sum_{j=1}^{2K-1}\left(\left(f(x_j) - M_2(x_j)\right)\sin m\pi\frac{j}{2K}\right)\right)\sin m\pi\frac{x}{a}. \tag{7}$$

## 4. Оценка погрешности.

В классической литературе оценку погрешности тригонометрической интерполяции получают при помощи теоремы Ролля. Получающаяся при этом формула для погрешности выражается через производные $(2K-1)$ порядка от интерполяционного многочлена, но при этом вычисление производной столь высокого порядка необоснованно. В этой связи предложим иной вывод оценки погрешности.

Предположим, что $f(x) \in L_2^4([0,a])$. Погрешность интерполяции (7) получим как оценку остаточного члена $R_{sin}$ интерполяции (5) при $K \to \infty$. Введем обозначение $M_{sin}^{(4)} = \sup\left(\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [0,a]\right)$. Запишем выражение (5) в форме интерполяционного ряда

$$\tilde{f}(x) = M_2(x) + \sum_{m=0}^{2K-1} \tilde{\psi}_m \sin m\pi \frac{x}{a} + \sum_{m=2K}^{\infty} \tilde{\psi}_m \sin m\pi \frac{x}{a}.$$

При $2K \to \infty$ дискретный ряд Фурье переходит в классический ряд Фурье и потому поставлен знак равенства. Поэтому вторую сумму можно рассматривать интерполяционной погрешностью. Примем приближенно $\tilde{\psi}_m \approx \psi_m$ и используем формулу (3). Тогда для погрешности получим следующую оценку

$$R_{sin} = \sum_{m=2K}^{\infty} \psi_m \sin m\pi \frac{x}{a} \le M_{sin}^{(4)} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{8K^4} + \frac{1}{12K^3}\right).$$

Из численных экспериментов полученные погрешности быстрых интерполяций и их производных по сравнению с погрешностью быстрых разложений, когда коэффициенты вычисляются интегралами Фурье, примерно одинаковые. Высокая точность при небольшом количестве интерполяционных точек показывает, что предложенный здесь метод быстрых синус-интерполяций является одним из наиболее эффективных и экономичных методов, удобный при решении нелинейных инженерных задач для криволинейных областей.

Аналогично решается проблема косинус-интерполяции.

## Заключение

Во всех рассмотренных примерах тригонометрических интерполяций используются быстрые разложения, что позволяет дифференцировать интерполяции заранее заданное число раз. Получаемые при этом интерполяционные ряды сходятся, что способствует увеличению точности при возрастании количества интерполяционных точек. Особенно эффективен предлагаемый здесь метод при рассмотрении нелинейных краевых задач механики сплошных сред для нестандартных криволинейных многомерных областей. Используемый здесь метод быстрых разложений имеет следующие характеристики:

1) Метод аналитический, что позволяет проводить аналитические исследования при помощи полученного решения;

2) Приближенная интерполяция допускает дифференцирование заданное число раз;

3) Имеется доказательство быстрой и абсолютной сходимости ряда Фурье;

4) Для решения прикладных задач требуется использовать небольшое количество членов ряда Фурье, что способствует экономичным численным программам для реализации метода;

5) Имеется оценка погрешности метода в явной форме.

Принимая во внимание перечисленные характеристики, можно утверждать, что данный метод быстрых разложений значительно превосходит все известные приближенные аналитические методы.

**Литература**


1. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. – Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2015. – 639 с.

2. *Крылов, В. И.* Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – Москва : Наука, 1967. – 500 с.

3. *Зиатдинов, С. И.* Анализ ошибок при тригонометрической интерполяции / С. И. Зиатдинов // Изв. ВУЗОВ. Приборостроение. – 2008. – Т. 51, №5. – С. 42–45.

4. *Чубариков, В. Н.* Об интерполяции функций многих переменных / В. Н. Чубариков, М. Л. Шарапова // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18, № 4. – С. 338–346.

5. *Наац, И. Э.* Применение тригонометрической интерполяции в задачах дискретного измерения / И. Э. Наац // Изв. Томского политехнич. ин-та. – 1969. – Т. 168. – С. 71–74.

6. *Ефимов, В. М.* Об отсчетных функциях при восстановлении периодического сигнала и дисперсии ошибки тригонометрической интерполяции / В. М. Ефимов, А. Л. Резник // РАН СО Автометрия. – 2005. – Т. 41, №4. – С. 3–14.

7. *Самарский, А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва : Наука, 1989. – 432 с.

8. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

9. *Залипаев, В. В.* Численные методы в физике и технике / В. В. Залипаев, Д. Р. Гулевич; университет ИТМО. – Санкт-Петербург: Изд-во университета ИТМО, 2020. – 213 с.

10. *Чернышов, А. Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А. Д. Чернышов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 13–24.

11. *Чернышов, А. Д.* Аналитическое решение задачи о температурном поле в прямоугольной пластине с переменным внутренним источником с помощью быстрых разложений / А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – Саров, 2013. – Вып. 1. – С. 53–58.

12. *Попов, В. М.* Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / В. М. Попов, А. С. Шахов, В. В. Горяйнов, О. А. Чернышов, А. П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6, № 4. – С. 179–191.

13. *Чернышов, А. Д.* О связи количества точек перегиба графика функции и количества членов рядов Фурье при использовании быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов // ISJ Theoretical & Applied Science. – 2016. – № 1. – P. 137–141.

14. *Чернышов, А. Д.* Решение нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов // Инженерно-физический журнал. – Минск, 2018. – Т. 91, № 2.

15. *Чернышов, А. Д.* Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, О. В. Лешонков, Е. А. Соболева, О. Ю. Никифорова // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 1. С. 27–34.

16. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – Москва : Госуд. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. – 856 с.

17. *Ильин, В. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов / В. А. Ильин. – Москва: Наука, 1991. – 368 с.

18. *Зверяев, Е. М.* Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем / Е. М. Зверяев // ПММ. – 2019. – Т. 83, № 5–6. – С. 823–833.

УДК 517.5

# ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РЯДАХ И ПОЛУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НОВЫХ СУММИРУЕМЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ ПРИ ПОМОЩИ ПОЛИНОМОВ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

**А. Д. Чернышов, Д. С. Сайко, Е. Н. Ковалева**

*Воронежский государственный университет инженерных технологий*

**Аннотация.** В прикладных задачах механики при использовании быстрых разложений возникают проблемы суммирования числовых рядов. Подобные ряды рассмотрены в данной работе. Доказана теорема об эквивалентных рядах, позволяющая находить множество новых спектров суммируемых рядов. Приводится классификация числовых рядов на три класса. При помощи разложения специальных полиномов в ряды Фурье по различной ФСФ удается суммировать широкий класс новых числовых рядов, имеющих удобную классическую форму первого класса. Используемые для этого полиномы заимствованы из метода быстрых разложений автора.
**Ключевые слова:** теорема об эквивалентных рядах, числовые, быстрые разложения, быстрые полиномы, числовой период.

## Введение

Известны некоторые суммируемые числовые ряды, полученные в начале и середине 20 века. Различные авторы нашли частные случаи и потому полученные ими ряды были опубликованы в качестве сопутствующих результатов в отдельных научных статьях и монографиях. Все они собраны в справочниках [1, 2]. С тех пор по настоящее время новые суммируемые числовые ряды неизвестны. В данных справочниках приведено большое количество функциональных рядов с помощью сложных спецфункций. За последнее время известны некоторые исследования различных свойств числовых рядов [3–6] и др. В [7] получено, что порядок убывания нормы в $L$ остатка ряда Фурье по синусам с монотонными коэффициентами выражается через коэффициенты ряда также, как и для рядов с выпуклыми коэффициентами.

В данной работе для получения новых числовых рядов используются быстрые полиномы (БП), имеющие простой вид и потому они позволяют организовать несколько множеств суммируемых спектров числовых рядов. Подобные ряды удобно применять для оценки некоторых функциональных рядов, они могут быть также использованы в качестве мажорантных рядов, в вычислительной практике и теоретических исследованиях.

## 1. Теорема об эквивалентных равномерно сходящихся рядах

Все известные суммируемые числовые ряды получаются из функциональных, где переменной $x$ придают некоторые характерные значения. Ниже функциональный равномерно сходящийся ряд будем записывать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n,x),\quad f(n,x)\in C\left(x\in[a,b]\,,\, n=1,2,\ldots\right),\ \lim_{n\to\infty} f(n,x)=0\ ,\ \forall x\in[a,b]. \qquad (1.1)$$

Здесь $f(n,x)$ зависит от двух переменных: непрерывной ограниченной переменной $x\in[a,b]$ и от целочисленного номера $n=1,2,\ldots$ Пусть $f(n,x)$ существует и непрерывна для всех значений указанных переменных.

В данной работе при получении новых числовых рядов будем переставлять местами члены ряда (1.1) в некотором определенном порядке. Тогда возникает вопрос о правомерности подобной перестановки. В этой связи докажем теорему.

**Теорема.** *Пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n,x) = S_0, \quad f(n,x) \in C \quad \left(\forall n = 1,2,...;\ x \in [a,b]\right) \tag{1.2}$$

*равномерно сходится при* $\forall x \in [a,b]$; *где* $f(n,x)$ *— непрерывная и гладкая функция двух переменных — целочисленной дискретной неограниченной переменной* $n = 1,2,...$ *и непрерывной переменной* $x \in [a,b]$.

*И пусть* $A$ *дополнительных рядов с суммами* $S_1 \div S_A$

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\left(An-(A-1)\right),x\right) = S_1(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\left(An-(A-2)\right),x\right) = S_2(x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} f\left((An-1),x\right) = S_{A-1}(x), \sum_{n=1}^{\infty} f(An,x) = S_A(x), \quad x \in [a,b], \quad A \in N, \quad A \ge 2\end{gathered} \tag{1.3}$$

*равномерно сходятся при* $\forall x \in [a,b]$, *где* $A \in N$ *— некоторое произвольное заданное натуральное число, называемое числовым периодом. Тогда имеет место равенство*

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} f\left((An-A+1),x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f\left((An-A+2),x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f\left((An-A+3),x\right) + \\ ... + \sum_{n=1}^{\infty} f\left((An-1),x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f(An,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n,x) \ , x \in [a,b] \ , A \in N \ , \ A \ge 2.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Предпоследний ряд в левой части (1.4) равен $\sum_{n=1}^{\infty} f((An-1),x)$, последний ряд равен $\sum_{n=1}^{\infty} f(An,x)$. Равенство (1.4) означает, что сумма $A$ рядов в левой части эквивалентна одному ряду в правой части.

**Доказательство** теоремы.

По условиям теоремы количество рядов в левой части (1.4) равно $A$ и каждый ряд в (1.4) равномерно сходится. Для доказательства теоремы запишем частичные суммы данных рядов в (1.4) следующим образом

$$\begin{gathered}\left[f(1,x) + f\left((A+1),x\right) + f\left((2A+1),x\right) + ...f\left(K_0A+1,x\right)\right] + \\ + \left[f(2,x) + f\left((A+2),x\right) + f\left((2A+2),x\right) + ...f\left(K_0A+2,x\right)\right] + \\ + \left[f(3,x) + f\left((A+3),x\right) + f\left((2A+3),x\right) + f\left(K_0A+3,x\right) + ...\right] + \\ + ...\left[f(A,x) + f\left((A+A),x\right) + f\left((2A+A),x\right) + f\left(K_0A+A,x\right) + ...\right] = \\ = f(1,x) + f(2,x) + ... + f\left(K_0A+A,x\right).\end{gathered} \tag{1.5}$$

В левой части (1.5) каждый член первой частичной суммы не повторяется в остальных частичных суммах, также и каждый член второй частичной суммы не повторяется в остальных частичных суммах. Частичная сумма каждого ряда в левой части (1.5) состоит из $K_0 + 1$ членов. Общее количество членов в $A$ рядах левой части равно $A(K_0 + 1)$, равное количеству первых членов частичной суммы ряда в правой части. Каждый член частичной суммы в правой части (1.5) один раз содержится в левой части, т. е. равенство (1.5) выполняется точно. Так как все рассматриваемые ряды равномерно сходятся, то предел суммы частичных сумм конечного числа $A$ равномерно сходящихся рядов слева равна сумме их пределов и равна сумме ряда справа. Отсюда следует $S_1 + S_2 + ... + S_A = S_0$, т. е. сумма рядов слева равна сумме ряда справа и теорема доказана.

**Следствие 1.** *Если ряд (1.2) равномерно сходится, то он допускает упорядоченную перегруппировку его членов с некоторым числовым периодом* $A$ *в соответствии с формулой (1.4).*

**Следствие 2.** *Если в равенстве (1.4) суммы всех рядов, кроме одного, известны, то неизвестную сумму ряда можно найти из (1.4) и таким образом получить новый суммированный ряд.*

**Следствие 3.** *Последовательно полагая* $A = 2, 3, \ldots$ *из (1.4) будем иметь систему вспомогательных равенств для нахождения сумм некоторых рядов.*

**Следствие 4.** *При помощи данной теоремы можно суммировать достаточно большое количество равномерно сходящихся рядов.*

Ниже все новые суммируемые числовые ряды будут получены при помощи доказанной теоремы. Справедливость данной теоремы можно также проверить непосредственным суммированием на ЭВМ членов рассматриваемых рядов и вычислением соответственных значений быстрых полиномов, через которые выражаются суммы.

## 2. Быстрые полиномы и классификация числовых рядов

Сходящиеся числовые ряды можно разделить на три класса.

К 1-му классу отнесем числовые ряды, сумма которых выражается через элементарные функции в конечном виде. Такая сумма легко вычисляется даже на калькуляторе и удобна при практическом применении. Подобных числовых рядов известно немного, они приведены в справочниках [1, 2].

Ко 2-му классу отнесем числовые ряды, сумма которых выражается в конечном виде через спецфункции, которые в свою очередь выражаются некоторым рядом. В данном случае вычисление суммы рассматриваемого ряда заменяется на вычисление на ЭВМ ряда для спецфункции. В справочниках [1, 2] в основном приведены ряды 2-го класса.

К 3-му классу следует отнести все остальные сходящиеся числовые ряды, для которых неизвестно выражение суммы ряда в конечном виде через элементарные или спецфункции. Их сумма может быть вычислена на ЭВМ путем прямого суммирования членов ряда.

Ниже будет получено множество спектров числовых рядов 1-го класса, что является существенным дополнением к общему списку подобных рядов.

Для этих целей используются полиномы, заимствованные из метода быстрых разложений [7], называемые в дальнейшем быстрыми полиномами (БП). Вначале укажем логический путь, приводящий к суммированию ниже приведенных числовых рядов, чтобы не создавалось впечатление о случайном характере полученных результатов.

При использовании метода быстрых разложений (БР) произвольную гладкую функцию $f(x)$ на отрезке $x \in [0,1]$ представим суммой граничной функции $M_q(x)$ и быстро сходящимся рядом Фурье, построенного для разности $f(x) - M_q(x)$ [7–9] и др. Граничная функция $M_q(x)$ состоит из специальных полиномов $P_m(x)$, $Q_m(x)$, $m = 1 \div q$, которые и называются быстрыми полиномами БП. Число $q$ может быть взято произвольным целым конечным. От него зависит скорость сходимости используемых в быстрых разложениях (БР) рядов Фурье. Выражения этих полиномов и граничной функции определяется типом граничных условий, которым должна удовлетворять $f(x)$ на концах отрезка $x \in [0,1]$.

Пусть некоторая $f(x)$ является непрерывной и гладкой функцией и на концах отрезка $[0,1]$ удовлетворяет граничным условиям Дирихле

$$f(x) \in C^{(2p)}\left(\forall x \in [0,1]\right), \qquad f(x)\big|_{x=0} = f(0), \qquad f(x)\big|_{x=1} = f(1). \tag{2.1}$$

Тогда $f(x)$ можно представить БР по синусам в виде

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi x. \tag{2.2}$$

Здесь $2p$ — некоторый заданный порядок гладкости, $f_m$ — коэффициенты Фурье для разности $(f(x) - M_{2p}(x))$, $M_{2p}(x)$ — граничная функция. В случае граничных условий Дирихле (2.1) $M_{2p}(x)$ определяется следующим образом

$$M_{2p}(x)=\sum_{m=0}^{p}\left(A_{2m}P_{2m}(x)+B_{2m}Q_{2m}(x)\right),\quad A_{2m}=f^{(2m)}(0),\quad B_{2m}=f^{(2m)}(1),\ m=0\div p. \qquad (2.3)$$

В (2.3) $P_{2m}(x), Q_{2m}(x)$ — быстрые полиномы (БП), которые вычисляются по следующим рекуррентным интегральным формулам

$$\begin{gathered}P_0(x)=1-x,\quad Q_0(x)=x,\ P_{2m}(x)=\int_0^x\left[\int_0^{t_1}P_{2m-2}(t_2)dt_2\right]dt_1-x\int_0^1\left[\int_0^{t_1}P_{2m-2}(t_2)dt_2\right]dt_1,\\ Q_{2m}(x)=\int_0^x\left[\int_0^{t_1}Q_{2m-2}(t_2)dt_2\right]dt_1-x\int_0^1\left[\int_0^{t_1}Q_{2m-2}(t_2)dt_2\right]dt_1,\\ m=1\div p,\quad 0\le t_2\le t_1,\quad 0\le t_1\le x,\quad 0\le x\le 1.\end{gathered} \qquad (2.4)$$

Полиномы $P_0(x), Q_0(x)$ являются производящими, через них при помощи двукратных интегралов находятся все остальные с четными индексами. Быстрые полиномы $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ можно также вычислить из решения краевых дифференциальных задач с нулевыми граничными условиями Дирихле, для которых они и создавались [7, 8]:

$$\begin{aligned}&P''_{2m}(x)=P_{2m-2}(x),\quad P_{2m}(0)=P_{2m}(1)=0,\quad m\ne 0,\ m=1\div p,\\ &Q''_{2m}(x)=Q_{2m-2}(x),\quad Q_{2m}(0)=Q_{2m}(1)=0.\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Индекс $2p$ в (2.2)–(2.5) равен порядку старшей производной $f^{(2p)}(x)$, используемой при построении $M_{2p}(x)$.

БР в (2.2) допускает почленное дифференцирование ряда $2p$ раз, при этом ряды Фурье остаются быстро сходящимися. За счет специальной конструкции полиномов $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ в (2.4) граничная функция $M_{2p}(x)$ из (2.3) значительно увеличивает скорость сходимости ряда Фурье в БР (2.2). С увеличением порядка $2p$ скорость сходимости существенно возрастает [9]. Полиномы $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ с четными индексами используются в синус — БР (2.2). Для косинус — БР используются полиномы $P_{2m-1}(x)$, $Q_{2m-1}(x)$ с нечетными индексами

$$f(x)=M_{2p-1}(x)+f_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cos n\pi x,\quad f(x)\in C^{(2p-1)}\left(\forall x\in[0,1]\right). \qquad (2.6)$$

Полиномы $P_{2m-1}(x)$, $Q_{2m-1}(x)$ с нечетными индексами выражаются через производные $P'_{2m}(x)$, $Q'_{2m}(x)$ от полиномов с четными индексами

$$P_{2m-1}(x)=P'_{2m}(x),\quad Q_{2m-1}(x)=Q'_{2m}(x),\quad x\in[0,1],\quad m=1,2,... \qquad (2.7)$$

## 3. Построение числовых рядов при помощи быстрых полиномов

Числовые ряды будем строить путем разложения полиномов (2.8) по $\sin n\pi x$ и полиномов (2.9) по $\cos n\pi x$ на отрезке $x\in[0,1]$.

Запишем ряды Фурье полиномов $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ по $\sin n\pi x$:

$$\begin{aligned}&P_{2m}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{(2m)}\sin n\pi x,\quad P_n^{(2m)}=2\int_0^1 P_{2m}(x)\sin n\pi x dx\\ &Q_{2m}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n^{(2m)}\sin n\pi x,\quad Q_n^{(2m)}=2\int_0^1 Q_{2m}\left(x\right)\sin n\pi x dx.\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Полиномы $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ имеют особую конструкцию, поэтому для их рядов коэффициенты Фурье $P_n^{(2m)}$, $Q_n^{(2m)}$ имеют особый удобный вид. Для вычисления коэффициентов $P_n^{(2m)}$, $Q_n^{(2m)}$ при любом заданном $m$ вначале используем интегралы от производящих полиномов:

$$\int_0^1 P_0(x)\sin n\pi x dx=\frac{1}{n\pi},\quad \int_0^1 Q_0(x)\sin n\pi x dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}. \qquad (3.2)$$

Через интегралы (3.2) выражаются все остальные интегралы в (3.1) от $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ для любого $m$ по формулам

$$\int_0^1 P_{2m}(x)\sin n\pi x dx = \frac{(-1)^m}{n^{2m+1}\pi^{2m+1}}, \quad \int_0^1 Q_{2m}(x)\sin n\pi x dx = \frac{(-1)^{m+n+1}}{n^{2m+1}\pi^{2m+1}}. \tag{3.3}$$

При помощи интегралов (3.3) ряды Фурье для БП $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ с четными индексами принимают вид

$$\begin{gathered} P_{2m}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2m}^{(n)} \sin n\pi x = \frac{2(-1)^m}{\pi^{2m+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} \sin n\pi x \ \ , \ x\in[0,1], \\ Q_{2m}(x) = \frac{2(-1)^m}{\pi^{2m+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2m+1}} \sin n\pi x, \quad m=0,1,2,... \end{gathered} \tag{3.4}$$

Полиномы $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ в левых частях (3.4) получаются из рекуррентных выражений (2.4) и потому их точное значение можно вычислить при $\forall x\in[0,1]$. В разложениях (3.4) будем последовательно брать характерные значения переменной $x = 1/6, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 5/6$. Здесь значения $x=0$, $x=1$ не берутся, так как тогда равенства для $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ в (3.4) обращаются в тождества. Полагая $x=1/6$ в (3.4) получим первый спектр суммированных числовых рядов при различных значениях $m=0,1,2,...$, который распишем подробно так:

$$\begin{gathered} P_{2m}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2(-1)^m}{\pi^{2m+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} \sin n\pi \frac{1}{6} = \frac{2(-1)^m}{\pi^{2m+1}} \left( \frac{1}{1^{2m+1}}\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2m+1}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3^{2m+1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4^{2m+1}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{5^{2m+1}}\frac{1}{2} - \frac{1}{7^{2m+1}}\frac{1}{2} - \frac{1}{8^{2m+1}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{9^{2m+1}} - \frac{1}{10^{2m+1}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{11^{2m+1}}\frac{1}{2} + ... \right). \end{gathered}$$

Это равенство является следствием формулы (1.11) при $A=6$, которая после упрощения принимает вид

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{(6n-5)^{2m+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(6n-1)^{2m+1}} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2^{2m+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)^{2m+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)^{2m+1}} \right) + \\ + \frac{2}{3^{2m+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^{2m+1}} = (-1)^m \pi^{2m+1} P_{2m}\left(\frac{1}{6}\right), \quad m=0,1,2,... \end{gathered} \tag{3.5}$$

В ряде (3.5) и в последующих рядах индекс $m$ является спектральным параметром, принимающим любое натуральное значение.

При $x=1/4$ из (3.4) найдем еще один спектр числовых рядов, соответствующий значению числового периода $A=3$:

$$\begin{gathered} \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-3)^{2m+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)^{2m+1}} \right) + \frac{1}{2^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^{2m+1}} = \\ = (-1)^m \pi^{2m+1} P_{2m}\left(\frac{1}{4}\right) \quad , \quad m=0,1,2,... \end{gathered} \tag{3.6}$$

Полагая в (3.4) $x=1/3$, будем иметь спектр числовых рядов:

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)^{2m+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)^{2m+1}} \right) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{3}} \pi^{2m+1} P_{2m}\left(\frac{1}{3}\right), \quad m=0,1,2,... \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(3n-2)^{2m+1}} - \frac{1}{(3n-1)^{2m+1}} \right) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{3}} \pi^{2m+1} Q_{2m}\left(\frac{1}{3}\right). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Из (3.4) при $x=1/2$ получаем числовой ряд при $A=2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(4n-3)^{2m+1}} - \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} \right) = \frac{(-1)^m}{2} \pi^{2m+1} P_{2m}\left(\frac{1}{2}\right), \quad m=0,1,2,... \tag{3.8}$$

При записи рядов Фурье по косинусам следует учесть равенства для полиномов $P_{2n-1}(x)$, $Q_{2n-1}(x)$ с нечетными индексами

$$\int_0^1 P_{2m-1}\left(x\right)dx=0,\quad \int_0^1 Q_{2m-1}\left(x\right)dx=0, \tag{3.9}$$

которые вытекают из свойств (2.7) и затем из (2.5). С учетом (3.9) ряды Фурье для $P_{2n-1}(x)$, $Q_{2n-1}(x)$ запишутся выражениями

$$P_{2m-1}(x)=\frac{2(-1)^m}{\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\cos n\pi x,\quad Q_{2m-1}(x)=\frac{2(-1)^m}{\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2m}}\cos n\pi x, \tag{3.10}$$

которые могут быть получены вычислением производной от (3.4).

Из разложения (3.10) в ряд Фурье полиномов с нечетными индексами $P_{2m-1}(x)$, $Q_{2m-1}(x)$ найдем следующие числовые ряды.

Полагая в (3.10) $x=0$ и затем $x=1$, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{2}P_{2m-1}(0),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2m}}=(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{2}P_{2m-1}(1). \tag{3.11}$$

Если в (3.10) взять $x=1/3$, то получим ряд при $A=3$:

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(3n-2)^{2m}}+\frac{1}{(3n-1)^{2m}}\right)-\frac{2}{3^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=(-1)^m\pi^{2m}Q_{2m-1}\left(\frac{1}{3}\right)\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)^{2m}}-\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-1)^{2m}}\right)+\frac{2}{3^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2m}}=(-1)^m\pi^{2m}P_{2m-1}\left(\frac{1}{3}\right).\end{gathered} \tag{3.12}$$

Множество числовых рядов (3.5)–(3.8), (3.11), (3.12) дополним, используя БП $R_{2m}(x)$ и $R_{2m-1}(x)$, применяемые для быстрых разложений в задачах со смешанными граничными условиями. После данных вычислений ряды Фурье для $R_{2m}(x)$, $R_{2m-1}(x)$ принимают вид

$$\begin{gathered}R_{2m}(x)=2(-1)^m\frac{2^{2m}}{\pi^{2m}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^{2m}}\sin\pi(2n+1)\frac{1}{2}x,\quad m=1,2,...\\ R_{2m-1}(x)=(-1)^{m+1}\frac{2^{2m}}{\pi^{2m-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2m-1}}\sin\pi(2n+1)\frac{1}{2}x.\end{gathered} \tag{3.13}$$

В рядах (3.18) для получения новых числовых рядов переменную $x$ будем полагать равной $1; 2/3; 1/2; 1/3$, для которых получаются числовые ряды в удобной форме. Если положить $x=0$, то выражения (3.18) обращаются в тождества. При $x=1$ найдем следующие два спектра числовых рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2m}}=-(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{2^{2m+1}}R_{2m}(1),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2m-1}}=(-1)^{m+1}\frac{\pi^{2m-1}}{2^{2m}}R_{2m-1}(1),\quad m=1,2,... \tag{3.14}$$

При $x=2/3$:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(6n+1)^{2m}}-\frac{(-1)^{n+1}}{(6n+5)^{2m}}\right)=(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{2^{2m}\sqrt{3}}R_{2m}\left(\frac{2}{3}\right),\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(6n+1)^{2m-1}}-\frac{1}{(6n+5)^{2m-1}}\right)=(-1)^{m+1}\frac{\pi^{2m-1}}{2^{2m-1}\sqrt{3}}R_{2m-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ m=1,2,...\end{gathered} \tag{3.15}$$

Среди полученных рядов ряды (3.7), (3.8), (3.11), (3.19)–(3.21) имеют достаточно простой вид. Таким образом получены новые спектры рядов 1 класса: (3.7), (3.8), (3.11), (3.12)–(3.15). Суммирование рядов (3.11) и (3.15) в справочниках известно, однако их сумма в [1, 2] выражена через значения чисел Бернулли, которые вычисляются через определенные интегралы сложного вида.

## Заключение

В данной работе суммы указанных рядов выражаются через быстрые полиномы, вычисление которых элементарно. Остальные из указанных числовых рядов являются оригинальными, они получены в данной работе впервые. Таким образом, рассмотрение быстрых полиномов, заимствованных из метода быстрых разложений, совместно с теоремой об эквивалентных рядах позволили получить большое количество новых суммируемых рядов 1-го класса. Достоверность каждого полученного ряда может быть проверена непосредственным вычислением левых и правых частей ряда на ЭВМ.

## Литература


1. *Градштейн, И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М : Физматгиз, 1971. – 1100 с.

2. *Прудников, А. П.* Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев; – В 3 т. Т.1 - 3. Специальные функции. Дополнительные главы. 2-е изд., исправл. М : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 688 с.

3. *Лесняк, Л. И.* Числовые и функциональные ряды и их приложения / Л. И. Лесняк, В. А. Старенченко. – Томск : Изд-во: «Томский гос. архитектурно-строит. ун-т», – 2012. – 216 с.

4. *Носов, В. А.* Ряды курс лекций / В. А. Носов. – Самара : Изд-во ФГБОУ ВПО «Поволжское гос. социально-гуманитарная акад.», 2012. – 137 с.

5. *Кабаева, И. И.* Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды / И. И. Кабаева // European science. – 2016. – №6 (16).

6. *Степанец, А. И.* Экстремальные задачи для числовых рядов / А. И. Степанец // Математические заметки. – ноябрь 2007. –Т. 82, вып. 5. – С. 738–755.

7. *Теляковский, С. А.* О скорости сходимости в $L$ рядов Фурье по синусам с монотонными коэффициентами / С. А. Теляковский // Математические заметки. – сентябрь 2016. – Т. 100, вып. 3. – С. 450–454.

8. *Чернышов, А. Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А. Д. Чернышов // Журнал вычислит. математики и матем. физики. –2014. – Т. 54, № 1. – С. 13–24.

9. *Чернышов, А. Д.* О связи количества точек перегиба графика функции и количества членов рядов Фурье при использовании быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов // ISJ Theoretical & Applied Science. – 2016. – №1 (33) (ISPC Perspectives in science for 2016, 30.01.2016, Philadelphia, USA) – P. 137–141.

УДК 519.6

# РАСЧЕТ ПЕРЕНОСА ВЗВЕСИ НА ОСНОВЕ 2D И 3D МОДЕЛЕЙ

**А. Е. Чистяков[1], Е. А. Проценко[2], И. Ю. Кузнецова[3]**

*[1]Донской государственный технический университет*
*[2]Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал)*
*Ростовского государственного экономического университета*
*[3]Южный Федеральный университет*

**Аннотация.** В работе рассмотрены 2D и 3D модели транспорта взвешенных частиц. Аппроксимация 2D и 3D задачи транспорта взвешенных частиц рассмотрена на примере двумерного уравнения диффузии-конвекции. В работе используются дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса в случае частичной заполненности ячеек. На основе функции заполненности описывается геометрия расчетной области. Использована схема, представляющая собой линейную комбинацию разностных схем «крест» и «кабаре» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации. Данная схема предназначена для решения задачи переноса примеси при больших сеточных числах Пекле. Приведены результаты численных экспериментов, из которых сделаны выводы о преимуществах 3D модели транспорта взвешенных над 2D моделью.
**Ключевые слова:** модели транспорта взвешенных частиц, схема «кабаре», заполненность ячеек, уравнение диффузии-конвекции.

## Введение

За последнее десятилетие, не только в России, но и в мире отмечается увеличение числа неблагоприятных и экстремальных природных явлений, оказывающих влияние на прибрежные, морские и речные системы. В том числе: наводнение конца июля 2013 г. на Дальнем Востоке России и в Китае, которое стало сильнейшим за последние 115 лет; наводнение мая – июня 2013 г., вызвавшее затопление значительных территорий центральной и южной Европы, с совокупным ущербом более 10 млрд. евро; в это же время были зафиксированы наводнения в Индии, Афганистане, Пакистане и США (шт. Колорадо — сильнейшее за последние 10 лет); паводковое катастрофическое наводнение в Крымске (Краснодарский край) в июле 2012 г., катастрофический подъем уровня воды в Азовском море в результате шторма в 2014 г.; штормовой угон 2019 г. в акватории Азовского моря и Таганрогского залива и возникшие вследствие этого пыльные бури. Фактическая оценка воздействия на кормовую базу рыб невозможна без применения наиболее современных и оптимизированных математических моделей, позволяющих спрогнозировать как распространение шлейфов взвеси в водной среде, так и изменение рельефа дна в связи с выпадением взвешенных частиц грунта в осадок [1]. При оценке воздействия от производства дноуглубительных работ будем принимать ущерб от гибели или снижения продуктивности кормовых организмов рыб, при этом учитывать численность производителей, процент и численность самок, индивидуальную плодовитость, количество выметанной икры, коэффициент промвозврата от икры, численность рыб в промвозрасте, среднюю массу одной рыбы, рыбопродуктивность нерестилищ. На основании многочисленных исследований Россельхознадзором и ФГУ «ЦУРЭН» рекомендовано для расчета ущерба рыбным запасам принимать пороговые величины воздействия взвеси на планктон — 50 % потерь при концентрациях в пределах 20–100 мг/л, и 100 % — при концентрациях выше 100 мг/л. При концентрациях от 0,25 до 20 мг/л принята величина 20 % потерь. Крупные животные рыхлых грунтов, попавшие в зону выпадения взвешенных частиц грунта, в большинстве случаев остаются жизнеспособными. При толщине осадка более 10 мм отмечается 100 %-я гибель бентоса, 50 %-я гибель — по площадям дна, покрытым слоем осадков 5–10 мм.

Перечисленные процессы гидрофизики могут быть описаны в виде сложных систем начально-краевых задач для уравнений с частными производными, включающими уравнения гидродинамики, транспорта тепла и солей и взвешенного вещества и являются трехмерными, нестационарными и существенно-нелинейными. Для решения подобного класса задачи используют уравнение диффузии-конвекции. Актуальной задачей также является разработка разностных схем для решения задач гидродинамики, в случае преобладания конвективного оператора над диффузионным, что характерно при возникновении некоторых опасных явлений природного характера, в том числе штормовых нагонов, переноса загрязняющих веществ в водоеме.

## 1. Модель транспорта взвешенных частиц

Для описания транспорта взвешенных частиц воспользуемся уравнением диффузии-конвекции, которое может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+\left(w-w_s\right)\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_h\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_h\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[D_v\frac{\partial C}{\partial z}\right]+F, \tag{1}$$

где $C$ — концентрация примеси [мг/л]; $V=\{u,v,w\}$ — составляющие поля вектора скорости [м/с]; $w_s$ — гидравлическая крупность или скорость осаждения взвеси в вертикальном направлении [м/с]; $H$ — глубина [м]; $D_h, D_v$ — горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии [м$^2$/с]; $x, y$ — координаты в горизонтальном направлении; $z$ — координата в вертикальном направлении; $t$ — временная переменная [с]; $F$ — функция, описывающая интенсивность распределения источников загрязняющих веществ [мг/л$\cdot$с].

На свободной поверхности поток отсутствует

$$\frac{\partial C}{\partial n}=0, \tag{2}$$

где $n$ — единичный вектор нормали к открытой границе.

На свободной поверхности $\Gamma_s$ поток в вертикальном направлении равен нулю, таким образом:

$$D_v\frac{\partial C}{\partial z}+w_sC_k=0. \tag{3}$$

Вблизи поверхности дна $\Gamma_b$:

$$D_v\frac{\partial C}{\partial z}=E-D+w_sC_k, \tag{4}$$

где $E$ — поток эрозии [кг/м$^2\cdot$с]; $D$ — интенсивность осаждения осадка [кг/м$^2\cdot$с]; $C_k$ — массовая концентрация взвеси [кг/м$^3$].

Интегрируя уравнение (1) с учетом условий (2)–(4) по вертикальной координате получим двумерную модель:

$$h\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial x}+V\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_hh\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_hh\frac{\partial C}{\partial y}\right)-w_sC+F_h, \tag{5}$$

где $U=\int_{-h}^{0}udz$, $V=\int_{-h}^{0}vdz$, $F_h=\int_{-h}^{0}Fdz$, $h$ — глубина водоема.

Уравнение (5) в двумерной модели транспорта взвешенных частиц рассматривается при следующем граничном условии

$$\frac{\partial C}{\partial n}=0. \tag{6}$$

## 2. Аппроксимация задачи транспорта взвешенных частиц

Рассмотрим аппроксимацию 2D и 3D задачи транспорта взвешенных частиц на примере двумерного уравнения диффузии-конвекции

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y \tag{7}$$

с граничными условиями:

$$c'_n(x,y,t) = \alpha_n c + \beta_n, \tag{8}$$

где $u$, $v$ — компоненты вектора скорости, $\mu$ — коэффициент турбулентного обмена.

Расчетная область вписана в прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи вводится равномерная сетка:

$$w_h = \left\{ t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y;\ \ n = 0,...,N_t, i = 0,...,N_x, j = 0,...,N_y; \right.$$

$$\left. N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y \right\},$$

где $\tau$ — шаг по времени, $h_x$, $h_y$ — шаги по пространству, $N_t$ — верхняя граница по времени, $N_x$, $N_y$ — границы по пространству.

Для аппроксимации однородного уравнения (7) будем использовать схемы расщепления по пространству:

$$\frac{c^{n+1/2} - c^n}{\tau} + u(c^n)'_x = (\mu(c^n)'_x)'_x,\ \ \frac{c^{n+1} - c^{n+1/2}}{\tau} + v(c^{n+1/2})'_y = (\mu(c^{n+1/2})'_y)'_y. \tag{9}$$

Введем коэффициенты $q_0$, $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$, описывающие заполненность областей, находящихся в окрестности ячейки. Значение $q_0$ характеризует заполненность области $D_0$:

$$x \in \left(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right),\ y \in \left(y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right),\ \ q_1 - D_1:\ x \in \left(x_i, x_{i+1/2}\right),\ y \in \left(y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right),$$

$$q_2 - D_2:\ x \in \left(x_{i-1/2}, x_i\right),\ y \in \left(y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right),\ \ q_3 - D_3:\ x \in \left(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right),\ y \in \left(y_j, y_{j+1/2}\right),$$

$$q_4 - D_4:\ x \in \left(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right),\ y \in \left(y_{j-1/2}, y_j\right).$$

Заполненные части областей $D_m$ будем называть $\Omega_m$, где $m = 0,...,4.$ В соответствии с этим коэффициенты $q_m$ можно вычислить по формулам [2]:

$$\left(q_m\right)_{i,j} = \frac{S_{\Omega_m}}{S_{D_m}},\ \left(q_0\right)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{4},\ \left(q_1\right)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1}}{2},$$

$$\left(q_2\right)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i,j+1}}{2},\ \left(q_3\right)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{2},\ \left(q_4\right)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j}}{2}.$$

Дискретные аналоги операторов конвективного $uc'_x$ и диффузионного переноса $(\mu c'_x)'_x$ в случае частичной заполненности ячеек могут быть записаны в следующем виде:

$$\left(q_0\right)_{i,j} uc'_x \simeq \left(q_1\right)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + \left(q_2\right)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x},$$

$$\left(q_0\right)_{i,j} (\mu c'_x)'_x \simeq \left(q_1\right)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - \left(q_2\right)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - \left| \left(q_1\right)_{i,j} - \left(q_2\right)_{i,j} \right| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}.$$

Для аппроксимации модели (7) будем использовать схему, полученную как результат линейной комбинации схем «кабаре» и «крест», при этом будем учитывать функцию заполненности ячеек [3, 4]:

– разностную схему для уравнения (9), описывающего перенос вдоль направления $Ox$ запишем в виде:

$$\frac{2q_{2,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^n}{\tau} + 5u_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{3h_x} +$$

$$+u_{i+1/2,j}\min\left(q_{1,i,j},q_{2,i,j}\right)\frac{c_{i+1,j}^{n}-c_{i,j}^{n}}{3h_x}+\frac{2\Delta_x c_{i-1,j}^{n}q_{2,i,j}+\Delta_x c_{i,j}^{n}q_{0,i,j}}{3}=$$

$$=2\mu_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c_{i+1,j}^{n}-c_{i,j}^{n}}{h_x^2}-2\mu_{i-1/2,j}q_{2,i,j}\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i-1,j}^{n}}{h_x^2}-\left|q_{1,i,j}-q_{2,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_x c_{i,j}+\beta_x}{h_x},\ u_{i,j}\geq 0;$$

$$\frac{2q_{1,i,j}+q_{0,i,j}}{3}\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n}}{\tau}+5u_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c_{i+1,j}^{n}-c_{i,j}^{n}}{3h_x}+u_{i-1/2,j}\min\left(q_{1,i,j},q_{2,i,j}\right)\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i-1,j}^{n}}{3h_x}+$$

$$+\frac{2\Delta_x c_{i+1,j}^{n}q_{1,i,j}+\Delta_x c_{i,j}^{n}q_{0,i,j}}{3}=2\mu_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c_{i+1,j}^{n}-c_{i,j}^{n}}{h_x^2}-2\mu_{i-1/2,j}q_{2,i,j}\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i-1,j}^{n}}{h_x^2}-$$

$$-\left|q_{1,i,j}-q_{2,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_x c_{i,j}+\beta_x}{h_x},\ u_{i,j}<0,\ \text{где}\ \Delta_x c_{i,j}^{n}=\frac{c_{i,j}^{n-1/2}-c_{i,j}^{n-1}}{\tau};$$

– разностную схему для уравнения (9), описывающего перенос вдоль направления $Oy$ запишем в виде:

$$\frac{2q_{4,i,j}+q_{0,i,j}}{3}\frac{c_{i,j}^{n+1}-c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+5v_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y}+$$

$$+v_{i,j+1/2}\min\left(q_{3,i,j},q_{4,i,j}\right)\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y}+\frac{2\Delta_y c_{i,j-1}^{n}q_{4,i,j}+\Delta_y c_{i,j}^{n}q_{0,i,j}}{3}=$$

$$=2\mu_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n}-c_{i,j}^{n}}{h_y^2}-2\mu_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}-\left|q_{3,i,j}-q_{4,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_y c_{i,j}+\beta_y}{h_y},\ v_{i,j}\geq 0;$$

$$\frac{2q_{3,i,j}+q_{0,i,j}}{3}\frac{c_{i,j}^{n+1}-c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+5v_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y}+v_{i,j-1/2}\min\left(q_{3,i,j},q_{4,i,j}\right)\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y}+$$

$$+\frac{2\Delta_y c_{i,j+1}^{n+1/2}q_{3,i,j}+\Delta_y c_{i,j}^{n+1/2}q_{0,i,j}}{3}=2\mu_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{h_y^2}-2\mu_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_y^2}-$$

$$-\left|q_{3,i,j}-q_{4,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_y c_{i,j}+\beta_y}{h_y},\ v_{i,j}<0,\ \text{где}\ \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2}=\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i,j}^{n-1/2}}{\tau}.$$

### 3. Применение 2D и 3D моделей для решения задач транспорта взвеси

Исходными данными являются: глубина водоема 10 м; интенсивность источника 6,27 кг/с; скорость течения 0,2 м/с; скорость осаждения 2,042 мм/с (по Стоксу); плотность грунта 160 кг/м$^3$; процентное содержание пылеватых частиц (d меньше 0,05 мм) в песчаных грунтах — 26,83 %. Параметры расчетной области: длина 1 км; ширина 720 м; шаг по горизонтальной пространственной координате 10 м; шаг по вертикальной пространственной координате 1 м; расчетный интервал 2 часа. На рис. 1 приведена концентрация взвешенных частиц (г/л). Приведены значения поля концентрация взвеси в сечении расчетной области плоскостью, проходящей через точку выгрузки и образованную векторами направленными: вертикально и вдоль течения. Течения направлены слева на право.

Средняя эффективная скорость седиментации взвесей в районе проведения дноуглубительных работ $w_s=2,042$ мм/с. Среднее расстояние от точки выгрузки до дна водоема в районе проведения дноуглубительных работ — 5,5 м. Следовательно, среднее время нахождения взвеси во взвешенном состоянии (время осаждения) составляет примерно 2693 с (примерно 45 мин). При моделировании процесса транспорта взвеси размер расчетной области составлял 1 км×720 м, при это шаг сетки по пространству $h$=10 м. Скорость течения на глубинах от

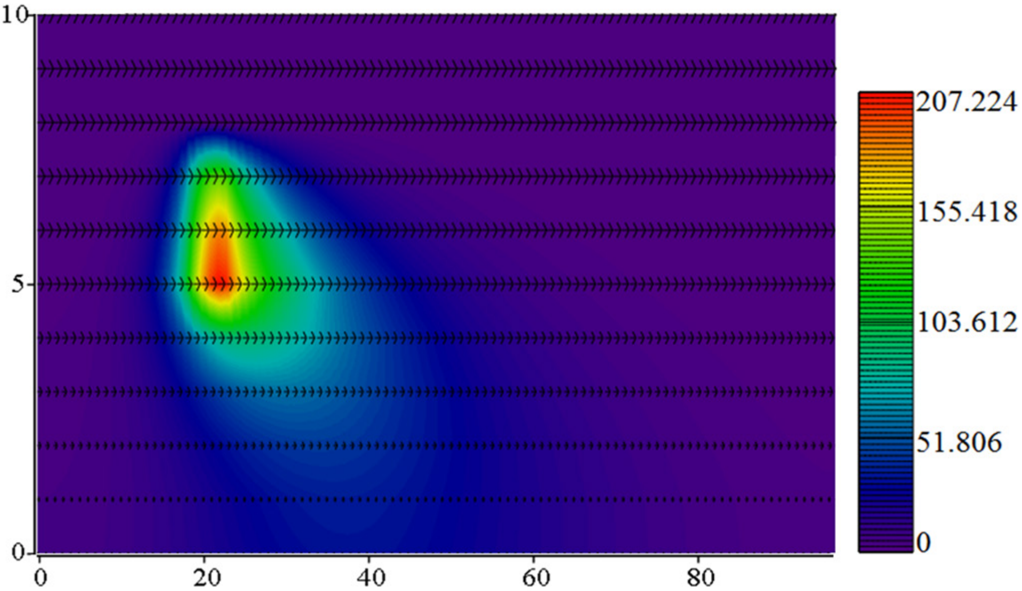



*Рис. 1. Концентрация взвешенных частиц*

4 до 10 м — 0,075 м/с. Исходя из входных данных модели, можно заключить, что в период осаждения за счет конвективного переноса взвесь распределится примерно на 202 м вдоль течения (что составляет около 20 шагов сетки). Свой вклад в распространение взвеси внесет и диффузионный перенос, но разброс взвеси за счет диффузионного переноса не превысит 200 м. Из рис. 1 видно, что взвесь осаждается на расстоянии 100–300 м от места выгрузки, что согласуется с ожидаемым результатом. На рис. 2 приведена концентрация взвешенных частиц (г/л) усредненная по глубине водоема.

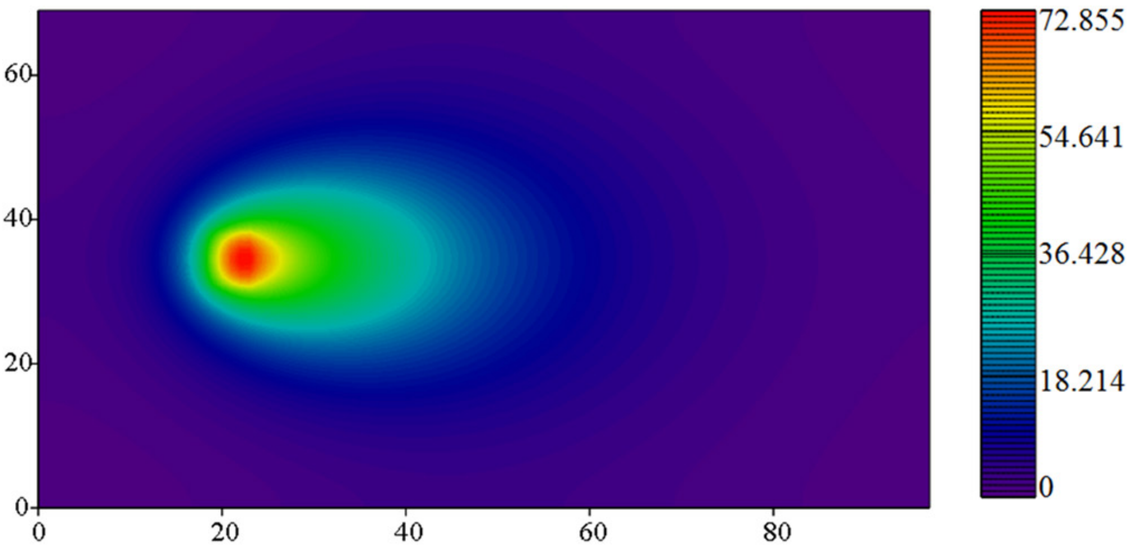



*Рис. 2. Концентрация взвешенных частиц, усредненная по глубине водоема*

При моделировании пространственно-временной структуры и изменчивости полей концентраций взвесей на основе 2D моделей не учитывается распределение концентрации взвеси по вертикальной компоненте. В зонах проведения дноуглубительных работ максимальная концентрация может составлять более 50 г/л, а максимально допустимая концентрация не должна превышать 50 мг/л, следовательно применяемая модель должна обеспечивать точность расчетов более 0,1 %. При использовании двумерных моделей взвесь осаждается значительно медленнее. Например, предположим, что взвесь равномерно распределена по глубине.

Возьмем шаг по времени, равный половине времени осаждения. Согласно модели, за первый шаг осаждается 1/2 взвеси, за второй — 1/4 взвеси. После двух шагов по времени во взвешенном состоянии не должно оставаться частиц, но согласно модели 1/4 взвеси еще не осаждено. При малом значении шага по времени $\tau$ и расчете на время осаждения модель будет показывать, что в водоеме во взвешенном состоянии остается $1/e$ или 37 % частиц. Для того чтобы концентрация взвеси упала от $N_1$ до $N_2$, где $N_2$ значительно меньше $N_1$, модель покажет, что для осаждения взвеси затрачивается $\ln(N_1/N_2)$ больше времени при малых шагах $\tau$.

**Заключение**

В работе для описания транспорта взвешенных частиц использованы 2D и 3D модели. Численная реализация задачи транспорта взвешенных частиц выполнена на основе разностной схемы, полученной при помощи линейной комбинации схем «крест» и «кабаре» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации и учитывающей функцию заполненности ячеек. При моделировании транспорта взвеси рекомендуется: использовать трехмерную модель с учетом распределения плотности в вертикальном направлении; использовать схемы, обладающие меньшей сеточной вязкостью; после расчета зоны осаждения необходимо использовать модель расчета вод, проходящих через зону дноуглубительных работ.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00623).

**Литература**

1. *Ковтун И. И., Проценко Е. А., Сухинов А. И., Чистяков А. Е.* Расчет воздействия на водные биоресурсы дноуглубительных работ в Белом море // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 27–38.

2. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А., Сидорякина В. В., Проценко С. В.* Метод учета заполненности ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области // Матем. моделирование. – 2019. – 31:8. – С. 79–100.

3. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.* О разностных схемах «кабаре» и «крест» // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2019. – Т. 20, № 2. – С. 170–181. DOI: https://doi.org/10.26089/NumMet.v20r216

4. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А.* Разностная схема для решения задач гидродинамики при больших сеточных числах Пекле // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – Т.11, № 5. – С. 833–848. DOI: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-5-833-848

5. *Гущин В. А.* Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 2. – С. 6–18.

6. Самарский А. А. Классы устойчивых схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7, № 5. – С. 1096–1133.

7. *Четверушкин Б. Н., Якобовский, М. В.* Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2018. – 052. – 12 с. DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2018-52

УДК 517.958

# О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

**С. А. Шабров, О. М. Ильина, М. В. Шаброва**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе метод разделения переменных применяется для нахождения точного решения математической модели шестого порядка с негладкими решениями. Анализируя возникающие трудности, в частности спектральную задачу, мы используем поточечный метод интерпретации решений, предложенный Ю. В. Покорный. Этот метод показал свою эффективность при построении точной параллели классической теории дифференциальных уравнений, включая осцилляционные теоремы как второго, так и четвертого порядка.
**Ключевые слова:** метод Фурье, поточечный подход, негладкое решение, смешанная задача.

В работе изучается математическая модель, реализуемая в виде смешанной задачи

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (pu'''_{xx\mu})'''_{xx\sigma} - (ru''_{xx})''_{x\sigma} + (qu'_x)'_\sigma - uQ'_\sigma; \\ -(pu'''_{xx\mu})(0,t) + \gamma_1 u''_{xx}(0,t) = 0; \\ (pu'''_{xx\mu})'_x(0,t) - ru''_{xx}(0,t) + \gamma_2 u'_x(0,t) = 0; \\ -(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(0,t) + (ru''_{xx})'_x(0,t) - gu'_x(0,t) + \gamma_3 u(0,t) = 0; \\ (pu'''_{xx\mu})(\ell,t) + \gamma_4 u''_{xx}(\ell,t) = 0; \\ -(pu'''_{xx\mu})'_x(\ell,t) + ru''_{xx}(\ell,t) + \gamma_5 u'_x(\ell,t) = 0; \\ (pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\ell,t) - (ru''_{xx})'_x(\ell,t) + gu'_x(\ell,t) + \gamma_6 u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

которая возникает при описании малых поперечных свободных колебаний стержневой системы с внутренними особенностями и помещенной на двойное упругое основании с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения.

Решение уравнения в (1) мы будем искать в классе $E$ функций $u(x,t)$, каждая из которых при каждом фиксированном $t$ является непрерывно дифференцируемой по $x$ на $[0;\ell]$ функцией, производная $u'_x(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $u''_{xx}(x,t)$ — $\mu$-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $u'''_{xx\mu}(x,t)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $(pu'''_{xx\mu})(x,t)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$; $(pu'''_{xx\mu})'_x(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(x,t)$ — $\sigma$-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; при каждом фиксированном $x$ $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по $t$. При этом под решением математической модели (1) мы будем понимать функцию из класса $E$, удовлетворяющую граничным и начальным условиям из (1).

Уравнение

$$M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (pu'''_{xx\mu})'''_{xx\sigma} - (ru''_{xx})''_{x\sigma} + (qu'_x)'_\sigma - uQ'_\sigma$$

задано почти всюду (по мере $\sigma$) на декартовом произведении расширения $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ отрезка $[0;\ell]$ и временного промежутка $[0;T]$ Множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$ зададим метрику

$\varrho(x;y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство $(J_\sigma;\sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значений $\xi-0$, $\xi+0$, которые ранее были предельными. Индуцируя упорядоченность с исходного множества, придем к неравенствам $x<\xi-0<\xi+0<y$ для всех $x$, $y$ для которых выполнялись неравенства $x<\xi<y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi-0$ и $\xi+0$ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ определим предельными значениями. Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\varrho(x;y)$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве, причем в точках $\xi\in S(\sigma)$ само уравнение принимает вид

$$M'_\sigma(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)=\Delta(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi,t)-\Delta(ru''_{xx})'_x(\xi,t)+\Delta(g(x)u'_x)(\xi,t)-u(\xi,t)\Delta Q(\xi),$$

где $\Delta v(\xi)=v(\xi+0)-v(\xi-0)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке $\xi$.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} LX\equiv-(pX'''_{xx\mu})'''_{xx\sigma}+(rX''_{xx})''_{x\sigma}-(qX'_x)'_\sigma+XQ'_\sigma=\lambda M'_\sigma X(x);\\ \wp_1X\equiv-(pX'''_{xx\mu})(0)+\gamma_1u''_{xx}(0)=0;\\ \wp_2X\equiv(pu'''_{xx\mu})'_x(0)-ru''_{xx}(0)+\gamma_2u'_x(0)=0;\\ \wp_3X\equiv-(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(0)+(ru''_{xx})'_x(0)-gu'_x(0)+\gamma_3u(0)=0;\\ \wp_4X\equiv(pu'''_{xx\mu})(\ell)+\gamma_4u''_{xx}(\ell)=0;\\ \wp_5X\equiv-(pu'''_{xx\mu})'_x(\ell)+ru''_{xx}(\ell)+\gamma_5u'_x(\ell)=0;\\ \wp_6X\equiv(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\ell)-(ru''_{xx})'_x(\ell)+gu'_x(\ell)+\gamma_6u(\ell)=0, \end{cases} \tag{2}$$

которая возникает при применении метода Фурье для нахождения решения (1). Здесь $\lambda$ — спектральный параметр.

Пусть выполнены следующие условия:

1. $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение.
2. $\inf\limits_{x\in[0;\ell]}p(x)>0$.
3. $r(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$.
4. $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$.
5. функция $\mu(x)$, порождающая на $[0;\ell]$ меру, строго возрастает на $[0;\ell]$.

При выполнении этих условий доказано, что спектр задачи (2) вещественен, состоит из собственных значений, геометрическая кратность каждого из них конечна, а алгебраическая — равна единице.

**Теорема 1.** *Пусть пусть выполнены условия 1–5; $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи* (2), *причем каждое из них записаны столько, какова их геометрическая кратность. Тогда, ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^{2/3+\delta}}$$

*сходится при любом $\delta>0$.*

Доказанная теорема позволяет обосновать возможность применения метода разделения переменных.

Для удобства введем следующий класс функций: множество $E_\sigma$ состоит из функций $X(x)$, каждая из которых непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$ функцией, производная $X'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $X''_{xx}(x)$ — $\mu$-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $X'''_{xx\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная

$(pX'''_{xx\mu})(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$; $(pX'''_{xx\mu})'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $(pX'''_{xx\mu})''_{xx}(x)$ — $\sigma$-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$;

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия 1–5; кроме того,* $\psi_i(x) \in E_\sigma$, *функции* $\dfrac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}$ *непрерывно дифференцируемы на* $[0;\ell]$, $\left(\dfrac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}\right)'_x$ *— абсолютно непрерывны на* $[0;\ell]$, *и* $\left(\dfrac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}\right)''_{xx}$ *имеют конечное изменение на* $[0;\ell]$ $(i=1,2)$; $\wp_j\psi_0 = \wp_j(L\psi_0) = \wp_j\psi_1 = 0$ $(j=1,2,\dots,6)$. *Тогда функция*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{B}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\,t\right), \tag{3}$$

*где* $\varphi_k(x)$ *— нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению* $\lambda_k$,

$$A_k = \int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)d\sigma, \quad B_k = \int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)d\sigma,$$

*является решением математической модели (1), причем ряд (3) можно дифференцировать по* $t$ *дважды, и на* $[0;\ell]$ *шесть раз: сначала дважды по* $x$, *потом по* $\mu$, *снова дважды по* $x$, *и затем по* $\sigma$; *полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике* $[0;\ell]\times[0;T]$.

Толчком к новому бурному развитию качественной теории с негладкими решениями дала работа Ю. В. Покорного [1], вышедшая в 1999 году: вышли монографии [2–4], работы [5–8] в которых досконально изучены линейные краевые задачи второго порядка с производными Радона — Никодима. Поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным и используемый в линейных задачах, показал свою эффективность во многих задачах [9–18]. Эту эффективность можно объяснить достаточно просто: при использовании производных по мере уравнение становится поточечно заданным, то есть обыкновенным, а это даёт возможность применения качественных методов анализа решений, в отличие от теорий обобщенных функций: при использовании теории распределений по Шварцу — Соболеву, проявляются трудно разрешимые проблемы. Во-первых, удается установить лишь слабую разрешимость уравнения, что для приложений мало пригодно, во-вторых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которую не удается решить до сих пор, и, в-третьих, уравнения в обобщенных функциях — это равенство двух функционалов, определенных над пространством основных функций, и применение качественных методов анализа к таким уравнениям крайне затруднительно.


### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 19--11--00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.


### Литература


1. *Покорный, Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. *Шабров, С. А.* Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка : математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров. — Саарбрюккен : Lap Lambert Academic Publishing, 2015. — 162 с.

5. *Покорный, Ю. В.* Осцилляционная теория Штурма — Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

6. *Pokornyi, Yu. V.* Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, No 6. — P. 769–787.

7. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма — Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578--582.

8. *Pokornyi, Yu.* V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

9. *Давыдова, М. Б.* О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

10. *Давыдова, М. Б.* О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

11. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / М. Б. Давыдова, Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

12. *Зверева, М. Б.* Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен, 2012. — 112 с.

13. *Покорный, Ю. В.* О задаче Штурма — Лиувилля для разрывной струны / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.

14. *Шабров, С. А.* Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

15. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

16. *Шабров, С. А.* О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

17. *Баев, А. Д.* О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

18. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

УДК 517.954

# АДАПТАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

**С. А. Шабров[1], Д. А. Литвинов[2]**

[1]*Воронежский государственный университет*
[2]*Воронежский государственный университет инженерных технологий*

**Аннотация.** В работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения математической модели, описывающей малые вынужденные колебания натянутой сетки из струн. Этот метод адаптирован
для нахождения приближенных решений некоторых математических моделей второго, четвертого порядков с негладкими решениями.
**Ключевые слова:** негладкое решение, поточечный подход, граф, метод конечных элементов, математическая модель.

## 1. Определение и описание геометрической сети

Пусть $\Gamma$ — геометрическая сеть из $R^n$, реализованная в виде открытого геометрического графа. Считаем, что $\Gamma$ состоит из некоторого набора непересекающихся интервалов

$$\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

называемых ребрами и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначается далее через $I(\Gamma)$, каждая его точка называется внутренней вершиной (узлом) графа $\Gamma$. Концы интервалов не включенных в $I(\Gamma)$, называются граничными или тупиковыми вершинами $\Gamma$, их множество обозначается через $\partial\Gamma$. Объединение всех ребер обозначается через $R(\Gamma)$. Тем самым, $\Gamma = R(\Gamma) \cup I(\Gamma)$. На $\Gamma$ индуцируется топология из $R^n$. Всюду далее, когда будет идти речь об открытых и замкнутых подмножествах $\Gamma$, будет иметься в виду именно топология. Такого рода сети (графы) возникают при описании самых разных топологических систем. Применяемая при этом стандартная теория графов подходит лишь тогда, когда ребра являются только символами связи между объектами, когда сами связи достаточно просты и в первую очередь важно, есть ли связь между данной парой объектов или нет. Интересующие нас системы в корне другие. В них ребра отвечают реальным одномерным континуумам, на которых возможна достаточно нетривиальная динамика, как в упругих сетях, электрических цепях, в системах волноводов и в нейронных сетях. Чтобы подчеркнуть значимость ребер мы далее постоянно употребляем слова сеть и граф как синонимы. В дальнейшем исследовании нам также понадобятся следующие определения.

Под производной на графе $\dfrac{\partial u}{\partial\Gamma}$ мы понимаем обычную производную $u'_x(x)$, если $x$ является внутренней точкой ребра и $\sum\limits_{i=1}^{N}(-1)^{\mu_i(a_k)}u_i(a_k)$, если $x$ совпадает с одной из точек множества $I(\Gamma)$, где

$$\mu_i(\alpha_k) = \begin{cases} 1, & \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана к вершине } \alpha_k; \\ 0, & \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана от вершины } \alpha_k. \end{cases}$$

Так же нам понадобится следующее обозначение

$$\nu(b_i) = \begin{cases} 1, & \text{если ориентация выбрана от вершины } b_i \in \partial\Gamma; \\ 0, & \text{если ориентация выбрана к вершине } b_i \in \partial\Gamma. \end{cases}$$

Пусть на каждом ребре $\gamma_i$ графа задана возрастающая функция $\sigma_i(x)$ (в смысле ориентации ребра), порождающая на нем меру, которая соизмерима с наблюдаемым процессом. Каждой внутренней точке $a \in I(\Gamma)$ припишем ненулевую меру $\sigma\{a\}$. Интеграл по $\Gamma$ зададим следующим образом

$$\int_{\Gamma} u(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} u_i(x) d\sigma_i(x) + \sum_{a \in I(\Gamma)} u(a)\sigma\{a\},$$

где $u_i(x)$ — сужение $u(x)$ на $i$-е ребро.

## 2. Описание математической модели

Рассмотрим следующую математическую модель

$$\begin{cases} M'_{\Gamma}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial \Gamma}\left( p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dq}{d\Gamma} + f(x;t), \\ K_i u(b,t) + (-1)^{\nu(b)} p(b) u'_x(b,t)\,|_{b\in\partial\Gamma} = 0 \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u_{t'}(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

Эта модель возникает при описании малых поперечных вынужденных колебаний натянутой сетки из струн, расположенной вдоль графа $\Gamma$.

Здесь $p(x)$ — сила натяжения струны в точке $x \in R(\Gamma)$, $q(x)$ характеризует упругость струны в точке $x$, $f(x,t)$ — плотность внешней силы в точке $x$ в момент времени $t$, $u(x,t)$ — отклонение точки $x$ от положения равновесия в момент времени $t$, произошедший под воздействием силы $f(x,t)$, $K_i : i = \overline{1,r}$ — жесткости пружин, установленных в граничных точках $b_i$, $m(x)$ — функция, равная плотности струны в точке $x \in \Gamma \setminus I(\Gamma)$ и массе в точке $x \in I(\Gamma)$, $\psi_0(x)$ — отклонение точки $x$ от положения равновесия в начальный момент времени, $\psi_1(x)$ — начальная скорость точки $x$.

## 3. Построение алгоритма

Пусть ребра графа занумерованы некоторым способом. Каждое ребро графа разобьем на конечное число интервалов (здесь ребро рассматривается как отрезок, лежащий в $R^n$), точки разбиения обозначим через $\{x_j^i\}$, где $i$ номер ребра, $j = \overline{1, N_i}$ — номер точки $i$-го ребра, где $N_i$ — количество точек на $i$-м ребре . Здесь $i = \overline{1, N}$, где $N$ количество ребер графа. Без ограничения общности можно считать $\{x_j^i\}$ на каждом ребре занумерованы в порядке возрастания в смысле ориентации. Таким образом, $\{x_0^i\}$ и $\{x_{N_i}^i\}$ — начало и конец $i$-го ребра.

Введем следующие функции

$$\varphi_j^i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}^i}{x_j^i - x_{j-1}^i} & \text{для } x \in [x_{j-1}^i; x_j^i] \\ \dfrac{x - x_{j+1}^i}{x_{ij} - x_{j+1}^i} & \text{для } x \in [x_j^i; x_{j+1}^i] \\ 0 \ \text{для остальных} & x,\ j = \overline{1, N_i - 1}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\overline{\varphi}_0^i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1^i}{x_0^i - x_1^i} & \text{для } x \in [x_0^i; x_1^i] \\ 0 \ \text{для остальных} & x; \end{cases} \tag{3}$$

$$\overline{\varphi}_{N_i}^i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{N_i-1}^i}{x_{N_i}^i-x_{N_i-1}^i} & \text{для } x\in[x_{N_i-1}^i;x_{N_i}^i]\\ 0 \text{ для остальных } x.\end{cases} \tag{4}$$

Для каждой внутренней вершины $a_k\in I(\Gamma)$ введем два множества индексов ребер, которые примыкают к ней: первое множество $I_1(a_k)$ это множество индексов ребер, которое является началом ребра, а второе $I_2(a_k)$ — концом.

Введем теперь функцию

$$\varphi_{\alpha_k}(x)=\sum_{i\in I_1(\alpha_k)}\overline{\varphi}_0^i(x)+\sum_{i\in I_2(\alpha_k)}\overline{\varphi}_{N_i}^i(x).$$

Положим для каждой граничной точки $b$

$$\overline{\varphi}_b(x)=\begin{cases}\overline{\varphi}_0^{i_0}(x), & \text{если ориентация выбрана от вершины } b\in\partial\Gamma;\\ \overline{\varphi}_{N_{i_0}}^{i_0}(x), & \text{если ориентация выбрана к вершине } b,\end{cases}$$

где $i_0$ — номер ребра, для которого $b$ является граничной вершиной.

Базисные функции, которые состоят из $\varphi_j^i(x)$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,N_i-1}$, $\varphi_{\alpha_k}(x)$, $\overline{\varphi}_b(x)$, занумеруем каким-либо способом.

Нетрудно видеть, что количество базисных функций равно

$$M=\sum_{i=1}^{N}(N_i-1)+|I(\Gamma)|+|\partial\Gamma|,$$

где $|X|$ — мощность конечного множества $X$.

Обозначим занумерованные функции через $\varphi_k(x)$ $(k=\overline{1,M})$.

Вместо искомой функции $u(x,t)$ будем искать лишь ее значения в точках разбиения в определенные моменты времени. В связи с этим будем использовать в задаче (1) вместо $u(x,t)$ кусочно-непрерывную функцию

$$u_M(x,t)=\sum_{i=1}^{M}a_i(t)\varphi_i(x). \tag{5}$$

Уравнение в (1) умножим на базисную функцию $\varphi_j(x)$, проинтегрируем по $\Gamma$:

$$\int_\Gamma M'_\Gamma(x)u''_{tt}(x;t)\varphi_j(x)d\Gamma=\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\Gamma}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x})\varphi_j(x)d\Gamma-\int_\Gamma u\frac{dQ}{d\Gamma}\varphi_j(x)d\Gamma+\int_\Gamma f(x;t)\varphi_j(x)d\Gamma.$$

Интеграл $\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\Gamma}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x})\varphi_j(x)d\Gamma$ — проинтегрировав один раз по частям (см. [1]), и воспользовавшись тем обстоятельством, что само решение должно удовлетворять граничным условиям, будем иметь

$$\int_\Gamma M'_\Gamma(x)u''_{tt}(x;t)\varphi_j(x)d\Gamma-\sum_{s=1}^{r}(-1)^{\nu(b_s)}p(b_s)u'_x(b_s;t)\cdot\varphi_j(b_s)+\int_\Gamma p(x)u'_x(x;t)\cdot\varphi'_{j_x}(x)dx+$$
$$+\int_\Gamma u(x;t)\varphi_j(x)Q'_\Gamma(x)d\Gamma=\int_\Gamma f(x;t)\varphi_j(x)d\Gamma.$$

Так как $\varphi_j(b_s)=1$ и $K_su(b_s,t)+(-1)^{\nu(b_s)}p(b_s)u'_x(b_s,t)|_{b_s\in\partial\Gamma}=0$ получим

$$\int_\Gamma M'_\Gamma(x)u''_{tt}(x;t)\varphi_j(x)d\Gamma+\sum_{s=1}^{r}K_su(b_s,t)\varphi_j(b_s)+\int_\Gamma p(x)u'_x(x;t)\cdot\varphi'_{j_x}(x)dx+$$
$$+\int_\Gamma u(x;t)\varphi_j(x)Q'_\Gamma(x)d\Gamma=\int_\Gamma f(x;t)\varphi_j(x)d\Gamma.$$

Подставляя $u_M(x,t)$, определяемое формулой (5), в последнее равенство получим

$$\sum_{i=1}^{M}(a_i(t))''\int_{\Gamma}M'_{\Gamma}(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)d\Gamma+\sum_{i=1}^{M}a_i(t)(\sum_{s=1}^{r}K_s\varphi_i(b_s)\varphi_j(b_s)+\int_{\Gamma}p(x)\varphi'_{i_x}(x)\cdot\varphi'_{j_x}(x)dx+$$

$$+\int_{\Gamma}\varphi_i(x)\varphi_j(x)Q'_{\Gamma}(x)d\Gamma)=\int_{\Gamma}f(x;t)\varphi_j(x)d\Gamma,$$

$j=1,2,\dots,M$. Таким образом мы получаем системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Aa''(t)+Ba=F, \tag{6}$$

где $A$ — квадратная матрица порядка $M$ компоненты которой имеют следующий вид

$$A_{i,j}=A_{j,i}=\int_{\Gamma}\varphi_i(x)\varphi_j(x)M'_{\Gamma}(x)d\Gamma.$$

Компоненты матрицы $B$, имеющей аналогичную с $A$ структуру, вычисляются по формулам

$$B_{i,j}=B_{j,i}=\int_{\Gamma}p(x)\varphi'_{j_x}(x)\varphi'_{i_x}(x)dx+\int_{\Gamma}\varphi_i(x)\varphi_j(x)Q'_{\Gamma}(x)d\Gamma+\sum_{s=1}^{r}K_s\varphi_i(b_s)\varphi_j(b_s).$$

Здесь

$$a(t)=(a_1(t),a_2(t),\dots,a_M(t))^T$$

и

$$F(t)=(F_1(t);F_2(t),\dots,F_M(t))^T.$$

— вектор-столбцы, компоненты $F_k(x)$ определяются равенствами

$$F_i(t)=\int_{\Gamma}f(x,t)\varphi_i(x)d\Gamma.$$

Умножим каждое начальное условие $u(x;0)=\psi_0(x)$ и $u'_t(x;0)=\psi_1(x)$ на базисную функцию $\varphi_j(x)$ и проинтегрируем первое равенство по $x$, а второе умножив на $M'_{\Gamma}(x)$), — по $\Gamma$ подставив вместо $u(x;t)$ функцию $u_M(x;t)$:

$$\sum_{i=1}^{M}a_i(0)\int_{\Gamma}\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\int_{\Gamma}\psi_0(x)\varphi_j(x)dx$$

$$\sum_{i=1}^{M}a'_i(0)\int_{\Gamma}\varphi_i(x)\varphi_j(x)M'_{\Gamma}(x)dx=\int_{\Gamma}\psi_1(x)\varphi_{jm}(x)M'_{\Gamma}(x)d\Gamma.$$

В матричном виде эти матрицы имеют вид

$$C_1a(0)=D_1,\ C_2a'(0)=D_2, \tag{7}$$

где компоненты матриц $C_1$, $C_2$, имеющих структуру, аналогичную $A$ и $B$ вычисляются по формуле с координатами

$$(C_1)_{i,j}=(C_1)_{j,i}=\int_{\Gamma}\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx;\quad (C_2)_{i,j}=(C_2)_{j,i}=\int_{\Gamma}\varphi_i(x)\varphi_j(x)M'_{\Gamma}(x)dx,$$

$D_1$, $D_2$ — вектор-столбцы следующего вида с координатами

$$(D_1)_i=\int_{\Gamma}\psi_0(x)\varphi_i(x)dx;\quad (D_2)_i=\int_{\Gamma}\psi_1(x)\varphi_i(x)M'_{\Gamma}(x)dx.$$

Матрицы $A$, $C_1$, $C_2$ являются матрицами Грамма системы $(\varphi_i(x))_{i=1}^{M}$ линейно независимых систем. Поэтому $A$ и $C_1$, $C_2$ имеют обратные.

Тогда (6) и (7) принимают вид

$$a''(t)+A^{-1}Ba=A^{-1}F, \tag{8}$$

$$a(0)=C_1^{-1}D_1,\quad a'(0)=C_2^{-1}D_2. \tag{9}$$

В классической теории ОДУ доказывается, что (8), дополненная начальными условиями (9), имеет единственное решение.

Для численного решения (8), (9) можно применять различные схемы. Мы применим явную схему. Для реализации алгоритма имеем следующие формулы

$$\frac{a_k((i+1)\tau)-2a_k(i\tau)+a_k^i((i-1)\tau)}{\tau^2}+\sum_{k=1}^{M}\eta_{k,j}a_j(j\tau)=F_k(j\tau))$$

$i=2,3,\ldots;\ \ k=1,2,\ldots,M$. (Здесь $\tau$ — шаг по временной переменной, $\eta_{k,j}$ — коэффициенты матрицы $A^{-1}B$.)

Два начальных слоя мы найдем, используя начальные данные: $a_k(0)=(C_1^{-1}D_1)_k$, $\frac{a_k(\tau)-a_k(0)}{k}=(C_2^{-1}D_2)_k^i\ \ (k=1,2,\ldots,M)$.

Доказана теорема.

**Теорема 1.** Пусть $M'_\Gamma(x)>0,\ Q'_\Gamma(x)>0,\ p(x)>0$ на $\Gamma$ и начальные условия таковы, что математическая модель (1) имеет единственное решение в классе $E$; $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда справедливо неравенство

$$\max_t\{(w(\cdot,t);w(\cdot,t))+[w(\cdot,t);w(\cdot,t)]\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{c}\cdot\sqrt{h}, \tag{10}$$

где $h$ — наибольшая из разностей $\Delta x_j^i=x_{j+1}^i-x_j^i,\ \ i=1,2,\ldots,N,\ \ j=0,1,\ldots N_i-1$.

### Литература


1. *Голованева, Ф. В.* Аналог формулы интегрирования по частям на геометрическом графе / Ф. В. Голованева, Е. В. Лылов, С. А. Шабров // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. – 2018. – № 1. – С. 82–86.

2. *Шабров, С. А.* Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 2. – С. 153–164.

3. *Зверева, М. Б.* Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 4. – С. 112–120.

4. *Голованёва, Ф. В.* Адаптация метода конечных элементов для одной математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров, М. Меач // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. – 2016. – № 1 (22). – С. 89–92.

5. *Шабров, С. А.* Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованёва // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2017. – № 4. – С. 145–157.

6. Об адаптации метода конечных элементов для модели колебаний струны с разрывными решениями / Ж. И. Бахтина, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 2. – С. 106–117.

7. Об адаптации метода конечных элементов для математической модели шестого порядка / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 3. – С. 77–90.

8. *Зверева, М. Б.* Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 97–105.

УДК 510, 511.8, 512.64

# НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОММУТАТИВНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ НА ПРИМЕРЕ ЭКСПОНЕНЦИРОВАНИЯ

**В. И. Штука**

*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*

**Аннотация.** Зачастую операцию возведения в степень не принято относить к коммутативным, что верно для подавляющего большинства случаев. Об исключениях из общего правила в отношении экспоненцирования излагается в настоящем материале — определяются специальные характеристики, на которых выполняется свойство коммутативности бинарной операции. Описываются свойства нетривиальных ветвей коммутативности, приводится способ их выделения, обобщённый на случай других действий и комплексных чисел, указанных в качестве их аргументов, даётся общий анализ совокупности тривиальных и нетривиальных характеристик коммутативности ряда элементарных алгебраических операций.
**Ключевые слова:** коммутативность, характеристики, экспоненцирование.

## Введение

Ещё из курса средней школы известно, что сложение и умножение — действия коммутативные [1, 2]. Обычными словами это описывается довольно просто — от перестановки мест слагаемых (множителей) результат не меняется, или иначе — коммутативность есть свойство инвариантности действия (операции) относительно порядка следования операндов [3]. Для бинарных операций сложения и умножения во всей области определения аргументов выполняется

$$x+y=y+x, \quad x\,y=y\,x.$$

Можно ли что-то подобное сказать об экспоненцировании (возведении в степень)? Конечно, только свойство коммутативности будет выполняться не во всей области определения аргументов $x$ и $y$, а на особых линиях — характеристиках (ветвях), где действует соотношение

$$x^y=y^x. \tag{1}$$

Сразу же бросается в глаза тривиальная характеристика $x=y$, однако есть ещё одна — нетривиальная. О её существовании говорят такие исключения, как $2^4=4^2$ или $\sqrt{3}^{3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$, а значит, её необходимо определить. Если сейчас, имея под рукой эти «исключения», изобразить даже приблизительно данную характеристику, то станет очевидно, как она должна выглядеть. Сразу же возникают следующие вопросы: 1) имеет ли нетривиальная характеристика асимптоты; 2) в какой точке она пересекает тривиальную характеристику; 3) не связано ли это с не менее знаменитым трансцендентным числом и основанием натурального логарифма $e\cong 2.71828$?

## Определение и анализ характеристик коммутативности

Для ответа на поставленные выше вопросы начала необходимо прологарифмировать соотношение (1), приведя его к виду

$$y\ln x=x\ln y.$$

Далее, воспользовавшись методом введения параметра в алгебраических соотношениях (метод Фурье использует тот же принцип, только применяется для решения дифференциальных уравнений [3]), определим параметр $s$ соотношением

$$\frac{y}{x} = \frac{\ln y}{\ln x} = s. \qquad (2)$$

Из (2) следует пара зависимостей

$$y = s\,x,\; y = x^s.$$

Два этих уравнения определяют функциональную зависимость аргументов от параметра. Она получается довольно простой

$$x = \sqrt[s-1]{s}, \qquad y = s\,x. \qquad (3)$$

Чтобы ответить на вопрос о месте пересечения характеристик вспомним про второй замечательный предел, который может быть записан следующим образом

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\left(1+\varepsilon^{-1}\right)^{\varepsilon} = e.$$

Тот же самый предел получаем, когда устремляем параметр $s$ в (3) к единице. С точки зрения симметрии возможно рассчитывать значения координат правой ветви, а левая отобразится так, что соответствующие точки будут иметь обратные (относительно единицы, как при делении) параметры.

Нетривиальная характеристика имеет асимптоты $y=1$ и $x=1$, к которым стремится при $s\to\infty$ и $s\to 0$ соответственно. На рис. 1 представлены обе характеристики коммутативности для экспоненцирования: тривиальная — синяя линия и нетривиальная — красная. Отмечены три точки с соответствующими значениями параметров.

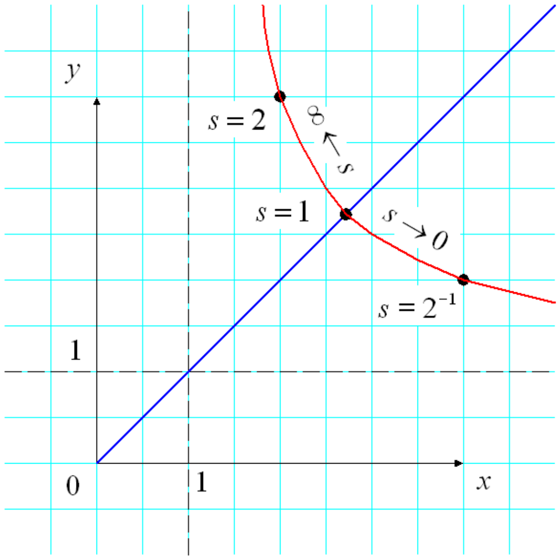



*Рис. 1. Характеристики коммутативности экспоненцирования*

Аналогичные характеристики получаются и для других действий, не обладающих коммутативностью во всей области определения своих аргументов. Так, например, нетривиальной характеристикой для некоммутативного «умножения» $x\,e^y = y\,e^x$ будет $x=(s-1)^{-1}\ln s,\;\; y = s\,x$, а для некоммутативного «сложения» $x+e^y = y+e^x$ — $x=\ln s-\ln(e^s-1),\;\; y=s+x.$

К сожалению, найти площадь области, ограниченной нетривиальной характеристикой коммутативности и её асимптотами для экспоненцирования не получается ввиду неограниченного роста первообразной. Конечных значений здесь ожидать не приходится по аналогии с интегрированием функции $y=x^{-1}$.

Чтобы завершить исследование характеристик коммутативности известной триады бинарных операций – возведение в степень, извлечение корня и логарифма по основанию исследуем их на предмет наличия нетривиальных характеристик коммутативности.

Для логарифма на характеристиках выполняется условие $\log_x y = \log_y x$. Далее (также через параметр) находим, что нетривиальная характеристика существует и явно связывает аргументы безо всяких параметров $x\,y = 1$.

В отношении операции извлечения корня имеем соотношение $\sqrt[x]{y} = \sqrt[y]{x}$. Здесь применима параметризация, аналогичная той, что была показана для возведения в степень. Поэтому остановимся лишь на результате для нетривиальной характеристики

$$y = \sqrt[1-t]{t}, \qquad x = y / t. \tag{4}$$

На рис. 2 представлена характеристика (4) и на ней отмечены некоторые точки, соответствующие определённым параметрам.

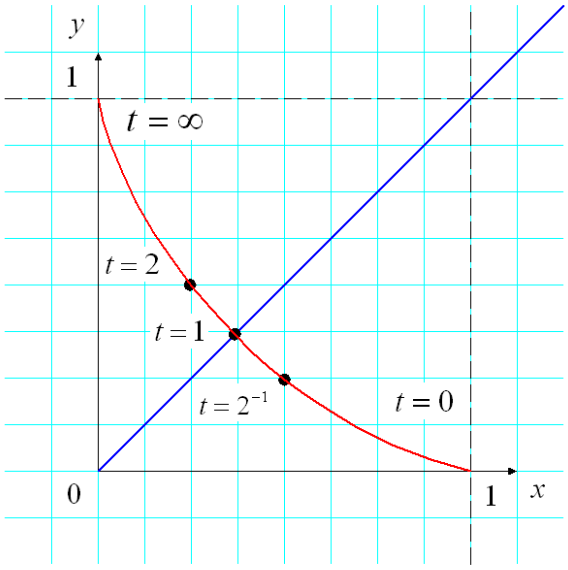



*Рис. 2. Характеристики коммутативности операции извлечения корня*

Если рассмотреть график параметрической зависимости (рис. 2), то можно выделить и на нём «особые» точки. Нетривиальная ветвь (красная линия) пересекается с тривиальной ветвью (синяя линия) в точке с абсциссой и ординатой $e^{-1} \cong 0.367879$. Крайние точки ветви лежат на осях и ограничены слева и справа единицей при $t \to \infty$ и $t \to 0$ соответственно. Площадь под такой кривой (4) возможно посчитать (в отличие от площади между кривой (3) и её асимптотами) $S \cong 0.317164$. Тоже можно сказать и за её длину $L \cong 1.48254$. Нетривиальная ветвь также обладает симметрией относительно главной диагонали и представляет собой обратное отображение кривой (3), если обратиться к следующей замене переменных $x \to y^{-1}$, $y \to x^{-1}$.

Теперь определены все нетривиальные характеристики тройки — возведения в степень, извлечения корня и логарифма по основанию. Проверим, существуют ли точки, принадлежащие одновременно двум или даже трём характеристикам коммутативности. Для этого необходимо разрешить восемь систем параметрических уравнений (учитываются тривиальные и нетривиальные характеристики коммутативности для трёх действий). Табл. 1 приведена как раз для всей совокупности систем. Знаком «○» обозначена тривиальная характеристика, «■» — нетривиальная.

Таблица 1

*Варианты взаимной коммутативности тройки действий*

| Случай | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[y]{z} = x$ | ○ | ○ | ○ | ○ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| $\log_x z = y$ | ○ | ○ | ■ | ■ | ○ | ○ | ■ | ■ |
| $x^y = z$ | ○ | ■ | ○ | ■ | ○ | ■ | ○ | ■ |

Замечательно, что таких точек оказалось не много, а точнее, всего одна — на пересечении тривиальных характеристик коммутативности (случай 1). Это точка $x=1,\ y=1,\ z=1$. Проверка здесь очень простая — $1^1=1,\ \sqrt[1]{1}=1,\ \log_1 1=1$. Аналогом в природе может быть нуль градусов при нормальном атмосферном давлении на уровне моря для воды, называемый тройной точкой, когда жидкое, твёрдое и газообразное состояния равновероятны и возможно их продолжительное существование.

## Заключение

Все представленные выше рассуждения и конструктивные определения с таким же, и даже большим, успехом могут и должны быть перенесены на область комплексных чисел.

Гораздо более сложной задачей является решение системы соотношений на коммутативность относительно первоначального определения параметра (на характеристиках). Понятно, что решение однозначное, но оно лежит в плоскости трансцендентных чисел. Например, чтобы определить параметр коммутативности потенцирования в случае комплексных величин, потребуется разрешить систему

$$(s\cos\sigma-1)\ln x-\xi s\sin\sigma=\ln s, \qquad (s\cos\sigma-1)\xi+\ln x\, s\sin\sigma=\sigma.$$

По найденному относительно исходного числа $xe^{i\xi}$ и параметру $se^{i\sigma}$ совершенно несложно восстановить «отражение» — коммутирующее число $ye^{i\eta}$. Делается это простым умножением!

Аналогичным для действительных чисел (аргумент комплексного числа находится на оси абсцисс, т. е. $\xi=0$) необходимо разрешить уравнение относительно параметра $s$

$$(s-1)\ln x=\ln s.$$

## Литература

1. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. – М. : АСТ: Астрель, 2006. – 509 с.

2. *Цыпкин А. Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1988. – 432 с.

3. Математика: Энциклопедия / Под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Большая Российская энциклопедия, 2003. – 845 с.

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.377: 004.942

# ЗАДАЧА О ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

**М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. А. Верлин, Э. В. Сёмка, А. И. Шашкин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Определяется напряженное и деформированное состояние толстостенной сферической оболочки (полого шара), испытывающей центрально-симметричные распределенные силовые, кинематические и тепловые внешние воздействия. Материал оболочки проявляет свойства теплопроводности, упругости и пластичности. Функции пластичности зависит от трех независимых инвариантов тензора напряжений. Рассматриваются случаи, когда предел пластичности является постоянной величиной и функцией температуры. В подпространстве внешних воздействий определены образы кривой пластичности. Построен алгоритм решения статически определимой одномерной упругопластической задачи для любого условия пластичности. Получено решение задачи, когда учитывается упрочнение материала. Получены зависимости между параметрами внешнего воздействия, когда полый шар может находиться в упругом, упругопластическом или в предельном состоянии. Дано графическое представление решения.
**Ключевые слова:** полый шар, толстостенная сферическая оболочка, теромоупругопластическое состояние, эквивалентное напряжение, ассоциированный закон пластического деформирования, годограф напряжений, параметры управления поведением модели.

## Введение

Решение задачи о толстостенной сферической оболочке, испытывающей разные внешние воздействия, приводится во многих книгах по теории упругости, пластичности, термоупругопластичности [1–7] и в ряде научных статьях, например, [8–13]. Обычно рассматривается случай, когда процесс нагружения является простым. В монографии [6] приведено наиболее полное решение задачи о сферической оболочке, когда не учитывается зависимость предела пластичности от температуры и условие пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений и знака третьего инварианта девиатора напряжений; рассматривается случай только теплового нагружения и случай комбинированного нагружения, когда задана температура на стенках сферы, давление на внутренней стенки, а на внешней стенке давление отсутствует. В работах А. А. Буренина и его учеников выполнено исследование термоупругопластического состояния разных объектов. Так, в работах [9–12] рассмотрен процесс теплового нагружения и разгрузки свободного от внешних усилий шара и полого шара для условия Треска с учетом зависимости предела пластичности от температуры.

Решение этой и аналогичных задач представляет интерес, поскольку можно получить аналитическое или частично аналитическое решение для разных математических моделей. Аналитическое решение можно получить, например, при выборе кусочно-линейных функций пластичности. Наиболее полное исследование в области математической теории пластичности при выборе кусочно-линейных функций пластичности можно найти в трудах Д. Д. Ивлева [14–19].

Если рассматривать постановку задачи в информационном плане, то можно выделять исходные данные. К ним относятся внешние параметры, характеризующие внешние воздействия на рассматриваемый объект, геометрические параметры объекта и материальные константы (модули), входящие в определяющие уравнения математической модели, которые устанавливают зависимость между внутренними параметрами состояния объекта. Если в рамках рассматриваемой задачи изучать поведение выбранной математической модели, то исходные данные играют роль параметров управления поведением выбранной математической модели и, соответственно, являются элементами управления поведением рассматриваемого объекта [20, 21].

## Постановка задачи

Рассматривается задача о толстостенной сферической оболочке (полом шаре), испытывающей центрально симметричные внешние воздействия: давление $p_b$ на внешнюю стенку $\rho = b$ и давление $p_a$ на внутреннюю стенку $\rho = a$. Если на границы $\rho = a$ и $\rho = b$ действует кинематические воздействия, то тогда задаются перемещения на этих границах $u_a$ и $u_b$ соответственно. Также рассматривается тепловое воздействие на шар: на границе $\rho = a$ поддерживается температура $T_a$, на границе $\rho = b$ температура $T_b$. Предполагается, что шар проявляет упругие и пластические свойства. Искомыми параметрами состояния в каждой точки шара являются компоненты тензора напряжений, компоненты тензоров деформаций и вектора перемещений. В области упругого состояния упругие деформации являются полными (нет остаточных деформаций).

Детали выбираемых уравнений состояния рассматриваются ниже по тексту.

## Основные соотношения

Все нижеприводимые соотношения приведены к безразмерному виду. В качестве масштаба длины выбирается внешний радиус шара $b$. Все величины имеющие размерность напряжений отнесены к пределу пластичности на одноосное растяжение $k$. Масштабная единица для температуры $1^0$.

В силу указанной симметрии внешних воздействий, в сферической системе координат $\rho$, $\theta$, $\varphi$ матрицы компонент тензора напряжений и деформаций будут иметь вид

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \sigma_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\phi \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\phi \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Также выполняются равенства $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$.

Если функции пластичности не зависят от первого инварианта тензора напряжений и знака третьего инварианта девиатора напряжений, то при решении задачи о шаре такие функции пластичности будут приводиться к виду

$$f = |\sigma_\theta - \sigma_\rho| = k. \qquad (2)$$

Некоторые авторы отмечают, что условие (2) следует как из условия пластичности Треска, так и из условия пластичности Мизеса [6]. Вообще, для идеального пластического тела (2) следует из любого условия пластичности, когда функция пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений и знака третьего инварианта девиатора напряжений.

Рассмотрим условие пластичности

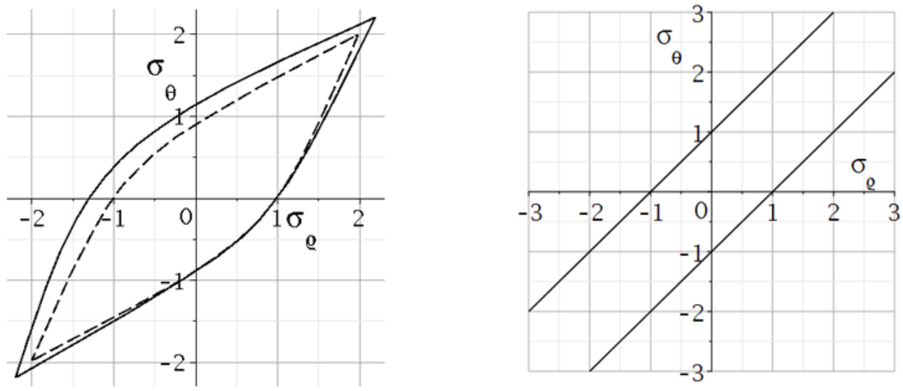
$$f(\sigma_\rho, \sigma_\theta) = \frac{\varsigma(\sigma_\rho^w + 2\sigma_\theta^w)^{\frac{1}{w}} + \eta((|\sigma_\rho - \sigma_\theta|^m + \alpha(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^m)^{\frac{1}{m}}}{\varsigma + \eta(1+\alpha)^{1/m}} = k(T). \qquad (3)$$

Когда учитывается упрочнение

$$f(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p) = \frac{\varsigma((\sigma_\rho - \delta\varepsilon_\rho^p)^w + 2(\sigma_\theta - \delta\varepsilon_\theta^p)^w)^{\frac{1}{w}}}{\varsigma + \eta(1+\alpha)^{1/m}} +$$
$$\frac{\eta((|\sigma_\theta - \sigma_\rho - \delta(\varepsilon_\theta^p - \varepsilon_\rho^p)|^m + \alpha(\sigma_\rho - \sigma_\theta - \delta(\varepsilon_\rho^p - \varepsilon_\theta^p)^m)^{\frac{1}{m}}}{\varsigma + \eta(1+\alpha)^{1/m}} = k(T)(1 + \mu\varepsilon_{eq}^p). \qquad (4)$$

Здесь $\varepsilon_{\rho}^{p}$. $\varepsilon_{\theta}^{p}$ — компоненты тензора пластических деформаций, $\varepsilon_{eq}^{p}$ — эквивалентная пластическая деформация. Когда параметры $\varsigma = 0$, $\eta = 1$, $\delta = 0$, $\alpha = 0$, $m = 1$, $\mu = 0$, $k = k_0$, из условия (4) следует условие (2).

На рис. 1 в плоскости $\sigma_{\rho}$, $\sigma_{\theta}$ показаны кривые пластичности, определяемые по формуле (2) для разных значений числовых коэффициентов в функции пластичности.




*a*) *b*)

*Рис. 1. Кривые пластичности* $a)\ \varsigma = 0.2, w = 2, \eta = 0.5, m = 3, k = 1,$ *сплошная линия* $\alpha = 0.5,$ *пунктирная* $\alpha = 0,$ $b)\ \alpha = 0, \varsigma = 0, k = 1$

Результаты, представленные на рис. 1, показывают, что при учете первого инварианта тензора напряжений радиальное и окружное напряжения, когда точка шара находится в упругом состоянии, может изменяться в ограниченном диапазоне. Соответственно давление на границы шара также должно быть ограниченным. Когда первый инвариант в условие пластичности не учитывается, то упругое состояние возможно для любого значения давления на границах шара, но ограничен перепад давления $\Delta p = p_a - p_b$. Учет знака третьего инварианта девиатора напряжений, как отмечалось выше, влияет на значения пределов пластичности.

Когда значения параметров состояния $\sigma_{\rho}, \sigma_{\theta}$ определяют точки области, ограниченную кривой пластичности, принимается, что определяющими уравнениями, связывающим напряжения и деформации, является соотношения закон Дюамея — Неймана [1, 7]

$$E\varepsilon_{\theta} = (1-\nu)\sigma_{\theta} - \nu\sigma_{\rho} + E\alpha T, \quad E\varepsilon_{\rho} = \sigma_{\rho} - 2\nu\sigma_{\theta} + E\alpha T. \tag{5}$$

Модуль Юнга $E$ и коэффициент Пуассона $\nu$ — константы.

Если параметры состояния $\sigma_{\rho}, \sigma_{\theta}$ определяют точки на кривой пластичности, то принимается аддитивное представление полных деформаций через обратимые и необратимые деформации

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}^{e} + \varepsilon_{\theta}^{p}, \quad \varepsilon_{\rho} = \varepsilon_{\rho}^{e} + \varepsilon_{\rho}^{p}. \tag{6}$$

Полные деформации определяются через перемещения по формулам

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho} = \frac{du}{d\rho}. \tag{7}$$

Полные деформации связаны условием совместности деформаций

$$r\frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} + \varepsilon_{\theta} - \varepsilon_{\rho} = 0. \tag{8}$$

Приращения необратимые деформации связаны с напряжениями нормальным законом, поэтому

$$\frac{d\varepsilon_{\theta}^{p}}{\partial f / \partial \sigma_{\theta}} = \frac{d\varepsilon_{\rho}^{p}}{\partial f / \partial \sigma_{\rho}}. \tag{9}$$

При равенстве пластического потенциала функции пластичности нормальный закон пластического течения называется ассоциированным законом пластического течения [4].

Соотношения (9) при выборе нелинейных функций пластичности в общем случае неинтегрируемые [17]. Поэтому в дальнейшем для получения определяющих уравнений вместо (8) будем использовать нормальный закон пластического деформирования [20]

$$\frac{\varepsilon_\theta^p}{\partial f / \partial \sigma_\theta} = \frac{\varepsilon_\rho^p}{\partial f / \partial \sigma_\rho}. \tag{10}$$

В квазистатическом приближении напряжения должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) = 0. \tag{11}$$

### Эквивалентное напряжение, эквивалентная деформация

Термин «эквивалентная величина» используется для оценки каких-либо структур, полей величин и т. д. Представляет интерес статья Б. Поля [22], в которой приводятся некоторые рассуждения относительно использования терминов эквивалентных величин. Приведем небольшой фрагмент из статьи Б. Поля: «Несмотря на возможность недоразумений в связи с использованием нечеткого определения «эквивалентных» величин, сама идея эквивалентного напряжения может привести некоторую пользу при изучении деформационного упрочнения, когда можно найти зависимость между эквивалентными напряжениями и подобным же образом определенными эквивалентными деформациями».

Ряд авторов, например, [8] связывают определение эквивалентного напряжения и эквивалентной пластической деформации с элементарной работой напряжений на пластических деформациях

$$\delta A_p = \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p.$$

В некоторых случаях, например, для кусочно-линейных функций пластичности такой подход позволяет аналитически определить эквивалентную пластическую деформацию. В общем случае, даже при решении одномерных задач, этот подход не приводит к желаемым результатам и эквивалентную пластическую деформацию надо определять, рассматривая другие предположения.

### Поле температур

Поле температур в шаре находится из решения краевой задачи [1]

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d^2T}{d\rho^2} + 2\dfrac{dT}{d\rho} = 0, \\ T\,|_{\rho=a} = T_a, \ T\,|_{\rho=b} = T_b. \end{cases} \tag{12}$$

Решение задачи (12) представим в виде

$$T = T_b + \frac{a\Delta T}{(b-a)}\left(\frac{b}{\rho} - 1\right), \quad \Delta T = T_a - T_b. \tag{13}$$

### Упругое состояние полого шара

В случае, когда поле температур определяется по формуле (13) напряжения в полом шаре, находящемся в упругом состоянии, под действием только теплового воздействия определяются по формулам [1]:

$$\sigma_\rho = A + \frac{B}{\rho^3} - \frac{\lambda}{\rho}, \quad \sigma_\theta = A - \frac{B}{2\rho^3} - \frac{\lambda}{2\rho}, \quad \lambda = \frac{abE\alpha\Delta T}{(1-\nu)(b-a)}. \tag{14}$$

Если внешнее воздействие только тепловое, то

$$A = -\frac{(b+a)abE\alpha\Delta T}{(1-\nu)(b^3-a^3)}, \quad B = -\frac{a^3b^3E\alpha\Delta T}{(1-\nu)(b^3-a^3)}. \tag{15}$$

Знак $\kappa = sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho)$ на границах $\rho = a$ и $\rho = b$ будет разным. Когда $\Delta T > 0$, то $sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho)|_{\rho=a} = -1$, $sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho)|_{\rho=b} = +1$. Когда $\Delta T < 0$, то $sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho)|_{\rho=a} = +1$, $sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho)|_{\rho=b} = -1$.

## Пластическая область

Выберем условия (2). Рассмотрим случай только теплового воздействия (13). Пластическая область будет зарождаться на внутренней границе оболочки, когда параметр [6]

$$\beta = \frac{E\alpha}{(1-\nu)}|\Delta T| = \beta_1 = \frac{2(a^2+ab+b^2)k}{b(a+2b)}.$$

Эта формула следует из (2), (14), (15).

Обозначим через $c_1$ — радиус упругопластической границы. В процессе нагружения, когда $\beta > \beta_1$, пластическая область $a \le \rho \le c_1$ увеличивается.

При выборе условия (2) напряжения в области $a \le \rho \le c_1$ вычисляются по формулам:

$$\sigma_\rho^{(1)} = 2\kappa_1 k \ln(\rho / a), \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\rho^{(1)} + \kappa_1 k, \quad \kappa_1 = sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho).$$

Знак $\kappa_1 = sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho)|_{\rho=c_1}$. Если величина $\Delta T > 0$, то $\kappa_1 = -1$. Если $\Delta T < 0$, то $\kappa_1 = +1$.

Если область $c_1 \le \rho \le b$ остается упругой, то величины $A$, $B$ и радиус упругопластической границы $c_1$ определяются из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе и граничного условия $\sigma|_{\rho=b} = 0$. Так, если $A$ и $B$ определяются из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе, то

$$A = 2\kappa_1 k\left(\ln\left(\frac{c_1}{a}\right) + \frac{1}{3}\right) + \frac{\lambda}{3c_1}, \quad B = \frac{\lambda c_1^2}{3} - \frac{2}{3}\kappa_1 k c_1^3. \tag{16}$$

Уравнение для вычисления $c_1$

$$2\kappa_1 k\left(\ln\left(\frac{c_1}{a}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2c_1^3}{3b^3}\right) + \left(\frac{2}{3c_1} + \frac{c_1^2}{3b^3} - \frac{1}{b}\right)\lambda = 0. \tag{17}$$

Если $A$ и $B$ определяются из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе и условия $\sigma|_{\rho=b} = 0$, то

$$A = \left(1 - \frac{c_1^2}{3b^2}\right)\frac{\lambda}{b} + \frac{2\kappa_1 k c_1^3}{3b^3}, \quad B = \frac{\lambda c_1^2}{3} - \frac{2}{3}\kappa_1 k c_1^3. \tag{18}$$

Выбор формул (16) или (18) влияет на шаги алгоритма решения задачи, но не влияет на окончательные результаты.

На границе $\rho = b$ будет зарождаться вторая пластическая область, если

$$(\sigma_\theta - \sigma_\rho)|_{\rho=b} = \kappa_2 k, \ \kappa_2 = -\kappa_1. \tag{19}$$

Для определения значения $\Delta T = \Delta T_1$, когда выполняется условие (19), надо решать совместно систему уравнений (17), (19). Поскольку параметр $\beta$ в уравнения (17), (19) входит линейно, то можно получить отдельно уравнение для определения радиуса упругопластической границы

$$2\kappa_1 k \ln\left(\frac{c_1}{a}\right)+\frac{4\kappa_1 k_0 (b-c_1)(c_1^2-b^2)}{3(b+c_1)bc_1}=0$$

и формулу для вычисления значения параметра $\beta$

$$\beta=\beta_2=\frac{2k_0(\kappa_2 b^3-\kappa_1 c_1^3)(b-a)}{(b^2-c_1^2)ab}. \qquad (20)$$

В процессе дальнейшего нагружения, когда параметр $\beta>\beta_2$, область шара $c_2\le\rho\le b$ переходит в пластическое состояние границе $\rho=b$.

На рис. 2 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений, когда области шара $a\le\rho\le c_1$ и $c_2\le\rho\le b$ находятся в пластическом состоянии, а область шара $c_1\le\rho\le c_2$ находится в упругом состоянии.

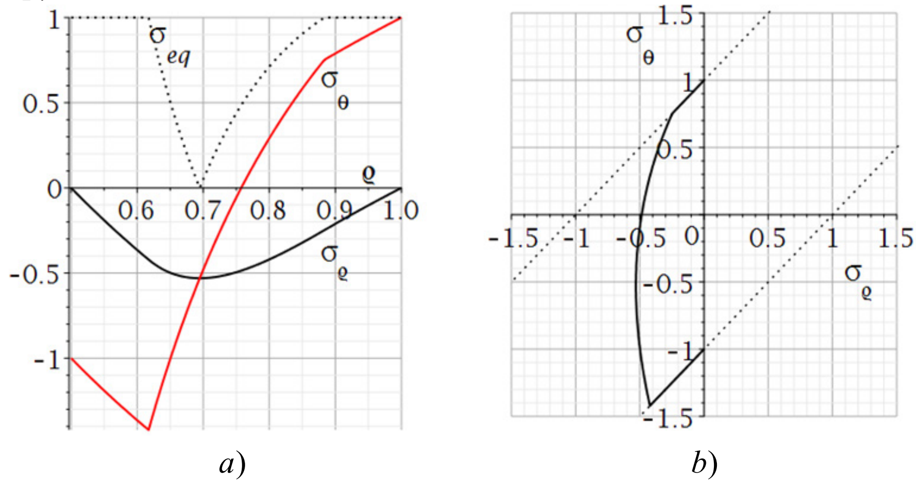



*Рис. 2. a) напряжения, b) годограф напряжений.* $\nu=0.3,\ a=0.5,\ \Delta T=270,\ c_1=0.62,\ c_2=0.88$

Результаты численных вычислений показывают, что в данной постановке задачи, когда имеет место только тепловое воздействие, полый шар полностью не переходит в пластическое состояние.

## Полый шар при тепловом воздействии. Учет упрочнения материала

Рассмотрим случай, когда условие пластичности имеет вид

$$f(\sigma_\rho,\sigma_\theta,\ \varepsilon_\rho^p,\varepsilon_\theta^p)=|\sigma_\theta-\sigma_\rho-\delta(\varepsilon_\theta^p-\varepsilon_\rho^p)|=k. \qquad (23)$$

Если до нагружения в шаре остаточных деформаций нет, то в результате теплового нагружения пластическая зона будет зарождаться на внутренней границе $\rho=a$, когда выполняется условие (19). При дальнейшем нагружении сначала образуется пластическая область $a\le\rho\le c_1$. Для нахождения напряжений в этой области надо из системы уравнений (5), (6), (8), (11), (23) получить уравнения для определения напряжений. Выполняя эту процедуру, получаем

$$\begin{cases}\rho^2\dfrac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2}+4\rho\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho}-\dfrac{6}{1+3\delta(1-\nu)}\left(k+\dfrac{\delta abE\alpha\Delta T}{\rho(b-a)}\right)=0,\\ \sigma_\theta=\dfrac{\rho}{2}\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\sigma_\rho.\end{cases} \qquad (24)$$

Решение системы (24) запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{1}{1+3\delta(1-\nu)}\left(2k\ln\rho-\frac{3\delta abE\alpha\Delta T}{\rho(b-a)}\right)-\frac{C_1}{\rho^3}+C_2,\\ \sigma_\theta&=\frac{1}{1+3\delta(1-\nu)}\left(k+2k\ln\rho-\frac{3\delta abE\alpha\Delta T}{2\rho(b-a)}\right)+\frac{C_1}{2\rho^3}+C_2\end{aligned} \qquad (25)$$

Величины $C_1$, $C_2$, входящие в формулы (25), определяются из граничного условия $\sigma_\rho|_{\rho=a}=0$ и условий отсутствия пластических деформаций на упругопластической границе $\rho=c_1$

$$C_1 = 2\kappa_1(k-k_\delta)c_1^3 - 3E\alpha N_\delta c_1^2,$$

$$C_1 = 2\kappa_1 k_\delta \ln a + \frac{2\kappa_1(k-k_\delta)c_1^3}{3a^3} + \frac{E\alpha N_\delta}{a}\left(3-\frac{c_1^2}{a^2}\right), \qquad (26)$$

$$N_\delta = \frac{\delta ab\Delta T}{(1+3\delta(1-\nu))(b-a)}.$$

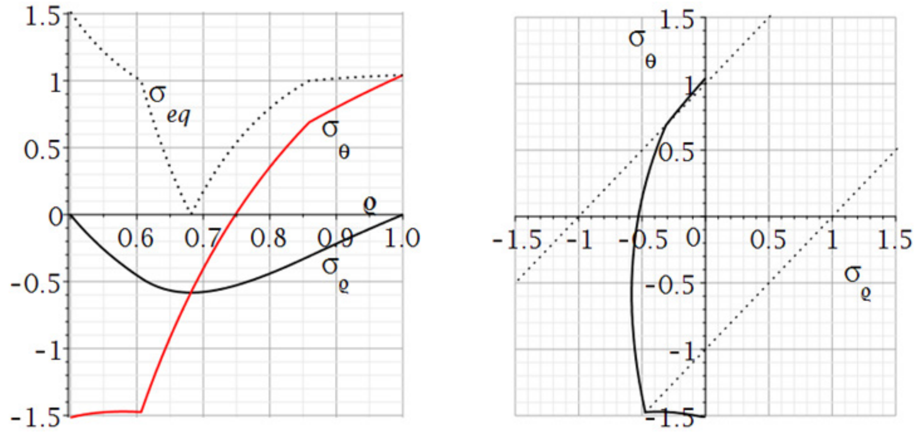
Подстановка (26) в (25) дает

$$\sigma_\rho = \frac{1}{1+3\delta(1-\nu)}\left(2\kappa_1 k\ln\frac{\rho}{a} + \frac{3\delta abE\alpha\Delta T}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{2\kappa_1 kc_1^3}{3} + \frac{\delta abc_1^2E\alpha\Delta T}{b-a}\right)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)\right) + \frac{2\kappa_1 kc_1^3}{3}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{\rho^3}\right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{1+3\delta(1-\nu)}\left(\kappa_1 k + 2\kappa_1 k\ln\frac{\rho}{a} + \frac{3\delta abE\alpha\Delta T}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2\rho}\right) - \left(\frac{\kappa_1 kc_1^3}{3} + \frac{\delta abc_1^2E\alpha\Delta T}{2(b-a)}\right)\left(\frac{2}{a^3}+\frac{1}{\rho^3}\right)\right) + \frac{\kappa_1 kc_1^3}{3}\left(\frac{2}{a^3}+\frac{1}{\rho^3}\right).$$

Из решения упругой задачи следует, что когда $\Delta T>0$, то знак $\kappa_1=-1$, когда $\Delta T<0$, то знак $\kappa_1=+1$.

На рис. 3 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений, для $\nu=0.3$, $a=0.5$, $\delta=0.1$. Области шара $a\le\rho\le c_1$ и $c_2\le\rho\le b$ находятся в пластическом состоянии, а область шара $c_1\le\rho\le c_2$ находится в упругом состоянии.




*a*) *b*)

*Рис. 3 a) напряжения, b) годограф напряжений.* $\Delta T=270, c_1=0.61, c_2=0.86$

На рис. 4 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений Области шара $a\le\rho\le c_1$ и $c_2\le\rho\le b$ находятся в пластическом состоянии, а область шара $c_1\le\rho\le c_2$ находится в упругом состоянии. Предел пластичности линейно зависит от температуры $k=k_0(1-\chi T)$.

Результаты вычислений показали, что учет упрочнения приводит к увеличению эквивалентного напряжения в пластической области и уменьшению радиуса упругопластической границы. Упругая область в процессе нагружения не может полностью исчезнуть.

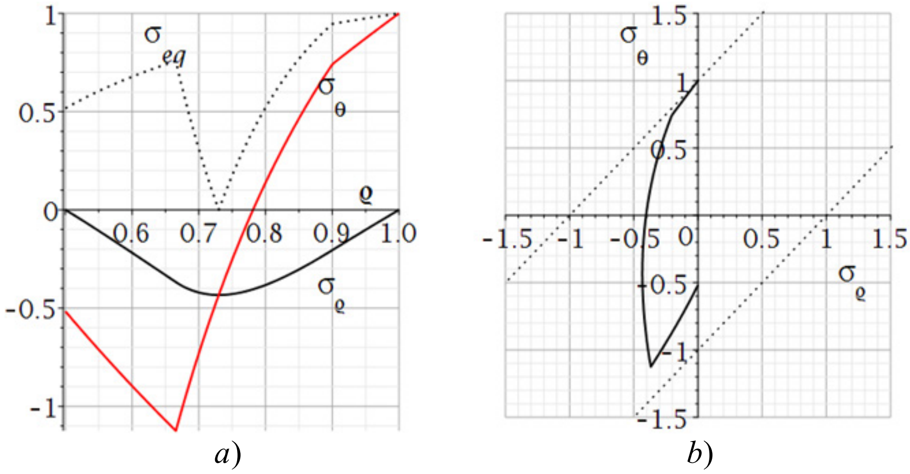



Рис. 4 $a)$ напряжения, $b)$ годограф напряжений. $\Delta T = 290, c_1 = 0.67, c_2 = 0.9, \chi = 0.0017$

**Учет пластической сжимаемости**

Рассмотрим случай, когда функция пластичности является линейной относительно компонентов тензора напряжений

$$\begin{aligned} &\varsigma(2\sigma_\theta + \sigma_\rho) + \kappa(\sigma_\theta - \sigma_\rho) + \eta(\sigma_\theta - \sigma_\rho) = k_0(1 - \chi T), \\ &\kappa = sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho). \end{aligned} \tag{27}$$

Условие пластичности (27) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\alpha\sigma_\theta + \beta\sigma_\rho = k(1 - \chi T), \\ &\alpha = 2\varsigma + \kappa - \eta, \\ &\beta = \varsigma - \kappa + \eta. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений, для определения напряжений в пластической области получаем задачу

$$\begin{cases} \alpha\sigma_\theta + \beta\sigma_\rho = k(1 - \chi T), \\ \rho \dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) = 0, \\ \sigma_\rho |_{\rho = a} = -p_a, \end{cases} \tag{28}$$

Поле температур определяется по формуле (13). Решение задачи (28) имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho = \left( -p_a + \frac{(M_\chi - 1)k_0}{\alpha + \beta} + \frac{2N_\chi k_0}{a(\alpha + 2\beta)} \right) \left( \frac{a}{\rho} \right)^{2 + 2\beta/\alpha} - \left( \frac{M_\chi - 1}{\alpha + \beta} + \frac{2N_\chi}{\rho(\alpha + 2\beta)} \right) k_0, \\ &\sigma_\theta = -\frac{\beta}{\alpha} \left( -p_a + \frac{(M_\chi - 1)k_0}{\alpha + \beta} + \frac{2N_\chi k_0}{a(\alpha + 2\beta)} \right) \left( \frac{a}{\rho} \right)^{2 + 2\beta/\alpha} - \left( \frac{M_\chi - 1}{\alpha + \beta} + \frac{N_\chi}{\rho(\alpha + 2\beta)} \right) k_0, \end{aligned} \tag{29}$$

где введены обозначения $M = T_b - \dfrac{a\Delta T}{b - a}$, $N = \dfrac{ab\Delta T}{b - a}$, $M_\chi = \chi M$, $N_\chi = \chi N$.

Для получения правильного результата их (29), когда, например, $\alpha + \beta = 0$ надо выполнить предельный переход при решении (28). Более просто получить правильный результат можно непосредственно в (28) учесть, что $\alpha + \beta = 0$. В этом случае параметр $\varsigma = 0$, поэтому

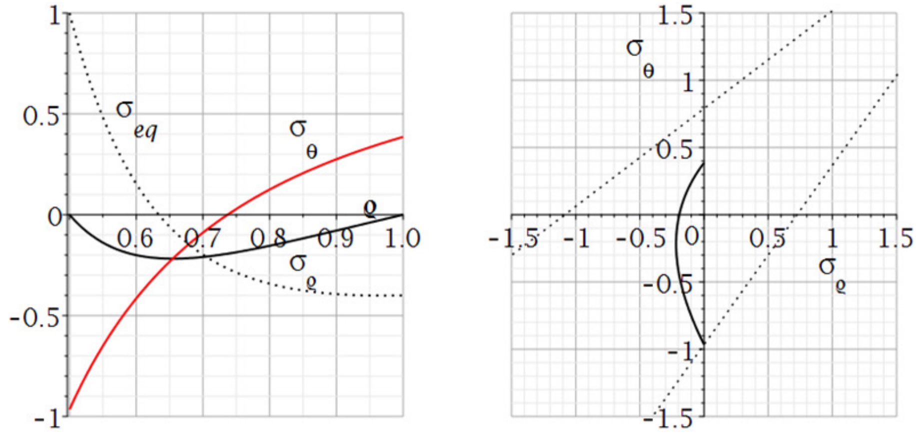
$$\sigma_\rho = \frac{2k_0}{\alpha} \left( (1 - M_\chi) \ln \frac{\rho}{a} + \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} \right) N_\chi \right) - p_a,$$

$$\sigma_\theta = \frac{k_0}{\alpha}\left((1-M_\chi)(1+\ln\frac{\rho}{a}) + N_\chi\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2}{a}\right)\right) - p_a.$$

В упругой области напряжения вычисляются по формулам (14), (15). В процессе нагружения пластическая зона зарождается на границе $\rho = a$, когда

$$\Delta T = k_0(1-\chi T_b) \Big/ \left(k_0\chi - \frac{(2\varsigma+\kappa-\eta)(a+2b)bE\alpha}{2(1-\nu)(a^2+ab+b^2)}\right).$$

На рис. 5, показан случай, когда пластическая область зарождается на внутренней границе полого шара находится в упругом состоянии.




*a*) *b*)

*Рис. 5 a) напряжения, b) годограф напряжений.*

$\nu = 0.3,\ a = 0.5,\ \Delta T = 79,\ \varsigma = 0.1, \eta = 0.1,\ E\alpha = 0.012,\ \chi = 0.0017$

## Выводы

Результаты численных вычислений показали, что учет зависимости предела пластичности от температуры и учет пластической сжимаемости может оказать существенное влияние на напряженное и деформированное состояние полого шара. В данной постановке задачи, когда имеет место только тепловое воздействие, полый шар полностью не переходит в пластическое состояние.

## Литература

1. *Timoshenko S. P.* Theory of elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 506 p.

2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М.-Л. : ОГИЗ, 1948. – 376 с.

3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.

4. *Kachanov L. M.* Foundations of the Theory of Plasticity / L. M. Kachanov. – Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1971. – 482 p.

5. *Lubliner J.* Plasticity Theory / J. Lubliner. – New York : MacMillan Publishing Company, 1990. – 516 p.

6. *Chakrabarty J.* Theory of Plasticity / J. Chakrabarty. – Oxford : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 882 p.

7. *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – Москва: Физматлит, 1963. – 252 с.

8. *Gamer U.* On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to a spherically symmetrical temperature field / U. Gamer // Journal of Thermal Stresses. – 1988. – Vol. 13. – P. 159–173.

9. *Дац Е. П.* Расчет накопленной остаточной деформации в процессе нагрева-охлаждения упругопластического шара / Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4. – С. 250–264.

10. *Дац Е. П.* Термоупругопластическое деформирование многослойного шара / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Изв. РАН. МТТ. – 2017. – № 5. – С. 30–36.

11. *Дац Е. П.* Вычисление необратимых деформаций в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, Р. Велмуруган // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 3. – С. 168–175.

12. *Burenin A.* Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process / A. Burenin, E. Murashkin, E. Dats // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 1959, – P. 070008. – URL: https://doi.org/10.1063/1.5034683

13. *Сёмка Э. В.* Упругопластическое состояние полого шара / Э. В. Сёмка // Вестник инженерной школы ДВФУ. Серия: Механика деформируемого тела. – 2020. – № 3(44). DOI: http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-3-1

14. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Москва : Наука, 1966. – 252 с.

15. *Ивлев Д. Д.* Метод возмущений в теории упруго-пластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – Москва : Наука, 1978. – 208 с.

16. *Быковцев Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.

17. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. – 704 с.

18. *Ивлев Д. Д.* Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. – 448 с.

19. *Ивлев Д. Д.* Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы / Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. – 448 с.

20. *Aleksandrova N. N.* On stress/strain state in a rotating disk / N. N. Aleksandrova, M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. I. Shashkin // AMCSM_2018 IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2019, – Vol. 1203, Article ID 012001. – URL: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012001

21. *Semka E. V.* Mathematical modeling of rotating disk states / E. V. Semka, M. A. Artemov, Y. N. Babkina, E. S. Baranovskii, A. I. Shashkin // Published under licence by IOP Publishing Ltd Journal of Physics: Conference Series, Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems 11-13 November 2019. – Voronezh, Russian Federation – 2020. –V. 1479. – DOI:10.1088/1742-6596/1479/1/012122.

22. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения / Б. Поль. – Москва : Мир, 1975. – С. 336–520.

УДК 539.3

# КОНКРЕТИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ОДНООСНОЕ СЖАТИЕ И ИНДЕНТИРОВАНИЕ

**Ю. В. Астапов, А. А. Маркин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич**

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Предложен способ экспериментального обоснования варианта определяющих соотношений Генки-Мурнагана. На экспериментальном стенде осуществлена серия опытов по сжатию и индентированию ряда образцов из высокоэластичных материалов. Разработана итерационная процедура определения констант из опытов по неоднородному деформированию. Найдены значения констант модели Генки-Мурнагана для материалов двух типов. Установлено, что модель Генки-Мурнагана описывает результаты опытов по индентированию на большем диапазоне деформаций, чем модель Генки.
**Ключевые слова:** гиперупругость, конечные деформации, логарифмическая мера деформаций, эксперимент, индентирование, идентификация модели, обратная задача.

## Введение

В работах [3, 11] предложены определяющие соотношения гиперупругого материала Генки-Мурнагана. Актуальной является задача экспериментального определения входящих в модель упругих постоянных [12, 14]. Большинство современных типов резин можно отнести к классу несжимаемых материалов, для которых конкретизация определяющих соотношений модели Генки-Мурнагана сводится к определению двух упругих констант: начального модуля сдвига $G$ и константы $c_3$. Значения этих констант для некоторых эластомеров в данной работе определяются из опытов на одноосное сжатие, с использованием аналитического решения для случая однородного деформирования. Однако в реальных опытах наблюдается неоднородность напряженно-деформированного состояния при сжатии, обусловленная трением между образцом и опорными поверхностями. Принципиальная возможность определения упругих констант $G$ и $c_3$ из опытов, предполагающих неоднородное деформирование образцов, продемонстрирована на примере обработки экспериментов по индентированию, для которого влияние контактного трения на интегральную характеристику процесса минимально [6, 7]. Параметры модели определяются из сопоставления экспериментальной и рассчитываемой с использованием численной модели интегральной характеристик процесса. Как правило, такими характеристиками в механических экспериментах являются зависимости усилия от перемещения.

В случае, если регистрируемые в эксперименте величины можно явно связать аналитической зависимостью, параметры модели могут быть определены с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Если аналитическое решение получить затруднительно, но имеется численная модель эксперимента, обратная задача может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти такие параметры модели, которые доставляют минимум величине среднеквадратичного отклонения расчетных значений от экспериментальных. В этом случае для определения значений параметров широко применяются методы оптимизации и разновидности итерационных процедур, к числу которых относят методы Хука-Дживса, Нелдера – Мида, Левенберга-Макграфта.

**Обработка экспериментов по одноосному сжатию высокоэластичных материалов**

На стенде кинематического нагружения [2] была проведена серия опытов по одноосному сжатию цилиндрических образцов из двух типов мягких материалов. Образцы первого типа представляли собой цилиндры с $r_0 = 19$ мм, $h_0 = 28$ мм, изготовленные из силиконового компаунда Силагерм 2111 марка А ТУ 2513-002-01296014-2015 (далее «материал 1»). Образцы второго типа представляли собой цилиндры с $r_0 = 13.3$ мм, $h_0 = 14$ мм, изготовленные из материала, представляющего собой смесь поливинилхлорида с фталатными пластификаторами (далее «материал 2»). Условие квазистационарности процесса достигалось в экспериментах за счет использования метода многошагового нагружения, при котором за каждый шаг деформации увеличивались на 5 % со скоростью 5 мм/мин, а после каждого шага выжидалась пауза в течение 600 с для релаксации напряжений. Для уменьшения влияния трения в экспериментах на сжатие между испытуемым образцом и опорными плоскостями помещалась полиамидная пленка ПМ-А 120 мкм ТУ 6-19-102-78, покрытая минеральным маслом 15W-40.

Предварительные эксперименты на сжатие материала 1, включающие полный цикл нагружения и разгрузки, а также измерение поперечных размеров образцов, показывают, что материал 1 проявляет ярко выраженные упругие свойства в среднем и большом диапазоне деформаций сжатия. При величине осевых деформаций $|\varepsilon_z| < 0.15$ образец визуально сохраняет цилиндрическую форму, коэффициент поперечных деформаций близок к 0.5, что можно считать обоснованным доказательством слабой сжимаемости материала 1 в таком диапазоне деформаций. При дальнейшем нагружении проявляется эффект геометрической дисторсии, неоднородности напряженно-деформированного состояния, обусловленный трением между образцом и опорными плитами. При этом образец теряет цилиндрическую форму, поэтому измерения радиальных деформаций только в среднем сечении не позволяют сделать вывод о сохранении или изменении объема образца. Аналогичные результаты неоднократно обсуждались в работах [5, 8, 13], посвященных экспериментам на одноосное сжатие резин. Рекомендуется определять начальный модуль объемной упругости из эксперимента на чисто объемное сжатие [9]. Приведенные выше результаты позволяют в дальнейшем рассматривать материалы 1 и 2 как упругие несжимаемые и использовать определяющие соотношения Генки-Мурнагана [3, 11] для несжимаемого материала:

$$\mathbf{\Sigma_R} = -p\mathbf{E} + 2G\tilde{\mathbf{\Gamma}} + c_3\mathbf{Q}, \tag{1}$$

где $\mathbf{\Sigma_R} = \dfrac{dV}{dV_0}\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}^{-1}$ – обобщенный повернутый тензор напряжений [4], $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ – девиатор логарифмической меры деформаций, $\mathbf{Q}$ – девиатор тензора $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^2$, $p$ – гидростатическое давление, $G$ и $c_3$ – материальные константы.

Зависимость истинных напряжений $\mathrm{S}_{11}$ от кратности удлинения $\lambda$ при одноосном растяжении-сжатии образца материала с определяющими соотношениями (1) в предположении однородности напряженно-деформированного состояния имеет следующий вид:

$$\mathrm{S}_{11}(\lambda) = 3G\ln\lambda + \frac{3c_3}{4}\ln^2\lambda.$$

Отметим, что при $c_3 = 0$ соотношения (1) имеют вид соотношений модели материала Генки, являющегося известным обобщением закона Гука на случай конечных деформаций.

Для каждого из образцов материалов 1 и 2 было проведено по 3 цикла сжатия в направлении оси симметрии на стенде с использованием круглой плиты. В каждом опыте фиксировались значения осевого перемещения опорной плиты $D$, [мм] и соответствующего этому перемещению усилия $P^e$, $[H]$. Обработка полученного за $m = 6$ опытов массива экспериментальных данных сводилась к вычислению средних величин усилий $\left\langle P^e \right\rangle_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} P^e_{i,j}$, соответствующих значению перемещения $D_i$. Для средних величин перемещений были вычислены кратности осевого удлинения $\lambda_i = 1 + D_i / h$. Площадь поперечного сечения в текущем состоянии $A_i$ вычислялась из условия несжимаемости испытываемых материалов $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$: $A_i = \pi r^2 / \lambda_i$. Осевые истинные напряжения были вычислены следующим образом: $\langle S_{zz} \rangle_i = -\langle P^e \rangle_i / A_i$. Результаты экспериментов на сжатие с тремя образцами каждого из материалов представлены на рисунках 1 и 2 в виде зависимостей средних осевых истинных напряжений $\langle S_{zz} \rangle_i$, показанных синими окружностями, от кратности удлинения $\lambda_i$.

Определим значения констант $G$ и $c_3$, исходя из требования, чтобы аналитическая зависимость (2) наилучшим образом приближала массив экспериментальных точек $(\lambda_i, \langle S_{zz} \rangle_i)$. Воспользуемся методом наименьших квадратов, заключающимся в отыскании значений параметров модели $\tilde{G}$ и $\tilde{c}_3$, доставляющих минимум величине среднеквадратичного отклонения:

$$f(G, c_3) = \sum_{i=1}^{n} \left( \langle S_{zz} \rangle_i - S_{zz}(\lambda_i, G, c_3) \right)^2 \to \min. \qquad (3)$$

Используя необходимые условия экстремума функции двух переменных (3), получаем систему уравнений для определения параметров $\tilde{G}$ и $\tilde{c}_3$, решая которую, получим значения упругих констант, приведенные в таблице.

Аналитические зависимости (2), построенные для материалов 1 и 2 с учетом значений констант из таблицы, показаны на рисунках 1а и 1б красными сплошными линиями. Черными сплошными линиями показаны квазилинейные решения (2), в которых $c_3 = 0$.

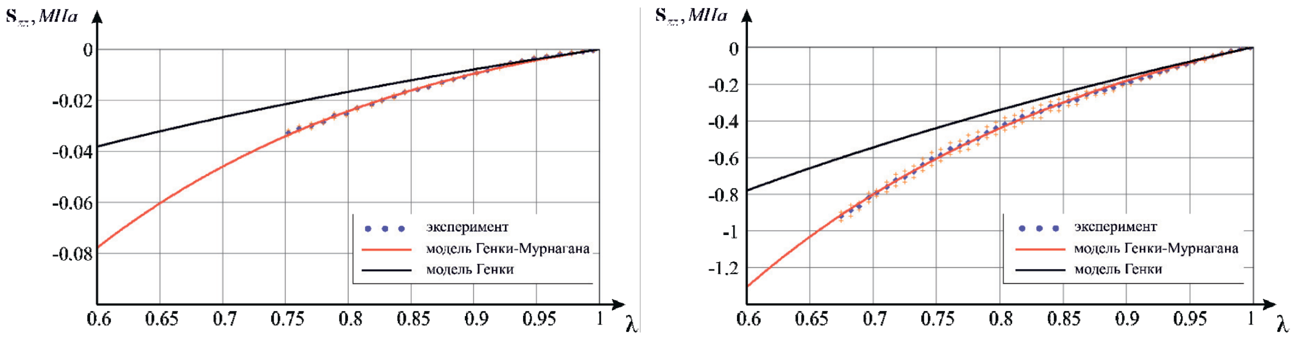



*Рис. 1. Зависимость осевых напряжений $S_{zz}$ от кратности удлинений $\lambda$ в опыте на одноосное сжатие*

Предположение об однородности напряженно-деформированного состояния является основным при обработке эксперимента на сжатие. Данное предположение хорошо согласуется с опытными данными только на начальных стадиях нагружения. С использованием разработанной программы для численного моделирования были произведены конечно-элементные расчеты [1] нагружения нелинейно-упругого материала 2 с характеристиками из таблицы. Можно заключить, что трение в меньшей степени оказывает влияние на напряженно-деформированное состояние образцов с малым значением отношения $r_0 / h_0$, чем для образцов с большим значением $r_0 / h_0$.

Влияние значения коэффициента трения $\mu$ на начальном участке нагружения невелико, поэтому можно говорить о том, что константа $G$, определяющая начальный угол наклона кривой нагружения, находится из опыта на сжатие достаточно точно. Корректное определение константы $c_3$ из опыта на одноосное сжатие возможно в следующих случаях:

– если использовать образец материала с минимально возможным соотношением $r_0 / h_0$. Следует, однако, отметить, что эксперименты по одноосному сжатию с образцами с достаточно малыми значениями $r_0 / h_0$ неосуществимы в области больших кратностей сжатия $\lambda < 0.8$ вследствие потери образцом устойчивости;

– если учитывать неоднородность напряженно-деформированного состояния, обусловленную влиянием контактного трения, в аналитическом решении. Известны варианты аналитических решений задачи о сжатии для линейно-упругих тел, в которых учитывается искривление боковой поверхности цилиндрических образцов [10]. Однако получить решение, учитывающее неоднородности, возникающие при взаимодействии оснований цилиндрического образца с опорными плоскостями, для задачи о сжатии с определяющими соотношениями в виде (1) в аналитическом виде не удается;

– если использовать построенную численную модель конечного нелинейно-упругого деформирования цилиндрических тел. В этом случае обратная задача определения параметров модели может быть решена с учетом неоднородности напряженно-деформированного состояния.

**Итерационная процедура определения упругих констант из экспериментов по неоднородному деформированию**

Для задачи неоднородного конечного упругого деформирования затруднительно получить зависимость отклика образца при нагружении в явном, содержащем параметры модели, виде. Численное решение задачи позволяет получить все характеристики напряженно-деформированного состояния с учетом заданных начальных и граничных условий для конкретного значения параметров модели. Удобно использовать в качестве расчетных значений интегральные силовые характеристики процесса, для которых осуществимы непосредственные измерения. В этом случае идентификация материала Генки-Мурнагана (1) сводится к отысканию значений параметров модели $\{G, c_3\}$, доставляющих минимум суммарному среднеквадратичному отклонению расчетных значений усилий $P_i^s$ от средних значений $\left\langle P^e \right\rangle_i$, полученных из эксперимента:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left( P_i^s - \left\langle P^e \right\rangle_i \right)^2 \to \min. \tag{4}$$

Необходимые условия минимума суммы (4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial G} &= 2\sum_{i=1}^{n} \left( P_i^s - \left\langle P^e \right\rangle_i \right) \frac{\partial P_i^s}{\partial G} = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial c_3} &= 2\sum_{i=1}^{n} \left( P_i^s - \left\langle P^e \right\rangle_i \right) \frac{\partial P_i^s}{\partial c_3} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Используя разрешающие уравнения метода конечных элементов [6] и тот факт, что константы $G$ и $c_3$ линейно входят в определяющие соотношения (1), а также предположив, что в случае задания на границе граничных условий кинематического типа величины $\dfrac{\partial P_i^s}{\partial G}$ и $\dfrac{\partial P_i^s}{\partial c_3}$ не зависят от производных поля скоростей $[V_k]$ по параметрам модели $G$ и $c_3$, получим условие минимума (4) в виде квазилинейной системы уравнений относительно неизвестных констант $G$ и $c_3$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left( \int_0^{t_1} \int_{\Sigma_c} \sum_{k=1}^{2n} [A_{mk}][V_k] d\Sigma^c d\tau - \left\langle P^e \right\rangle_i \right) \int_0^{t_1} \int_{\Sigma^c} \sum_{k=1}^{2n} [C_{mk}^G][V_k] d\Sigma^c d\tau = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \left( \int_0^{t_1} \int_{\Sigma_c} \sum_{k=1}^{2n} [A_{mk}][V_k] d\Sigma^c d\tau - \left\langle P^e \right\rangle_i \right) \int_0^{t_1} \int_{\Sigma^c} \sum_{k=1}^{2n} [C_{mk}^{c_3}][V_k] d\Sigma^c d\tau = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $[A_{mk}] = [C_{mk}^r] + [C_{mk}^G]G + [C_{mk}^{c_3}]c_3$, а $[C_{mk}^r]$, $[C_{mk}^G]$, $[C_{mk}^{c_3}]$ – слагаемые глобальной матрицы жесткости, соответствующие параметрам $G$ и $c_3$.

Система (6) может быть решена с использованием следующей итерационной процедуры:

1. выбирается начальное приближение $\{G^0, c_3^0\}$;

2. из численного решения соответствующей начально-краевой задачи для значений $\{G^0, c_3^0\}$ определяются $[C_{mk}^r]$, $[C_{mk}^G]$, $[C_{mk}^{c_3}]$ и $[V_k]$;

3. найденные величины $[C^{r}_{mk}]$, $[C^{G}_{mk}]$, $[C^{c_3}_{mk}]$ и $[V_k]$ подставляются в систему (6);

4. из решения полученной системы линейных алгебраических уравнений определяются $G^1$ и $c_3^1$, которые используются в качестве начального приближения для следующего шага.

Критерием сходимости итерационной процедуры является выполнение неравенства $|\Delta_k - \Delta_{k-1}| < \xi$, где $\xi$ – требуемая величина относительной погрешности, $k$ – номер итерации.

Сходимость построенной для определения упругих констант вычислительной процедуры была исследована на примере задачи определения упругих констант из опыта на сжатие. Использовались массивы данных, полученных из опытов по одноосному сжатию для материала 2. Сравнение полученных численно за 12 итераций значений $G^{12}$ и $c_3^{12}$ со значениями $G$ и $c_3$, полученными с использованием аналитического решения для несжимаемого материала, показало, что для материала 2 максимальное относительное отличие составляет 3.3 % для константы $G$ и 2.5 % для константы $c_3$. Это позволяет сделать вывод о применимости построенной итерационной процедуры для численного решения обратной задачи определения упругих констант слабосжимаемого материала.

## Обработка экспериментов по индентированию высокоэластичных материалов

Как было показано в работах [6, 7], трение оказывает несущественное влияние на интегральную силовую характеристику процесса индентирования гиперупругих материалов. Кроме того, при индентировании удается получить большие деформации, локализованные в очаге под индентором, при меньших значениях усилий, чем те же деформации при сжатии.

Опыты по индентированию плит, изготовленных из материалов 1 и 2, были проведены на стенде. Для уменьшения влияния свободных границ были изготовлены образцы, имеющие форму цилиндра с радиусом $r_0 = 40$ мм и высотой $h_0 = 10$ мм. Для образца из материала 1 было проведено по 3 цикла индентирования в направлении оси симметрии на стенде с использованием инденторов $R = 3$ мм и $R = 7.5$ мм. Для образца из материала 2 было проведено по 3 цикла индентирования в направлении оси симметрии на стенде с использованием только индентора $R = 3$ мм, так как для индентора $R = 7.5$ мм регистрируется превышение допустимого усилия для стенда.

В каждом опыте фиксировались абсолютные значения перемещения индентора $D$, [мм] и соответствующие этому перемещению осевые усилия $P^e$, $[H]$. Обработка полученного за $m = 3$ опытов массива экспериментальных данных для каждого образца материала сводилась к вычислению средних величин усилий $\left\langle P^e \right\rangle_i = \dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} P^e_{i,j}$, соответствующих значению перемещения $D_i$. Для массивов опытных данных требовалась процедура поиска нулевой точки, соответствующей перемещению, при котором фиксируется начало роста величины осевого усилия. Для средних величин перемещений были вычислены величины относительной осадки, равные отношению перемещения индентора к его радиусу $D_i / R$.

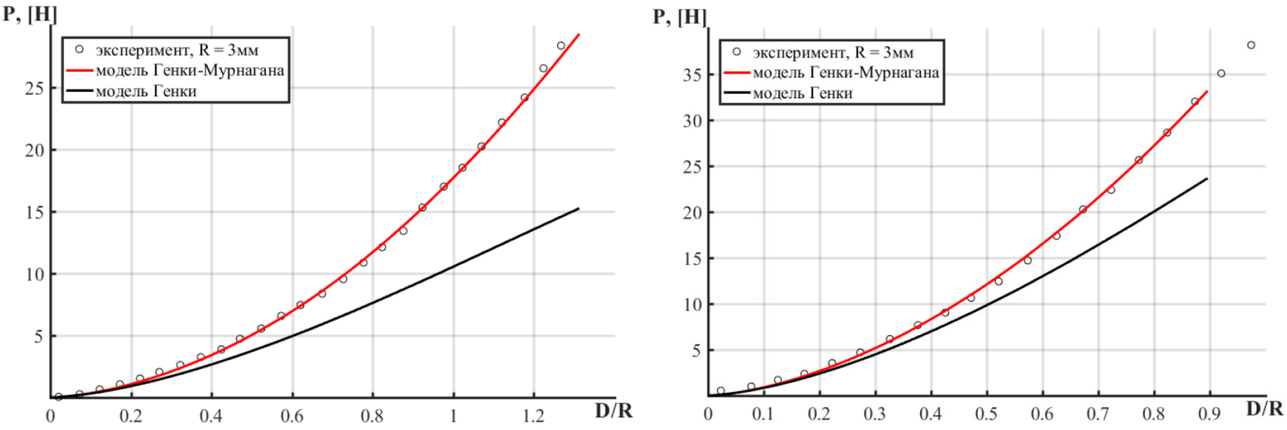
С помощью построенной итерационной процедуры решения системы (6) определены значения констант $G$ и $c_3$ материалов 1 и 2 из опытов на индентирование.

*Результаты обработки данных экспериментов*

| | Опыт на одноосное сжатие | | Опыт на индентирование $R = 3$ мм | | Опыт на индентирование $R = 7.5$ мм | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Материал | $G$, МПа | $c_3$, МПа | $G$, МПа | $c_3$, МПа | $G$, МПа | $c_3$, МПа |
| 1 | 0.25 | –2.03 | 0.23 | –2.4 | 0.24 | –2.82 |
| 2 | 0.51 | –2.69 | 0.49 | –3.34 | – | – |

Анализ результатов определения упругих констант материала 1 показал, что различия в значениях, полученных из опытов с различными радиусами инденторов, составляет менее 5 % для константы $G$ и менее 15 % для константы $c_3$. Сравнение значений констант модели для материала 1, определенных в опыте на индентирование и в опыте на сжатие, показывает, что для материала 1 различие в определении константы $G$ составляет 8 %, а для константы $c_3$ достигает 28 %. Для материала 2 различие в определении константы $G$ составляет 4 %, а для константы $c_3$ менее 20 %. Таким образом, учет неоднородности деформирования при индентировании позволяет уточнить значения констант модели. Особенно это касается константы $c_3$, отвечающей за учет отклонения свойств материала от квазилинейных.

Зависимости осевых усилий $P^e$ от величины относительной осадки $D/R$, построенные в результате численного моделирования процессов индентирования материалов приведены на рисунках 2а и 2б. Также на рисунках 2а и 2б показаны квазилинейные численные решения, полученные при расчете по соотношениям (1) с $c_3 = 0$.




а) материал 1 б) материал 2

*Рис. 2. Зависимость осевого усилия $P^e$ от величины относительной осадки $D/R$ при индентировании сферой $r = 3$ мм*

При величинах относительной осадки жесткой сферы $D/R > 0.5$ осевые усилия, вычисленные с использованием линейной модели материала Генки, занижены по сравнению с экспериментальными данными на 30–50 % для материала 1. При том же уровне относительного перемещения для образцов материала 2 наблюдается занижение значений осевых усилий по сравнению с экспериментальными данными на 25 % при использовании линейной модели.

## Выводы

На основании аппроксимации экспериментальных точек зависимостью истинных напряжений от удлинений при однородном сжатии, следующей из определяющих соотношений (1), получены значения констант $G$ и $c_3$. Использование квазилинейной модели Генки приводит к существенным отклонениям теоретической зависимости от экспериментальной при $\lambda < 0.9$. Нелинейная двухконстантная модель Генки-Мурнагана хорошо аппроксимирует экспериментальные данные на всем диапазоне измерений (до $\lambda \approx 0.7$).

Несмотря на трудности в обработке экспериментов на индентирование, заключающиеся в необходимости решения начально-краевой задачи, опыт на индентирование является одним из наименее требовательных к размерам и форме исследуемых образцов по сравнению с классическими опытами. На примере высокоэластичных материалов показана принципиальная возможность определения констант модели материала из опыта на индентирование. Показано, что численная модель Генки-Мурнагана с определяющими соотношениями (1) описывает процессы индентирования в большем диапазоне деформаций, чем физически-линейная модель Генки.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МД-1803.2019.1.

**Литература**

1. *Астапов Ю. В.* Конечные деформации упругого цилиндра при индентировании / Ю. В. Астапов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции (18–20 декабря 2017 г., Воронеж, Россия). – Воронеж: изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2017. – С. 988–992.

2. *Астапов Ю. В.* Численное и экспериментальное моделирование процесса индентирования резиновых материалов / Ю. В. Астапов, Д. В. Христич // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – № 2 (36). – С. 65–73.

3. *Маркин А. А.* Вариант соотношений нелинейной упругости / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2019. – № 6. – С. 68–75.

4. *Маркин А. А.* Термомеханика упругопластического деформирования / А. А. Маркин, М. Ю. Соколова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.

5. *Anderson M. L.* The compression of bonded rubber disks / M. L. Anderson, P. H. Mott and C. M. Roland // Rubber Chemistry and Technology. – 2004. – V. 77, No. 2. – P. 293–302.

6. *Astapov Yu. V.* Experimental determination of the parameters of the nonlinearly elastic Hencky model / Yu. V. Astapov and D. V. Khristich // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2019. – 1203. 012015.

7. *Dintwa E.* On the accuracy of the Hertz model to describe the normal contact of soft elastic spheres / E. Dintwa, E. Tifskens and H. Ramon // Granular matter. – 2008. – V. 10. – P. 209–221.

8. *Forster M. J.* Unilateral compression of rubber / M. J. Forster // Journal of Applied Physics. – 1955. – V. 26, No. 9. – P. 1104–1106.

9. *Gehrmann O.* Estimation of the compression modulus of a technical rubber via cyclic volumetric compression tests / O. Gehrmann, N. H. Krцger, P. Erren and D. Juhre // Technische mechanic. – 2017. – V. 37, No. 1. – P. 28–36.

10. *Gent A. N.* Compression, bending and shear of bonded rubber blocks / A. N. Gent, E. A. Meinecke // Polymer engineering and science. – 1970. – V. 10, No. 1. – P. 48–53.

11. Markin A. A. The physically nonlinear model of an elastic material and its identification / A. A. Markin, D. V. Kchristich, M. Yu. Sokolova and Yu. V. Astapov // International Journal of Applied Mechanics. – 2019. – V. 11, No. 7. – P. 1950064 (13 p).

12. *Suzuki, R.* Parameter identification of hyperelastic material properties of the heel pad based on analytical contact mechanics model of a spherical indentation / R. Suzuki, K. Ito, T. Lee and N. Ogihara // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2017. – V. 65. – P. 753–760.

13. *Williams, J. G.* Using the simple compression test to determine Young's modulus, Poisson's ratio and the Coulomb friction coefficient / J. G. Williams and C. Gamonpilas // International Journal of Solids and Structures. – 2008. – V. 45. – P. 4448–4459.

14. *Zhang M. G.* Spherical indentation method for determining the constitutive parameters of hyperelestic soft materials / M. G. Zhang, Y. P. Cao, G. Y. Li and X. Q. Feng // Biomech Model Mechanobiol. – 2014. – V.13. – P. 1–11.

УДК 538.913

# ОТКЛИК ДИСЛОКАЦИОННОГО СКОПЛЕНИЯ НА ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

**И. Л. Батаронов, Т. А. Надеина**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Влияние импульсного воздействие на деформацию и структурное состояние нанокристаллических металлических сплавов является актуальной задачей в связи с предъявлением высоких требований к эксплуатационным свойствам конструкционных материалов. Импульсное воздействие электрического тока на кристаллическое тело сопровождается электропластическим эффектом (ЭПЭ), проявляющийся в скачкообразной деформации при прохождении электрических импульсов. Успехи в области экспериментальных исследований ЭПЭ сопровождаются рядом трудностей построения количественной теории его описания, что связано с учетом коллективных эффектов взаимодействия носителей деформации – дислокаций. В работе получено выражение силы отрыва дислокации в застопоренном скоплении при воздействии электрического тока.

**Ключевые слова:** дислокационное скопление, динамика дислокаций, электропластический эффект, функция Грина, диссипативный кристалл, сила Пича-Келера.

## Введение

Лагранжев подход описания динамики дислокаций позволяет существенно упростить описание ряда коллективных эффектов в скоплении в процессе пластической деформации. В частности, возможно проанализировать отклик ансамбля дислокаций на различного рода воздействия, в том числе импульсного электрического при ЭПЭ.

## 1. Реакция системы застопоренных дислокаций

Для анализа динамического отклика застопоренного дислокационного скопления введем в правую часть уравнения кристалла с дислокацией [1] силу внешнего воздействия. Тогда система уравнений диссипативного кристалла примет вид:

$$\left(K_{0\alpha}-\sum_{\alpha\neq\beta}G^{0}_{\alpha\beta}\right)\xi_{\alpha}+\sum_{\alpha\neq\beta}\tilde{G}_{\alpha\beta}\xi_{\beta}=f_{\alpha}. \tag{1}$$

Здесь матрица жесткости $K_{\alpha}$ описывает статические поля упругой дисторсии, $G_{\alpha\beta}$ – Фурье образ тензорной функции Грина динамического уравнения теории упругости, $\xi_{\alpha}$ – обобщенная координата дислокации, отсчитываемая вдоль нормали к ее линии, $f_{\alpha}$ – сила внешнего воздействия.

Введем в систему (1) коэффициент динамического торможения $B_{*}$. Тогда она перепишется в следующем виде:

$$\left(K_{0\alpha}-\sum_{\beta\neq\alpha}G^{0}_{\alpha\beta}\right)\xi_{\alpha}-i\omega B_{\alpha}\xi_{\alpha}+\sum_{\beta\neq\alpha}\tilde{G}_{\alpha\beta}\xi_{\beta}=f_{\alpha}. \tag{2}$$

Рассмотрим на основе полученных уравнений реакцию застопоренной системы дислокаций. Пусть дислокация $\alpha=0$ закреплена на локальном стопоре с жесткостью $K_0$, а остальные дислокации удерживаются в равновесии вокруг нее под действием постоянного внешнего напряжения $\sigma_0$. При этом не предполагается, что дислокации лежат в водной плоскости и имеют общий вектор Бюргерса, как в плоском скоплении. Тогда в уравнениях (2) $K_{0\alpha}=K_0\delta_{\alpha\alpha}$, а сила связи застопоренных дислокаций со стопором $F_0=K_0\xi_0$. Затем, складывая все уравнения системы (2), получим соотношение:

$$F_0 = \sum_\alpha f_\alpha + i\omega \sum_\alpha B_\alpha \xi_\alpha. \quad (3)$$

В статическом пределе $\omega \to 0$ имеем $F_0 = \sum f_\alpha$. Таким образом, если на все дислокации застопоренного дислокационного скопления действует одинаковая сила $f_\alpha = f$, то сила $F_0$, действующая на застопоренную дислокацию, увеличивается в $N$ раз независимо от состава скопления. При этом следует отметить существенное различие в импульсном воздействии на дислокационное скопление, вызванном внешними упругими напряжениями $\sigma$ и импульсом электрического тока $f_j$. Зависимость силы Пича-Келера от напряжения $\sigma$ пропорциональна вектору Бюргерса $b_\alpha$, поэтому в первом случае $F_0 \sim \sigma \sum b_\alpha$, т. е. усиление действия импульса напряжений на застопоренную дислокацию происходит только в скоплении из дислокаций одного знака. В отличие от этого сила электронного увлечения пропорционально квадрату вектора Бюргерса, поэтому $N$ – кратное увеличение $f_j$ импульса на застопоренной дислокации будет происходить в любом дислокационном скоплении, благоприятно ориентированном к направлению тока. В результате импульс тока эффективно стимулирует разрядку знакоскомпенсированных скоплений, накапливаемых в процессе пластической деформации и малоэффективно открепляющихся под действием упругих напряжений.

## 2. Сила отрыва дислокации в диссипативном кристалле

Уравнение (2), разрешенное относительно силы $F_0$, позволяет получить выражение со временем релаксации скопления $\tau$:

$$F_0 = \frac{N f_j(\omega)}{1 - i\omega\tau}. \quad (3)$$

Для оценки величины времени релаксации $\tau$ проведен анализ матрицы жесткости скопления $G^0_{\alpha\beta}$, в которой диагональные элементы преобладают. Тогда $\tau = B\mu / \sigma_0^2 \sim \gamma / \omega_0^2 \sim t_u \left(\gamma / \omega_D^2\right)\left(\mu / \sigma_0\right)^2$, а $\omega_D$ – дебаевская частота.

Эффект, описываемый формулой (3), проявляется в пороговом характере электронно-пластического эффекта, заключающемся в существовании минимальной длительности тока $t_u$, начиная с которой проявляется электростимулирование пластической деформации. Действительно, рассмотрим импульс тока синусоидальной формы $f_j = f_0 \sin \pi t / t_u$. Тогда выражение для силы отрыва дислокации в скоплении имеет вид:

$$F_0(t) = \frac{N f_0}{1 + \zeta^2} \left[ \sin \pi t / t_u - \varsigma \left( \cos \pi t / t_u - e^{-t/\tau} \right) \right], \quad (4)$$

где $\zeta = \pi t / t_u$.

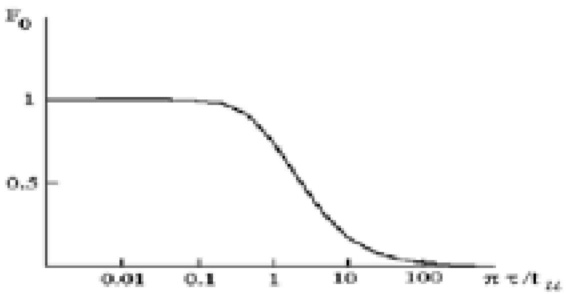



*Рис. 1. Пороговый характер максимальной силы отрыва дислокации*

Как следует из формулы (4), на интервале времени $t < \tau$ функция $F_0(t)$ практически не возрастает, т. е. действие импульса неэффективно в течение промежутка времени $\tau$.

Ввиду безынерционного характера отклика (3) максимальное значение функции (3) достигается в максимуме импульса, откуда находим наибольшее значение силы $F_0$:

$$F_{0\max} = \frac{Nf_0}{1+\zeta^2}\left[1+e^{-\pi/2\zeta}\right].$$

Эта зависимость имеет выраженный пороговый характер по $\zeta$ и при $\zeta > 1$ быстро убывает пропорционально $\zeta^{-3}$, что согласуется с экспериментом. Кроме того, рассмотренный динамический эффект запаздывания может проявляться в виде дезактивации электронно-пластического эффекта на встречном импульсе тока, если интервал между импульсами.

## Заключение

Таким образом, в рамках самосогласованной динамической теории дислокаций на основе принципа стационарного действия в лагранжевом формализме исследован динамический отклик застопоренного объемного дислокационного скопления и установлен пороговый характер зависимости силы открепления скопления от препятствия от длительности импульса воздействия.

## Литература

1. *Батаронов И. Л., Бабенко Т. А., Рощупкин А. М.* О линейном отклике дислокационного ансамбля на импульсное воздействие // Изв. АН. Сер.Физ. – 1997. – Т. 61, № 5. – С. 877–885.

УДК 534

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСЛОЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ПОКРЫТИЯ ПОЛОСЫ

**И. В. Богачев, А. О. Ватульян**

*Южный федеральный университет*

**Аннотация.** Рассмотрена задача об установившихся колебаниях полосы, состоящей из упругой неоднородной подложки и вязкоупругого функционально-градиентного покрытия, между которыми имеется зона отслоения. Для моделирования вязкоупругих свойств покрытия использована трехпараметрическая модель стандартного вязкоупругого тела, уравнения его колебаний выписаны в рамках концепции комплексных модулей на основе принципа соответствия. Для решения задачи использовано преобразование Фурье и исходная задача записана в трансформантах. Для определения функций раскрытия отслоения на основе обращения преобразования Фурье построены интегральные уравнения 1-го рода с сингулярными ядрами, для решения которых разработаны специальные методики. На основе аналогичного подхода построена схема вычисления функций смещения на верхней границе покрытия. На основе вычислительных экспериментов исследовано влияние характеристик покрытия и отслоения на функции раскрытия и амплитудно-частотные характеристики.
**Ключевые слова:** покрытия, отслоения, функционально-градиентные материалы, вязкоупругость, неоднородность, преобразование Фурье.

## Введение

Построение моделей дефектов в новых неоднородных материалах, в частности, отслоений функционально-градиентных [1] полимерных (ФГП) покрытий является актуальной современной задачей. К наиболее используемым на практике защитным и изолирующим покрытиям относятся ФГП покрытия, свойства которых зависят от координат и могут изменяться в широких диапазонах, и для которых характерны реологические свойства и имеют место процессы ползучести и релаксации. Для таких покрытий наличие отслоений является критическим фактором и при диагностике важно локализовать отслоение и также выявить причины его возникновения.

В работе представлена модель расчета колебаний неоднородной упругой полосы с отслаивающимся ФГП покрытием при наличии отслоения. Основной целью работы являлось исследование влияния исходных параметров вязкоупругого покрытия и отслоения на функции раскрытия отслоения, а также на амплитудно-частотные характеристики на верхней границе полосы.

## 1. Постановка задачи

Аналогично проведенному ранее исследованию для упругого покрытия полосы [2] будем рассматривать установившиеся колебания с частотой $\omega$ неоднородной по толщине полосы, состоящей из основного упругого слоя-подложки толщины $H$ и вязкоупругого слоя-покрытия толщины $h$, располагающегося в области $S=\{x_1, x_3 \in(-\infty,\infty), x_2\in[0,\mathrm{H}+h]\}$ в плоской постановке. Между основным слоем и слоем-покрытием имеется отслоение размерности $2a$. Нижняя грань слоя $S_1$ жестко защемлена, на части верхней границы $S_{20}$ приложена нагрузка, определяемые вектором $\mathbf{q}e^{-i\omega t}$, где $\mathbf{q}=(0,q(x_1),0)$. В рамках принятых гипотез у вектора смещений ненулевыми являются компоненты $u_1=u_1(x_1,\ x_2)e^{-i\omega t}, u_2=u_2(x_1,\ x_2)e^{-i\omega t}$.

После отделения временного множителя процесс общий вид уравнений колебаний полосы представлен ниже:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{1}$$

где $u_i$ – компоненты вектора перемещений, $\sigma_{ij}$ – компоненты тензора напряжений, $\rho$ – плотность. Для упругой подложки определяющие соотношения для изотропного материала имеют вид:

$$\sigma_{11} = \lambda^*\left(u_{1,1} + u_{2,2}\right) + 2\mu^* u_{1,1},\ \sigma_{22} = \lambda^*\left(u_{1,1} + u_{2,2}\right) + 2\mu^* u_{2,2},\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu^*\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right). \tag{2}$$

Здесь $\lambda^*$ и $\mu^*$ – функции, характеризующие параметры Ламе.

Вязкоупругие свойства слоя-покрытия в данной задаче учитываются на основе принципа соответствия в рамках концепции комплексных модулей [3]. В рассматриваемом случае установившихся колебаний характеристики материала в определяющих соотношениях теории упругости (2) заменяются на комплексные модули-функции частоты колебаний и пространственных координат. Используя модель стандартного вязкоупругого тела [3], выражения функций комплексных модулей (аналогов параметров Ламе) можно записать в виде $\lambda^*(x_2, i\omega) = \dfrac{in\omega\lambda_2(x_2) + \lambda_1(x_2)}{1 + in\omega}$, $\mu^*(x_2, i\omega) = \dfrac{in\omega\mu_2(x_2) + \mu_1(x_2)}{1 + in\omega}$, где $\lambda_1(x_2), \mu_1(x_2)$ и $\lambda_2(x_2), \mu_2(x_2)$ – длительные и мгновенные модули соответственно, $n$ – время релаксации. Далее для удобства будем использовать обобщенные обозначения $\lambda^*$ и $\mu^*$, которые для подложки $x_2 \in [0, \mathrm{H}]$ обозначают параметры Ламе в упругом материале, а для покрытия $x_2 \in [\mathrm{H}, \mathrm{H} + h]$ – комплексные модули в вязкоупругом.

Запишем граничные условия для жесткого защемления нижней границы полосы и нагружения на верхней границе:

$$u_1\big|_{x_2=0} = u_2\big|_{x_2=0} = 0,\ \sigma_{12}\big|_{x_2=H+h} = 0,\ \ \sigma_{22}\big|_{x_2=H+h} = q(x_1). \tag{3}$$

Отслоение моделируется как математический разрез и для него должны выполняться условия отсутствия напряжений в области отслоения:

$$\sigma_{12}\big|_{x_2=H} = \sigma_{22}\big|_{x_2=H} = 0,\ \mathrm{x}_1 \in [-a, a]. \tag{4}$$

Также введено предположение, что процессе колебаний берега отслоения не взаимодействуют друг с другом и свободны от напряжений.

## 2. Вспомогательные задачи в трансформантах в обезразмеренном виде

Для построения решений задачи используется преобразование Фурье по переменной $x_1$ общий вид которого представлен ниже:

$$Z(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x_1, x_2)\,\mathrm{e}^{-i\alpha x_1}\,dx_1 \tag{5}$$

Для решения основной задачи сформулируем две вспомогательные задачи (для подложки и покрытия), различающиеся граничными условиями. Далее представлен их общий вид в безразмерных переменных в канонической форме:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{12,2} = \alpha\lambda^*\tilde{\sigma}_{22}/(\lambda^* + 2\mu^*) + \left(4\alpha^2\mu^*(\lambda^* + \mu^*)/(\lambda^* + 2\mu^*) - \rho\kappa^2\right)\tilde{U}_1,\\
&\tilde{\sigma}_{22,2} = -\alpha\tilde{\sigma}_{12} - \rho\kappa^2\tilde{U}_2,\\
&\tilde{U}_{2,2} = \tilde{\sigma}_{22}/(\lambda^* + 2\mu^*) - \alpha\lambda^*\tilde{U}_1/(\lambda^* + 2\mu^*),\\
&\tilde{U}_{1,2} = \tilde{\sigma}_{12}/\mu^* + \alpha\tilde{U}_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Граничные условия для основного слоя в безразмерных параметрах:

$$\tilde{U}_1\big|_{y=0} = 0,\ \tilde{U}_2\big|_{y=0} = 0,\ \tilde{U}_1\big|_{y=1} = U_1^-,\ \tilde{U}_2\big|_{y=1} = U_2^-. \tag{7}$$

Граничные условия для слоя-покрытия в безразмерных параметрах:

$$\tilde{U}_1\Big|_{y=1} = \tilde{U}_1^+,\ \tilde{U}_2\Big|_{y=1} = \tilde{U}_2^+,\ \tilde{\sigma}_{22}\Big|_{y=1+h} = \tilde{P},\ \tilde{\sigma}_{12}\Big|_{y=1+h} = 0. \tag{8}$$

Для удобства технической реализации далее произведено отделение вещественных и мнимых частей в полученных соотношениях (6)–(8). Для решения использовался метод пристрелки.

### 3. Построение операторных соотношений

Для определения функций раскрытия $\tilde{\chi}_i^{\mathrm{Re}}(\alpha), \tilde{\chi}_i^{\mathrm{Im}}(\alpha)$, из решений вспомогательных задач определяются трансформанты функций напряжений на границе слоев для подложки и покрытия, на основе которых составляется система 8 уравнений:

$$\begin{gathered}\tilde{\chi}_i^{\mathrm{Re}}(\alpha) = \tilde{U}_i^{\mathrm{Re}-}(\alpha) - \tilde{U}_i^{\mathrm{Re}+}(\alpha),\ \tilde{\chi}_i^{\mathrm{Im}}(\alpha) = \tilde{U}_i^{\mathrm{Im}-}(\alpha) - \tilde{U}_i^{\mathrm{Im}+}(\alpha),\\ \tilde{\sigma}_{12}^{\mathrm{Re}-}(\alpha) = \tilde{\sigma}_{12}^{\mathrm{Re}+}(\alpha), \tilde{\sigma}_{12}^{\mathrm{Im}-}(\alpha) = \tilde{\sigma}_{12}^{\mathrm{Im}+}(\alpha),\\ \tilde{\sigma}_{22}^{\mathrm{Re}-}(\alpha) = \tilde{\sigma}_{22}^{\mathrm{Re}+}(\alpha), \tilde{\sigma}_{22}^{\mathrm{Im}-}(\alpha) = \tilde{\sigma}_{22}^{\mathrm{Im}+}(\alpha).\end{gathered} \tag{9}$$

В результате решения системы (9) получаются выражения для $\tilde{\sigma}_i^{\mathrm{Re}+}(\alpha)$, $\tilde{\sigma}_i^{\mathrm{Im}+}(\alpha)$ через $\tilde{\chi}_i^{\mathrm{Re}}(\alpha)$, $\tilde{\chi}_i^{\mathrm{Im}}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{i2}^{\mathrm{Re}+}(\alpha) = {} & K_{i1}^{\mathrm{Re}}(\alpha)\tilde{\chi}_1^{\mathrm{Re}}(\alpha) + K_{i2}^{\mathrm{Re}}(\alpha)\tilde{\chi}_2^{\mathrm{Re}}(\alpha) + K_{i3}^{\mathrm{Re}}(\alpha)\tilde{\chi}_1^{\mathrm{Im}}(\alpha) + K_{i4}^{\mathrm{Re}}(\alpha)\tilde{\chi}_2^{\mathrm{Im}}(\alpha) + \\ & + K_{i5}^{\mathrm{Re}}(\alpha)\tilde{P}^{\mathrm{Re}}(\alpha) + K_{i6}^{\mathrm{Re}}(\alpha)\tilde{P}^{\mathrm{Im}}(\alpha),\\ \tilde{\sigma}_{i2}^{\mathrm{Im}+}(\alpha) = {} & K_{i1}^{\mathrm{Im}}(\alpha)\tilde{\chi}_1^{\mathrm{Re}}(\alpha) + K_{i2}^{\mathrm{Im}}(\alpha)\tilde{\chi}_2^{\mathrm{Re}}(\alpha) + K_{i3}^{\mathrm{Im}}(\alpha)\tilde{\chi}_1^{\mathrm{Im}}(\alpha) + K_{i4}^{\mathrm{Im}}(\alpha)\tilde{\chi}_2^{\mathrm{Re}}(\alpha) + \\ & + K_{i5}^{\mathrm{Im}}(\alpha)\tilde{P}^{\mathrm{Re}}(\alpha) + K_{i6}^{\mathrm{Im}}(\alpha)\tilde{P}^{\mathrm{Im}}(\alpha),\end{aligned}$$

Затем проводится обратное преобразование Фурье полученных выражений функций напряжений на нижней части покрытия $\tilde{\sigma}_{i2}^{\mathrm{Re}+}(\alpha)$, $\tilde{\sigma}_{i2}^{\mathrm{Im}+}(\alpha)$. Вводя для компактности записи обозначение $(s) = \overline{\mathrm{Re}, \mathrm{Im}}$, выражения для него можно записать единообразно:

$$\sigma_{i2}^{(s)+}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_{i2}^{(s)+}(\alpha)\,\mathrm{e}^{ix\alpha}\,d\alpha,$$

Используя свойство преобразования Фурье, переводящих произведение функций в их свертку, из условий (4) в безразмерном виде

$$\sigma_{i2}^{(s)+}(\mathrm{x}) = 0,\ \mathrm{x} \in [-a, a] \tag{10}$$

строятся интегральные операторные соотношения относительно оригиналов $\chi_i^{(\mathrm{s})}(\alpha)$ вида:

$$\begin{gathered}\int_{-a}^{a}\Big[k_{i1}^{(\mathrm{s})}(\xi - x)\chi_1^{\mathrm{Re}}(\xi) + k_{i2}^{(\mathrm{s})}(\xi - x)\chi_2^{\mathrm{Re}}(\xi) + k_{i3}^{(\mathrm{s})}(\xi - x)\chi_1^{\mathrm{Im}}(\xi) + \\ + k_{i4}^{(\mathrm{s})}(\xi - x)\chi_2^{\mathrm{Im}}(\xi)\Big]d\xi = F_i^{(\mathrm{s})}(x),\\ k_{ij}^{(\mathrm{s})}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\alpha t}\,d\alpha,\\ F_i^{(\mathrm{s})}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[K_{i5}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\tilde{P}^{\mathrm{Re}}(\alpha) + K_{i6}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\tilde{P}^{\mathrm{Im}}(\alpha)\Big]\mathrm{e}^{i\alpha x}\,d\alpha.\end{gathered} \tag{11}$$

Отметим, что ядра полученных интегральных соотношений (11) являются гиперсинулярными [4], для их нахождения требуется применение специальных методов [5]. В данной работе для их решения построен специальный метод, основанный на методе коллокаций и вычислении интегралов по бесконечному промежутку в ядрах соотношений в главном значении по Коши [5].

4. Определение функции смещения на верхней границе полосы

Аналогично, пользуясь найденным из операторных уравнений (11) оригиналами функций раскрытия $\chi_i^{(s)}(\mathrm{x})$ можно определить значения функций смещения на верхней границе слоя-покрытия. Общий вид полученных для них формул представлен ниже:

$$
\begin{aligned}
U_i^{(s)}(\mathrm{x},1+\mathrm{h}) = {} & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\chi_1^{(\mathrm{Re})}(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{i1}{}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\alpha(\xi-x)}\,d\alpha d\xi + \\
& + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\chi_2^{(\mathrm{Re})}(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{i2}{}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\alpha(\xi-x)}\,d\alpha d\xi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\chi_1^{(\mathrm{Im})}(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{i3}{}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\alpha(\xi-x)}\,d\alpha d\xi + \\
& + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\chi_2^{(\mathrm{Im})}(\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{i4}{}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\alpha(\xi-x)}\,d\alpha d\xi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{i5}{}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\tilde{P}^{\mathrm{Re}}(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{i6}{}^{(\mathrm{s})}(\alpha)\tilde{P}^{\mathrm{Im}}(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,d\alpha.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Ввиду схожести выражений (12) и (11) для вычисления оригиналов функций $U_i^{(s)}(\mathrm{x},1+\mathrm{h})$ используются аналогичные принципы вычисления интегралов и вычислительные схемы, что и для функций раскрытия $\chi_i^{(s)}(\mathrm{x})$.

## 5. Вычислительные эксперименты

В данном разделе представлены наборы вычислительных экспериментов по определению влияния параметра времени релаксации, характеризующего вязкоупругие свойства покрытия, на динамические характеристики полосы: функции раскрытия и амплитудно-частотные характеристики (АЧХ). Рассматриваются два вида нагружения: симметричное и несимметричное.

Набор экспериментов 1 (симметричное нагружение). Представлены результаты расчета вещественных и мнимых частей функций раскрытия $\chi_i(\mathrm{x})$ (рис. 1) и функций АЧХ на верхней грани полосы $U_i\,(0.5,1+\mathrm{h},\kappa)$ (рис. 2) для различных значений безразмерного параметра времени релаксации: $\tau=0$ (упругий случай), $\tau=10^{-2}$, $\tau=0.1$, $\tau=1$.

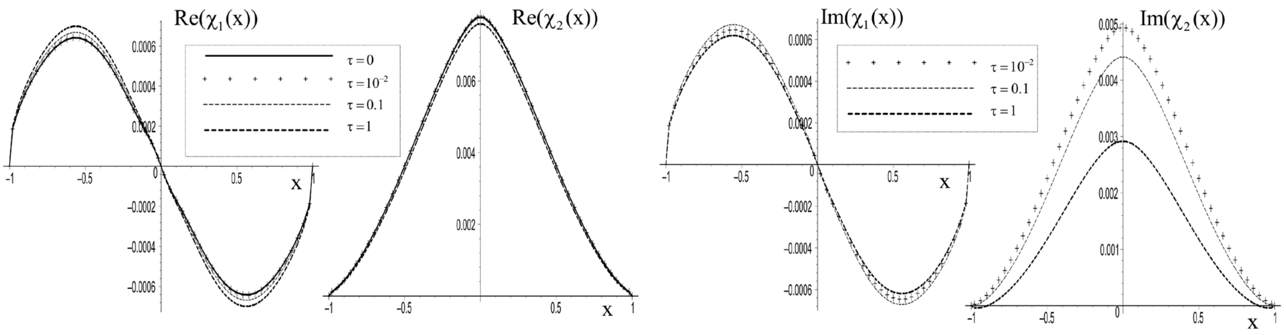



*Рис. 1. Расчет вещественных и мнимых частей $\chi_i(\mathrm{x})$ для набора экспериментов 1*

Набор экспериментов 2 (несимметричное нагружение). Представлены результаты расчета функций раскрытия $\chi_i(\mathrm{x})$ (рис. 3) для различных значений безразмерного параметра времени релаксации: $\tau=0$ (упругий случай), $\tau=10^{-2}$, $\tau=0.1$, $\tau=1$.

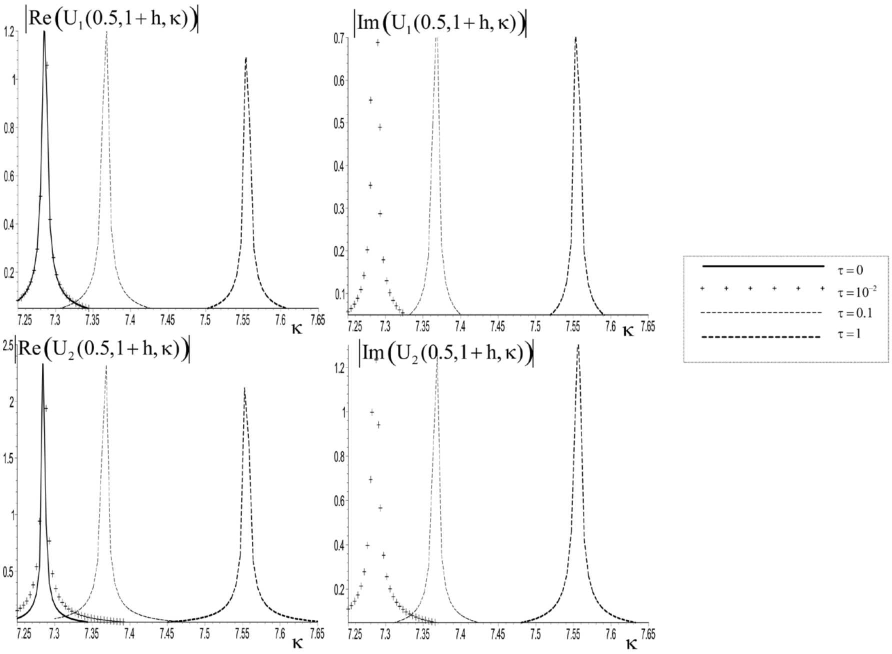



*Рис. 2. Расчет вещественных и мнимых частей АЧХ для набора экспериментов 1*

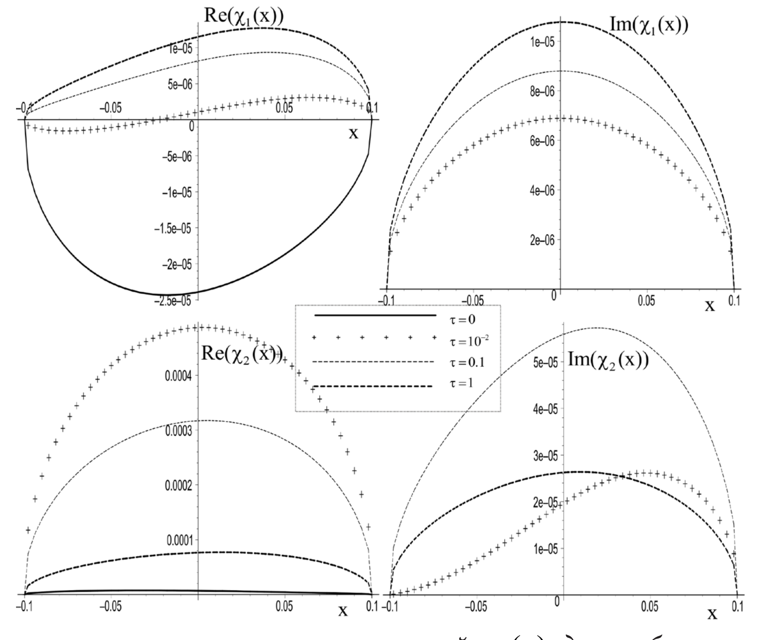



*Рис. 3. Расчет вещественных и мнимых частей $\chi_i(\mathrm{x})$ для набора экспериментов 2*

## Заключение

Полученные в при проведении вычислительных экспериментов результаты показывают, что вязкоупругие характеристики полосы оказывают диагностически значительное влияние на динамические характеристики полосы, и построенная методика их расчета может стать основой для решения обратных задач идентификации параметров как самого вязкоупругого покрытия, так и отслоения на основе анализа акустического отклика.

## Благодарности


Работа выполнена при поддержке РНФ (код проекта 18-11-00069).

**Литература**

1. *Kieback B., Neubrand A., Riedel H.* Processing techniques for functionally graded materials // Materials Science and Engineering: A. – 2003. – V. 362, – pp. 81–106.

2. *Bogachev I. V., Vatulyan A. O.* On modeling bodies with delaminating coatings taking into account the fields of prestresses // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2020, – No. 1. – pp. 5-16.

3. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М. : Мир, 1974. – 338 с.

4. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М. : Мир, 1978. – 520 с.

5. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 256 с.

УДК 539.375

# ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА С ТРЕЩИНОПОДОБНЫМ ДЕФЕКТОМ АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ

**В. Э. Богачева**

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается модель деформирования линейно упругих пластин, связанных адгезионным слоем, имеющим внутренний трещиноподобный дефект. На основе концепции слоя взаимодействия из вариационной постановки задачи о равновесии двух тел, соединенных посредством тонкого слоя, с учетом упрощающих гипотез распределения поля перемещений консолей, получена постановка задачи в виде замкнутой системы дифференциальных уравнений и граничных условий. Рассматривалось произведение приращения удельной свободной энергии и толщины адгезионного слоя (энергетическое произведение). Показано, что в случае симметрии геометрических и механических характеристик пластин относительно адгезионного слоя энергетическое произведение носит характер краевого эффекта. При этом зависимость от толщины существенна в определенном диапазоне толщин слоя.

**Ключевые слова:** адгезионный слой, композит, трещиноподобный дефект, теория Тимошенко, вариационное уравнение, напряженно-деформируемое состояние, система дифференциальных уравнений, условия сопряжения, энергетическое произведение, краевой эффект.

## Введение

Слоистые композиционные материалы активно используются в машиностроении, авиационной и ракетной технике. Поэтому для механики деформируемого твердого тела особую роль играют модели плоских слоистых композиционных материалов, в которых рассматриваются тела, объединенные в композит адгезионным слоем [2, 8].

В слоистых композитах толщина адгезионного слоя является естественным линейным параметром. Перспективной считается разработка таких моделей, которые бы учитывали как механические свойства материалов композита, так и тип разрушения в зависимости от напряженно-деформированного состояния адгезива и соединенных им тел. Кроме того, если сопрягаемые материалы контактируют не по всей длине, в модели будет присутствовать сингулярность. Аналитические решения для тел конечных размеров в этом случае получаются, как правило, в рамках упрощающих гипотез [5, 7, 9, 10].

Для моделей с введением слоя взаимодействия [1, 3–4], размер адгезионного слоя существенно меньше сопрягаемых им тел, причем в готовой продукции не является постоянной величиной. В работах [4, 6] в качестве критерия разрушения было введено понятие энергетического произведения для материального слоя в виде произведения приращения удельной свободной энергии и толщины слоя.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается композитная пластина, состоящая из двух консолей 1 и 2 длиной $l_1+a+l_2$, в общем случае с разными толщинами $h_1$ и $h_2$, сопряженными адгезионным слоем 3 толщиной $\delta_0$, размер которого мал по сравнению с толщинами тел 1 и 2. В связи с отсутствием связей на участке $a$ будем считать, что сопряжение консолей происходит только по длинам $l_1$ и $l_2$ согласно рис. 1. Левый торец пластины жестко заделан от перемещений. На правый торец консоли 1 действует растягивающая горизонтальная нагрузка с постоянной интенсивностью $P$, а на правый торец тела 2 – сжимающая. Вся остальная поверхность пластины свободна от напряжений. Процесс нагружения предполагаем квазистатическим и изотермическим.

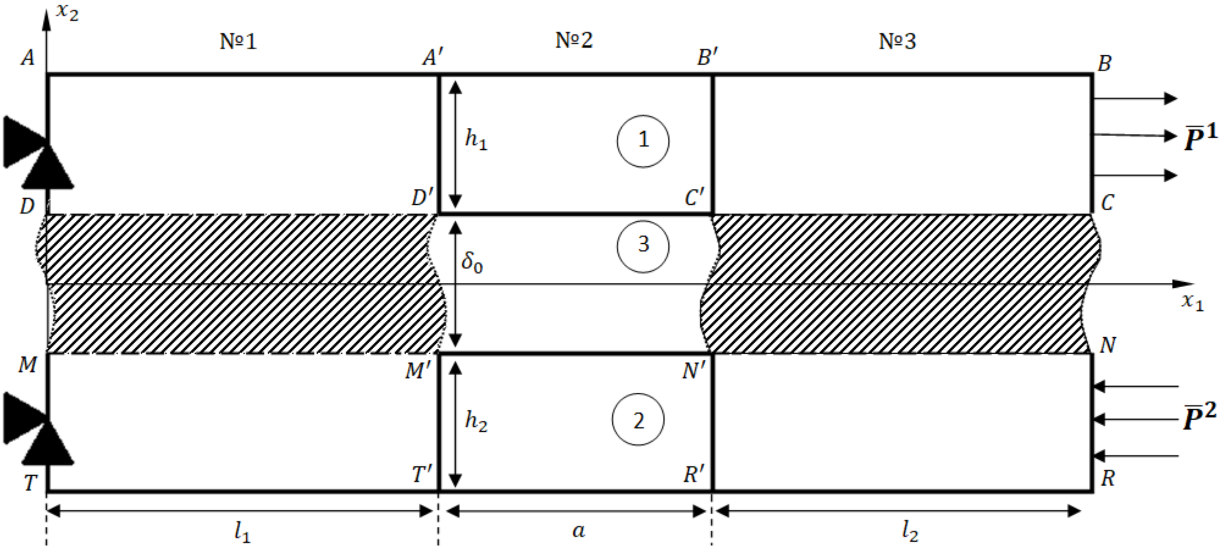



*Рис. 1. Схема нагружения композитной пластины*

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию слоя взаимодействия. Поэтому дальнейшее решение будет базироваться на работах [1, 3–4, 6].

В этом случае приходим к вариационным уравнениям равновесия для тела 1:

$$\iint_{S_1} \underset{\sim}{\sigma} \cdot \delta \underset{\sim}{\varepsilon} dS + \int_{l_1} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^+ dx_1 + \int_{l_1} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \left( \int_{l_1} \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} dx_1 + \int_{l_1} \bar{\sigma}_{21} \frac{d\delta u_2^+}{dx_1} dx_1 \right) +$$
$$+ \int_{l_2} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^+ dx_1 + \int_{l_2} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \left( \int_{l_2} \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} dx_1 + \int_{l_2} \bar{\sigma}_{21} \frac{d\delta u_2^+}{dx_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \vec{P}^1 \cdot \delta \vec{u} dl \qquad (1)$$

и для тела 2:

$$\iint_{S_2} \underset{\sim}{\sigma} \cdot \delta \underset{\sim}{\varepsilon} dS - \int_{l_1} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^- dx_1 - \int_{l_1} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 + 0.5\delta_0 \left( \int_{l_1} \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^-}{dx_1} dx_1 + \int_{l_1} \bar{\sigma}_{21} \frac{d\delta u_2^-}{dx_1} dx_1 \right) -$$
$$- \int_{l_2} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^- dx_1 - \int_{l_2} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 + 0.5\delta_0 \left( \int_{l_2} \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^-}{dx_1} dx_1 + \int_{l_2} \bar{\sigma}_{21} \frac{d\delta u_2^-}{dx_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \vec{P}^2 \cdot \delta \vec{u} dl. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) замкнем определяющими соотношениями:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1+\nu_k} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu_k}{1-2\nu_k} \varepsilon \delta_{ij} \right), \qquad (3)$$

где $k = 1,2$; $i, j = \overline{1,3}$; $E_k$ – модуль упругости для $k$- го тела; $\nu_k$ – коэффициент Пуассона для $k$-го тела; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемное расширение; $\delta_{ij}$ – символ Кронекера.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1+\nu_3} \left( \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1-2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right). \qquad (4)$$

Таким образом, решение системы сводится к определению поля перемещений $u(x_1, x_2)$ в телах 1 и 2 (см. рис. 1) при заданных граничных условиях:

на участках $AB$, $TR$, $C'D'$, $M'N'$: $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$; (5)
на участке $BC$: $\sigma_{11} = P$, $\sigma_{12} = 0$; (6)
на участке $NR$: $\sigma_{11} = -P$, $\sigma_{12} = 0$; (7)
на участке $AT$: $u_1 = u_2 = 0$. (8)

Постановка задачи (1)–(8) не содержит сингулярности в зоне обрыва связей консолей с адгезионным слоем в силу рассмотрения средних по толщине слоя характеристик напряженно-деформируемого состояния и может быть решена при помощи численных методов.

## 2. Постановка задачи с ограничениями

Для решения задачи и получения аналитического решения принимаем, что поле перемещений в телах 1 и 2 определено следующим образом:

$$\vec{u}^{(k)}(x_1,x_2) = u_1^{(k)}(x_1,x_2)\vec{e}_1 + u_2^{(k)}(x_1,x_2)\vec{e}_2,\ \ (k=1,2),\ \text{где}$$

$$u_1^{(1)}(x_1,x_2) = u_1^{+}(x_1) - \varphi_1(x_1)\left(x_2 - 0.5\delta_0\right),\ u_2^{(1)}(x_1,x_2) = u_2^{+}(x_1), \tag{9}$$

$$u_1^{(2)}(x_1,x_2) = u_1^{-}(x_1) - \varphi_2(x_1)\left(x_2 + 0.5\delta_0\right),\ u_2^{(2)}(x_1,x_2) = u_2^{-}(x_1), \tag{10}$$

где $\varphi_k$ – малые углы поворота материальных нормалей к плоскостям $x_2 = \pm 0.5\delta_0$ в телах 1, 2.

Условие жесткого закрепления по левому торцу запишем в виде:

$$\vec{u}\Big|_{x_1=0} = 0, \tag{11}$$

нагружение правого торца пластины будут определять условия:

$$\sigma_{11}^{(1)}\Big|_{x_1=l_1+a+l_2} = P,\ \sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_1=l_1+a+l_2} = 0,\ \sigma_{11}^{(2)}\Big|_{x_1=l_1+a+l_2} = -P,\ \sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_1=l_1+a+l_2} = 0. \tag{12}$$

Условие (11), с учетом (9) и (10), приводит к следующим ограничениям на компоненты векторов перемещений границ слоя и функций $\varphi_1$ и $\varphi_2$:

$$u_k^{\pm}(x_1)\Big|_{x_1=0} = 0,\quad \varphi_k(x_1)\Big|_{x_1=0} = 0,\ \ (k=1,2). \tag{13}$$

Введем обозначения обобщенных сил и обобщенных моментов для тел 1 и 2:

$$Q_{1k}^{(1)}(x_1) = \int_{0.5\delta_0}^{h_1+0.5\delta_0} \sigma_{1k}^{(1)} dx_2\ ,\ Q_{1k}^{(2)}(x_1) = \int_{-h_2-0.5\delta_0}^{-0.5\delta_0} \sigma_{1k}^{(2)} dx_2, \tag{14}$$

$$M_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{0.5\delta_0}^{h_1+0.5\delta_0} \sigma_{11}^{(1)}\left(x_2 - 0.5\delta_0\right)dx_2\ ,\ M_{11}^{(2)}(x_1) = \int_{-h_2-0.5\delta_0}^{-0.5\delta_0} \sigma_{11}^{(2)}\left(x_2 + 0.5\delta_0\right)dx_2. \tag{15}$$

Рассмотрим правую часть (1), учитывая (9) и считая $P = const$:

$$\int_{L_1} \vec{P}^1 \cdot \delta\vec{u}^{(1)} dl = P\int_{0.5\delta_0}^{h_1+0.5\delta_0} \delta u_1^{(1)} dx_2\Big|_{x_1=l_1+a+l_2} = Ph_1\delta u_1^{+}\Big|_{x_1=l_1+a+l_2} - 0.5Ph_1^2\delta\varphi_1\Big|_{x_1=l_1+a+l_2}. \tag{16}$$

Аналогично (16) получим выражение для уравнения (2):

$$\int_{L_2} \vec{P}^2 \cdot \delta\vec{u}^{(2)} dl = -Ph_2\delta u_1^{-}\Big|_{x_1=l_1+a+l_2} - 0.5Ph_2^2\delta\varphi_2\Big|_{x_1=l_1+a+l_2}. \tag{17}$$

Приходим к системе дифференциальных уравнений для участка № 2:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} = 0; \dfrac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} = 0; \dfrac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; \\ \dfrac{dQ_{11}^{(2)}}{dx_1} = 0; \dfrac{dQ_{12}^{(2)}}{dx_1} = 0; \dfrac{dM_{11}^{(2)}}{dx_1} - Q_{12}^{(2)} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Для участка №1 получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1}+0.5\delta_0\dfrac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1}=\bar{\sigma}_{21};\dfrac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1}+0.5\delta_0\dfrac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1}=\bar{\sigma}_{22};\dfrac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1}-Q_{12}^{(1)}=0; \\ \dfrac{dQ_{11}^{(2)}}{dx_1}+0.5\delta_0\dfrac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1}=-\bar{\sigma}_{21};\dfrac{dQ_{12}^{(2)}}{dx_1}+0.5\delta_0\dfrac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1}=-\bar{\sigma}_{22};\dfrac{dM_{11}^{(2)}}{dx_1}-Q_{12}^{(2)}=0. \end{cases} \tag{19}$$

Система (19) также описывает взаимодействие тел 1 и 2, связанных слоем 3, на участке № 3 – $x_1\in(l_1+a;l_1+a+l_2)$.

В силу граничных условий (12), получим:

$$\begin{aligned} &\left(Q_{11}^{(1)}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=l_1+a+l_2}=Ph_1;\left(Q_{12}^{(1)}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{21}\right)\Big|_{x_1=l_1+a+l_2}=0;M_{11}^{(1)}\Big|_{x_1=l_1+a+l_2}=0.5Ph_1^2; \\ &\left(Q_{11}^{(2)}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11}\right)\Big|_{x_1=l_1+a+l_2}=-Ph_2;\left(Q_{12}^{(2)}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{21}\right)\Big|_{x_1=l_1+a+l_2}=0;M_{11}^{(2)}\Big|_{x_1=l_1+a+l_2}=0.5Ph_2^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Системы дифференциальных уравнений (18) и (19) имеют следующие условия сопряжения в точках $x_1=l_1$ и $x_1=l_1+a$:

$$\begin{aligned} &u_k^{\pm}\Big|_{x_1=l_1-0;(l_1+a)-0}=u_k^{\pm}\Big|_{x_1=l_1+0;(l_1+a)+0};\varphi_k\Big|_{x_1=l_1-0;(l_1+a)-0}=\varphi_k\Big|_{x_1=l_1+0;(l_1+a)+0};M_{11}^{(i)}\Big|_{x_1=l_1-0;(l_1+a)-0}=M_{11}^{(i)}\Big|_{x_1=l_1+0;(l_1+a)+0}; \\ &Q_{1k}^{(i)}\Big|_{x_1=l_1-0}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{1k}\Big|_{x_1=l_1-0}=Q_{1k}^{(i)}\Big|_{x_1=l_1+0};Q_{1k}^{(i)}\Big|_{x_1=(l_1+a)-0}=Q_{1k}^{(i)}\Big|_{x_1=(l_1+a)+0}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{1k}\Big|_{x_1=(l_1+a)+0}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $k=1,2;\ i=1,2$ – номер тела.

Исходя из определяющих соотношений (3), (4), представления обобщенных сил и моментов (14), (15), условия равновесия (18), (19) сводятся к замкнутым системам дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций: $u_k^{\pm},\ \varphi_k$ с условиями сопряжения (21).

## 3. Построение частных решений

Рассмотрим решение поставленной задачи в случае плоской деформации для консолей с одинаковыми механическими свойствами $E_1=E_2=E,\ \nu_1=\nu_2=\nu$ и высотами $h_1=h_2=h$, но будем считать, что $l_1\neq l_2$.

В этом случае на неизвестные функции наложим связи:

$$u_1^+=-u_1^-,\ \varphi_1=-\varphi_2,\ u_2^+=u_2^-. \tag{22}$$

Для решения задачи достаточно рассмотреть только системы уравнений (18), (19) для тела 1 на участке $x_1\in(l_1;l_1+a)$:

$$\frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1}=0;\quad \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1}=0;\quad \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1}-Q_{12}^{(1)}=0; \tag{23}$$

и на участках $x_1\in(0;l_1)\cup(l_1+a;l_1+a+l_2)$:

$$\frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1}+0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1}=\bar{\sigma}_{21};\quad \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1}+0.5\delta_0\frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1}=\bar{\sigma}_{22};\quad \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1}-Q_{12}^{(1)}=0. \tag{24}$$

Выражения обобщенных сил (14) примут вид:

$$Q_{11}^{(1)}(x_1)=Dh\left(u_1^{+\prime}-0.5h\varphi_1'\right),\quad Q_{12}^{(1)}(x_1)=Lh\left(u_2^{+\prime}-\varphi_1\right), \tag{25}$$

где $D=E\left(1-\nu\right)/\left(1+\nu\right)/\left(1-2\nu\right),\ L=0.5E/\left(1+\nu\right)$.

Из (15) получим обобщенный момент:

$$M_{11}^{(1)}(x_1)=Dh^2\left(0.5u_1^{+\prime}-h\varphi_1'/3\right). \tag{26}$$

Найдем средние напряжения в слое:

$$\bar{\sigma}_{11}(x_1)=0, \quad \bar{\sigma}_{22}(x_1)=0, \quad \bar{\sigma}_{12}(x_1)=\bar{\sigma}_{21}(x_1)=L_1\left(2u_1^+/\delta_0+u_2^{+\prime}\right), \tag{27}$$

где $L_1=0.5E_3/\left(1+\nu_3\right)$.

Заметим, что для решения поставленной задачи нужно рассмотреть (23)–(24) при выражениях (25)–(27).

Граничные условия для системы (23)–(24) с учетом (13) и (20) запишем в виде:

$$u_1^+\big|_{x_1=0}=0; \quad u_2^+\big|_{x_1=0}=0; \quad \varphi_1\big|_{x_1=0}=0; \tag{28}$$

$$Q_{11}^{(1)}\big|_{x_1=l_1+a+l_2}=Ph; \quad Q_{12}^{(1)}\big|_{x_1=l_1+a+l_2}+0.5\delta_0\bar{\sigma}_{21}\big|_{x_1=l_1+a+l_2}=0; \quad M_{11}^{(1)}\big|_{x_1=l_1+a+l_2}=0.5Ph^2. \tag{29}$$

Ведем новые постоянные:

$S=\left(1+0.75\delta_0/h\right)/\left(1+\delta_0/h\right)$; $S_1=0.5Dh^2\left(1+\delta_0/h\right)$; $m=Dh^2\left(2S/3-0.5\right)$; $M_1=m_2/k^2$;

$m_1=2/\delta_0-1/h/\left(L/L_1+0.5\delta_0/h\right)$; $m_2=m_1L_1C_1/m/S_1$; $m_5=\left(2M_1+m_3\right)/k^2$;

$k^2=L_1\left[2hSm_1/3+1/\left(1+0.5\delta_0L_1/h/L\right)\right]/m$; $m_3=2\left(1/h/\left(L/L_1+0.5\delta_0/h\right)-Dh/S_1\right)/m$.

Решив систему (24) и учтя граничные условия (28), получим выражение угла поворота, поля горизонтальных и вертикальных перемещений для первого участка консоли $x_1\in(0;l_1)$:

$$\varphi_1=C_4\left[e^{-kx_1}-\left(M_1x_1^2/m_5+1\right)\right]+C_5\left[e^{kx_1}-\left(M_1x_1^2/m_5+1\right)\right]-C_2M_1x_1; \tag{30}$$

$$u_1^+=\frac{2hS}{3}\left(C_4\left[e^{-kx_1}-\left(\frac{M_1}{m_5}x_1^2+1\right)\right]+C_5\left[e^{kx_1}-\left(\frac{M_1}{m_5}x_1^2+1\right)\right]-C_2M_1x_1\right)+\frac{C_4+C_5}{m_5S_1}x_1^2+\frac{C_2}{S_1}x_1; \tag{31}$$

$$u_2^+=\left[\frac{1}{1+\dfrac{\delta_0L_1}{2hL}}-\frac{1}{\dfrac{L}{L_1}+\dfrac{\delta_0}{2h}}\cdot\frac{2S}{3}\right]\cdot\begin{pmatrix}-C_4\left(e^{-kx_1}-1\right)/k+C_5\left(e^{kx_1}-1\right)/k-0.5C_2M_1x_1^2-\\-C_4\left(M_1x_1^3/3/m_5+x_1\right)-C_5\left(M_1x_1^3/3/m_5+x_1\right)\end{pmatrix}-$$
$$-\left(C_4+C_5\right)\left[L_1x_1^3/3/S_1-2x_1\right]/m_5/\left(Lh+0.5\delta_0L_1\right)-0.5C_2L_1x_1^2/S_1\left(Lh+0.5\delta_0L_1\right). \tag{32}$$

Решив систему (24) по аналогии с первым участком, найдем неизвестные функции для участка №3 $x_1\in(l_1+a;l_1+a+l_2)$:

$$\varphi_1=C_{10}e^{-kx_1}+C_{11}e^{kx_1}-C_7\left(0.5M_1x_1^2+0.5m_5\right)-M_1C_8x_1-M_1C_9; \tag{33}$$

$$u_1^+=2hS\left(C_{10}e^{-kx_1}+C_{11}e^{kx_1}-C_7\left(0.5M_1x_1^2+0.5m_5\right)-M_1C_8x_1-M_1C_9\right)/3+\frac{C_7}{2S_1}x_1^2+\frac{C_8}{S_1}x_1+\frac{C_9}{S_1}; \tag{34}$$

$$u_2^+=\left[\frac{1}{1+\dfrac{\delta_0L_1}{2hL}}-\frac{1}{\dfrac{L}{L_1}+\dfrac{\delta_0}{2h}}\cdot\frac{2S}{3}\right]\cdot\begin{pmatrix}-C_{10}e^{-kx_1}/k+C_{11}e^{kx_1}/k-0.5M_1C_8x_1^2-\\-C_7\left(M_1x_1^3/6+0.5m_5x_1\right)-M_1C_9x_1\end{pmatrix}-$$
$$-\left(C_7x_1^3/6+0.5C_8x_1^2+C_9x_1\right)/h/S_1/\left(L/L_1+0.5\delta_0/h\right)+C_7x_1/\left(Lh+0.5\delta_0L_1\right)+C_{12}. \tag{35}$$

Решив систему (23), получим выражение угла поворота, поля горизонтальных и вертикальных перемещений для второго участка $x_1\in(l_1;l_1+a)$:

$$\varphi_1=-6C_{15}x_1^2/D/h^3+6\left(C_{13}-2C_{16}/h\right)x_1/D/h^2+6\left(C_{14}-2C_{17}/h\right)/D/h^2; \tag{36}$$

$$u_1^+=-3C_{15}x_1^2/D/h^2+2\left(2C_{13}-3C_{16}/h\right)x_1/D/h+2\left(2C_{14}-3C_{17}/h\right)/D/h; \tag{37}$$

$$u_2^+=-2C_{15}x_1^3/D/h^3+3\left(C_{13}-2C_{16}/h\right)x_1^2/D/h^2+6\left(C_{14}-2C_{17}/h\right)x_1/D/h^2+C_{15}x_1/L/h+C_{18}. \tag{38}$$

Чтобы найти решение задачи, необходимо определить 15 неизвестных констант. 3 уравнения можно получить из граничных условий (29), остальные 12 должны удовлетворять условиям сопряжения (21).

### 4. Результаты решений

В качестве исследуемого композита рассмотрим образец с механическими характеристиками консолей, соответствующими сплаву Д16, имеющие модуль упругости $E_1 = E_2 = E = 7.3 \cdot 10^{10}$ Па и коэффициент Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$. Механические свойства адгезионного слоя выбираем соответствующие эпоксидной смоле: $E_3 = 3.1 \cdot 10^9$ Па, $\nu_3 = 0.2$. Геометрические характеристики выбираем следующими: $h_1 = h_2 = h = 0.1$ м, $l_1 = 0.2$ м, $a = 0.05$ м, $l_2 = 0.15$ м, $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м. Распределенную внешнюю нагрузку берем единичной $P = 1$ Па.

Введем в рассмотрение энергетическое произведение:

$$2\gamma = \delta_0 \psi = 0.5 L_1 \delta_0 \left( 2u_1^+ / \delta_0 + u_2^{+\prime} \right)^2 . \tag{39}$$

где $\psi$ – приращение удельной свободной (упругой) энергии.

Построим зависимость безразмерного энергетического произведения (39) $\hat{\gamma}$ от десятичного логарифма отношения $\delta_0 / h$ при уменьшении толщины слоя $\delta_0$ (рис.2). Все значения отнесены к значению энергетического произведения в точке $x_1 = l_1 + a + l_2$ при $\delta_0 = 10^{-5}$ м.

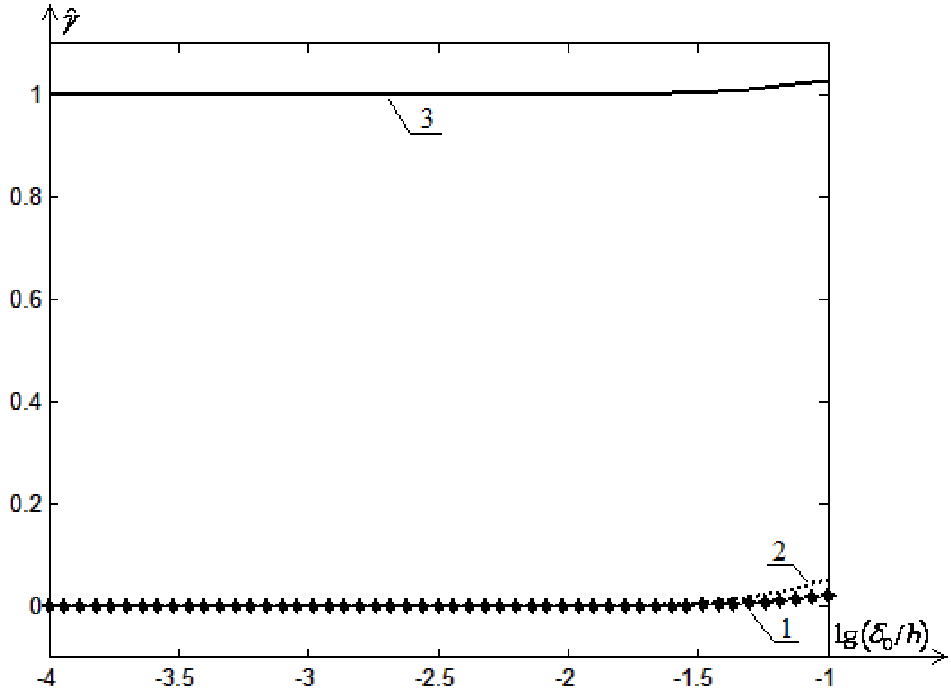



*Рис. 2. Графики энергетического произведения при уменьшении $\delta_0$*

Из графиков (рис.2) видно, что при отношении $\delta_0 / h < 10^{-2}$ значение $\hat{\gamma}$ практически не меняется. Следовательно, результаты расчетов энергетического произведения при толщинах слоя $\delta_0 < 10^{-2} h$ приводят к одним и тем же значениям. Причем только в граничной точке $x_1 = l_1 + a + l_2$ они отличны от нуля.

Посмотрим, как меняется значения безразмерного энергетического произведения на участке $x_1 \in \left( l_1 + a; l_1 + a + l_2 \right)$ при фиксированных значениях $\delta_0$ (рис.3). График № 1 показывает значения $\hat{\gamma}$ при $\delta_0 = 10^{-3}$ м, № 2 – при $\delta_0 = 10^{-4}$ м, график № 3 – при $\delta_0 = 10^{-5}$ м. Все значения отнесены к значению энергетического произведения в точке $x_1 = l_1 + a + l_2$ при $\delta_0 = 10^{-5}$ м.

Из графиков (рис. 3) видно, что при уменьшении значения $\delta_0$ происходит локализация зоны краевого эффекта. Следовательно, при $\delta_0 \to 0$ $\hat{\gamma} \neq 0$ только в точке $x_1 = l_1 + a + l_2$.

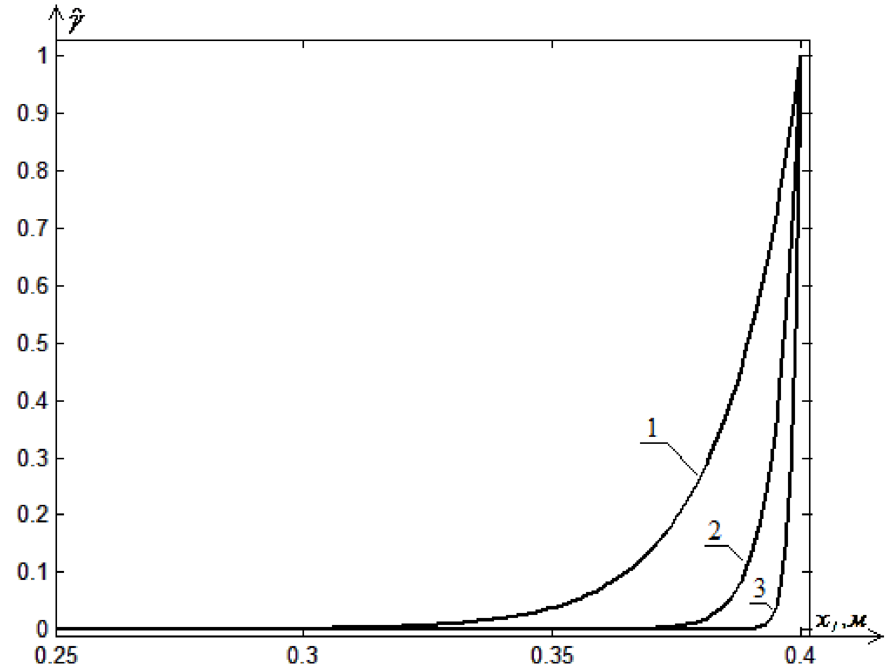


*Рис. 3. Графики энергетического произведения на участке № 3*

**Заключение**

В работе предложена математическая модель деформирования слоистого композита с тонким адгезионным слоем, содержащим внутренний трещиноподобный дефект. На основе условия равновесия, представленного в вариационном виде, получена постановка задачи, включающая в себя замкнутую систему дифференциальных уравнений с граничными условиями и условиями сопряжения решений на рассматриваемых участках интегрирования. При этом распределение полей перемещений границы адгезионного слоя аналитического решения построено на основе гипотез типа Тимошенко. Из распределения напряженно-деформированного состояния получены зависимости энергетического произведения в точках обрыва связей адгезионного слоя и на торце слоя в широком диапазоне малых значений отношений толщины слоя и сопрягаемых симметричных относительно слоя консолей. Показано, что при стремлении отношения толщины слоя и консоли к нулю энергетическое произведение принимает предельное значение отличное от нуля только в правой граничной точке. В этом случае область адгезионного слоя, имеющая существенное значение энергетического произведения, имеет характер краевого эффекта и зависит от толщины слоя.

**Литература**


1. *Богачева В. Э.* Постановка задачи деформирования слоистого композита с трещиноподобным дефектом адгезионного слоя / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, М. О. Глаголева // Вестник Тульского государственного университета. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – 2020. – № 1. – С. 15–20.

2. *Болотин В. В.* Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – Москва : Машиностроение, 1980. – 375 с.

3. *Глаголев В. В.* Биметаллическая пластина в однородном температурном поле / В. В. Глаголев, А. А. Маркин, С. В. Пашинов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т. 23, № 3. – С. 331–343.

4. *Глаголев В. В.* Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, О. В. Инченко, А. А. Маркин // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 64. – С. 63–77.

5. *Тимошенко С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва : Физматгиз, 1963. – 636 с.

6. *Glagolev V. V.* Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter / V. V. Glagolev, A. A. Markin // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149.

7. *Joseph R. P.* Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory / R. P. Joseph, B. L. Wang, B. Samali // Engineering Fracture Mechanics. – 2017. – Vol. 169. – P. 309–320.

8. *Lurie S.* Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions / S. Lurie, D. Volkov-Bogorodskii, N. Tuchkova // Acta Mechanica. – 2015. – № 3. – P. 1–12.

9. *Mantari J. L.* A simple and accurate generalized shear deformation theory for beams / J. L. Mantari, J. Yarasca // Composite Structures. – 2015. – Vol. 134. – P. 593-601.

10. *Suo Z.* Interface crack between two elastic layers / Z. Suo, J.W. Hutchinson // International Journal of Fracture. – 1990. – Vol. 43, № 1. – P. 1–18.

УДК 539.3

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ «ПОКРЫТИЕ-ПОДЛОЖКА»

**А. О. Ватульян[1], С. А. Нестеров[2]**

*[1]Южный федеральный университет*
*[2]Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН*

**Аннотация.** Приведена постановка задачи градиентной термоупругости для составного прямоугольника на основе прикладной однопараметрической модели. После нахождения распределение температуры на основе решения классической задачи теплопроводности определены перемещения в виде суммы классического решения и дополнительных градиентных слагаемых. Решения классической задачи термоупругости основано на методе разделения переменных. Градиентные слагаемые для перемещений находят приближенно на основе метода Вишика – Люстерника. Проведены вычисления перемещений, напряжений Коши и моментных напряжений. Исследована зависимость скачка напряжений Коши от соотношения физических характеристик материалов покрытия и подложки, толщины покрытия и масштабного параметра. Проведен анализ полученных результатов.
**Ключевые слова:** прямоугольник, градиентная модель термоупругости, напряжения Коши, моментные напряжения, пограничный слой, метод Вишика – Люстерника, покрытие, скачок напряжений, масштабные эффекты, метод разделение переменных.

## Введение

Интерес к изучению напряженно-деформированного состояния (НДС) составных структур малых размеров связан с перспективами развития микроэлектроники, наноструктур, аэрокосмических систем, высокочувствительной аппаратуры. В таких структурах, в частности в покрытиях, размеры исследуемых элементов могут становиться соизмеримыми с характерными размерами микроструктуры материала.

В настоящее время для моделирования эффектов, наблюдаемых в сверхтонких структурах, широко применяются градиентные теории упругости, которые в определяющие уравнения включают параметры размерности длины. Градиентная теория упругости является обобщением классической теории упругости и была сформулирована в 60-е годы прошлого века в работах Тупина [1] и Миндлина [2]. Начиная с 70-х годов прошлого века градиентные теории стали применять и для решения задач термоупругости [3]. Отметим, что практическое использование модели Миндлина наталкивается на вопрос об идентификации пяти дополнительных градиентных параметров. Для преодоления этой трудности Айфантис в [4] и Лурье в [5] предложили однопараметрические градиентные модели деформации.

В дальнейшем градиентные модели стали применяться и для получения уточнённой оценки НДС слоистых упругих и термоупругих тел [5, 6]. Так, в [5], полученные на основе вариационного принципа уравнения градиентной термоупругости для модели Лурье применяются для исследования НДС тонкослойных композитных структур в предположении об одномерности задачи. В работе [6] исследуется НДС тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для полосы. В тоже время плоская задача градиентной теории термоупругости для составных прямоугольных областей остается неисследованной. В настоящей работе исследуется НДС прямоугольника с покрытием при тепловом нагружении на основе прикладной однопараметрической модели Айфантиса.

## 1. Определяющие соотношения градиентной механики Айфантиса

В случае линейного изотропного материала выражение для плотности энергии деформации для однопараметрической модели Айфантиса имеет вид [4]:

$$w = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + l^2(\frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii,k}\varepsilon_{jj,k} + \mu\varepsilon_{ij,k}\varepsilon_{ij,k}), \tag{1}$$

где $l$ – градиентный параметр, имеющий размерность длины. Вводятся определяющие соотношения для компонент тензора напряжений Коши $\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$, тензора моментных напряжений $m_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = l^2\tau_{ij,k}$, тензора полных напряжений $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k} = (1 - l^2\nabla^2)\tau_{ij}$. В случае постановки задачи несвязанной термоупругости в уравнении (1) сделаем замену $\varepsilon_{ij}$ на $\varepsilon_{ij} - \gamma T\delta_{ij}$, где $\gamma$ – коэффициент температурных напряжений, $\delta_{ij}$ – символ Кронекера.

Математическая постановка задачи градиентной термоупругости состоит из уравнений равновесия, записанных в полных напряжениях

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{2}$$

уравнения теплопроводности

$$\left(k_{ij}T_{,i}\right)_{,j} = 0, \tag{3}$$

естественных статических граничных условий

$$m_{ijk,k}n_j n_k = r_i, \; \tau_{ij}n_j - m_{ijk,k}n_j - (m_{ijk,k}n_k)_{,j} + (m_{ijk,k}n_j n_k)_{,s}n_s = t_i, \tag{4}$$

кинематических граничных условий

$$u_i = \overline{u}_i, \; u_{i,l}n_l = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial n}, \tag{5}$$

и тепловых граничных условий

$$T|_{S_T} = 0, \; q|_{S_q} = q_0. \tag{6}$$

Здесь $t_i$, $r_i$ – векторы заданных сил на поверхности тела, $n_i$ – компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

## 2. Постановка задачи градиентной термоупругости для системы «покрытие-подложка»

Рассмотрим термоупругое равновесие прямоугольниика $S = [-l, l] \times [0, h]$ с покрытием на границе $x_3 = h_1$ в рамках плоской деформации ($u_1 = u_1(x_1, x_3)$, $u_2 = 0$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)$, $T = T(x_1, x_3)$). Нижняя граница прямоугольника $x_3 = 0$ жестко защемлена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней границе $x_3 = h$, свободной от напряжений, действует тепловой потока $q(x_1, h) = q_0 f(x_1)$, $x_1 \in [-l, l]$. Боковые стороны прямоугольника $x_1 = \pm l$ теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. Ограничившись в нашем исследовании градиентными эффектами по вертикальной координате $x_3$, в качестве неклассических граничных условий положим $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, 0) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, 0)$, $r_1(x_1, h) = r_3(x_1, h) = 0$. Кроме того, на месте стыка должны выполняться условия сопряжения по температуре, тепловому потоку, перемещениям, градиентам перемещений, компонентам векторов напряжений $r_1 = m_{133} = l^2\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}$, $r_3 = m_{333} = l^2\frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}$, $t_1 = \tau_{13} - l^2\frac{\partial^2 \tau_{13}}{\partial x_1^2} - l^2\frac{\partial^2 \tau_{13}}{\partial x_3^2} - l^2\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x_1 \partial x_3}$, $t_3 = \tau_{33} - l^2\frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial x_1^2} - l^2\frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial x_3^2} - l^2\frac{\partial^2 \tau_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}$. В дальнейшем в формулах обозначим индексами «1» и «2» функции и параметры, соответствующие подложке и покрытию соответственно.

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{13}^{(i)}}{\partial x_3}=0\,,\ \frac{\partial\sigma_{31}^{(i)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{33}^{(i)}}{\partial x_3}=0\,,\ i=1,2\,, \tag{7}$$

$$\sigma_{kl}^{(i)}=(1-l^2\nabla^2)\tau_{kl}^{(i)},\ i=1,2\,, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\tau_{11}^{(i)}=(\lambda_i+2\mu_i)\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1}+\lambda_i\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_3}-\gamma_iT_i,\ \ \tau_{13}^{(i)}=\mu_i(\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_1}),\\ \tau_{33}^{(i)}=(\lambda_i+2\mu_i)\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_3}+\lambda_i\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1}-\gamma_iT_i,\ \ i=1,2,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2T_i}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2T_i}{\partial x_3^2}=0,\quad i=1,2\,, \tag{10}$$

$$T_1(x_1,0)=0,\ \ q(x_1,h)=q_0f(x_1)\,,\ x_1\in[-l,l]\,, \tag{11}$$

$$T_1(x_1,h_1)=T_2(x_1,h_1),\ \ k_1\frac{\partial T_1}{\partial y}(x_1,h_1)=k_2\frac{\partial T_2}{\partial y}(x_1,h_1),\quad x_1\in[-l,l]\,, \tag{12}$$

$$u_1^{(1)}(x_1,0)=u_3^{(1)}(x_1,0)=\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3}(x_1,0)=\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3}(x_1,0)=0,\quad x_1\in[-l,l]\,, \tag{13}$$

$$t_1^{(2)}(x_1,h)=t_3^{(2)}(x_1,h)=r_1^{(2)}(x_1,h)=r_3^{(2)}(x_1,h)=0,\ x_1\in[-l,l], \tag{14}$$

$$\begin{gathered}u_1^{(1)}(x_1,h_1)=u_1^{(2)}(x_1,h_1),\ u_3^{(1)}(x_1,h_1)=u_3^{(2)}(x_1,h_1),\ \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3}(x_1,h_1)=\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_3}(x_1,h_1),\\ \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3}(x_1,h_1)=\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_3}(x_1,h_1),\ t_1^{(1)}(x_1,h_1)=t_1(x_1,h_1),\ t_3^{(1)}(x_1,h_1)=t_3^{(2)}(x_1,h_1),\ r_1^{(1)}(x_1,h_1)=r_1^{(2)}(x_1,h_1),\\ r_3^{(1)}(x_1,h_1)=r_3^{(2)}(x_1,h_1)\,,\ x_1\in[-l,l]\,,\end{gathered} \tag{15}$$

$$u_1^{(i)}(\pm l,x_3)=\tau_{31}^{(i)}(\pm l,x_3)=\frac{\partial T_i}{\partial x_1}(\pm l,x_3)=0\,,\ i=1,2\,,\ x_3\in[0,h]\,. \tag{16}$$

Обезразмерим задачу (7)–(16) согласно формулам: $\xi_i=\frac{x_i}{h},\ U_s^{(i)}=\frac{u_s^{(i)}}{h},\ \Omega_{kl}^{(i)}=\frac{\sigma_{kl}^{(i)}}{\mu_0},\ S_{kl}^{(i)}=\frac{\tau_{kl}^{(i)}}{\mu_0},$ $M_{skl}^{(i)}=\frac{m_{skl}^{(i)}}{\mu_0h},\ W_i=\frac{k_0T_i}{q_0h},\ Q=\frac{q}{q_0},\ \bar{k}_i=\frac{k_i}{k_0},\ \bar{\lambda}_i=\frac{\lambda_i}{\mu_0},\ \bar{\mu}_i=\frac{\mu_i}{\mu_0},\ \bar{\gamma}_i=\frac{\gamma_i}{\gamma_0},\ \bar{h}_i=\frac{h_i}{h},\ \beta=\frac{q_0h\gamma_0}{k_0\mu_0},\ \alpha=\frac{l}{h},\ \eta=\frac{l}{h},$ $k_0=\max\limits_{x_3\in[0,h]}k(x_3),\ \mu_0=\max\limits_{x_3\in[0,h]}\mu(x_3),\gamma_0=\max\limits_{x_3\in[0,h]}\gamma(x_3),\ i=1,2.$

### 3. Решение задачи градиентной термоупругости для прямоугольника

Решение задачи термоупругости начинается с нахождения распределение температуры на основе решения классической задачи теплопроводности в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2W_i}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2W_i}{\partial\xi_3^2}=0\,,\ i=1,2\,, \tag{17}$$

$$W_1(\xi_1,0)=0\,,-\bar{k}_2\frac{\partial W_2}{\partial\xi_3}(\xi_1,1)=f(\xi_1)\,,\ \xi_1\in[-\eta,\eta]\,,$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial\xi_1}(\pm\eta,\xi_3)=0\,,\ \xi_3\in[0,1]\,, \tag{18}$$

$$W_1(\xi_1,\bar{h}_1)=W_2(\xi_1,\bar{h}_1),\ \bar{k}_1\frac{\partial W_1}{\partial\xi_3}(\xi_1,\bar{h}_1)=\bar{k}_2\frac{\partial W_2}{\partial\xi_3}(\xi_1,\bar{h}_1)\,,\ \xi_1\in[-\eta,\eta]\,. \tag{19}$$

Решения задачи (17)–(19) основано на методе разделения переменных. Для этого разлагаем температуру в ряд $W_i = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{in}(\xi_3)\cos(\nu_n\xi_1),\ \nu_n = \dfrac{n\pi}{\eta},\ i=1,2.$ В этом случае тепловые граничные условия на боковых сторонах прямоугольника выполняются тождественно. Будем предполагать, что функция $f(\xi_1)$ – четная, тогда закон изменения тепловой нагрузки допускает представление $f(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos(\nu_n\xi_1)$, где коэффициенты $g_n = \dfrac{1}{\eta_0}\int_{-\eta_0}^{\eta_0} f(\xi_1)\cos(\nu_n\xi_1)d\xi_1.$

Функции $\theta_{in}(\xi_3),\ i=1,2$ находят из решения следующих краевых задач:

$$-\nu_n^2\theta_{in} + \theta''_{in} = 0,\ i=1,2, \tag{20}$$

$$\theta_{1n}(0) = 0, -\bar{k}_2\theta_{2n}(1) = g_n, \tag{21}$$

$$\theta_{1n}(\bar{h}_1) = \theta_{2n}(\bar{h}_1),\ \bar{k}_1\theta'_{1n}(\bar{h}_1) = \bar{k}_2\theta'_{2n}(\bar{h}_1). \tag{22}$$

После нахождения распределения температуры приступают к нахождению безразмерных перемещений покрытия и подложки $U_s^{(i)},\ s=1,3,\ i=1,2.$ Разложим перемещения $\bar{U}_s^{(i)}$ в ряды по формулам $U_1^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}^{(i)}(\xi_3)\sin(\nu_n\xi_1),\ U_3^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{3n}^{(i)}(\xi_3)\cos(\nu_n\xi_1),\ i=1,2.$ Тогда граничные условия на боковых сторонах прямоугольника выполняются тождественно.

С другой стороны перемещения $U_s^{(i)},\ s=1,3,\ i=1,2$ согласно Айфантису [4] можно представить в виде суммы слагаемых классического решения термоупругости и градиентных слагаемых, т. е. $U_s^{(i)} = U_s^{(i)клас} + U_s^{(i)град},\ i=1,2.$

Решение задачи классической термоупругости состоит из двух этапов. На первом этапе, при известном температурном поле находят частное решение для термоупругого потенциала $\varphi_i$, $i=1,2$ для покрытия и подложки. Разложим потенциалы $\varphi_i$, $i=1,2$ в ряды $\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_{in}(\xi_3)\cos(\nu_n\xi_1)$, $i=1,2.$ Функции $\psi_{in}(\xi_3),\ i=1,2$ для $n=0,1,2,...$ методом вариации произвольных постоянных находят из решения дифференциальных уравнений

$$\psi''_{in} - \nu_n^2\psi_{in} = \frac{\bar{\gamma}_i}{\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i}\theta_{in},\ i=1,2\,. \tag{23}$$

Затем вычисляют, отвечающие термоупругим потенциалам, гармоники перемещений по формулам $\bar{u}_{1m}^{(i)} = \nu_n\psi_{in},\ \bar{u}_{3n}^{(i)} = \psi'_{in},\ i=1,2,$ а затем сами перемещения, деформации и напряжения Коши, которые вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям.

На втором этапе, на решения, найденные на первом этапе $\bar{U}_s^{(i)клас}$, накладываются решения соответствующей краевой задачи изотермической теории упругости $\bar{\bar{U}}_s^{(i)},\ s=1,3,\ i=1,2.$ После разложения ряд гармоники $\bar{\bar{u}}_{1n}^{(i)}(\xi_3),\ \bar{\bar{u}}_{3n}^{(i)}(\xi_3),\ i=1,2$ для $n=0,1,2,...$ находят из решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\bar{\mu}_i\bar{\bar{u}}''^{(i)}_{1n} - \left(\bar{\lambda}_i + 2\hat{\mu}_i\right)\nu_n^2\bar{\bar{u}}_{1n}^{(i)} + \nu_n(\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i)\bar{\bar{u}}'^{(i)}_{3n} = 0,\ i=1,2, \tag{24}$$

$$\nu_n(\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i)\bar{\bar{u}}'^{(i)}_{1n} + (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)\bar{\bar{u}}''^{(i)}_{3n} - \bar{\mu}_{ii}\nu_n^2\bar{\bar{u}}_{3n}^{(i)} = 0,\ i=1,2, \tag{25}$$

Неизвестные константы интегрирования находят путем удовлетворения следующих механических граничных условий и условий сопряжения, записанных для суммы гармоник $u_{sn}^{(i)клас}(\xi_3) = \bar{u}_{sn}^{(i)}(\xi_3) + \bar{\bar{u}}_{sn}^{(i)}(\xi_3),\ s=1,3,\ i=1,2$:

$$u_{1n}^{(1)клас}(0) = u_{3n}^{(1)клас}(0) = 0,\ S_{13n}^{(2)клас}(1) = S_{33n}^{(2)клас}(1) = 0, \tag{26}$$

$$u_{1n}^{(1)клас}(\bar{h}_1) = u_{1n}^{(2)клас}(\bar{h}_1),\ u_{3n}^{(1)клас}(\bar{h}_1) = u_{3n}^{(2)клас}(\bar{h}_1),$$

$$S_{13n}^{(1)клас}(\bar{h}_1) = S_{13n}^{(2)клас}(\bar{h}_1),\ S_{33}^{(1)n}(\bar{h}_1) = S_{33}^{(2)n}(\bar{h}_1). \tag{27}$$

Гармоники градиентных слагаемых $\hat{u}_{1n}^{(i)},\ \hat{u}_{3n}^{(i)},\ i=1,2$ находят приближенно на основе метода Вишика – Люстерника [7]. Для этого сначала определяется локализация пограничных слоев. Для подложки пограничные слои локализованы в окрестностях линии закрепления $\xi_3 = 0$ и линии сопряжения с покрытием $\xi_3 = \bar{h}_1$. Для покрытия пограничные слои находятся в окрестностях $\xi_3=\overline{h}_1$ и $\xi_3=1$. Введем в рассмотрение растягивающие координаты в окрестности границ $\eta_1=\dfrac{\xi_3}{\alpha}$, $\eta_2=\dfrac{\xi_3-\overline{h}_1}{\alpha}$, $\eta_3=\dfrac{\overline{h}_1-\xi_3}{\alpha}$, $\eta_4=\dfrac{\xi_3-1}{\alpha}$. Тогда гармоники можно представить в виде:

$$\widehat{u}_{1n}^{(1)}=\widehat{g}_{1n}^{(1)}(\frac{\xi_3}{\alpha})+\widehat{g}_{2n}^{(1)}(\frac{\xi_3-\overline{h}_1}{\alpha}),\qquad \widehat{u}_{3n}^{(1)}=\widehat{g}_{3n}^{(1)}(\frac{\xi_3}{\alpha})+\widehat{g}_{4n}^{(1)}(\frac{\xi_3-\overline{h}_1}{\alpha}),$$

$$\widehat{u}_{1n}^{(2)}=\widehat{g}_{5n}^{(2)}(\frac{\overline{h}_1-\xi_3}{\alpha})+\widehat{g}_{6n}^{(2)}(\frac{\xi_3-1}{\alpha}),\ \widehat{u}_{3n}^{(2)}=\widehat{g}_{7n}^{(2)}(\frac{\overline{h}_1-\xi_3}{\alpha})+\widehat{g}_{8n}^{(2)}(\frac{\xi_3-1}{\alpha}).$$

Рассмотрим процедуру нахождения погранслойных решений на примере первой пары $\widehat{g}_{1n}^{(1)}(\dfrac{\xi_3}{\alpha})$, $\widehat{g}_{3n}^{(1)}(\dfrac{\xi_3}{\alpha})$. На первом этапе, как и для классического решения, определяют гармоники термоупругого потенциала перемещений как частные решения неоднородных уравнений:

$$\vartheta_{in}^{IV}-\left(1+2\alpha^2\nu_n^2\right)\vartheta_{in}''+\alpha^2\nu_n^2(1+\alpha^2\nu_n^2)\vartheta_{in}=\frac{\overline{\gamma}_i}{\overline{\lambda}_i+2\overline{\mu}_i}(1+\alpha^2\nu_n^2)\theta_{in},\ i=1,2. \tag{28}$$

На втором этапе, на решения для гармоник $\overline{g}_{1n}^{(1)}(\dfrac{\xi_3}{\alpha})$, $\overline{g}_{3n}^{(1)}(\dfrac{\xi_3}{\alpha})$, найденные на первом этапе, накладываются решения соответствующей системы дифференциальных уравнений для гармоник $\overline{\overline{g}}_{1n}^{(1)}(\dfrac{\xi_3}{\alpha})$, $\overline{\overline{g}}_{3n}^{(1)}(\dfrac{\xi_3}{\alpha})$:

$$-\overline{\mu}_1\overline{\overline{g}}_{1n}^{IV}+\left(\overline{\mu}_1(1+\alpha^2\nu_n^2)+(\overline{\lambda}_1+2\overline{\mu}_1)\alpha^2\nu_n^2\right)\overline{\overline{g}}_{1n}'-\nu_n^2\left(\overline{\lambda}_1+2\overline{\mu}_1\right)\alpha^2(1+\alpha^2\nu_n^2)g_{1n}+$$
$$-\nu_n\alpha\left((\overline{\lambda}_1+\overline{\mu}_1)\overline{\overline{g}}_{3n}'''-\left((\overline{\lambda}_1+\overline{\mu}_1)+\alpha^2\nu_n^2(\overline{\lambda}_1-\overline{\mu}_1)\right)\overline{\overline{g}}_{3n}'\right)=0, \tag{29}$$

$$-\nu_n\alpha\left((\overline{\lambda}_1+\overline{\mu}_1)\overline{\overline{g}}_{1n}'''-\left((\overline{\lambda}_1+\overline{\mu}_1)+\alpha^2\nu_n^2(\overline{\lambda}_1-\overline{\mu}_1)\right)\overline{\overline{g}}_{1n}'\right)-(\overline{\lambda}_1+2\overline{\mu}_1)\overline{\overline{g}}_{3n}^{IV}+$$
$$+\left((\overline{\lambda}_1+2\overline{\mu}_1)(1+\alpha^2\nu_n^2)+\overline{\mu}\alpha^2\nu_n^2\right)\overline{\overline{g}}_{3n}''-\overline{\mu}_1\alpha^2\nu_n^2(1+\alpha^2\nu_n^2)\overline{\overline{g}}_{3n}=0. \tag{30}$$

Решаем однородную систему (28), (29) на основе операторного подхода, как в [6], полагая:

$$L_{11}\overline{\overline{g}}_{1n}+L_{12}\overline{\overline{g}}_{3n}=0, \tag{31}$$

$$L_{21}\overline{\overline{g}}_{1n}+L_{22}\overline{\overline{g}}_{3n}=0. \tag{32}$$

Вводятся гармоники потенциала перемещений $\omega_n$, $n=0,1,2,...$ так, что $\overline{\overline{g}}_{1n}=L_{12}\omega_n$, $\overline{\overline{g}}_{3n}=-L_{11}\omega_n$. Тогда уравнение (30) удовлетворяется автоматически, а (31) сводится к уравнению восьмого порядка относительно введенного потенциала $(L_{12}^2-L_{11}L_{22})\omega_n=0$.

Выражение для гармоник потенциала примет вид:

$$\omega_n=C_1e^{\alpha\nu_n\eta_1}+C_2\eta_1e^{\alpha\nu_n\eta_1}+C_3e^{-\alpha\nu_n\eta_1}+C_4\eta_1e^{-\alpha\nu_n\eta_1}+$$
$$+C_5e^{\sqrt{1+\alpha^2\nu_n^2}\eta_1}+C_6\eta_1e^{\sqrt{1+\alpha^2\nu_n^2}\eta_1}+C_7e^{-\sqrt{1+\alpha^2\nu_n^2}\eta_1}+C_8\eta_1e^{-\sqrt{1+\alpha^2\nu_n^2}\eta_1}. \tag{33}$$

Составляются функции $\widehat{g}_{1n}^{(1)}=\overline{g}_{1n}^{(1)}+\overline{\overline{g}}_{1n}^{(1)}$, $\widehat{g}_{3n}^{(1)}=\overline{g}_{3n}^{(1)}+\overline{\overline{g}}_{3n}^{(1)}$. Каждая из гармоник $\widehat{g}_{1n}^{(1)}$, $\widehat{g}_{3n}^{(1)}$ выражается через $\omega_n$ и поэтому содержит 8 неизвестных констант. При удовлетворении условия ограниченности решений на бесконечности остаются ненулевыми только 4 константы. Оставшиеся неизвестные константы интегрирования определяются путем удовлетворения 4 граничных условий при $\eta_1=0$:

$$u_{1n}^{(1)}(0)=u_{1n}^{(1)клас}(0)+\widehat{g}_{1n}^{(1)}(0)=0,\ u_{3n}^{(1)}(0)=u_{3n}^{(1)клас}(0)+\widehat{g}_{3n}^{(1)}(0)=0, \tag{34}$$

$$u_{1n}'^{(1)}(0)=u_{1n}'^{(1)клас}(0)+\widehat{g}_{1n}'^{(1)}(0)=0,\ u_{3n}'^{(1)}(0)=u_{3n}'^{(1)клас}(0)+\widehat{g}_{3n}'^{(1)}(0)=0. \tag{35}$$

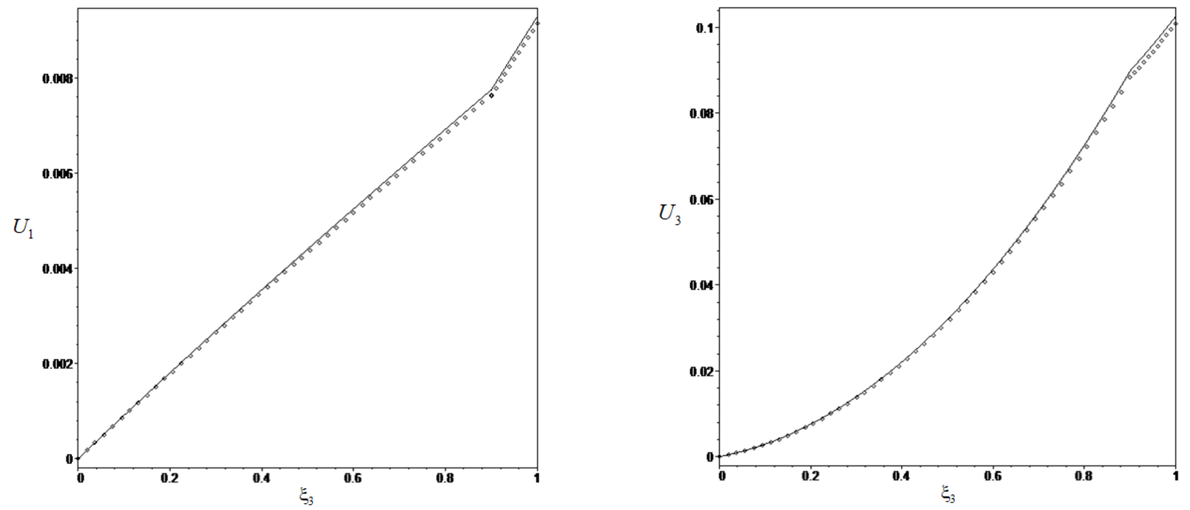
Аналогичным путем находятся и другие погранслойные решения. После нахождения выражений для перемещений далее определяют выражения для напряжений Коши, моментных напряжений и полных напряжений.

### 4. Результаты вычислений

Рассмотрим результаты вычисления распределения перемещений, напряжений Коши и моментных напряжений вытянутого прямоугольника. В вычислениях принято: $\overline{h}_1 = 0.9$, $\beta = 1$, $\overline{k}_1 = 1$, $\overline{k}_2 = 0.1$, $\overline{\lambda}_1 = 0.5$, $\overline{\lambda}_2 = 1$, $\overline{\mu}_1 = 0.4$, $\overline{\mu}_2 = 0.8$, $\overline{\gamma}_1 = 1$, $\overline{\gamma}_2 = 1$, $\alpha = 0.03$, $\eta = 4$, $f(\xi_1) = 1 - \left(\frac{\xi_1}{\eta}\right)^2$. Проведенное сравнение классического решения с конечно-элементным в пакете FlexPDE показало, что для того, чтобы погрешность предложенного метода решения не превышала 1 % достаточно ограничиться первыми 6 членами ряда в разложениях для температуры и перемещений.

На рис. 1 показано распределение перемещений $U_1$ (рис. 1а) и $U_3$ (рис. 1б) по вертикальной координате $\xi_3$ при $\xi_1 = 0$. При этом сплошной линией показаны вычисленные перемещения при $\alpha = 0.03$, точками – при $\alpha = 0$. Видно, что изменение градиентного параметра $\alpha$ незначительно влияет на распределение перемещений.

На рис. 2 показано распределение безразмерных напряжений Коши: нормального напряжения $S_{33}$ (рис. 2а), касательного напряжения $S_{13}$ (рис. 2б), по координате $\xi_3$ при $\xi_1 = 0$.



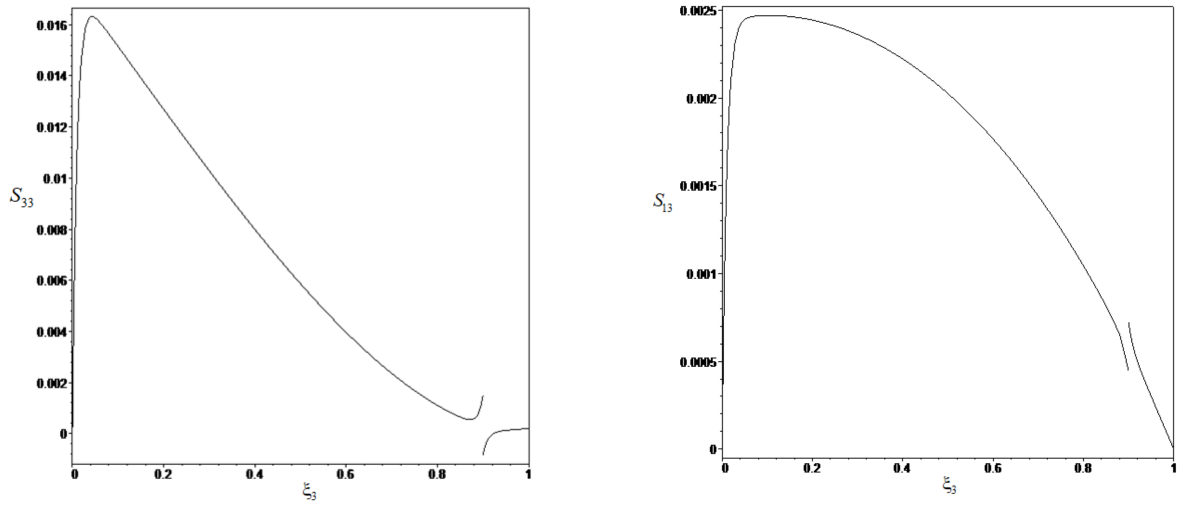

*а)* *б)*

*Рис. 1. Распределение перемещений по координате $\xi_3$: горизонтального перемещения $U_1$ (а) и вертикального перемещения $U_3$ (б)*

Из рис. 2 следует: 1) вблизи заделки $\xi_3 = 0$ напряжения Коши экспоненциально убывают до нуля в соответствии с граничными условиями (13); 2) напряжения Коши испытывают скачок на линии сопряжения покрытия и подложки. Это связано с тем, что в постановке задаче указана непрерывность перемещений и деформаций на линии сопряжения, поэтому из-за скачка термомеханических характеристик возникает и скачок напряжений Коши. Выяснено, что на величину скачка тангенциальных напряжений из термомеханических характеристик влияет только разность модулей сдвига покрытия и подложки. На величину скачка нормальных напряжений сильно влияет скачок термомеханических характеристик покрытия и подложки. Если параметры Ламе одинаковы, то величина скачка нормальных напряжений пропорциональна разности коэффициентов температурных напряжений.

Исследован масштабный эффект, т. е. влияние относительной толщины покрытия на величину скачка напряжений Коши. Выяснено, что по мере увеличения от нуля относительной толщины покрытия, скачок напряжений Коши увеличивается экспоненциально и при определенной толщине покрытия выходит на стационарное значение.

Также выяснено, что моментные напряжения непрерывны и достигают пика на линии сопряжения материалов.




*а)* *б)*

*Рис. 2. Распределение напряжений Коши по координате $\xi_3$: нормального напряжения $S_{33}$ (а) и касательного напряжения $S_{13}$ (б)*

## Заключение

Приведены постановка и решение задачи градиентной термоупругости для составного прямоугольника на основе однопараметрической модели Айфантиса. На основе асимптотического подхода Вишика – Люстерника получены упрощенные аналитические выражения для нахождения напряжений Коши. Выяснено, что напряжения Коши на границе раздела испытывают скачок. Величина скачка напряжений Коши зависит как от соотношения термомеханических характеристик, так и от значения масштабного параметра и толщины покрытия.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 18-11-00069).

## Литература

1. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple stresses / R. A. Toupin // Arch. Rational // Mech. Anal. – 1962. – V. 11. – P. 385–414.

2. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity / R. D. Mindlin // Arch. Rational Mech. Anal. – 1964. – V. 16. – P. 51–78.

3. *Ahmadi G.* First strain gradient theory of thermoelasticity / G. Ahmadi, K. Firoozbakhsh // International Journal of Solids and Structures. – 1975. – V. 11. – P. 339–345.

4. *Altan B. S.* On some aspects in the special theory of gradient elasticity / B. S. Altan, E. C. Aifantis // J. Mech. Behav. Mater. – 1997. – V. 8(3). – P. 231–282.

5. *Лурье С. А.* Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур / С. А. Лурье, Тьюнг Фам, Ю. О. Соляев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18(3). – С. 440–449.

6. *Лурье С. А.* Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя / С. А. Лурье, Ю. О. Соляев, Л. Н. Рабинский, Ю. Н. Кондратова, М. И. Волов // Вестник ПНИПУ. Механика. –2013. – Т. 1. – С. 161–181.

7. *Вишик М. И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи математических наук. – 1957. – Т. 12(5). – С. 3–122.

УДК 539.3

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

**А. О. Ватульян[1], Д. К. Плотников[2]**

[1]*Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*
[2]*Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, Владикавказ*

**Аннотация.** Исследована контактная задача для неоднородной упругой полосы и штампа с гладким основанием. С помощью преобразования Фурье сформулирована система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант смещений и напряжений. Сформулировано интегральное уравнение контактной задачи. Исследовано поведение символа ядра интегрального уравнения при малых и больших значениях параметра преобразования. Построено решение интегрального уравнения с помощью метода граничных элементов. Представлены результаты решения контактной задачи для разных законов неоднородности.
**Ключевые слова:** неоднородная полоса, функционально-градиентный материал, контактная задача, метод граничных элементов.

В настоящее время разрабатываются и широко применяются новые материалы, среди которых все большую популярность приобретают функционально-градиентные материалы, характеризующиеся непрерывным изменением свойств, что позволяет избежать скачков механических характеристик и концентрации напряжений на границе материалов с различными свойствами. Внедрение в практику градиентных материалов требует разработки эффективных методов исследования задач для тел неоднородной структуры.

Среди областей применения функционально-градиентных материалов одной из наиболее перспективных является изготовление упрочняющих градиентных покрытий. Важным этапом производства покрытий является контроль свойств полученных структур, который может быть осуществлен при помощи методов индентирования, широко используемых при идентификации приповерхностных характеристик новых материалов [1]. Применение индентирования к определению свойств неоднородных объектов требует решения контактных задач для неоднородной тел.

В настоящей работе в рамках плоской задачи теории упругости исследована задача о контактном взаимодействии без трения жесткого параболического штампа с поперечно-неоднородной упругой полосой толщины $h,$ сцепленной с недеформируемым основанием по нижней границе. На основе интегрального преобразования Фурье задача сведена к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от упругих свойств полосы, относительно трансформант компонент вектора смещений и тензора напряжений. Причем матрица коэффициентов системы не содержат производных от законов неоднородности, что расширяет спектр исследуемых задач на непрерывные и кусочно-непрерывные функции. На основе анализа данной системы и решения ряда вспомогательных краевых задач сформулировано интегральное уравнение контактной задачи относительно неизвестного контактного давления

$$\int_{-\beta}^{\beta} k(\eta-\xi_1)q(\eta)d\eta = \delta - f(\xi_1), \quad |\xi_1| \le \beta, \qquad k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha, \qquad t = \eta - \xi_1, \qquad (1)$$

где $\xi_1 = x_1/h,$ $\beta$ и $\delta$ – величина области контакта и глубина внедрения штампа, отнесенные к толщине полосы, $q$ – контактное давление, отнесенное к характерному значению модуля сдвига $\mu_0,$ $\alpha$ – параметр преобразования Фурье, функция $f(\xi_1)$ описывает форму штампа.

Ключевым объектом в данной задаче служит символ Фурье ядра интегрального оператора, который для однородной полосы имеет явное представление [2], а в случае неоднородных свойств полосы может быть построен численно [3] либо на основе приближенных подходов [4]. Исследовано поведение символа ядера интегрального оператора при малых и больших значениях параметра преобразования Фурье, при малых значениях параметра значение символа определяется осредненными значениями податливостей полосы.

$$K(0)=\int_0^1 \frac{d\tau}{f_1(\tau)+2f_2(\tau)},$$

где $f_1=\lambda/\mu_0$, $f_2=\mu/\mu_0$, $\lambda$ и $\mu$ – параметры Ламе полосы.

Анализ символа при больших значениях, реализованный на основе метода Вишика – Люстерника, установил, что поведение передаточных функций при больших значениях параметра преобразования определяется только значениями параметров Ламе полосы на верхней границе, причем коэффициенты при главных членах удается найти аналитически

$$|\alpha|\to+\infty \qquad K(\alpha)=d|\alpha|^{-1}+o(\alpha^{-1}), \qquad d=\frac{f_1(1)+2f_2(1)}{2f_2(1)(f_1(1)+f_2(1))}. \tag{2}$$

Интегральное уравнение (1) для отыскания функций раскрытия решена методом граничных элементов. Ввиду четности функций $K(\alpha)$ и $q(\xi_1)$ интегральное уравнение преобразовано к виду

$$\int_0^\beta k_1(\eta,\xi_1)q(\eta)d\eta=\delta-f(\xi_1), \quad 0\le\xi_1\le\beta, \tag{3}$$

$$k_1(\eta,\xi_1)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(\alpha)\left[\cos(\alpha(\eta+\xi_1)+\cos(\alpha(\eta-\xi_1))\right]d\alpha. \tag{4}$$

Отрезок интегрирования $[0,\beta]$ разбивается на $N$ отрезков, на каждом из которых искомая функция считается постоянной. Вычисление интегралов в (4) ведется по отрезку $\left[0,b\right]$ по квадратурным формулам Гаусса для пяти узлов, остаток интегрирования на интервале $[b,\infty)$ вычисляется, полагая $K(\alpha)=d\alpha^{-1}$. В вычислениях задается значение $\beta$, а соответсвующее ему $\delta$ однозначно определяется из условия обращения в ноль контактного давления на границе области контакта $q(\beta)=0$. Значение безразмерной силы $P$, действующей на штамп, определяется из условия равновеся штампа.

На рис. 1 и 2 приведены результаты вычислительных экспериментов для немоноотонных законов неоднородности $f_1(\xi_3)=1.5-0.9\cos 2\pi\xi_3$, $f_2(\xi_3)=1-0.5\cos 2\pi\xi_3$, $\xi_3=x_3/h$. Вычисления проведены для количества элементов $N=30$ со сгущением сетки разбиения вблизи границы области контакта, $b=600$, рассмотрен штамп с основанием параболической формы. Контактное давление на рис. 2 построено при $\beta=0.208$.

Представлены результаты вычислительных экспериментов для разных законов неоднородности. Произведено сравнение полученных результатов с решениями других авторов. Проведен анализ решений для различного количества граничных элементов.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 18-11-00069).

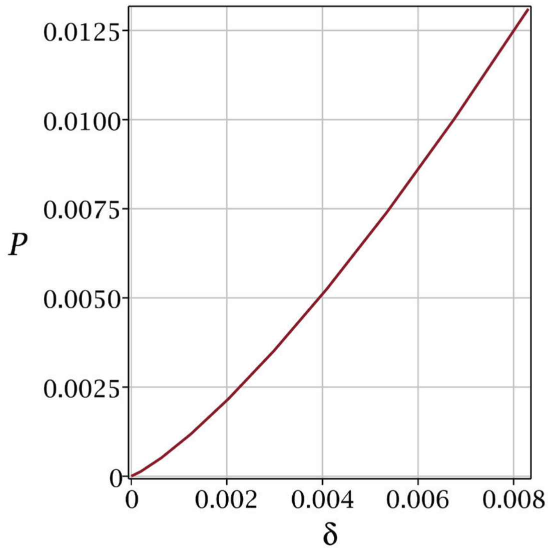



*Рис. 1. Зависимость сила-внедрение*

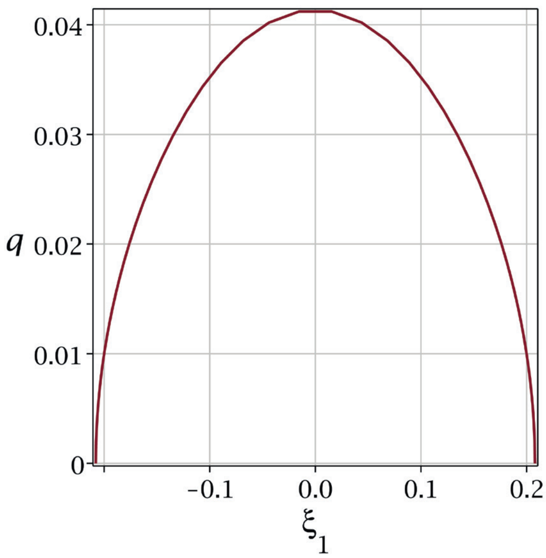



*Рис. 2. Контактное давление*

**Литература**


1. *Borodich F. M.* Nanoindentation in studying mechanical properties of heterogeneous materials / F. M. Borodich, S. J. Bull, S. A. Epshtein // Journal of Mining Science. – 2015. – Vol. 51, № 3. – P. 470–476.

2. *Ворович И. И.* Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – Москва : Изд-во «Наука» ГРФМЛ, 1974. – 456 с.

3. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С. М. Айзикович, В. М. Александров, А. В. Белоконь [и др]. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 240 с.

4. *Ватульян А. О.* Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы / А. О. Ватульян, Д. К. Плотников // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 485, № 5. – С. 564–567.

УДК 539.3

# О МОДЕЛИРОВАНИИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА И НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ С ПОКРЫТИЕМ

**А. О. Ватульян, А. А. Поддубный**

*Южный федеральный университет*

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию контактной задачи для упругой двухслойной неоднородной по толщине полосы. Неоднородность механических свойств в полосе может иметь скачкообразный характер. При постановке задачи сформулированы упрощенные гипотезы деформирования неоднородных по толщине слоистых структур. На основе вариационного принципа Лагранжа получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Получена функция, связывающая вертикальные перемещения индентора и контактные напряжения. Осуществлен анализ влияния толщины слоя-покрытия на поведение величины зоны контакта и зависимость сила-внедрение. Разработана конечно-элементная модель. Представлено сравнение КЭ-решения и решения, построенного на базе предлагаемой приближенной модели.
**Ключевые слова:** упругость, контактная задача, вариационный метод, неоднородность, неоднородная структура, неоднородные свойства, индентирование.

## Введение

Функционально-градиентные покрытия являются современным решением в материаловедении. Они характеризуются переменными, чаще всего в вертикальном направлении, механическими свойствами. Успех в применении подобных покрытий зависит от точности оценки получаемых градиентных свойств покрытия. Для решения данной задачи применяется метод оценки контактной податливости поверхности исследуемого образца или метод индентирования.[1, 2] В основе этого метода лежат алгоритмы, полученные при решении задач механики контактного взаимодействия [3].

При анализе задач контактной механики в случае тел с неоднородной структурой ядро интегрального уравнения не может быть получено в аналитическом виде и строится либо численно, либо с помощью некоторых упрощенных моделей [4, 5].

## 1. Модель взаимодействия кусочно-неоднородной полосы и индентора

Рассмотрим контактную задачу о внедрении жесткого штампа в упругую двухслойную неоднородную полосу в рамках плоской постановки. Полоса состоит из двух слоев: слой-подложка толщиной $h_1$ и слой-покрытие толщиной $h_2$, свойства которых изменяются произвольным образом по толщиной координате и могут терпеть разрыв на границе между ними. Толщина всей полосы $h$. Полосу будем считать жестко защемленной по нижнему основанию. Гладкий штамп параболической формы вдавливается в полосу силой $P$, силы трения между полосой и штампом отсутствуют. Коэффициенты Лямэ являются положительными функциями вертикальной координаты.

Введем в рассмотрение гипотезы о характере компонент поля перемещений, для решения вспомогательной задачи о действии нормальной нагрузки $q(x_1)$ на верхнюю границу полосы следующего вида:

$$\begin{gathered} u_1^{(1)} = u(x_1)\frac{x_3}{h_1}, \quad u_3^{(1)} = w(x_1)\frac{x_3}{h_1}, \\ u_1^{(2)} = -\frac{x_3-h}{h_2}u(x_1) + \frac{x_3-h_1}{h_2}U(x_1), \quad u_3^{(2)} = -\frac{x_3-h}{h_2}w(x_1) + \frac{x_3-h_1}{h_2}W(x_1), \end{gathered} \tag{1}$$

Верхний индекс соответствует полосе, в которой соответствующая функция определяет перемещения. Гипотезы (1) сформулированы таким образом, что выполняется непрерывность смещений на границе полос. Также потребуем выполнения условий сопряжения на границе полос для компонент вектора напряжений, что позволит выразить функции $U(x_1)$ и $W(x_1)$ через $u(x_1), w(x_1)$.

$$
\begin{aligned}
U &= (1+G_1\frac{h_2}{h_1})u + h_2(G_1-1)w',\\
W &= h_2G_2u' + (1+G_3\frac{h_2}{h_1})w,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где $G_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, $G_2 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2}$, $G_3 = \frac{\lambda_1-2\mu_1}{\lambda_2+2\mu_2}$, и введены следующие обозначения $\lambda_1 = \lim\limits_{x_3\to h_1-0}\lambda(x_3)$, $\lambda_2 = \lim\limits_{x_3\to h_1+0}\lambda(x_3)$, $\mu_1 = \lim\limits_{x_3\to h_1-0}\mu(x_3)$, $\mu_2 = \lim\limits_{x_3\to h_1+0}\mu(x_3)$.

Таким образом, гипотезы о структуре полей перемещений принимают вид:

$$
\begin{aligned}
u_1^{(2)} &= (-\frac{x_3-h}{h_2} + (x_3-h_1)a_1)u(x_1) + (x_3-h_1)a_2w'(x_1),\\
u_3^{(2)} &= (-\frac{x_3-h}{h_2} + (x_3-h_1)b_1)w(x_1) + (x_3-h_1)b_2u'(x_1),
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $a_1 = \frac{\mu_1h_2+\mu_2h_1}{\mu_2h_1h_2}$, $a_2 = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}$, $b_1 = \frac{h_1(\lambda_2+2\mu_2)+h_2(\lambda_1+2\mu_1)}{h_1h_2(\lambda_2+2\mu_2)}$, $b_2 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2}$.

Запишем функционал потенциальной энергии для двухслойной полосы (4):

$$
\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2}\int_0^{h_1}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{ij}^1\varepsilon_{ij}^1dx_1dx_3 + \frac{1}{2}\int_{h_1}^{h}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{ij}^2\varepsilon_{ij}^2dx_1dx_3 - \int_{-a}^{a}qu_3(x_1,h)dx_1, \tag{4}
$$

Осуществляя подстановку гипотез в виде (3), а также интегрирование по вертикальной координате, в соответствие с вариационным принципом Лагранжа получим систему дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
&2B_{12}u^{IV} - (B_2-B_{11})w''' + (-2(A_1+B_1)+2B_{10})u'' - (A_2+B_4-A_5-B_8)w' + 2(A_4+B_7)u + 2h_2b_2^*q' = 0,\\
&2B_3w^{IV} + (B_2-B_{11})u''' + (-2(A_6+B_9)+2B_5)w'' + (A_2+B_4-A_5-B_8)u' + 2(A_3+B_6)w - 2h_2b_1^*q = 0,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где коэффициенты $A_i$, $B_j$ – константы, представляющие собой некоторые интегральные характеристики законов неоднородности.

С использованием вариационного принципа были также получены стыковые условия. Для нахождения связи между функциями нагрузки и перемещений на верхней границе полосы воспользуемся преобразованием Фурье.

$$
\begin{aligned}
\tilde{W} &= K(\alpha)\tilde{q},\\
K(\alpha) &= \frac{a_3\alpha^6 + a_2\alpha^4 + a_1\alpha^2 + a_0}{b_4\alpha^8 + b_3\alpha^6 + b_2\alpha^4 + b_1\alpha^2 + b_0},
\end{aligned} \tag{6}
$$

Обратное преобразование Фурье позволит установить эту связь в виде операторного уравнения:

$$
b_4W^{(8)} - b_3W^{(6)} + b_2W^{(4)} - b_1W^{(2)} + b_0W = -a_3q^{(6)} + a_2q^{(4)} - a_1q^{(2)} + a_0q \tag{7}
$$

Приравнивая вертикальные смещения в зоне контакта перемещениям штампа и учитывая

$$
\begin{aligned}
&W(x_1) \to 0, \quad (x_1 \to \infty),\\
&W = -\delta + \frac{1}{2R}x_1^2, \quad (|x_1| \le a),
\end{aligned} \tag{8}
$$

получим операторное уравнение для нахождения контактного давления:

$$-a_3 q^{(6)} + a_2 q^{(4)} - a_1 q'' + a_0 q = -\frac{b_1}{R} + b_0 \left(-\delta + \frac{1}{2R} x_1^{\,2}\right), \tag{9}$$

которое легко интегрируется. Далее находятся функции $u$, $w$, а из стыковых условий определяются неизвестные константы и параметр глубины внедрения штампа $\delta$.

## 2. Сравнение модели с решением на основе МКЭ

Для сравнения результатов, полученных в пункте 1, получено конечноэлементное решение, которое строилось для ограниченной области – прямоугольника высоты $h$ конечной длины $2l$ с соотношением длин сторон $h/l = 0.2$. Неоднородность слоев в полосе была достигнута путем создания многослойной структуры. Свойства в каждом из слоев являются постоянными. Для всей толщины прямоугольника приближенно моделируют законы неоднородности, заданные в модели функционально. При сравнении были рассмотрены следующие неоднородности:

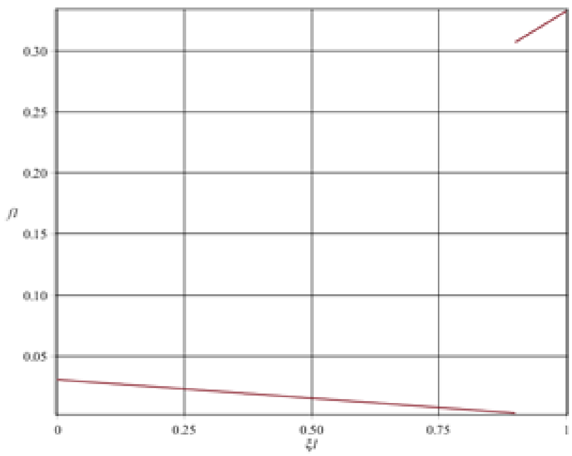



*Рис. 1. Законы неоднородности $\lambda(\xi_1)$;*

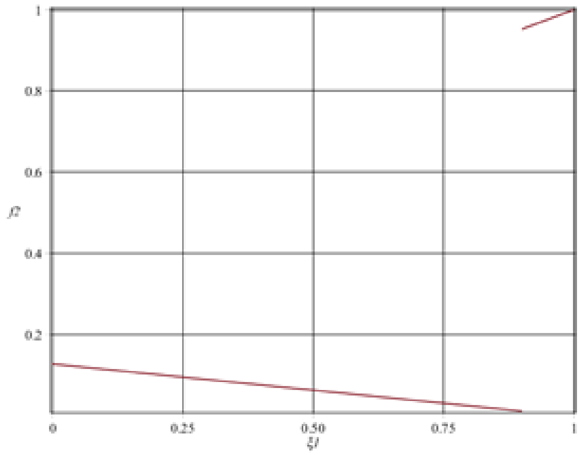



*Рис. 2. Законы неоднородности $\mu(\xi_1)$;*

В сравнительном анализе были изучены характеристики: зависимость силы от внедрения (рис. 3) и прогиб верхней поверхности полосы от радиуса контакта (рис. 4). Сплошная линия – модель; точки – МКЭ.

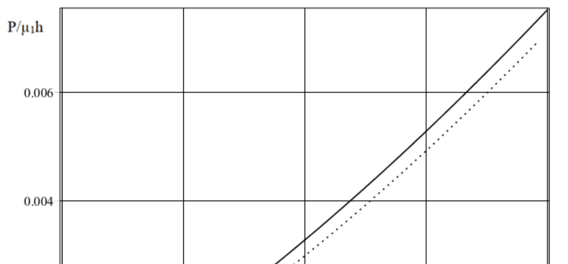



*Рис. 3. Зависимость «сила-внедрение»*

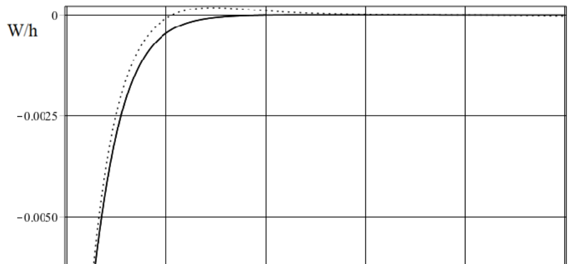



*Рис. 4. Вертикальное смещение верхней границы*

## 3. Асимптотический анализ поведения некоторых характеристик

При проведении экспериментов по инструментальному индентированию важным аспектом является толщина исследуемого покрытия. В случае тонких покрытий оборудование для определения физико-механических характеристик является дорогостоящим, а методики, заложенные программно, недостаточно проработаны.

В рамках предложенной модели был проведен ряд вычислительных экспериментов по оценке влияния толщины покрытия на параметры, традиционно рассматриваемые при индентировании: сила, приложенная к индентору (рис. 5), и величина зоны контакта (рис. 6).

Представленные зависимости были рассчитаны для различных величин $h_2/h$: точка-штрих – 0,2; сплошная линия – 0,1; точка – 0.05; штрих – 0.03.

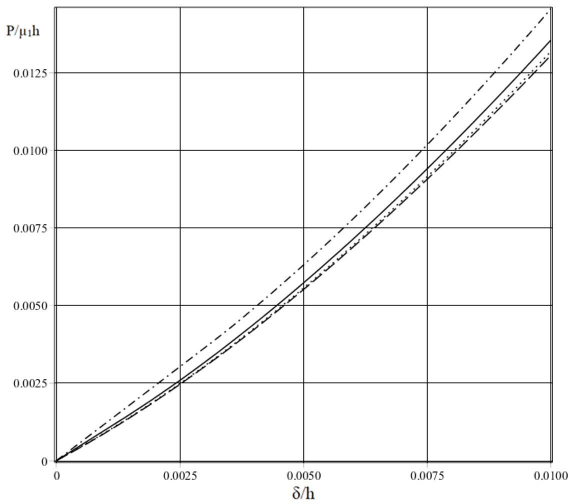



*Рис. 5. Зависимость «сила-внедрение»*

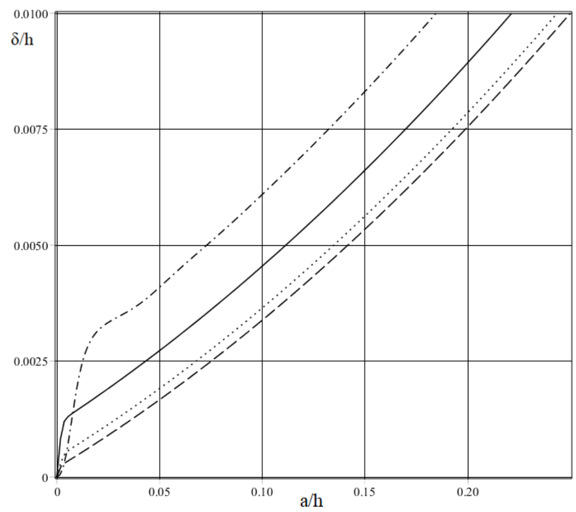



*Рис. 6. Зависимость «внедрение-величина зоны контакта»*

Данные, изображенные на рис. 5 и 6, характеризуются тем, что чем больше безразмерная толщина покрытия, тем большую силу нужно приложить к индентору, чтобы добиться одинаковой глубины внедрения индентора и тем меньшее значение величины зоны контакта можно получить. Значения для вертикальных перемещений полосы-покрытия на верхней границе вне зоны контакта отличаются не более чем на 1 % для указанных величин $h_2/h$.

## Заключение

В работе, используя приближенный подход на основе вариационного принципа Лагранжа, получены зависимости, рассматриваемые в тестах по индентированию, «сила-внедрение», вертикальное смещение верхней границы, «внедрение-величина зоны контакта». Осуществлен сравнительный анализ с решением МКЭ. Разница в результатах для зависимости «сила-внедрение» не превосходит 15 %. Проведен асимптотический анализ некоторых характеристик при стремлении толщины слоя-покрытия к нулю.

## Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке РНФ, проект №18-11-00069

## Литература


1. *Головин Ю. И.* Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикрообъемах, тонких поверхностных слоях и пленках // Физика твердого тела. 2008. – Т. 50, вып. 12. – С. 2113–2142.

2. *Esteban Broitman.* Indentation Hardness Measurements at Macro-, Micro- and Nanoscale: A Critical Overview. // Tribol Lett. – 2017. – 65. – P. 23–41.

3. *Oliver W. C., Pharr G. M.* Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // J. Mater. Res. – 2004. – Vol. 19, No 1. – P. 3–20.

4. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С. М. Айзикович, В. М. Александров, А. В. Белоконь, Л. И. Кренев, И. С. Трубчик. – М. : – Физматлит, 2006. – 240 с.

5. *Ватульян А. О., Плотников Д. К., Поддубный А. А.* О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий. // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18, вып. 4. – С. 421–432.

УДК 539.3

# О ПРИБЛИЖЕННОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАМЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ МАСШТАБНОГО ЭФФЕКТА

**А. О. Ватульян[1], В. О. Юров[1,2]**

*[1]Южный федеральный университет*
*[2]Южный математический институт ВНЦ РАН*

**Аннотация.** Сформулирована задача о раздувании внутренним давлением неоднородного в радиальном направлении полого цилиндра. Для описания напряженно деформируемого состояния использована градиентная теория упругости с одним дополнительным масштабным параметром. Для дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной сформулирована каноническая система дифференциальных уравнений. Предложен полуаналитический способ решения с явным выделением погранслойных частей и численным решением вспомогательных задач Коши для неоднородного цилиндра в рамках классической теории упругости. Проведено сравнение с известными точными решениями.
**Ключевые слова:** задача Ламе, цилиндр, радиальная неоднородность, градиентная теория упругости, каноническая система, задачи Коши, погранслой, ВКБ-метод, метод пристрелки, приближенное решение, явные формулы.

## Введение

Решение задачи о раздувании неоднородного цилиндра внутренним давлением имеет важное значение при определении зоны максимальных напряжений и расчете на разрушение. Для однородного цилиндра такая проблема известна как задача Ламе и имеет точное решение [1, 2]. В случае экспоненциального и степенного законов изменения модуля Юнга задача также решена аналитически, решение построено через специальные функции [3]. Для решения задачи при произвольном законе неоднородности применяются численные или асимптотические методы (для функций, мало меняющихся вдоль радиальной координаты).

Для расчета напряженно-деформированного состояния в цилиндрах малого размера и учета масштабных эффектов применяется градиентная теория упругости [4]. В рамках этой теории решена задача Ламе для однородного [5, 6] и функционально-градиентного со степенным законом неоднородности цилиндра [7]. В отличие от классической теории упругости при численном решении задачи раздувания для произвольного закона неоднородности наблюдается большая погрешность, возникающая вследствие наличия малого параметра при старшей производной. Предлагаемый алгоритм основан на аналитическом выделении погранслойных частей решения, получаемых методом ВКБ, и использовании линейно независимых решений задач Коши для неоднородной среды в рамках классической теории упругости.

## Постановка задачи

Рассмотрим равновесие неоднородного в радиальном направлении цилиндра под действием внутреннего давления. Для моделирования напряженного состояния будем использовать градиентную теорию упругости с одним дополнительным параметрам. Уравнение равновесия в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=0. \tag{1}$$

Функции $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$ называются полными напряжениями и связаны с напряжениями Коши следующими формулами

$$\sigma_{rr} = \tau_{rr} - l^2\left(\tau''_{rr} + \frac{\tau'_{rr}}{r} - 2\frac{\left(\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}\right)}{r^2}\right), \ \sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{\varphi\varphi} - l^2\left(\tau''_{\varphi\varphi} + \frac{\tau'_{\varphi\varphi}}{r} - 2\frac{\left(\tau_{\varphi\varphi} - \tau_{rr}\right)}{r^2}\right). \tag{2}$$

Здесь $l$ малый параметр, вводящийся в градиентной теории упругости, и имеет размерность длины. Напряжения Коши $\tau_{rr}$, $\tau_{\varphi\varphi}$ выражаются привычными для классической теории упругости определяющими соотношениями:

$$\tau_{rr} = \left(\lambda + 2\mu\right)u' + \lambda u r^{-1}, \ \tau_{\varphi\varphi} = \lambda u' + \left(\lambda + 2\mu\right)u r^{-1}. \tag{3}$$

где $u$ радиальное перемещение.

Подставляя (3), (2) в уравнение (1), получаем уравнение четвертого порядка с малым параметром при старшей производной. Для его решения приведем граничные условия, соответствующие отсутствию напряжений на внешней границе $r = b$ и равномерно распределенной нагрузке $P$ на внутренней границе $r = a$:

$$\tau_{rr} - l^2\left(\tau''_{rr} + \frac{\left(\tau'_{rr} - \tau'_{\varphi\varphi}\right)}{r} - 2\frac{\left(\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}\right)}{r^2}\right) = \Sigma, \quad l^2\tau'_{rr} = M. \tag{4}$$

Будем считать, что $\Sigma = P,\ M = 0$ при $r = a$ и $\Sigma = 0,\ M = 0$ при $r = b.$

Для решения задачи (1)–(4) можно воспользоваться методом пристрелки (численный метод), однако при $l \to 0$ сложно поддерживать заданную точность решения вспомогательных задач Коши. Анализ задачи свидетельствует о погранслойном поведении решения в окрестности границ $r = a$ и $r = b.$ Построим вычислительный алгоритм для расчетов при малом $l$: решение представим в виде линейной комбинации двух ВКБ решений и двух линейно независимых решений задачи при $l = 0$:

$$u(r) = AU_1(r) + BV_1(r) + \frac{1}{\left(\lambda(r) + 2\mu(r)\right)\sqrt{r}}\left(Ce^{(r-b)/l} + De^{(a-r)/l}\right), \tag{5}$$

где $U_1(r)$, $V_1(r)$ решения следующих задач

$$\begin{cases} \dfrac{dU_1(r)}{dr} = U_2(r) \\ \dfrac{dU_2(r)}{dr} = m_1(r)U_1(r) + m_2(r)U_2(r) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{dV_1(r)}{dr} = V_2(r) \\ \dfrac{dV_2(r)}{dr} = m_1(r)V_1(r) + m_2(r)V_2(r) \end{cases} \tag{6}$$

$$U_1(b) = 1, \quad U_2(b) = 0 \qquad V_1(b) = 0, \quad V_2(b) = 1$$

где $m_1(r) = \left(\left(\lambda + 2\mu\right) - \lambda' r\right)r^{-2}\left(\lambda + 2\mu\right)^{-1}$, $m_2(r) = -\left(\left(\lambda' + 2\mu'\right)r + \left(\lambda + 2\mu\right)\right)r^{-1}\left(\lambda + 2\mu\right)^{-1}$

Нетрудно обосновать форму решения (5). Рассмотрим случай однородного цилиндра, для которого решение можно записать через модифицированные функции Бесселя [2]:

$$u(r) = \tilde{A}r + \tilde{B}r^{-1} + \tilde{C}I_1(r/l) + \tilde{D}K_1(r/l). \tag{7}$$

При $l \to 0$ аргументы специальных функций стремятся к бесконечности и можно воспользоваться соответствующими асимптотиками [8]:

$$u(r) = \tilde{A}r + \tilde{B}r^{-1} + \tilde{C}\frac{\exp(r/l)\sqrt{l}}{\sqrt{2\pi r}} + \tilde{D}\frac{\exp(-r/l)\sqrt{\pi l}}{\sqrt{2r}}. \tag{8}$$

Если в (5) учесть постоянство функций $\lambda$, $\mu$ и выполнить замену $C = \tilde{C}\dfrac{\sqrt{l}\left(\lambda + 2\mu\right)e^{b/l}}{\sqrt{2\pi}}$, $D = \tilde{D}\dfrac{\sqrt{\pi l}\left(\lambda + 2\mu\right)}{e^{a/l}\sqrt{2}}$, то получим одинаковые с (8) погранслойные составляющие.

Проведена численная верификация предложенной схемы решения. В расчетной схеме вводятся следующие безразмерные параметры и функции: $S_1 = \sigma_{rr}/P$, $S_2 = \sigma_{\varphi\varphi}/P$, $T_1 = \tau_{rr}/P$, $T_2 = \tau_{\varphi\varphi}/P$, $f_1 = \lambda\mu_0^{-1}$, $f_2 = \mu\mu_0^{-1}$, $r_1 = ab^{-1}$, $x = rb^{-1}$, $s = lb^{-1}$. Здесь $\mu_0$ — характерное значение модуля сдвига рассматриваемого материала.

Выполнена серия расчетов при $r_1 = 0.2$, $f_1 = 1.5$, $f_2 = 1$. Для определения точности предлагаемой вычислительной схемы проведено сравнение с точным решением [6]. Выявлено, что максимальная абсолютная погрешность для $T_1$ при $s = 0.1$ наблюдается в точке $x = 0.42$ и в относительных единицах равна 18 %; для $S_1(0.42)$ погрешность составляет 26 %. При уменьшении параметра $s$ точность быстро увеличивается и уже при $s = 0.01$ максимальная относительная погрешность для $T_1$ составляет 0.02 %.

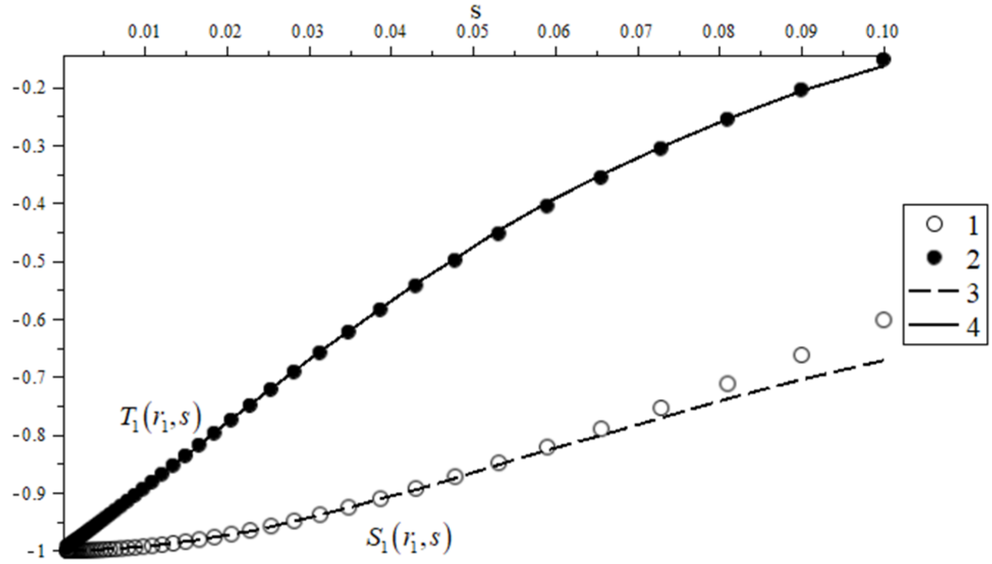



*Рис 1. Однородный цилиндр, верификация*

На рис. 1 приведены графики, отражающие зависимость напряжений $S_1$, $T_1$ на внутренней границе цилиндра $(x = r_1)$ от параметра $s$. Функции $S_1$, $T_1$ имеют минимальное значение на внутренней границе. Функции $S_1(r_1, s)$ соответствуют кривые 1 и 3, а $T_1(r_1, s)$ кривые 2 и 4. Кривые 1, 2 построены в рамках асимптотического анализа и представления (5), а кривые 3, 4 соответствуют точному решению [6]. Максимальная погрешность составила 10.5 % для $S_1(r_1, 0.1)$ и 7 % для $T_1(r_1, 0.1)$.

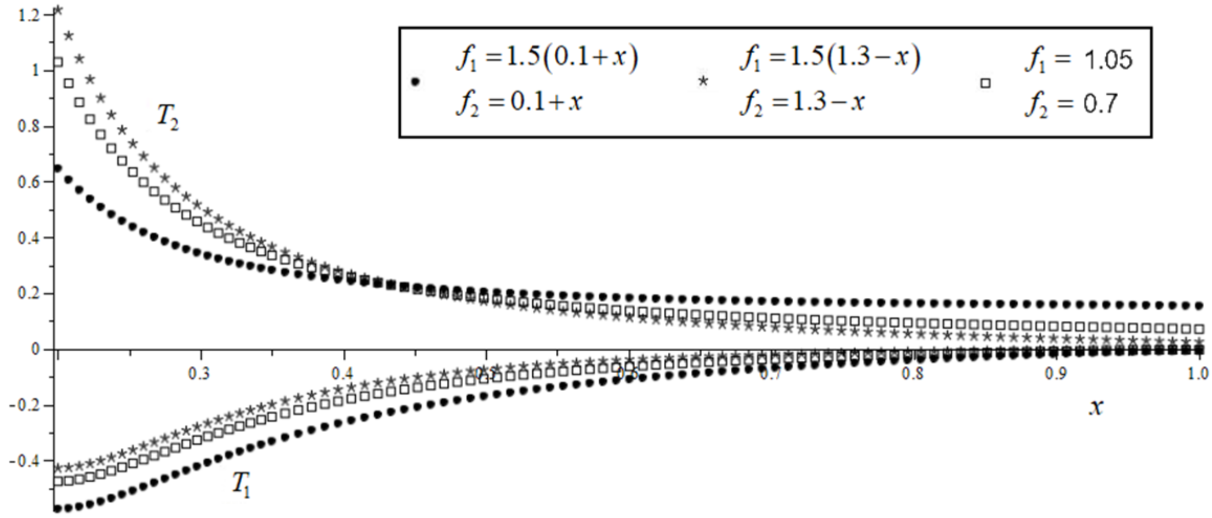



*Рис 2. Напряжения Коши при $s = 0.05$ для возрастающего и убывающего линейных законов неоднородности, а также для осредненных постоянных свойств*

На рис. 2 приведены графики функций $T_1,\ T_2$ при $s = 0.05$ для линейных законов изменения параметров Ламе. Используемые наборы функций приведены на рисунке и имеют одинаковое среднее значение по толщине.

## Заключение

Решена задача Ламе о раздувании неоднородного в радиальном направлении цилиндра внутренним давлением при учете масштабных эффектов в рамках градиентной теории упругости с одним дополнительным параметром. Предложен алгоритм для приближенного решения дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной и переменными коэффициентами. Рассмотрено асимптотическое поведение точного решения задачи для однородного и неоднородного цилиндра при малом параметре градиентности, проведен сравнительный анализ.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке РНФ (код проекта 18-11-00069).

## Литература

1. *Love AEH.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge University Press, 1927.

2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М. : Госиздат технико-теорет. л-ры, 1955. – 491 с.

3. *Sburlati R.* Analytical elastic solutions for pressurized hollow cylinders with internal functionally graded coatings // Composite Structures. 2012. – V. 94, I. 12. – P. 3592–3600.

4. *Altan B. S., Aifantis E. C.* On some aspects in the special theory of gradient elasticity. // J. Mech. Behav. Mater. – 1997. – V. 8. – P. 231–282.

5. *Лурье М. В.* Задачи Ламе в градиентной теории упругости // Докл. АН СССР. – 1968. – V. 181, № 5. – P. 1087–1089.

6. *Gao X. L., Park S. K.* Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // Int J Solids Struct. – 2007. – V. 44(22–23). – P. 7486–7499.

7. *Chu L., Dui G.* Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity // International Journal of Mechanical Sciences. – 2018. – V. 148. – P. 366–373.

8. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

УДК 539.3

# РАЗРУШЕНИЕ БАЛОК ВЗРЫВОМ НЕКОНТАКТНЫХ ЗАРЯДОВ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ В ВОДЕ

**Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин**

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Выполнен анализ воздействий гидродинамического поля, созданного взрывом заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ), на простейшие элементы конструкций, в виде балок, находящихся в воде. Особенности нагрузки вследствие расположения балки в воде, учтены введением присоединенной массы. Использовано классическое условие разрушения элемента, согласно которому необходимо, чтобы напряжение в элементе было больше предельного сопротивления материала, при этом использована уточненная формула О. Е. Власова о пропорциональности изгибающего момента действующему импульсу взрывной нагрузки.
**Ключевые слова:** неконтактный заряд, взрыв в воде, балочная конструкция, присоединенная масса, предельное сопротивление, упругий материал, гарантированное разрушение.

## Введение

При взрыве зарядов в воздухе на близких расстояниях от элементов конструкций основными носителями нагрузки являются продукты взрыва, на более далеких расстояниях – воздушная ударная волна, т. е. в обоих случаях нагрузка передается через среду, плотность которой существенно меньше плотности материала элемента конструкции.

При взрыве неконтактных зарядов в воде нагрузка на элементы конструкции передается через среду, плотность которой соизмерима с плотностью материала конструкции.

С началом деформации элемента в воде в движение приходит не только сам элемент, но и значительная часть частиц среды, находящихся с ним в непосредственном контакте, в результате этого явления движение элемента тормозится. Этот эффект сопротивления среды перемещению в ней твердого тела в гидродинамике принято учитывать введением присоединенной массы [2].

## 1. Физическая модель

### *Основные принятые допущения*

1. Силу сопротивления жидкости движению тела заменяется силой инерции, которая возникает при перемещении вместе с телом гипотетической присоединенной массы [1].
2. Используем уточненную формулу О.Е. Власова [4].
3. Рассматривается два случая расположения балки в воде, когда она полностью, либо частично погружена в воду.
4. Предполагаем, что балка свободно опирается на недеформируемые (неразрушающиеся) опоры.

## 2. Математическая модель

### *Решение задачи*

Рассмотрим балку со свободно опёртыми концами, находящуюся в воде. Для такой балки в воздухе прогиб от взрывной нагрузки определяется формулой [1]:

$$Z=\frac{2l}{\pi^2\beta m_0}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\sin j\pi\frac{x}{l}\sin\frac{j^2\pi^2}{l^2}\beta t\int_0^l i_*(\xi)\sin\frac{j\pi\xi}{l}d\xi, \quad (1)$$

где $l$ – длина балки, $m_0$ – погонная масса балки, $x$ – координата её сечения, $t$ – время, $i_*$ – погонный импульс взрывной нагрузки, $\beta$ – параметр, характеризующий механические свойства материала балки

$$\beta=\sqrt{\frac{EJ}{m_0}}, \quad (2)$$

$E$ – модуль упругости материала балки, $J$ – момент инерции поперечного сечения относительного соответствующей оси.

В случае расположения балки в воде при её свободном опирании на неподвижные недеформируемые опоры следует вводить присоединенную массу [2], при этом величина $\beta$ вычисляется по формуле

$$\beta=\sqrt{\frac{EJ}{m_0+m_*}}, \quad (3)$$

где $m_*$ – погонная присоединенная масса [2].

Для изгибающего момента известно соотношение [3]

$$M=-EJ\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Формула (1) для балки в воде примет вид

$$Z=\frac{2l}{\pi^2\beta(m_0+m_*)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\sin j\pi\frac{x}{l}\sin\frac{j^2\pi^2}{l^2}\beta t\int_0^l i_*(\xi)\sin\frac{j\pi\xi}{l}d\xi, \quad (5)$$

следовательно,

$$M=\frac{2\beta}{l}\sum_{j=1}^{\infty}\sin j\pi\frac{x}{l}\sin\frac{j^2\pi^2}{l^2}\beta t\int_0^l i_*(\xi)\sin\frac{j\pi\xi}{l}d\xi. \quad (6)$$

Дифференцируя функцию (5) по времени, получим формулу для скорости

$$u=\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{2}{(m_0+m_*)l}\sum_{j=1}^{\infty}\sin j\pi\frac{x}{l}\cos\frac{j^2\pi^2}{l^2}\beta t\int_0^l i_*(\xi)\sin\frac{j\pi\xi}{l}d\xi. \quad (7)$$

Из полученных формул видно, что максимальные значения скорости, соответствующие моменту приложения нагрузки $t=0$ и максимальные значения изгибающего момента, соответствующие моменту первого максимального прогиба $t_1=\frac{l^2}{2\pi\beta}$

$$M_{\max}(x)=\frac{2\beta}{l}\sum_{j=1}^{\infty}\sin j\pi\frac{x}{l}\int_0^l i_*(\xi)\sin\frac{j\pi\xi}{l}d\xi,$$

связаны между собой соотношением:

$$M_{\max}(x)=\beta(m_0+m_*)u_{\max}(x).$$

Так как в соответствии с начальным условием

$$u_{\max}(x)=\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{i_*(x)}{(m_0+m_*)},$$

то окончательно получим

$$M_{\max}(x)=\beta i_*(x)\cdot\Phi(x), \quad (8)$$

где $\Phi(x)$ – функция, представленная соотношениями:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Phi(x)=\frac{1}{\left[1+\dfrac{\partial z}{\partial x}^{2}_{\max}\right]^{\frac{3}{2}}(1+\Omega(x))}\\
&\Omega(x)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sin(2k\pi\dfrac{x}{l})S_{2k}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sin\left((2k+1)\pi\dfrac{x}{l}\right)S_{2k+1}}\\
&\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\max}=\frac{2}{\pi\beta(m_0+m_*)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cos((2k+1)\pi\frac{x}{l}S_{2k+1}\\
&S_{2k}=\int_0^l i_*(\xi)\sin\left(2k\pi\frac{\xi}{l}\right)d\xi\\
&S_{2k+1}=\int_0^l i_*(\xi)\sin\left((2k+1)\pi\frac{\xi}{l}\right)d\xi
\end{aligned}
\right\}. \qquad (9)
$$

Соотношения (9) найдены в результате уточнения формулы О. Е. Власова [4, 5].

При исследовании действия взрыва на элементы конструкций, расположенные в воде, следует различать два существенно отличающиеся друг от друга случая [1]:

1. Элемент конструкции полностью находится в воде;

2. Только часть поверхности элемента контактирует с водой, а остальная часть контактирует с воздухом.

В первом случае элемент при своем движении приводит в движение всю присоединенную массу, а во втором – только часть этой массы. При этом величина нагрузки, создаваемой взрывом при прочих одинаковых условиях для этих случаев, будет различной, а именно: в первом случае она будет меньше, чем во втором [1].

В качестве примера, поясняющего указанное различие, рассмотрим действие взрыва одного и того же сферического заряда весом $C$, на две одинаковых балки квадратного поперечного сечения со стороной квадрата $h$. Предполагается, что заряд удален от балок на одинаковое расстояние $a$. Пусть первая балка полностью окружена водой, а вторая балка погружена в воду только наполовину.

Тогда присоединенная погонная масса для первой балки имеет вид [2]

$$m_{*1}=\frac{\pi}{4}\rho h^2,$$

а для второй балки

$$m_{*2}=\frac{\pi}{8}\rho h^2.$$

При этом, соответственно, коэффициенты $\beta$ вычисляют по формулам

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta_1=\sqrt{\frac{EJ}{m_0+m_{*1}}}=\frac{h}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{E}{\rho_0+\dfrac{\pi}{4}\rho_*}}\\
\beta_2=\sqrt{\frac{EJ}{m_0+m_{*2}}}=\frac{h}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{E}{\rho_0+\dfrac{\pi}{8}\rho_*}}
\end{aligned}
\right\}, \qquad (10)
$$

где $\rho_0$ – плотность материала балки, $\rho_*$ – плотность воды.

Полагая материал балки линейно упругим и учитывая, что в этом случае

$$M = \beta i_* = w\sigma, \tag{11}$$

где $w$ – момент сопротивления балки, $\sigma$ – напряжение, а также учитывая, что для разрушения элемента необходимо, чтобы напряжение в элементе $\sigma$ было больше предельного сопротивления материала, получим:

$$\sigma \geq k_0^* k_1 \cdot R_2, \tag{12}$$

где $k_0^*$ – коэффициент однородности на гарантированное разрушение, $k_1$ – отношение пределов текучести в динамическом нагружении элемента к пределу текучести в статическом нагружении, $R_2$ – нормативное сопротивление материала при изгибе. Отметим, что согласно исследованиям, представленным в работе [1]

$$k_0^* = \frac{R_1^{\max}}{R_2}, \tag{13}$$

где $R_1^{\max}$ – максимальное сопротивление материала.

Из соотношений (11), (12) получим

$$i_* = \frac{w}{\beta} k_0^* k_1 R_2.$$

Интенсивность импульса

$$i_* = k_+ \cdot bi, \tag{14}$$

где $k_+$ – коэффициент формы [1], $b$ – ширина балки, $i$ – удельный импульс.

Величина удельного импульса, действующего в воде, может быть определена по формуле [6, 7]:

$$i = A_* \frac{C^{\frac{2}{3}}}{r}. \tag{15}$$

Расчётный импульс для рассматриваемых случаев расположения балки в воде различен. Для первой балки, полностью находящейся в воде, он равен разности удельных импульсов, действующих на противоположные грани балки

$$i = A_* C^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{1}{r - \frac{h}{2}} - \frac{1}{2\left(r + \frac{h}{2}\right)} \right] = A_* C^{\frac{2}{3}} \frac{1 + 2\frac{h}{a}}{2a\left(1 + \frac{h}{a}\right)}. \tag{16}$$

Для второй балки вследствие того, что с противоположной грани ничто не противодействует, удельный импульс вычисляется по формуле

$$i_2 = \frac{A_* C^{\frac{2}{3}}}{a}.$$

Таким образом, для первой балки

$$i_1 = k_+ b A_* C^{\frac{2}{3}} \frac{1 + 2\frac{b}{a}}{2a\left(1 + \frac{h}{a}\right)} = \frac{w}{\beta_1} k_0^* k_1 R_2. \tag{17}$$

Учитывая выражение для $\beta_1$:

$$\beta_1 = \frac{h}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 + \frac{\pi}{4}\rho_*}},$$

а также соотношение $w = \frac{bh^2}{6}$, получим из (17)

$$C = \left[ \frac{2k_1 k_0^* \cdot R_2 a h \left(1 + \frac{h}{a}\right)}{k_+ A_* \left(1 + 2\frac{h}{a}\right) \sqrt{\frac{3E}{\rho_0 + \frac{\pi}{4}\rho_*}}} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

Для балки, наполовину помещенной в воду, соответственно получим

$$C = \left[ \frac{k_1 k_0^* \cdot R_2 a h}{k_+ A_* \sqrt{\frac{3E}{\rho_0 + \frac{\pi}{8}\rho_*}}} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (19)$$

Так как $\frac{2\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{1 + 2\frac{h}{a}} \geq 1,$ то величина заряда, необходимая для разрушения балки, полностью погруженной в воду, будет существенно больше, чем для разрушения балки, погруженной в воду наполовину.

## Заключение

Указанный эффект необходимо учитывать в расчетах несущих элементов конструкций, которые лишь частично находятся в контакте с водой. Кроме того, в расчётах балок на разрушающие нагрузки следует использовать уточненную формулу О. Е. Власова, так как исходная (неуточненная) формула справедлива только для среднего сечения балки.

## Литература

1. *Саламахин Т. М.* Разрушение взрывом элементов конструкций. – М. : ВИА, 1961. – 275 с.

2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. 6-е изд., перераб. и дополн. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 583 с.

3. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Технико-теоретической литературы; Издание 3-е, перераб., 1978. – 648 с.

4. *Володин Г. Т.* Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой средах. Часть II. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Монография. – Тула : Издательство «Левша», 2005. – 160 с.

5. *Власов О. Е.* Основы теории действия взрыва. – М. : ВИА, 1977. – 408 с.

6. *Саламахин Т. М.* Механическое действие взрыва в воздухе. – М.: ВИА, 1958. – 65 с.

7. *Кувалдин А. Н., Падей Н. А.* Механическое действие взрыва в воде. – М. : ВИА, 1958. – 37 с.

УДК 539.374

# НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ РАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ С УЧЕТОМ РАДИАЛЬНО-НЕМОНОТОННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА

**Д. В. Гоцев[1,2], А. Е. Бунтов[2], В. Г. Трофимов[2]**

*[1]Воронежский государственный университет*
*[2]Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е Жуковского и Ю. А. Гагарина (г. Воронеж)*

**Аннотация.** Разработана математическая модель и найдены приближенные аналитические решения, описывающие центрально симметричное напряженно-деформированное состояние неоднородного упругого сферического тела, находящегося под действием равномерного всестороннего сжатия. При этом неоднородность упругих характеристик материала моделировалась радиально-немонотонным модулем упругости при постоянном коэффициенте Пуассона. На основе экспериментальных данных проведен численный расчет компонент напряженно-деформированного состояния для рассматриваемой задачи, выявлены характерные эффекты.
**Ключевые слова:** центрально-симметричная задача, неоднородные материалы, одномерное немонотонное распределение упругих характеристик.

## Введение

Известно, что расчет на прочность большого числа элементов конструкций, используемых в таких отраслях промышленности как авиастроение, ракетостроение, строительное дело сводится к решению задач определения напряженно-деформированного состояния (НДС) неоднородных тел, испытывающих упругие деформации, то есть к задачам неоднородной теории упругости.

В зависимости от типа функций, моделирующих распределение упругих характеристик материалов, неоднородные упругие тела делятся на тела с непрерывной неоднородностью, кусочно-однородные и случайно-неоднородные тела. При этом функциональные зависимости, описывающие изменение механических свойств материала (далее – функции неоднородности), являются соответственно непрерывными, кусочно-постоянными и случайными.

В настоящей работе будем рассматривать упругие тела с непрерывной неоднородностью. Данный тип неоднородности механических свойств материала возникает, например, в сосудах и трубопроводах АЭС (корпуса реакторов, главные циркуляционные трубопроводы, трубы отвода и коллектора парогенераторов и другие), которые работают длительное время под воздействием высокого внутреннего давления в высокотемпературных, коррозионных и радиационных условиях, что приводит к неоднородности материала по толщине этих конструкций [1–4].

Отметим, что задачи механики непрерывно неоднородных тел приводят к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами [5], что в отличие от задач классической механики деформируемого твердого тела, приводящих к уравнениям с постоянными коэффициентами, значительно усложняет их решение. При этом в зависимости от формы функциональных зависимостей, моделирующих изменение механических характеристик вдоль координат, дифференциальные уравнения получаются существенно различными. Поэтому в качестве функций неоднородности, с одной стороны должны быть использованы достаточно простые зависимости, что позволяет получить более простые уравнения, а с другой – эти функции должны наиболее адекватно описывать экспериментальные данные, поскольку даже небольшие отличия в выборе аппроксимирующих функций могут привести к существенно различным результатам.

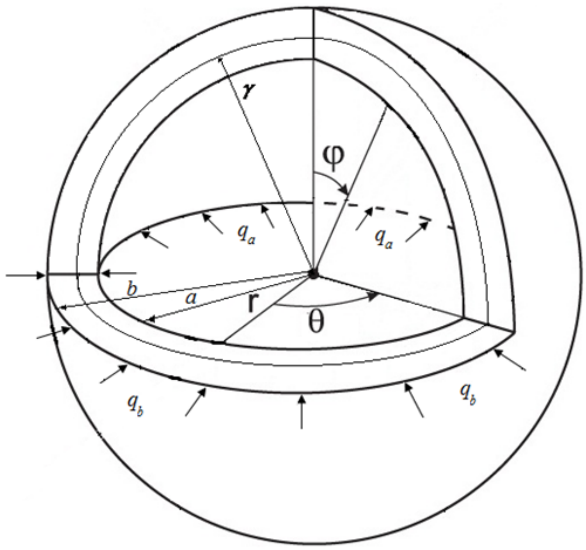
В работах [4, 6–8] при поиске аналитического решения в качестве модели распределение модуля упругости выбирались линейные, экспоненциальные или степенные функции.

Однако, указанные функциональные зависимости, используемые для аппроксимации переменных механических характеристик, не всегда удовлетворяют не только количественной, но и качественной оценке результатов аппроксимации в сравнении с экспериментальными данными. Это относится к конструкциям и сооружениям, в которых наблюдается существенно немонотонный характер распределения упругих характеристик материалов. Например, при создании горных выработок буровзрывным способом или подземных полостей с помощью камуфлетных взрывов наблюдается зависимость механических характеристик материалов с явно выраженными экстремумами вблизи внутренней поверхности [9].

В работах [10–12] проведено численно-аналитическое исследование НДС упругого массива вблизи сферической полости с учетом технологической неоднородности его механических свойств.

В настоящей работе авторами решается задача определения НДС полого шара в рамках центрально-симметричной постановки для неоднородных упругих материалов с учетом немонотонного характера распределения механических характеристик по толщине.

## 1. Симметричная деформация упругого сжимаемого сферического тела с учетом немонотонного распределения упругих характеристик материала по толщине



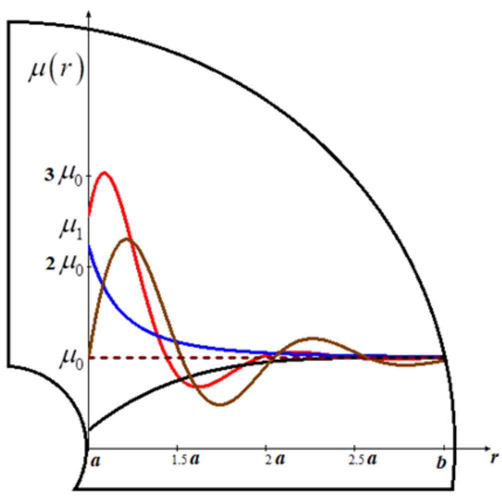




*Рис. 1. Расчетная схема для радиально неоднородного сферического тела под действием равномерно сжимающих нагрузок*

В настоящем пункте в рамках модели деформирования упругого сжимаемого материала с непрерывной зависимостью параметра Ламе – $\mu = \mu(r)$ от радиальной координаты при постоянстве коэффициента Пуассона – $\nu = \text{const} \neq 0.5$ рассматривается задача о деформировании сферического тела с внешним радиусом $b$ и внутренним – $a$ (рис. 1). По внешней поверхности тела равномерно распределена радиальная нагрузка интенсивности $q_b$, на внутренней поверхности действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q_a$.

К подобным задачам с точки зрения математического моделирования, как было отмечено во введении, сводятся, например, задачи расчета корпусов реакторов АЭС, крепей подземных полостей сферической формы, созданных с помощью камуфлетных взрывов [13] и др.

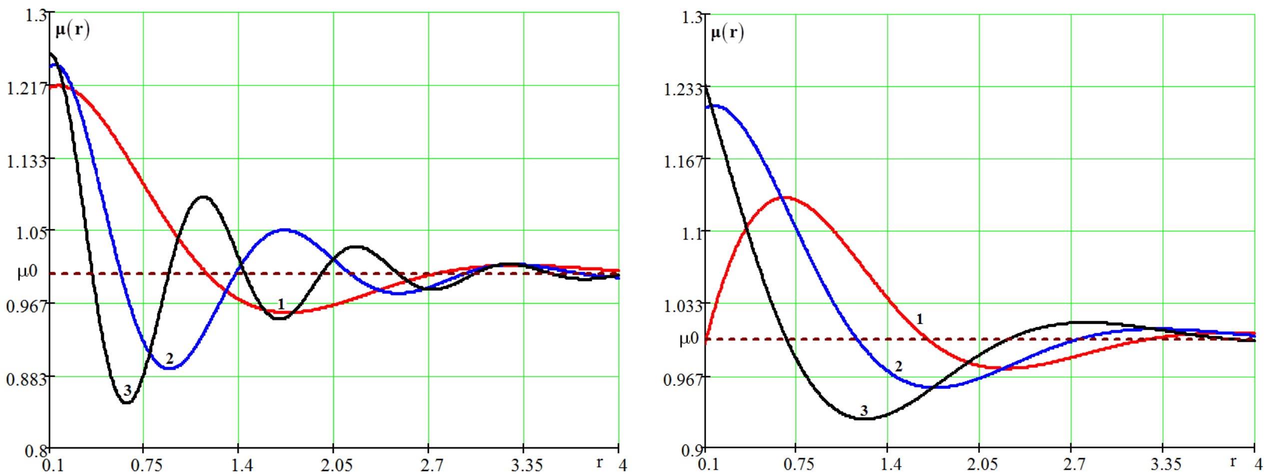
В отличие от известных [1, 5, 6, 8] монотонных функций неоднородности, в настоящей работе неоднородность упругих свойств материала предлагается моделировать немонотонным распределением $\mu = \mu(r)$ по толщине рассматриваемого сферического тела в виде следующей зависимости

$$\mu(r) = \mu_0 \left(1 + ke^{-\alpha r}\left(\cos(\beta r + \omega) + \sin(\beta r + \omega)\right)\right), \tag{1}$$

где $k, \alpha, \beta, \omega$ – параметры аппроксимации $(\alpha > 0)$, $\mu_0$ – параметр Ламе соответствующего однородного материала.

Графики распределения (1) при различных значениях аппроксимирующих коэффициентов представлены на рис. 2 случаями а, б. Для построенных графических зависимостей, если не оговорено отдельно, принимались следующие значения параметров аппроксимирующей модели (1) $\mu_0 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 2,\ \omega = 0,\ k = 0.1.$

Из анализа представленных графиков следует, что данная зависимость $\mu(r)$ описывает немонотонный характер распределения указанной характеристики с выраженными экстремумами вблизи внутренней поверхности. При этом параметр $\alpha$ влияет на скорость затухания колебаний неоднородных свойств материала, так чем больше $\alpha$, тем быстрее аппроксимирующая кривая приближается к $\mu_0$. Параметры $k$, $\beta$, $\omega$ отвечают за амплитуду, количество волн вдоль радиальной координаты и начальную фазу немонотонного характера распределения неоднородных упругих свойств материала соответственно. При этом случай $k = 0$ – соответствует однородному материалу.




*а)* *б)*

*Рис. 2. Распределение параметра Ламе $\mu = \mu(r)$ неоднородного материала вдоль радиальной координаты при различных значениях аппроксимирующих коэффициентов $\beta$ и $\omega$ – рисунки а) и б) соответственно*

На рис. 2а) кривая 1 соответствует значению $\beta = 2$; кривая 2 – $\beta = 4$; кривая 3 – $\beta = 6$. На рис. 2б) кривая 1 соответствует значению $\omega = -1$; кривая 2 – $\omega = 0$; кривая 3 – $\omega = 1$. При этом а для рис. 2а) и 2б) – $k = 0.2$.

Отметим, что аппроксимирующие коэффициенты, входящие в предложенную модель (1) определяются на основании экспериментальных данных таким образом, чтобы получающаяся кривая была наиболее приближена, например, в смысле «наименьших квадратов» к исходным данным. Это может быть осуществлено различными способами, описание которых не является предметом настоящего исследования.

Исходя из описанной выше постановки задачи, имеет место центральная (полярная) симметрия. Тогда НДС рассматриваемого полого шара в сферической системе координат $r$, $\theta$, $\varphi$ будет описываться только главными ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций, а также радиальной составляющей вектора перемещений, которые будут являться функциями радиальной координаты и в силу центральной симметрии удовлетворять следующим условиям

$$\begin{gathered}\sigma_r=\sigma_r\left(r\right),\ \sigma_\theta=\sigma_\theta\left(r\right)=\sigma_\varphi=\sigma_\varphi\left(r\right),\\ \varepsilon_r=\varepsilon_r\left(r\right),\ \varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta\left(r\right)=\varepsilon_\varphi=\varepsilon_\varphi\left(r\right),\\ u=u\left(r\right).\end{gathered}\tag{2}$$

С учетом (2) три уравнения равновесия преобразуются к одному

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+2\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)=0;\tag{3}$$

соотношения Коши примут вид

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr},\ \varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi=\frac{u}{r};\tag{4}$$

формулы закона Гука с учетом (1) через параметры Ламе $\lambda$ и $\mu$ запишутся в форме

$$\sigma_r=\left(\lambda\left(r\right)+2\mu\left(r\right)\right)\varepsilon_r+2\lambda\left(r\right)\varepsilon_\theta,\ \sigma_\theta=\sigma_\varphi=\lambda\left(r\right)\varepsilon_r+2\left(\lambda\left(r\right)+\mu\left(r\right)\right)\varepsilon_\theta\tag{5}$$

или через параметры $\mu$ и $\nu$, преобразуются к виду

$$\sigma_r=2\mu\left(r\right)\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\Theta+\varepsilon_r\right),\ \sigma_\theta=\sigma_\varphi=2\mu\left(r\right)\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\Theta+\varepsilon_\theta\right),\tag{6}$$

где объемная деформация $\Theta$ определяется по формуле

$$\Theta=\varepsilon_r+2\varepsilon_\theta\tag{7}$$

граничные условия в напряжениях для рассматриваемой задачи запишутся в форме

$$\sigma_r\big|_{r=a}=-q_a,\ \sigma_r\big|_{r=b}=-q_b.\tag{8}$$

Перепишем уравнение равновесия (2) в перемещениях учитывая при этом (5) и (4)

$$\frac{d}{dr}\left[\left(\lambda\left(r\right)+2\mu\left(r\right)\right)\frac{du}{dr}+2\lambda\left(r\right)\frac{u}{r}\right]+4\left(\frac{d}{dr}\left(\mu\left(r\right)\frac{u}{r}\right)-\frac{u}{r}\mu'\left(r\right)\right)=0\,.$$

Учитывая, что упругие характеристики связаны формулой

$$\lambda\left(r\right)=\frac{2\nu}{1-2\nu}\mu\left(r\right)$$

последнее соотношение перепишется в виде

$$\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{du}{dr}+2\frac{u}{r}\right)\mu\left(r\right)\right]=2\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\mu'\left(r\right)\frac{u}{r}.\tag{9}$$

Далее следуя работе [8] организуем итерационный процесс по формуле

$$\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{du_{k+1}}{dr}+2\frac{u_{k+1}}{r}\right)\mu\left(r\right)\right]=2\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\mu'\left(r\right)\frac{u_k}{r}.\tag{10}$$

Решение неоднородного уравнения (10) будем искать в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и произвольного частного решения неоднородного уравнения. В итоге итерационная формула для определения радиальной компоненты вектора перемещений примет вид

$$u_{k+1}=\frac{1}{r^2}\left(A_{k+1}\int_a^r\frac{x^2}{\mu\left(x\right)}dx+B_{k+1}\right)+G_k\left(r\right),\tag{11}$$

где $A_{k+1}$, $B_{k+1}$ – константы интегрирования,

$$G_k\left(r\right)=\frac{2-4\nu}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int\limits_a^r Q_k\left(y\right)dy,\ Q_k\left(y\right)=\frac{y^2}{\mu\left(y\right)}\int\limits_a^y\mu'\left(x\right)\frac{u_k}{x}dx.\tag{12}$$

Используя соотношения Коши (4) и формулу (7) при учете (11) получим итерационные соотношения для компонент деформаций и объемной деформации $\Theta$

$$(\varepsilon_r)_{k+1} = A_{k+1}\left(\frac{1}{\mu(r)} - \frac{2}{r^3}\int_a^r \frac{x^2}{\mu(x)}dx\right) - \frac{2B_{k+1}}{r^3} + \frac{dG_k(r)}{dr},$$

$$(\varepsilon_\theta)_{k+1} = (\varepsilon_\varphi)_{k+1} = \frac{1}{r^3}\left(A_{k+1}\int_a^r \frac{x^2}{\mu(x)}dx + B_{k+1}\right) + \frac{G_k(r)}{r}, \tag{13}$$

$$\Theta_{k+1} = \frac{A_{k+1}}{\mu(r)} + \frac{2-4\nu}{1-\nu}\cdot\frac{Q_k(r)}{r^2}$$

Итерационные формулы для определения компонент напряжений получим из закона Гука (6) с учетом (13) в форме

$$(\sigma_r)_{k+1} = 4\mu(r)\left(A_{k+1}F(r) - \frac{B_{k+1}}{r^3} + H_k(r)\right),$$

$$(\sigma_\theta)_{k+1} = (\sigma_\varphi)_{k+1} = 2\mu(r)\left(M(r)A_{k+1} + \frac{B_{k+1}}{r^3} + T_k(r)\right), \tag{14}$$

где введены следующие обозначения

$$F(r) = \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)}\frac{1}{\mu(r)} - \frac{1}{r^3}\int_a^r \frac{x^2}{\mu(x)}dx,\ M(r) = \frac{\nu+1}{2(1-2\nu)}\frac{1}{\mu(r)} - F(r),$$

$$H_k(r) = \frac{Q_k(r)}{r^2} + \frac{4\nu-2}{1-\nu}\frac{1}{r^3}\int_a^r Q_k(x)dx,\ T_k(r) = \frac{\nu+1}{1-\nu}\frac{Q_k(r)}{r^2} - H_k(r) \tag{15}$$

Константы интегрирования $A_{k+1}$, $B_{k+1}$ определятся из граничных условий (8) при учете (14), (15) в форме

$$A_{k+1} = \frac{a^3\left(\frac{q_a}{4\mu(a)} + H_k(a)\right) - b^3\left(\frac{q_b}{4\mu(b)} + H_k(b)\right)}{b^3F(b) - a^3F(a)},\ B_{k+1} = a^3\left(A_{k+1}F(a) + H_k(a) + \frac{q_a}{4\mu(a)}\right), \tag{16}$$

где согласно (15) и (12)

$$F(a) = \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)}\frac{1}{\mu(a)},\ F(b) = \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)}\frac{1}{\mu(b)} - \frac{1}{b^3}\int_a^b \frac{r^2}{\mu(r)}dr,$$

$$H_k(a) = 0,\ H_k(b) = \frac{Q_k(b)}{b^2} + \frac{4\nu-2}{1-\nu}\frac{1}{b^3}\int_a^b Q_k(r)dr. \tag{17}$$

Таким образом, итерационные соотношения (11), (13), (14), (16) с учетом введенных обозначений (12), (15), (17) описывают распределение полей перемещений, деформаций и напряжений в сферическом теле из упруго-сжимаемого неоднородного материала с непрерывной зависимостью параметра Ламе – $\mu = \mu(r)$ от радиальной координаты при постоянстве коэффициента Пуассона – $\nu = \mathrm{const} \neq 0.5$.

Результаты численного эксперимента для первого и второго приближений по полученным соотношениям представлены на рис. 5–10.

Для последовательного определения констант интегрирования и компонент НДС рассматриваемой задачи за начальное приближение выберем нулевое $u_0 = 0$. В качестве зависимости, аппроксимирующей радиально неоднородные упругие свойства материала использовалась немонотонная функция вида (1). При этом, если не оговорено иного, значение аппроксимирующих параметров принимались следующими $k = 2.5,\ \alpha = 1.5,\ \beta = 6,\ \omega = 0.$

Расчеты проводились в относительных величинах. Все величины, имеющие размерность напряжений отнесены к модулю сдвига $\mu_0$ однородного материала, а величины, имеющие размерность длины к внутреннему радиусу $a$ – рассматриваемого полого шара. В качестве относительных исходных физико-механических и геометрических параметров задачи брались следующие $\mu_0 = 1$, $q_a = 0.003$, $q_b = 0.08$, $a = 1$, $b = 3a$.

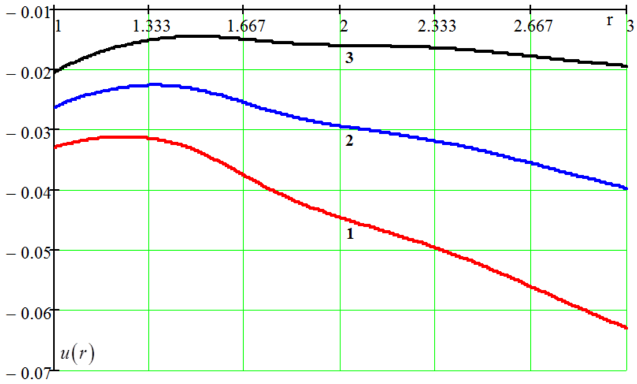



*Рис. 3*

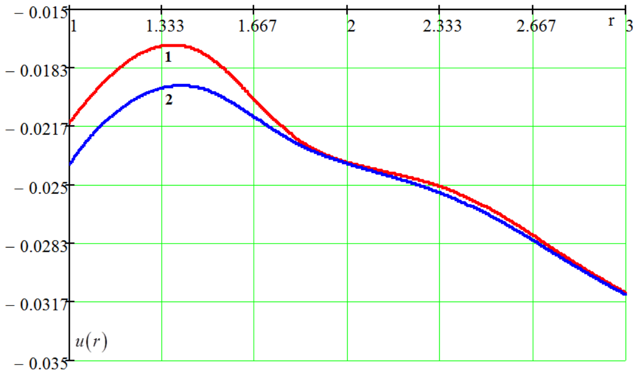



*Рис. 4*

На рис. 3 показаны зависимости радиальной компоненты вектора перемещений во втором приближении от радиальной координаты для различных значений коэффициента Пуассона $\nu$. На рис. 4 представлены зависимости радиальной компоненты вектора перемещений в первом (кривая 1) и во втором (кривая 2) приближении.

На рис. 5 и 6 показаны зависимости радиальной (рис. 5) и окружной (рис. 6) компонент напряжений во втором приближении от радиальной координаты при различных значениях коэффициента Пуассона $\nu$ (пунктиром отмечены линии, соответствующие случаю несжимаемого материала ($\nu = 0.5$)).

На рис. 7 и 8 представлены эпюры радиальной (рис. 7) и окружной (рис. 8) составляющих тензора напряжений в первом и втором приближениях.

На каждом из рис. 3, 5, 6 кривая 1 соответствует $\nu = 0.2$, кривая 2 – $\nu = 0.3$, кривая 3 – $\nu = 0.4$. Для зависимостей, представленных на рис. 4, 7, 8 значения коэффициента Пуассона бралось $\nu = 0.34$.

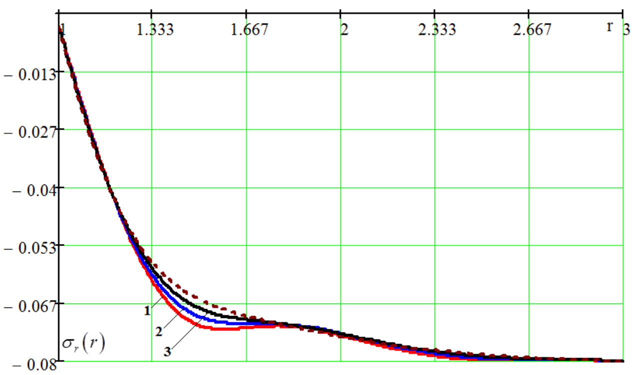



*Рис. 5*

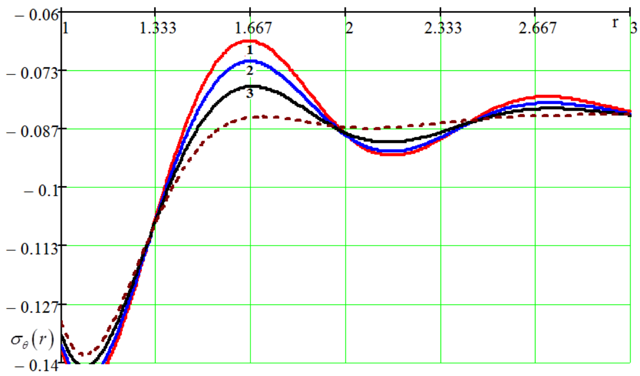



*Рис. 6*

Отметим, что соотношения (11), (13), (14) и (16), описывающие НДС для модели сжимаемого материала не могут быть обобщены на случай несжимаемого материала ($\nu = 0.5$), так как в этом случае при выполнении условия несжимаемости разрешающее уравнение (9) обращается в тождество.

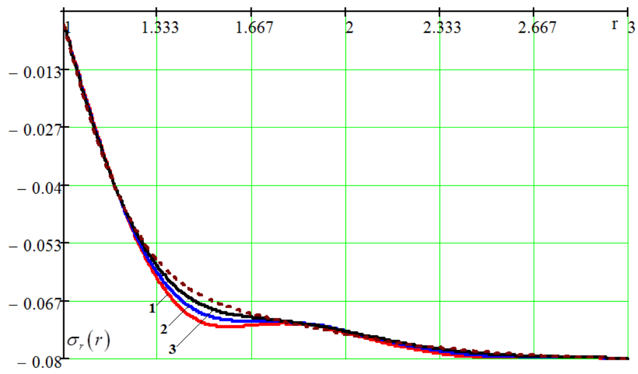



*Рис. 5*

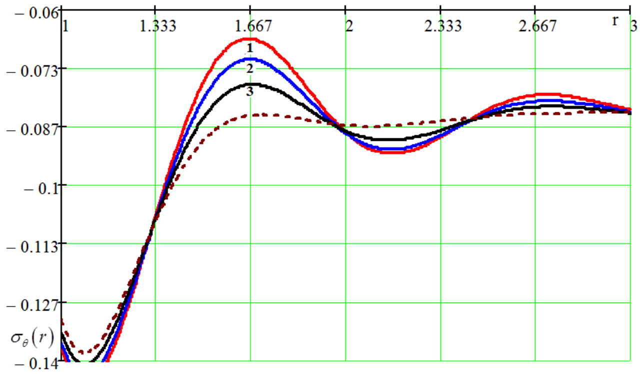



*Рис. 6*

## 2. Математическая модель НДС упругого несжимаемого сферического тела с учетом радиальной неоднородности его механических свойств

В этом пункте приведем решение задачи, постановка которой дана в предыдущем пункте для случая упругого несжимаемого радиально неоднородного материала $\mu = \mu(r)$, $\nu = 0.5$.

В этом случае соотношения закона Гука для несжимаемого материала в рассматриваемой центрально-симметричной постановке запишутся в форме

$$S_r = 2\mu(r)\varepsilon_r,\ S_\theta = S_\varphi = 2\mu(r)\varepsilon_\theta, \tag{18}$$

где компоненты девиатора тензора напряжений $S_r$, $S_\theta$, $S_\varphi$ определяются по формулам

$$S_r = \sigma_r - \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\theta),\ S_\theta = S_\varphi = \sigma_\theta - \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\theta). \tag{19}$$

Условие равенства нулю объемной деформации $\Theta = 0$ (условие несжимаемости материала) с учетом (7) и (4) запишется в виде

$$\frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} = 0. \tag{20}$$

Таким образом, для определения НДС сферического тела из упругого несжимаемого материала с учетом немонотонного распределения параметра $\mu = \mu(r)$ необходимо решить замкнутую краевую задачу (3), (4), (18)–(20), (8).

Из условия несжимаемости (20), которое представляет собой ЛОУ относительно радиальной компоненты вектора перемещений, получим

$$u = \frac{C_1}{r^2}, \tag{21}$$

где $C_1$ – константа интегрирования.

Из (18) с учетом (19) и (4) следует, что

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\mu(r)\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)$$

или учитывая (21)

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -6C_1\frac{\mu(r)}{r^3}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в уравнение равновесия (3) получим уравнение для определения радиальной компоненты напряжений

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 12C_1\frac{\mu(r)}{r^4},$$

интегрируя которое приходим к соотношению

$$\sigma_r = 12C_1 \int_a^r \frac{\mu(x)}{x^4} dx + \sigma_r \big|_{r=a}.$$

С учетом граничных условий (8) последнее соотношение перепишется в форме

$$\sigma_r = \frac{q_a - q_b}{\int_a^b \frac{\mu(r)}{r^4} dr} \cdot \int_a^r \frac{\mu(x)}{x^4} dx - q_a. \tag{23}$$

Оставшиеся компоненты тензора напряжений определим из (22) с учетом (23) и (2)

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{q_a - q_b}{2\int_a^b \frac{\mu(r)}{r^4} dr} \left( 2 \cdot \int_a^r \frac{\mu(x)}{x^4} dx + \frac{\mu(r)}{r^3} \right) - q_a. \tag{24}$$

В окончательном виде перемещение и компоненты деформаций определятся в форме

$$u = \frac{q_a - q_b}{12\int_a^b \frac{\mu(r)}{r^4} dr} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{25}$$

$$\varepsilon_r = \frac{q_b - q_a}{6\int_a^b \frac{\mu(r)}{r^4} dr} \cdot \frac{1}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{q_a - q_b}{12\int_a^b \frac{\mu(r)}{r^4} dr} \cdot \frac{1}{r^3}. \tag{26}$$

Таким образом, НДС сферического тела из упругого радиально неоднородного несжимаемого материала описывается соотношениями (23)–(26).

Как и в пункте 1 в качестве функции неоднородности будем использовать функцию вида (1).

На рис. 9 и 10 представлены эпюры относительной радиальной (рис. 9) и относительной окружной (рис. 10) компонент напряжений при различных значениях аппроксимирующих коэффициентов $k$, $\alpha$, $\omega$ для случая несжимаемого материала $(\nu = 0.5)$ На рис. 11 показано распределение радиальной координаты вектора перемещений по толщине полого шара. При этом на каждом из рис. 9–11 пунктиром отмечены линии, соответствующие случаю однородного материала $(k = 0)$; кривая 1 соответствует следующим значениям аппроксимирующих параметров $k = 13$, $\alpha = 1.8$, $\omega = 0$; кривая 2 соответствует значениям $k = 6.5$, $\alpha = 1.5$, $\omega = 1$; кривая 3 – $k = 3.9$, $\alpha = 1.2$, $\omega = -1$. Значения параметра $\beta$ принималось равным 6. Относительные исходные значения физико-механических и геометрических параметров задачи брались следующими $\mu_0 = 1$, $q_a = 0.01$, $q_b = 0.1$, $a = 1$, $b = 3a$.

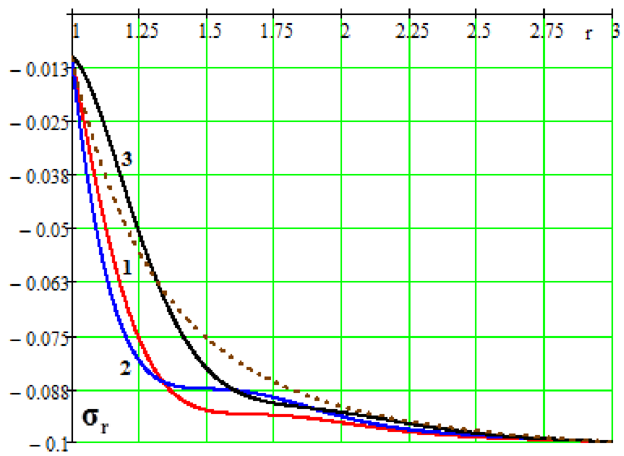



*Рис. 9*

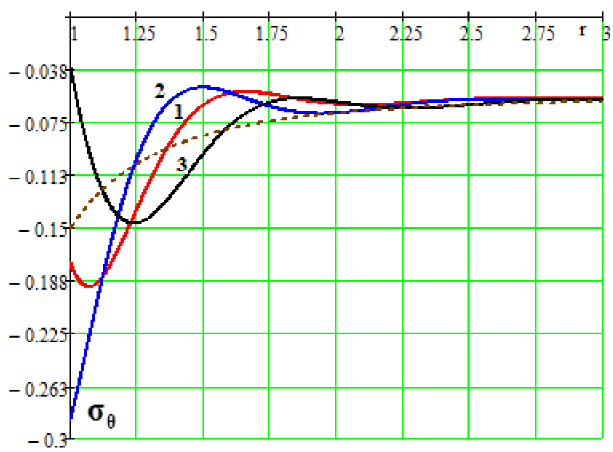



*Рис. 10*

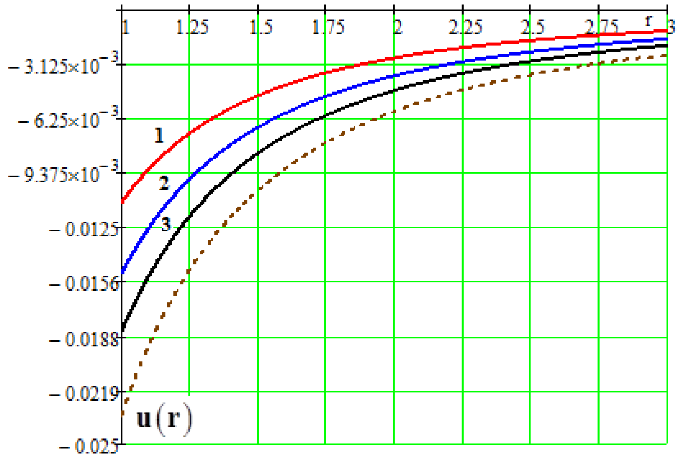



*Рис. 11*

В заключении сформулируем основные результаты и выводы настоящего исследования.

В работе проведено математическое моделирование НДС сферического тела (полого шара) при равномерном сжатии с учетом немонотонного распределения упругих характеристик материала, которое моделировалось функциональной зависимостью (1) параметра Ламе $\mu(r)$ вдоль радиальной координаты при условии постоянства коэффициента Пуассона $\nu = \text{const}$. При этом для модели сжимаемого тела $(\nu \neq 0.5)$ поля перемещений, деформаций и напряжений описываются итерационными соотношениями (11)–(17), а в случае учета несжимаемости материала $(\nu = 0.5)$ НДС полого шара определится формулами (23)–(26).

На основе найденных решений проведен численный эксперимент. Осуществлен анализ результатов численного эксперимента по выявлению влияния параметров аппроксимации на распределение полей напряжений и перемещений. Из анализа представленных зависимостей можно сделать следующие выводы:

• наблюдается (в большей или меньшей степени) зависимость компонент НДС от параметров аппроксимации, при этом изменения параметров аппроксимации может оказывать влияние, как на количественное значение, так и на качественный характер поведения исследуемых компонент НДС;

• для модели сжимаемого материала изменение коэффициента Пуассона $\nu$ приводит к существенному изменению радиальной составляющей вектора перемещения; в меньше степени изменение $\nu$ отражается на характере поведения радиальной и окружной компонент тензора напряжений;

• для случая сжимаемого материала наблюдается немонотонное распределение исследуемых компонент НДС вдоль радиальной координаты; при принятии условия несжимаемости радиальная компонента перемещений имеет монотонно убывающий характер распределения по толщине, как и для случая однородного материала, в то время, как эпюры напряжений (особенно окружной компоненты) имеют существенно немонотонный характер распределения вдоль радиальной координаты;

• для приближенных соотношений (11)–(17) наблюдается близость соответствующих зависимостей в первом и втором приближениях, что является подтверждением сходимости полученных итерационных формул.

### *Литература*


1. *Гетман А. Ф.* Неразрушающий контроль и безопасность эксплуатации сосудов и трубопроводов высокого давления / А. Ф. Гетман, Ю. Н. Козин; Москва : Энергоатомиздат, 1997. – 288 с.

2. *Герасимов В. В.* Коррозия реакторных материалов / В. В. Герасимов. – Москва : Атомиздат, 1980. 256 с.

3. *Скоров Д. М.* Реакторное материаловедение / Д. М. Скоров, Ю. Ф. Бычков, А. И. Дашковский; Под ред. Д. М. Скорова. – Москва : Атомиздат, 1979. – 344 с.

4. *Андреев В. И.* Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел / В. И. Андреев. – Москва : Изд-во АСВ, 2002. – 288 с.

5. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 367 с.

6. *Колчин Г. Б.* Плоские задачи теории упругости неоднородных тел / Г. Б. Колчин. – Кишинев : Штиица, 1977. – 120 с.

7. *Локощенко А. М.* Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов / А. М. Локощенко. – Москва : МГИУ, 2007. – 264 с

8. *Шарафутдинов Г. З.* Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 2. – С. 108–120.

9. *Баклашов И. В.* Механические процессы в породных массивах / И. В. Баклашов, Б. А. Картозия. – Москва : Недра, 1986. – 272 с.

10. *Гоцев Д. В.* Численно-аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния неоднородного упругого породного массива ослабленного сферической полостью / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Внуков // Воздушно-космические силы. Теория и практика. – 2019. – № 11. – С. 45–57.

11. *Гоцев Д. В.* Напряженно-деформированное состояние двухслойной сферической конструкции с учетом пористой структуры внутреннего слоя и неоднородности внешнего слоя / Д. В. Гоцев, Н. С. Перунов // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. сб. тр. Международной научной конференции. – 2019. – С. 1109–1115.

12. *Гоцев Д. В.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния упругого массива вблизи сферической полости с учетом технологической неоднородности его механических свойств / Д. В. Гоцев, Е. Н. Свиридова // Инженерный вестник Дона. – 2018. – № 3 (50). – С. 67.

13. *Бовт А. Н.* Механическое действие камуфлетного взрыва / А. Н. Бовт, Е. Е. Ловецкий, В. И. Селяков. – Москва : Недра, 1990. 184 с.

УДК 539.374

# К ОПИСАНИЮ ОДНОМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ

**Д. В. Гоцев[1,2], А. В. Ковалев[1,2], А. Н. Спорыхин[1], А. И. Шашкин[1]**

[1]*Воронежский государственный университет*
[2]*Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е Жуковского и Ю. А. Гагарина (г. Воронеж)*

**Аннотация.** Проводится анализ существующих способов моделирования упругих характеристик материалов с учетом их одномерной непрерывной неоднородности. В отличие от известных монотонных функциональных зависимостей, описывающих распределение механических характеристик упругих тел вдоль одного направления, в работе предложены модели для описания неоднородных упругих свойств материалов немонотонно распределенных вдоль одной координаты. Получено приближенное аналитическое решение задачи Ламе для конкретного немонотонного распределения модуля сдвига вдоль радиальной координаты. Решение получено в виде сходящейся последовательности приближений. Проведен численный эксперимент для конкретных значений аппроксимирующих коэффициентов и осуществлен анализ полученных результатов.
**Ключевые слова:** неоднородные материалы, одномерное немонотонное распределение упругих характеристик, решение задачи Ламе.

## Введение

Известно, что практически все реальные материалы обладают определенной структурной неоднородностью, обусловленной различного рода дефектами и неправильностью внутренней структуры. Неоднородности такого рода классифицируются как микронеоднородности в отличии от макронеоднородностей, характеризуемых зависимостью от координат физико-механических параметров среды.

В качестве примеров сред с макронеоднородными свойствами можно привести тела, находящиеся под действием различных физических процессов (взрывное воздействие, радиационное облучение, температурное поле и т. д.), в результате которых происходят изменения механических характеристик в зависимости от пространственных координат. Эти изменения могут быть весьма существенны, поэтому при расчетах и проектировании конструкций необходимо учитывать такого рода макронеоднородность.

По природе возникновения неоднородности ее можно классифицировать на естественную и наведенную. Под первой понимается неоднородность, образующаяся в процессе формирования тела или изготовления конструкции. Например, неоднородность бетонов возникает в результате неравномерности созревания [1–3 и др.]. Такого же типа неоднородность также наблюдается в грунтах и горных породах в процесс создания подземной полости буровзрывным способом [4–9 и др.]. Под наведенной неоднородностью механических свойств материалов понимается неоднородность, возникающая в процессе работы конструкции при различных сочетаниях многофакторных механических, термических, коррозионных, эрозионных и некоторых других процессов [2, 3, 10, 11].

Линейная теория упругости неоднородных тел базируется на использовании закона Гука, в котором упругие параметры материала являются функциями координат точек тела. В зависимости от типа этих функций неоднородные упругие тела можно разделить на три класса[3]:

– упругие тела с непрерывной неоднородностью;
– кусочно-однородные упругие тела;
– случайно-неоднородные упругие тела.

Функции, описывающие изменение механических свойств материала, являются соответственно непрерывными, кусочно-постоянными и случайными. Для каждого из указанных типов неоднородности математические модели, описывающие напряженно-деформированные состояния (НДС) тел, а также методы их решения существенно различны.

В настоящей работе будем рассматривать упругие тела с непрерывной неоднородностью в макроскопическом смысле. В этом случае решение задач механики деформируемых неоднородных тел (МДНТ), как правило, сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Вид коэффициентов и как следствие способы интегрирования уравнений в первую очередь определяются формой функциональных зависимостей, моделирующих изменение механических характеристик вдоль координат. Поэтому функции неоднородности с одной стороны должны быть достаточно простыми, что позволяет получить более простые уравнения, а с другой – наиболее адекватно описывать экспериментальные данные, так как даже небольшие отличия в выборе аппроксимирующих функций могут привести к существенно различным результатам.

При поиске аналитического решения модули упругости из-за сложности задач МДНТ, как правило, выбираются в виде линейной, экспоненциальной или степенная функций [1, 11, 12]. Такой подход позволяет существенно упростить уравнения, что в свою очередь в ряде задач позволяет получить точные или приближенные аналитические решения.

Однако, указанные функциональные зависимости, используемые для аппроксимации переменного модуля упругости, не всегда удовлетворяют не только количественной, но и качественной оценке результатов аппроксимации в сравнении с экспериментальными данными. Это относится к конструкциям и сооружениям, в которых наблюдается существенно немонотонный характер распределения упругих характеристик материалов.

В настоящей работе авторами была сделана попытка обобщить класс функциональных зависимостей, аппроксимирующих упругие характеристики неоднородных материалов на случай немонотонных функций и проиллюстрировать их использование в рамках постановки упругой задачи Ламе для неоднородных материалов.

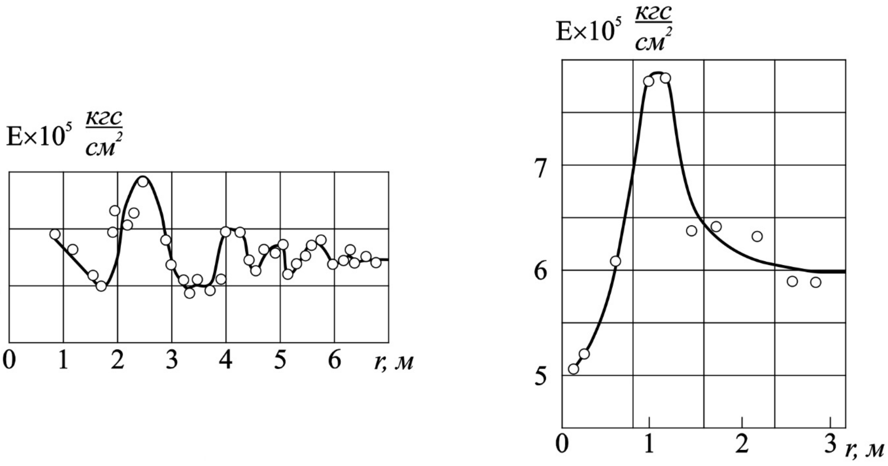
## 1. Одномерные модели непрерывных распределений упругих характеристик неоднородного материла

Одной из первых задач при определении НДС неоднородных тел является нахождение способа аппроксимации реальных зависимостей механических характеристики от координат.

Как было отмечено во введении до настоящего времени в большинстве работ, посвященных определению НДС в конкретных конструкциях, выполненных из неоднородных материалов, механические характеристики выбираются в виде линейной, экспоненциальной или степенной функций. Данные зависимости описывают, как правило, монотонное распределение механических характеристик вдоль какой-либо координаты, то есть материал либо упрочняется (монотонно возрастающие функции) либо разупрочняется (монотонно убывающие функции).

Однако, на практике часто используются конструкции из материалов, механические характеристики которых имеют существенно немонотонный характер распределения. Такие сооружения нередко встречаются в горной механике. Например, при создании горных выработок буровзрывным способом или подземных полостей с помощью камуфлетных взрывов наблюдается зависимость механических характеристик материалов с явно выраженными экстремумами вблизи внутренней поверхности [4].

В настоящем разделе для цилиндрических конструкций рассмотрены различные виды распределений параметра Ламе $\mu = \mu(r)$ или модуля упругости – $E = E(r)$ материала вдоль радиальной координаты.




*а)* *б)*

*Рис. 1. Экспериментальные значения модуля упругости $E(r)$ вблизи сферической полости, образованной а) буровзрывным способом в песчано-глинистом сланце (h = 187 м); б) камуфлетным взрывом в песчанике на глубине (h = 375 м)*

### *1.1. Аппроксимация экспериментальных значений механических характеристик одномерно неоднородного материала обобщенными полиномами*

Пусть заданы экспериментальные значения какой-либо механической характеристики материала, в зависимости от координаты. Например, пусть известны значения модуля упругости материала при $n$ различных значениях радиальной координаты, то есть

$$E\left(r_j\right) = E_j,\ r_j \geq a,\ j = 1,\ 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Так же пусть известен характер поведения $E(r)$ при $r \to \infty$, например

$$\lim_{r\to\infty} E\left(r\right) = E_0. \tag{2}$$

Отметим, что условие (2), в частности, для подземных сооружений означает, что при удалении от внутренней поверхности выработки модуль упругости материала горного массива стремится к величине $E_0$, которая является модулем упругости материала массива до создания в нем подземной полости.

Задача заключается в нахождении такой функциональной зависимости $E = E(r)$, чтобы выполнялись условия (1) и (2) при $r \in \left[a, \infty\right)$, то есть ставятся задачи интерполяции функции вблизи выработки и ее экстраполяции при удавлении от выработки.

В работе [13] искомую функцию предлагается аппроксимировать полиномом $n$-й степени с неопределенными коэффициентами по отрицательным степеням координаты, то есть в форме

$$E\left(r\right) = E_0 \sum_{i=0}^{n} e_i r^{-i}, \tag{3}$$

При этом коэффициенты $e_0,\ e_1,\ \ldots, e_n$ определяются из решения СЛАУ (1), совместно с условием (2).

Однако, аппроксимация $E(r)$ многочленом по отрицательным степеням вида (3) имеет существенный недостаток. Так, если исходные данные имеют немонотонный характер распределения искомой функции $E(r)$ на локальном участке координаты, то аппроксимация вида (3) приводит к существенным отклонениям получающейся функции от исходных (узловых) значений. Например, если в качестве исходных, брать данные представленные на рис. 1, то аппроксимация вида (3) приводит к тому, что значения получающейся функции не в узловых точках отличаются от экспериментальных на порядок. Особенно это наблюдается на участках существенной неоднородности материала (для пункта а рис. 1 это $0.8 \le r \le 6$, а для пункта б – $0.1 \le r \le 1.7$).

Чтобы избежать этого недостатка будем аппроксимировать $E(r)$ в области существенной неоднородности $(a \le r < r^*)$ полиномом по положительным степеням радиальной координаты, тогда как при $r \ge r^*$ функция $E(r)$ будет совпадать с видом (3), в итоге

$$E(r) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{m} e_i^{(1)} r^i, \ a \le r \le r^*, \\ E_0 \sum\limits_{i=0}^{n-m+1} e_i^{(2)} r^{-i}, \ r \ge r^*, \end{cases} \qquad (4)$$

где $r^*$ – граница области существенной неоднородности (или области поврежденности), $m$, $n$ – количество экспериментальных точек в областях $a \le r \le r^*$ и $r \ge r^*$ соответственно.

Коэффициенты $e_0^{(1)},\ e_1^{(1)},\ \ldots, e_m^{(1)}$ и $e_0^{(2)},\ e_1^{(2)},\ \ldots, e_{n-m}^{(2)}$ определяются из системы (1), (2).

В качестве примера беря за исходные данные экспериментальные точки, представленные на рис. 1 пункта б, получим функцию вида

$$E(r) = \begin{cases} 1 - 0.327r + 0.251r^2 - 0.075r^3 + 0.011r^4 - 0.89 \cdot 10^{-3} r^5 + 35 \cdot 10^{-6} r^6 - 5 \cdot 10^{-7} r^7, \ 1 \le r \le r^*, \\ 1 + \dfrac{132.8}{r} - \dfrac{9326.7}{r^2} + \dfrac{213215}{r^3} - \dfrac{1.57 \cdot 10^6}{r^4}, \ r \ge r^*, \end{cases}$$

которая вместе с экспериментальными точками представлены на рис. 2.

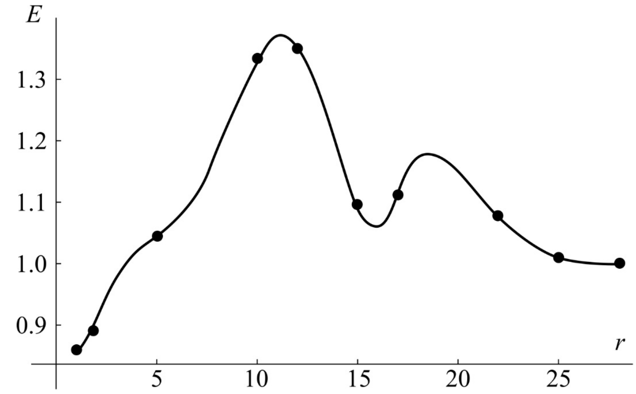



*Рис. 2. Аппроксимация нормированного модуля упругости обобщенным полиномом*

В полученной формуле и на представленном графике величины с размерностью длины отнесены к радиусу $a$ сферической полости, а с размерностью напряжений – к модулю упругости $E_0$ нетронутого массива, при этом обозначения безразмерных величин оставим прежними. Кроме того коэффициенты полиномов аппроксимирующей функции представлены с точностью до третьего знака после запятой.

### *1.2. Модели, описывающие одномерные функциональные зависимости упругих характеристик непрерывно-неоднородного материла*

В настоящем пункте в отличие от известных [1, 12] монотонных зависимостей модуля упругости $E = E(r)$ или параметра Ламе $\mu = \mu(r)$ материала предложена немонотонная модель указанных характеристик. Не ограничивая общности относительно выбора упругих характеристик, в дальнейшем будем говорить о зависимости параметра Ламе материала от радиальной координаты, при этом значение коэффициента Пуассона принимается постоянным. Рассмотрим следующий вид зависимости

$$\mu(r)=\mu_0\left(1+ke^{-\alpha r}\left(\cos(\beta r+\omega)+\sin(\beta r+\omega)\right)\right), \tag{5}$$

где $k,\ \alpha,\ \beta,\ \omega$ – параметры аппроксимации $(\alpha>0)$, $\mu_0$ – параметр Ламе соответствующего однородного материала.

Отметим, что аппроксимирующие коэффициенты, входящие в представленную модель (5) определяются на основании экспериментальных данных таким образом, чтобы получающаяся кривая была наиболее приближена, например, в смысле «наименьших квадратов» к исходным данным. Это может быть осуществлено различными способами, описание которых не является предметом настоящего исследования.

Графики распределения (5) при различных значениях аппроксимирующих коэффициентов представлены на рис. 3 случаями а, б, в, г.

По умолчанию, для построенных графических зависимостей принимались следующие значения параметров аппроксимирующей модели (5) $\mu_0=1,\ \alpha=1,\ \beta=2,\ \omega=0,\ k=0.1.$

Из анализа представленных графиков следует, что данная зависимость $\mu(r)$ описывает немонотонный характер распределения указанной характеристики с выраженными экстремумами вблизи внутренней поверхности. При этом параметр $\alpha$ влияет на скорость затухания колебаний неоднородных свойств материала, так чем больше $\alpha$, тем быстрее аппроксимирующая кривая приближается к $\mu_0$. Параметры $k,\ \beta,\ \omega$ отвечают за амплитуду, количество волн вдоль радиальной координаты и начальную фазу немонотонного характера распределения неоднородных упругих свойств материала соответственно. При этом случай $k=0$ – соответствует однородному материалу.

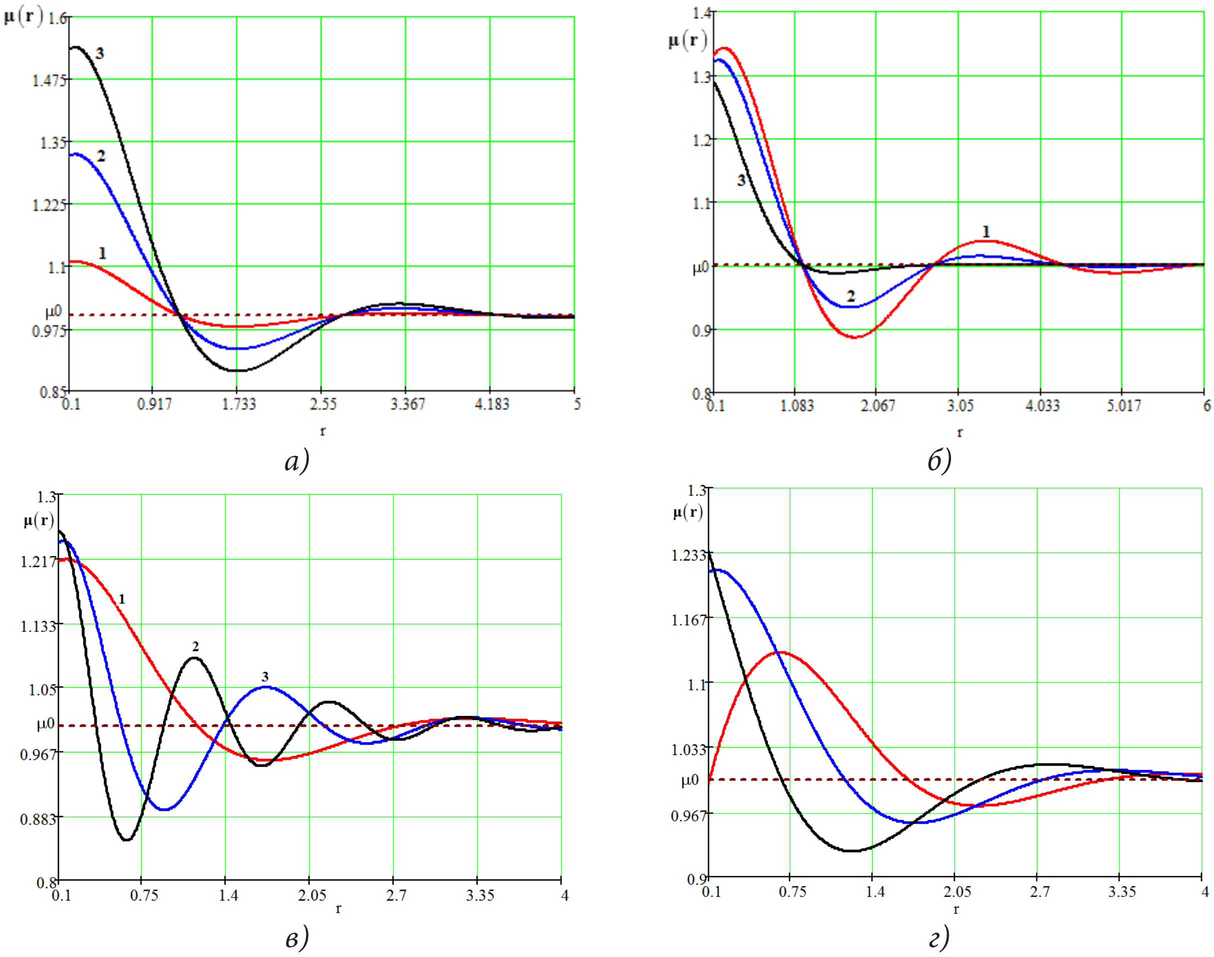



*Рис. 3. Распределение параметра Ламе $\mu=\mu(r)$ неоднородного материала вдоль радиальной координаты при различных значениях аппроксимирующих коэффициентов $k,\ \alpha,\ \beta,\ \omega$ – рисунки а), б) в) и г) соответственно*

На рис. 3а) кривая 1 соответствует значению $k = 0.1$; кривая 2 – $k = 0.3$; кривая 3 – $k = 0.5$. На рис. 3б) кривая 1 соответствует значению $\alpha = 0.7$; кривая 2 – $\alpha = 1$; кривая 3 – $\alpha = 2$. На рис. 3в) кривая 1 соответствует значению $\beta = 2$; кривая 2 – $\beta = 4$; кривая 3 – $\beta = 6$. На рис. 3г) кривая 1 соответствует значению $\omega = -1$; кривая 2 – $\omega = 0$; кривая 3 – $\omega = 1$. При этом для рис. 3б) значение параметра $k$ бралось равным 0.3, а для рисунков 3в) и 3г) – $k = 0.2$.

## 2. Математическая модель НДС упругого сжимаемого цилиндрического тела с учетом радиальной неоднородности его механических свойств

Известно, что к решению задачи Ламе для различных моделей сред, сводится целый класс цилиндрических задач механики горных пород. В том числе для моделей непрерывно неоднородных упругих сред. Это связано с тем, что практически во всех породных массивах наблюдается естественная или искусственная неоднородность их механических свойств. Последняя появляется в процессе технологического воздействия на горный массив, в частности при создании горных выработок буровзрыным способом или подземных полостей, сооружаемых взрывом камуфлетных зарядов. При этом первоначально однородно-изотропный массив в результате приобретает технологическую неоднородность деформационных характеристик.

С точки зрения математического моделирования задача о распределении полей напряжений и перемещений в крепи вертикальной горной выработки, сводится к задаче определения НДС неоднородного цилиндрического тела с внутренним радиусом $a$ и внешним – $b$. Сжимающая нагрузка интенсивностью $q_a$ равномерно распределенная по внутренней поверхности крепи моделирует собой давление жидкости или газа на крепь. По внешней поверхности крепи действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q_b$, моделирующая собой давление породного массива на крепь вертикальной горной выработки.

Если в указанной постановке $b \to \infty$ и $q_b = gh$, то приходим к задаче определения распределения полей напряжений и перемещений в приконтурной области массива с вертикальной выработкой. При этом на бесконечном удалении от рассматриваемой выработки массив находится под действием гидростатического поля напряжений, характеризуемого величиной $gh$ ($g$ – объемный вес вышележащих пород, $h$ – глубина заложения).

Таким образом, в обоих описанных выше случаях, имеем дело с постановкой упругой задачи Ламе для неоднородного цилиндрического тела. При этом для случая крепи вертикальной горной выработки – цилиндр имеет конечную толщину $b - a$, а в случае, определения НДС в приконтурной области массива – рассматривается цилиндрической тело с бесконечным внешним радиусом. Очевидно, что из решения первой задачи путем предельного перехода при $b \to \infty$ и $q_b = gh$ можно получить соответствующие решения второй задачи.

Отметим также, что к решению задачи Ламе для радиально неоднородных материалов, сводится задача о деформировании толстостенной трубы, внутри которой находится активно действующая агрессивная или радиоактивная среда, приводящая к неоднородному изменению механических характеристик материала [10, 12 и др.].

### *2.1. Постановка задачи Ламе и ее решение для радиально неоднородного упругого сжимаемого материала*

В настоящем пункте в рамках модели деформирования упругого сжимаемого материала с непрерывной зависимостью параметра Ламе – $\mu = \mu(r)$ от радиальной координаты при постоянстве коэффициента Пуассона – $\nu = \text{const} \neq 0.5$, рассматривается задача о деформировании толстостенного цилиндрического тела, находящегося под действием сжимающих нагрузок интенсивностями $q_a$ и $q_b$, равномерно распределённых по внутренней $(r = a)$ и внешней $(r = b)$ поверхности (рис. 4).

Исходя из описанной выше постановки задачи, имеет место осевая симметрия. Решение будем проводить в рамках плоско деформированного состояния.

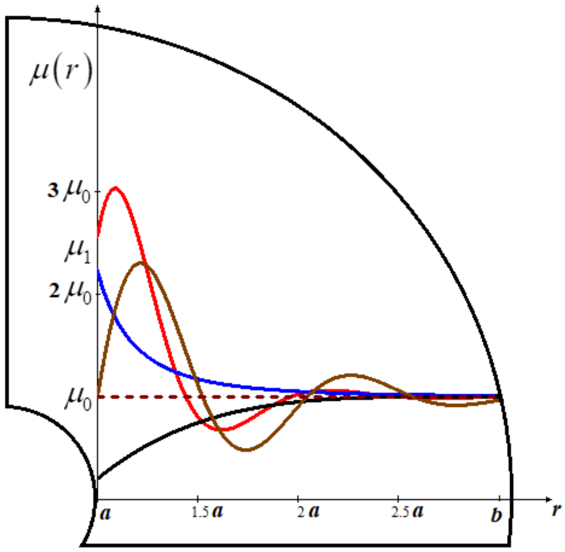



*Рис. 4. Расчетная схема для радиально неоднородного цилиндрического тела под действием равномерно сжимающих нагрузок*

Тогда НДС рассматриваемого цилиндрического тела в цилиндрической системе координат $r, \ \theta, \ z$ будет описываться только главными ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций, а также радиальной составляющей вектора перемещений, которые будут являться функциями радиальной координаты

$$\begin{gathered} \sigma_r = \sigma_r(r), \ \sigma_\theta = \sigma_\theta(r), \ \sigma_z = \sigma_z(r), \\ \varepsilon_r = \varepsilon_r(r), \ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(r), \ \varepsilon_z = 0, \\ u = u(r). \end{gathered} \tag{6}$$

С учетом (6) три уравнения равновесия преобразуются к одному

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \tag{7}$$

соотношения Коши примут вид

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \tag{8}$$

формулы закона Гука с учетом (5) через параметры $\mu$ и $\nu$, преобразуются к форме

$$\begin{gathered} \sigma_r = 2\mu(r)\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\Theta + \varepsilon_r\right), \ \sigma_\theta = 2\mu(r)\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\Theta + \varepsilon_\theta\right), \\ \sigma_z = 2\mu(r)\frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\Theta, \ \Theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta \end{gathered} \tag{9}$$

или с учетом (8)

$$\begin{gathered} \sigma_r = 2\mu(r)\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{du}{dr} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{u}{r}\right), \sigma_\theta = 2\mu(r)\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{du}{dr}\right), \\ \sigma_z = 2\mu(r)\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right); \end{gathered} \tag{10}$$

граничные условия в напряжениях для рассматриваемой задачи запишутся в форме

$$\sigma_r\big|_{r=a} = -q_a, \ \ \sigma_r\big|_{r=b} = -q_b. \tag{11}$$

Решение задачи будем проводить согласно алгоритму изложенному в работе [12].

Перепишем уравнение равновесия (7) в перемещениях учитывая при этом (10)

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu(r)}{r}(u\cdot r)'\right)=\mu'(r)\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{u}{r}. \tag{12}$$

Далее организуем итерационный процесс по формуле

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu(r)}{r}\frac{d}{dr}(u_{k+1}\cdot r)\right)=\mu'(r)\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{u_k}{r}. \tag{13}$$

Решение неоднородного уравнения (13) найдем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и произвольного частного решения неоднородного уравнения. В итоге итерационная формула для определения радиальной компоненты вектора перемещений примет вид

$$u_{k+1}=\frac{A_{k+1}}{r}\int_a^r\frac{x}{\mu(x)}dx+\frac{B_{k+1}}{r}+G_k(r), \tag{14}$$

где $A_{k+1}$, $B_{k+1}$ – константы интегрирования,

$$G_k(r)=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}\int_a^r Q_k(y)\,dy,\ Q_k(y)=\frac{y}{\mu(y)}\int_a^y\mu'(x)\frac{u_k}{x}dx. \tag{15}$$

Используя соотношения Коши (8) при учете (14) получим итерационные соотношения для компонент деформаций и объемной деформации $\Theta$

$$(\varepsilon_r)_{k+1}=A_{k+1}\left(\frac{1}{\mu(r)}-\frac{1}{r^2}\int_a^r\frac{x}{\mu(x)}dx\right)-\frac{B_{k+1}}{r^2}+\frac{dG_k(r)}{dr},(\varepsilon_\theta)_{k+1}=\frac{A_{k+1}}{r^2}\int_a^r\frac{x}{\mu(x)}dx+\frac{B_{k+1}}{r^2}+\frac{G_k(r)}{r},$$
$$\Theta_{k+1}=\frac{A_{k+1}}{\mu(r)}+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{Q_k(r)}{r}. \tag{16}$$

Итерационные формулы для определения компонент напряжений с учетом (9) и (16) определятся в форме

$$(\sigma_r)_{k+1}=2\mu(r)\left(A_{k+1}F(r)-\frac{B_{k+1}}{r^2}-H_k(r)\right),(\sigma_\theta)_{k+1}=2\mu(r)\left(\quad(\quad)\quad_{k+1}+\frac{B_{k+1}}{r^2}+\quad_k(\quad)\right),$$
$$(\sigma_z)_{k+1}=\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(A_{k+1}+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\mu(r)\frac{Q_k(r)}{r}\right), \tag{17}$$

где введены следующие обозначения

$$F(r)=\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{1}{\mu(r)}-\frac{1}{r^2}\int_a^r\frac{x}{\mu(x)}dx,\ M(r)=\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{\mu(r)}-F(r),$$
$$H_k(r)=\frac{Q_k(r)}{r}+\frac{2\nu-1}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int_a^r Q_k(y)\,dy,\ T_k(r)=\frac{1}{1-\nu}\frac{Q_k(r)}{r}-H_k(r). \tag{18}$$

Константы интегрирования $A_{k+1}$, $B_{k+1}$ определятся из граничных условий (11) при учете (17), (18) в форме

$$A_{k+1}=\frac{a^2\left(\dfrac{q_a}{2\mu(a)}+H_k(a)\right)-b^2\left(\dfrac{q_b}{2\mu(b)}+H_k(b)\right)}{b^2F(b)-a^2F(a)},\ B_{k+1}=a^2\left(F(a)A_{k+1}+H_k(a)+\frac{q_a}{2\mu(a)}\right) \tag{19}$$

где согласно (18) и (15)

$$F(a)=\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{1}{\mu(a)},\ F(b)=\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{1}{\mu(b)}-\frac{1}{b^2}\int_a^b\frac{r}{\mu(r)}dr,$$
$$H_k(a)=0,\ H_k(b)=\frac{1}{\mu(b)}\int_a^b\mu'(x)\frac{u_k}{x}dx+\frac{2\nu-1}{1-\nu}\frac{1}{b^2}\int_a^b Q_k(y)dy, \tag{20}$$

Таким образом, соотношения (14), (16), (17), (19) с учетом введенных обозначений (15), (18), (20) являются итерационными формулами, описывающими НДС цилиндрического тела из упруго-сжимаемого неоднородного материала с непрерывной зависимостью параметра Ламе – $\mu=\mu(r)$ от радиальной координаты при постоянстве коэффициента Пуассона – $\nu=\text{const}\neq 0.5$.

Как отмечается в работе [12] коэффициент $\frac{1-2\nu}{1-\nu}$ в формуле (15) строго меньше единицы. Поэтому при вычислении интегралов в (14) для последовательного определения радиальной компоненты вектора перемещений получающаяся последовательность $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,u_n,\ldots$ может быть мажорирована сходящейся геометрической прогрессией, что обеспечивает ее равномерную сходимость.

### *2.2. Результаты и анализ численного эксперимента по полученным решениям задачи Ламе для радиально неоднородного упругого сжимаемого материала*

Результаты численного эксперимента по полученным соотношениям (первое и второе приближения), описывающим НДС упругого цилиндрического тела из радиально неоднородного сжимаемого материала представлены на рис. 5–10.

Для последовательного определения констант интегрирования и компонент НДС рассматриваемой задачи за начальное приближение выберем нулевое $u_0=0$. В качестве зависимости, аппроксимирующей радиально неоднородные упругие свойства материала использовалась немонотонная функция вида (5). При этом, если не оговорено иного, значение аппроксимирующих параметров принимались следующими $k=2.5,\ \alpha=1.5,\ \beta=6,\ \omega=0$.

Расчеты проводились в относительных величинах. Все величины, имеющие размерность напряжений отнесены к модулю сдвига $\mu_0$ однородного материала, а величины, имеющие размерность длины к внутреннему радиусу $a$ – рассматриваемого цилиндрического тела. В качестве относительных исходных физико-механических и геометрических параметров задачи, брались следующие значения $\mu_0=1,\ q_a=0.03,\ q_b=0.8,\ a=1,\ b=3a$.

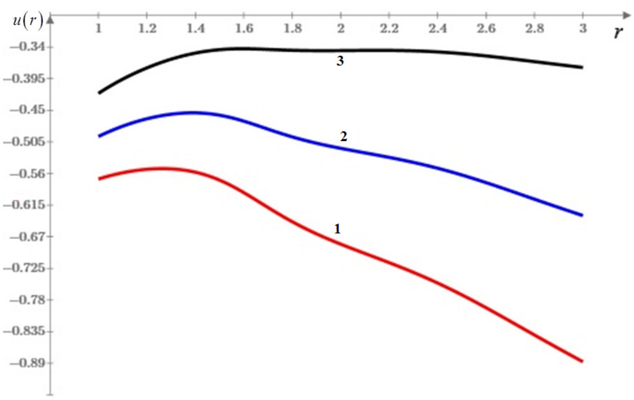



*Рис. 5*

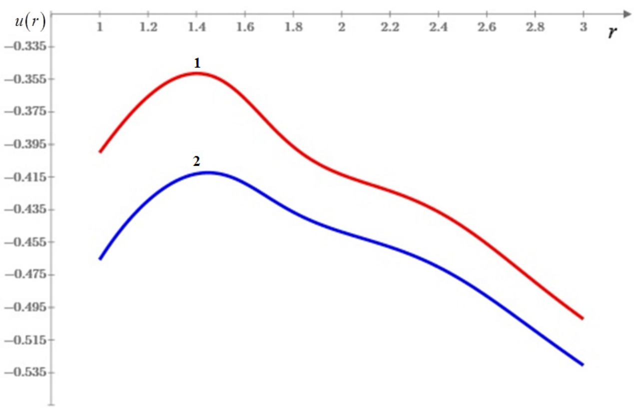



*Рис. 6*

На рис. 5 показаны зависимости радиальной компоненты вектора перемещений во втором приближении от радиальной координаты для различных значений коэффициента Пуассона $\nu$.

На рис. 6 представлены зависимости радиальной компоненты вектора перемещений в первом (кривая 1) и во втором (кривая 2) приближении.

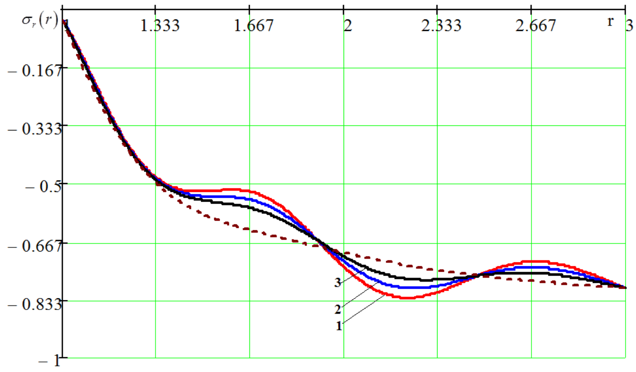



*Рис. 7*

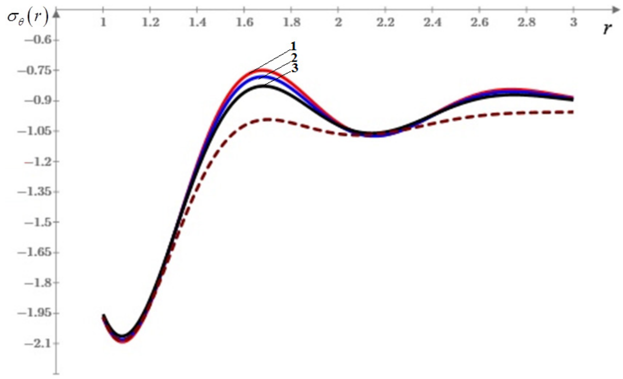



*Рис. 8*

На рис. 7 и 8 показаны зависимости радиальной (рис. 7) и окружной (рис. 8) компонент напряжений во втором приближении от радиальной координаты при различных значениях коэффициента Пуассона $\nu$ (пунктиром отмечены линии, соответствующие случаю несжимаемого материала ($\nu = 0.5$)).

На рис. 9 и 10 представлены эпюры радиальной (рис. 9) и окружной (рис. 10) составляющих тензора напряжений в первом (кривые 1) и втором (кривые 2) приближениях.

На каждом из рис. 5, 7, 8 кривая 1 соответствует $\nu = 0.2$, кривая 2 – $\nu = 0.3$, кривая 3 – $\nu = 0.4$. Для зависимостей, представленных на рис. 6, 9, 10 значения коэффициента Пуассона бралось $\nu = 0.34$.

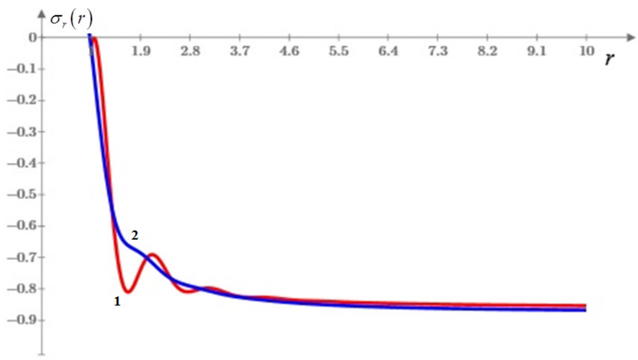



*Рис. 9*

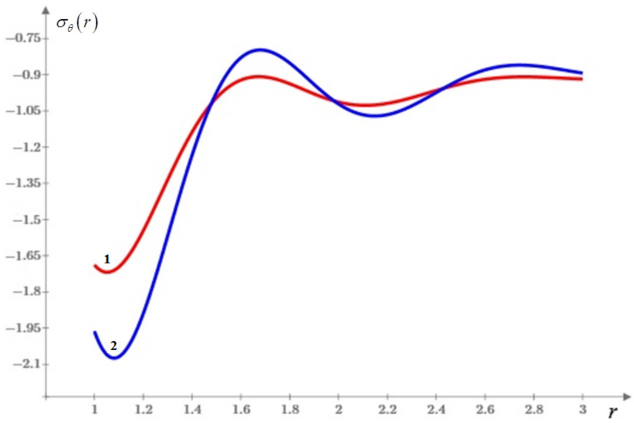



*Рис. 10*

Из анализа представленных зависимостей можно сделать следующие выводы:

• наблюдается (в большей или меньшей степени) зависимость компонент НДС от параметров аппроксимации, при этом изменения параметров аппроксимации может оказывать влияние, как на количественное значение, так и на качественный характер поведения исследуемых компонент НДС;

• изменение коэффициента Пуассона $\nu$ приводит к существенному изменению радиальной составляющей вектора перемещения; в меньше степени изменения ν отражается на характере поведения радиальной и окружной компонент тензора напряжений;

• наблюдается немонотонное распределение исследуемых компонент НДС вдоль радиальной координаты;

• наблюдается близость соответствующих зависимостей в первом и втором приближениях, что еще раз подтверждает сходимость полученных итерационных формул.

## Заключение

В заключении сформулируем основные результаты настоящего исследования.

Представлен полуаналитический метод восстановления функции $E(r)$ по экспериментальным данным через обобщенные полиномы. Приведен пример использования обобщенных полиномов при аппроксимации модуля упругости на основе его экспериментальных значений вблизи сферической полости, образованной камуфлетным взрывом в песчанике на глубине $h = 375$ м. Предложена функциональная зависимость для аппроксимации неоднородных упругих характеристик материалов вдоль одной координаты с учетом существенной немонотонности характера их распределения. Проведен анализ влияния параметров аппроксимации на характер распределения упругих характеристик вдоль рассматриваемой координаты. Разработана математическая модель и найдены аналитические решения, описывающие НДС упругого сжимаемого цилиндрического тела, находящегося под действием равномерно сжимающих радиальных нагрузок с учетом неоднородности механических характеристик материала. На основе найденных решений для предложенной функциональной зависимости, описывающей радиально немонотонное распределение параметра Ламе, проведен численный эксперимент. Осуществлен анализ результатов численного эксперимента по выявлению влияния параметров аппроксимации на распределение полей напряжений и перемещений.

## Литература


1. *Андреев В. И.* Механика неоднородных тел : учеб. пособие / В. И. Андреев. – Москва : Изд-во Юрайт, 2002. – 288 с.

2. *Колчин Г. Б.* Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов / Г. Б. Колчин. – Кишинев : Изд-во «КартяМолдовеняскэ», 1971. – 172 с.

3. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М : Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 367 с.

4. *Баклашов И. В.* Механические процессы в породных массивах / И В. Баклашов, Б. А. Картозия. – Москва : Недра, 1986. – 272 с.

5. *Басарыгин Ю. М.* Осложнения и аварии при бурении нефтяных и газовых скважин / Ю. М. Басарыгин, А. И. Булатов, Ю. М. Проселков. – Москва : Недра-Бизнесцентр, 2000. – 679 с.

6. *Бовт А. Н.* Механическое действие камуфлетного взрыва / А. Н. Бовт, Е. Е. Ловецкий, В. И. Селяков. – Москва : Недра, 1990. – 184 с.

7. *Гоцев Д. В.* Численно-аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния неоднородного упругого породного массива ослабленного сферической полостью / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Внуков // Воздушно-космические силы. Теория и практика. – 2019. – № 11. – С. 45–57.

8. *Гоцев Д. В.* Напряженно-деформированное состояние двухслойной сферической конструкции с учетом пористой структуры внутреннего слоя и неоднородности внешнего слоя / Д. В. Гоцев, Н. С. Перунов // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. сб. тр. Международной научной конференции. – 2019. – С. 1109–1115.

9. *Гоцев Д. В.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния упругого массива вблизи сферической полости с учетом технологической неоднородности его механических свойств / Д. В. Гоцев, Е. Н. Свиридова // Инженерный вестник Дона. – 2018. – № 3 (50). – С. 67.

10. *Герасимов В. В.* Коррозия реакторных материалов. / В. В. Герасимов. – Москва : Атомиздат, 1980. – 256 с.

11. *Локощенко А. М.* Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов / А. М. Локощенко. – Москва : МГИУ, 2007. – 264 с.

12. *Шарафутдинов Г. З.* Некоторые осесимметричные задачи для упругой неоднородной толстостенной трубы / Г. З. Шарафутдинов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. – 2008. – № 2. – С. 34–39.

13. *Алимжанов А. М.* Напряженно-деформированное состояние и устойчивость пород приконтурной зоны подземной сферической полости в массиве с технологической неоднородностью механических свойств пород / А. М. Алимжанов // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2012. – № 6. – С. 32–46. http://www.ogbus.ru

УДК 531.8:519.2

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОРСИОННОГО ВОЛНОВОДА УЛЬТРАЗВУКОВОГО МЕДИЦИНСКОГО ИНСТРУМЕНТА

**А. М. Гуськов, Ю. В. Григорьев, П. А. Пья**

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

**Аннотация.** На базе аналитических решений для ряда торсионных волноводов выведены матрицы перехода, используемые затем для расчета крутильных колебаний методом начальных параметров. В работе содержится сравнительный анализ различных видов концентраторов. В качестве расчётной схемы волновода принят прямолинейный стержень переменного сечения с различными видами закрепления. Представлена методика численного определения собственных частот и форм колебаний волновода ультразвукового медицинского инструмента (УЗМИ). Для заданной компоновки волновода проведен расчёт амплитудных углов поворота и крутящих моментов в УЗМИ при определённой частоте возбуждения колебаний. Продемонстрировано удовлетворительное совпадение полученных результатов.

**Ключевые слова:** метод начальных параметров, торсионный волновод-концентратор ультразвуковых колебаний, собственная частота.

**Цель работы** — разработка математической модели для расчета торсионного волновода ультразвукового медицинского инструмента.

Принцип работы торсионного ультразвукового скальпеля во многом схож с принципом работы классического ультразвукового скальпеля [1, 6, 8]. За исключение того, что колебания рабочего наконечника — крутильные колебания.

Расчет собственных частот и собственных форм колебаний волновода торсионного ультразвукового скальпеля основан на уравнении крутильных колебаний стержня переменного сечения

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(GI_k(z)\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}\right)-\rho I_p(z)\frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

где $G$ — модуль упругости 2-го рода (модуль сдвига);

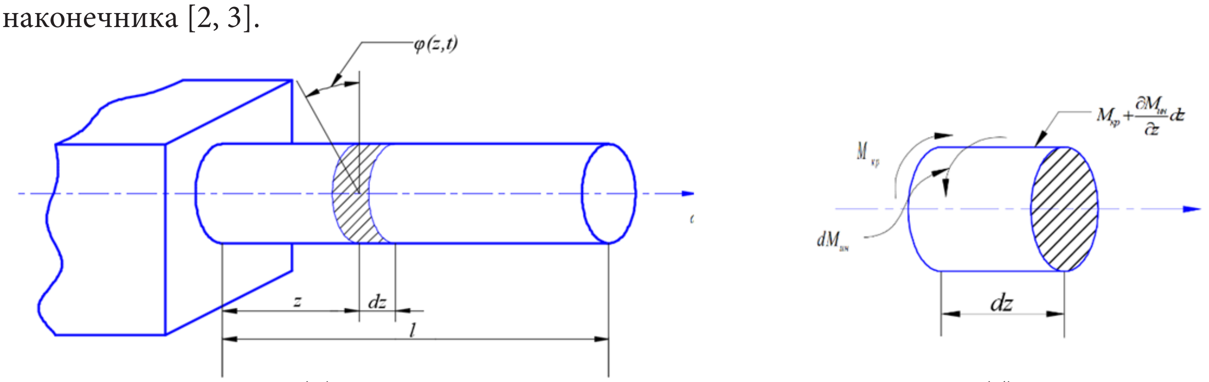
$I_k(z)$ — геометрический фактор жесткости поперечного сечения при кручении;

$\theta(z,t)$ — угол закручивания поперечного сечения с координатой $z$ в момент времени $t$;

$\rho$ — плотность материала;

$I_p(z)$ — полярный момент инерции поперечного сечения относительно его центра.

Торсионный ультразвуковой скальпель обеспечивает повышенную безопасность для пользователя, т. е. уменьшает риск непреднамеренного дистального проникновения конца рабочего наконечника [2, 3].




(а) (б)

*Рис. 1. (а) Стержень с произвольным поперечным сечением (б) Элемент стержня*

Для описания свободных гармонических крутильных колебаний представим решение в виде

$$\varphi(t,z)=\varphi_0\cos pt,$$

где $p$ — собственная частота колебаний;

$$\frac{d}{dz}\left[GI_{кр}(z)\frac{d\varphi_0}{dz}\right]+\rho I_{\partial}(z)p^2\varphi_0=0; \tag{2}$$

$$\frac{d}{dz}\left(GI_{кр}(z)\right)\frac{d\varphi_0}{dz}+GI_{кр}(z)\frac{d^2\varphi_0}{dz^2}+\rho I_{\partial}(z)p^2\varphi_0=0;$$

$$\frac{d^2\varphi_0}{dz^2}+h(z)\frac{d\varphi_0}{dz}+\alpha^2\varphi_0=0; \tag{3}$$

где $h(z)=\dfrac{\frac{d}{dz}I_{кр}(z)}{I_{кр}(z)}$; $\alpha^2=\rho\dfrac{I_{\partial}(z)p^2}{GI_{кр}(z)}$;

Для круглого поперечного сечения $I_{кр}=I_p=\dfrac{\pi d^4}{32}$, поэтому $\alpha^2=\dfrac{p^2}{c^2}$, где $c=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ — скорость распространения волны сдвига.

Далее запишем аналитические решения (3) для некоторых видов волноводов [4, 5, 7]

**Цилиндрический волновод**

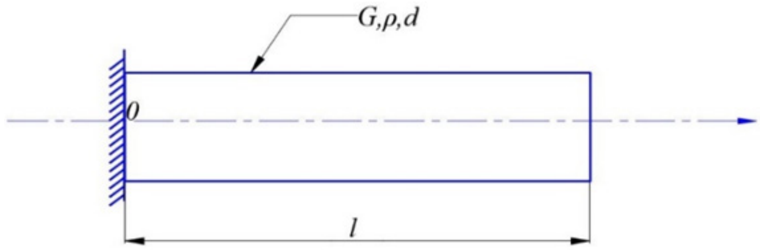



*Рис. 2. Цилидрический волновод с круглым сечением*

Дифференциальное уравнение колебаний (3) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi_0}{dz^2}+\alpha^2\varphi_0=0; \tag{4}$$

Решение запишем в виде

$$\varphi_0(z)=C_1\cos\alpha z+C_2\sin\alpha z; \tag{5}$$

$C_1$ и $C_2$ — константы, определяемые из граничных условий, например, для консольного стержня

$$z=0\rightarrow\varphi_0=0;\ \ z=l\rightarrow\frac{d\varphi_0}{dz}=0;$$

**Конический волновод**

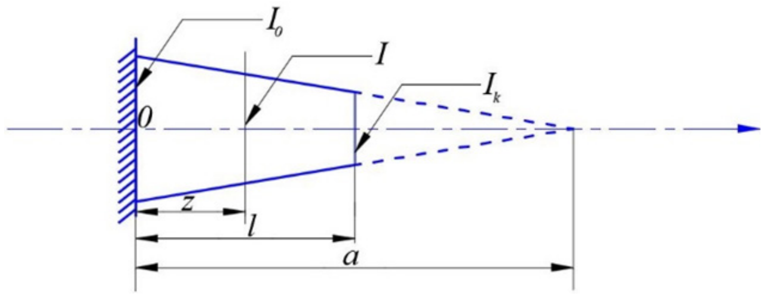



*Рис. 3. Конический волновод с круглым сечением*

Для конуса (рис. 3) полярный момент инерции $I(z)$ изменяется по следующему закону:

$$I_\delta(z) = I_0\left[1-\left(\frac{z}{a}\right)\right]^4; \text{ где } a = l\frac{d_0}{d_0-d_k};$$

$$h(z) = \frac{\frac{d}{dz}I(z)}{I(z)} = \frac{4\left(1-\frac{z}{a}\right)^3\left(-\frac{1}{a}\right)}{\left(1-\frac{z}{a}\right)^4} = \frac{4}{(z-a)};$$

Уравнение ( 3) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi_0}{dz^2}+\frac{4}{z-a}\frac{d\varphi_0}{dz}+\alpha^2\varphi_0 = 0; \tag{6}$$

$$\varphi_0(z) = \frac{2}{z-a}\left[C_1\cos\alpha z + C_2\sin\alpha z\right]; \tag{7}$$

**Экспоненциальный волновод**

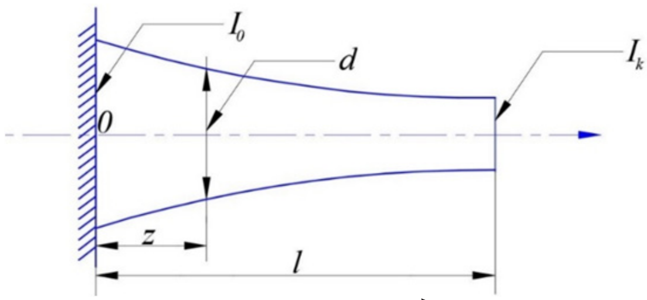



*Рис. 4. Экспоненциальный волновод с круглым сечением*

Для экспоненты (рис. 4) полярный момент инерции изменяется по следующему закону

$$I_p(z) = I_0 e^{-\beta z},$$

$\beta$ определяется из условия $\beta = \frac{1}{l}\ln\left(\frac{d_0}{d_k}\right)^4 = \frac{4}{l}\ln\frac{d_0}{d_k}.$

Уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi_0}{dz^2}-2\beta\frac{d\varphi_0}{dz}+\alpha^2\varphi_0 = 0. \tag{8}$$

Если $\beta < \alpha,$ то имеем пологий рупор, для которого

$$\varphi_0(z) = e^{\beta z}\left[C_1\cos\alpha_1 z + C_2\sin\alpha_1 z\right], \tag{9}$$

где $\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$

Если $\beta > \alpha,$ то получаем крутой рупор, для которого

$$\varphi_0(z) = e^{\beta z}\left[C_1\,\mathrm{c}h\alpha_1 z + C_2\,\mathrm{s}h\alpha_1 z\right], \tag{10}$$

где $\alpha_1 = \sqrt{\beta^2-\alpha^2}.$

## Матричный метод начальных параметров для расчета сложных торсионных волноводов

### Цилиндрический участок

Закон изменения амплитуды угла поворота (5) имеет вид

$$\varphi_0(z) = C_1\cos\alpha z + C_2\sin\alpha z.$$

Амплитуда крутящего момента, соответственно, равна

$$M_0(z)=GI_p\varphi_0'(z)=GI_p\alpha(-C_1\sin\alpha z+C_2\cos\alpha z).$$

Выразив $C_1$ и $C_2$ через $\varphi_{00}$ и $M_{00}$ в начале координат (рис. 2)

$$C_1=\varphi_{00},\qquad C_2=\frac{M_{00}}{GI_p\alpha};$$

окончательно получим зависимости

$$\varphi_0(z)=\varphi_{00}\cos\alpha z+\frac{M_{00}}{GI_p\alpha}\sin\alpha z; \tag{11}$$

$$M_0(z)=-GI_p\alpha\varphi_{00}\sin\alpha z+M_{00}\cos\alpha z. \tag{12}$$

Введем понятие вектора состояния системы в начале координат (рис. 2)

$$\overline{Y_0}=\begin{Bmatrix}\varphi_{00}\\ M_{00}\end{Bmatrix}$$

и в конце цилиндрического участка $(z=l)$ соответственно

$$\overline{Y_0}=\begin{Bmatrix}\varphi_{00}\\ M_{00}\end{Bmatrix}\text{ и }\overline{Y_ê}=\begin{Bmatrix}\varphi_{0к}\\ M_{0к}\end{Bmatrix}$$

Тогда для $z=l$ получим

$$\overline{Y_к}=A_{cyl}\overline{Y_0},$$

где $A_{cyl}=\begin{bmatrix}\cos\alpha l & \dfrac{\sin\alpha l}{GI_p\alpha}\\ -GI_p\alpha\sin\alpha l & \cos\alpha l\end{bmatrix}$ — матрица перехода для цилиндрического участка (13)

**Конический участок**

Закон изменения амплитуды угла поворота (7) имеет вид

$$\varphi_0(z)=\frac{2}{z-a}\left[C_1\cos\alpha z+C_2\sin\alpha z\right].$$

Амплитуда крутящего момента, соответственно, равна

$$M_0(z)=GI_p\varphi_0'(z)=GI_p\frac{2}{z-a}\left\{C_1\left[\frac{-\cos\alpha z}{z-a}-\alpha\sin\alpha z\right]+C_2\left[\frac{-\sin\alpha z}{z-a}-\alpha\cos\alpha z\right]\right\}.$$

Выразим $C_1$ и $C_2$ через $\varphi_{00}$ и $M_{00}$ в начале координат (рис. 3).

Получим зависимости

$$\varphi_0(z)=\frac{2}{z-a}\left[\left(\frac{GI_0}{2\alpha}\sin\alpha z-\frac{-a}{2}\cos\alpha z\right)\varphi_{00}-\frac{a\sin\alpha z}{2GI_0\alpha}M_{00}\right]. \tag{14}$$

$$\begin{aligned}M_0(z)=GI_p(z)\frac{2}{z-a}\Bigg\{&\varphi_{00}\left[\left(\frac{a}{2(z-a)}+\frac{GI_0}{2}\right)\cos\alpha z+\left(\frac{a\alpha}{2}-\frac{GI_0}{2\alpha(z-a)}\right)\sin\alpha z\right]+\\ &+M_{00}\left[\frac{a}{2(z-a)GI_0\alpha}\sin\alpha z-\frac{a}{2GI_0}\cos\alpha z\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя $z=l$ (рис. 3) и переходя к матричной форме записи, получим:

$\overline{Y_к}=A_{cone}\overline{Y_0}$, где

$$A_{cone}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{l-a}\left(\dfrac{GI_0}{2\alpha}\sin\alpha l-\dfrac{-a}{2}\cos\alpha l\right) & \dfrac{a}{a-l}\dfrac{\sin\alpha z}{GI_0\alpha}\\ GI_ê\dfrac{2}{l-a}\left[\left(\dfrac{a}{2(l-a)}+\dfrac{GI_0}{2}\right)\cos\alpha l+\left(\dfrac{a\alpha}{2}-\dfrac{GI_0}{2\alpha(l-a)}\right)\sin\alpha l\right] & GI_ê\dfrac{2}{l-a}\left[\dfrac{a\sin\alpha l}{2(l-a)GI_0\alpha}-\dfrac{a\cos\alpha l}{2GI_0}\right]\end{bmatrix} \tag{16}$$

**Экспоненциальный участок**

Закон изменения амплитуды угла поворота, имеет вид

$$\varphi_0(z) = e^{\beta z}\left(C_1\cos\alpha_1 z + C_2\sin\alpha_1 z\right),\ \text{где}\ \alpha_1 = \sqrt{\alpha^2-\beta^2};$$

либо

$$\varphi_0(z) = e^{\beta z}\left(C_1\,\mathrm{c}\,h\alpha_1 z + C_2\,\mathrm{s}\,h\alpha_1 z\right),\ \text{где}\ \alpha_1 = \sqrt{\beta^2-\alpha^2}.$$

Матрица перехода для пологого рупора $(\alpha > \beta)$.

Амплитуда крутящего момента, в этом случае, равна

$$M_0(z) = GI_p(z)\varphi_0'(z) = GI_p(z)e^{\beta z}\left\{C_1\left[\beta\cos\alpha_1 z - \alpha_1\sin\alpha_1 z\right] + C_2\left[\beta\sin\alpha_1 z + \alpha_1\cos\alpha_1 z\right]\right\}.$$

Выразив $C_1$ и $C_2$ через $\varphi_{00}$ и $M_{00}$ величины в начале координат (рис. 4), $(z=0)$ получим зависимости

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) &= e^{\beta z}\left[\varphi_{00}\cos\alpha_1 z + \frac{M_{00}}{GI_0\alpha_1}\sin\alpha_1 z - \frac{\beta}{\alpha_1}\varphi_{00}\sin\alpha_1 z\right] = \\ &= e^{\beta z}\left[\left(\cos\alpha_1 z - \frac{\beta}{\alpha_1}\sin\alpha_1 z\right)\varphi_{00} + \frac{\sin\alpha_1 z}{GI_0\alpha_1}M_{00}\right]\end{aligned} \tag{17}$$

$$M_0(z) = GI_p(z)e^{\beta z}\left[\varphi_{00}\left(-\alpha_1 - \frac{\beta^2}{\alpha_1}\right)\sin\alpha_1 z + \frac{M_{00}}{GI_0\alpha_1}\left(\beta\sin\alpha_1 z + \alpha_1\cos\alpha_1 z\right)\right]. \tag{18}$$

Подставляя $z = l$ и переходя к матричной форме записи, получим:

$$\overline{Y_{\hat{e}}} = A_{\exp}\overline{Y_0},\ \text{где}$$

$$A_{\exp} = \begin{bmatrix} e^{\beta l}\left(\cos\alpha_1 l - \dfrac{\beta}{\alpha_1}\sin\alpha_1 l\right) & e^{\beta l}\,\dfrac{\sin\alpha_1 l}{GI_0\alpha_1} \\ GI_{\hat{e}}e^{\beta l}\left(-\alpha_1 - \dfrac{\beta^2}{\alpha_1}\right)\sin\alpha_1 l & \dfrac{I_{\hat{e}}e^{\beta l}}{I_0\alpha_1}\left(\beta\sin\alpha_1 z + \alpha_1\cos\alpha_1 l\right)\end{bmatrix}. \tag{19}$$

Для крутого рупора $(\beta > \alpha)$, соответственно, получим

$$A_{\exp} = \begin{bmatrix} e^{\beta l}\left(\mathrm{c}\,h\alpha_1 l - \dfrac{\beta}{\alpha_1}\mathrm{s}\,h\alpha_1 l\right) & e^{\beta l}\,\dfrac{\mathrm{s}\,h\alpha_1 l}{GI_0\alpha_1} \\ GI_{\hat{e}}e^{\beta l}\left(-\alpha_1 - \dfrac{\beta^2}{\alpha_1}\right)\mathrm{s}\,h\alpha_1 l & \dfrac{I_{\hat{e}}e^{\beta l}}{I_0\alpha_1}\left(\beta\,\mathrm{s}\,h\alpha_1 z + \alpha_1\,\mathrm{c}\,h\alpha_1 l\right)\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Используя соответствующие матрицы перевода (13), (16), (19) или (20) удается связать векторы состояния по концам торсионного волновода. После выполнения граничных условий получаем уравнение для определения резонансных размеров волновода.

## Численный метод начальных параметров для расчета произвольных торсионных волноводов

Для реализации численного расчета сформируем вектор состояния системы

$$\overline{Y} = \begin{Bmatrix}\varphi_0 \\ \varphi_0'\end{Bmatrix}, \tag{21}$$

где $\varphi_0(z)$ — амплитуда угла поворота сечения

$$\varphi_0'(z) = \frac{d\varphi_0}{dz}.$$

Дифференциальное уравнение (3) перепишем в виде системы двух уравнений 1-го порядка.

$$\overline{Y}' = A(p,z)\overline{Y}, \tag{22}$$

где $A(p,z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\rho \dfrac{p^2}{G} & -\dfrac{I_p'(z)}{I_p(z)} \end{bmatrix}$ — матрица системы. (23)

Общее решение (22) имеет вид

$$\overline{Y} = K(p,z)\overline{Y}(0), \tag{24}$$

где $K(p,z)$ — фундаментальная матрица решений

Для $z = l$ удаётся связать граничные условия на концах волновода-концентратора

$$\overline{Y}(l) = K(p,l)\overline{Y}(0), \tag{25}$$

что позволяет получить частотное уравнение. Рассмотрим консольный торсионный волновод переменного круглого сечения (рис. 5)

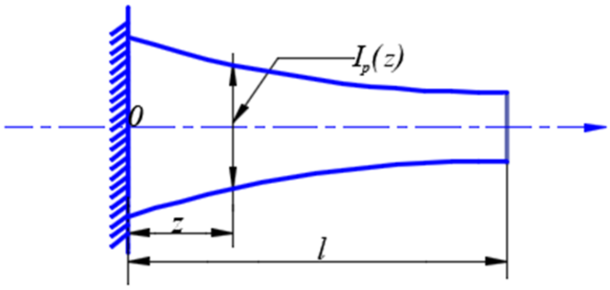



*Рис. 5. Консольный торсионный волновод*

Тогда (25) запишется в виде

$$\begin{Bmatrix} \varphi_0(l) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}(l) & K_{12}(l) \\ K_{21}(l) & K_{22}(l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_0'(l) \end{Bmatrix}. \tag{26}$$

Откуда получаем частотное уравнение

$$K_{22}(p,l) = 0. \tag{27}$$

В качестве сложного торсионного концентратора рассмотрим волновод, состоящий из цилиндрического, конического и экспоненциального участков, имеющих следующие размером:

$D_{cyl}$ = 20 mm; $D_{con}$ =10 mm; $D_{\exp}$ = 4 mm; $L_{cyl}$ = 50 mm; $L_{con}$ = 100 mm; $L_{\exp}$ = 400 mm

Материал – Титановый сплав ВТ 5.

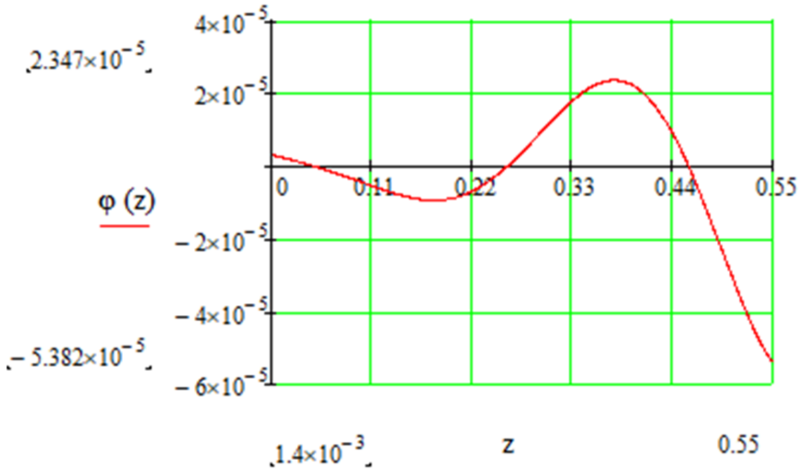



*Рис. 6. Амплитуды угла поворота в сечениях волновода*

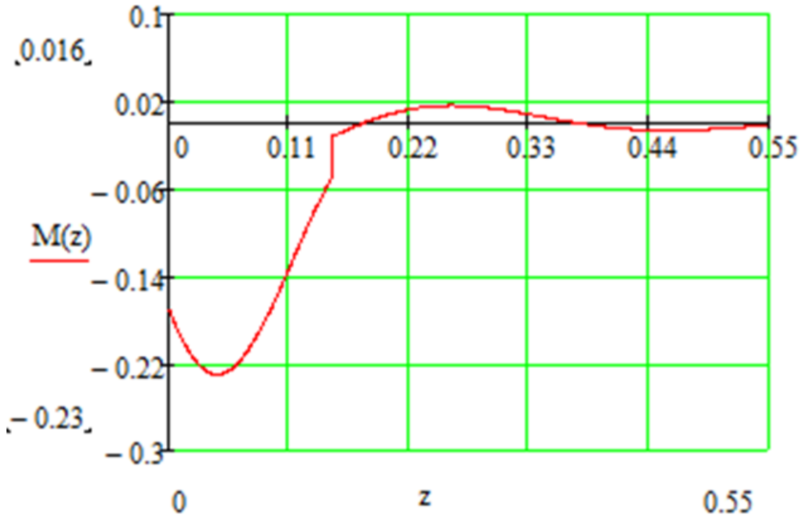



*Рис. 7. Крутящие моменты в сечениях волновода*

## Вывод

Получены матрицы перевода для трех видов торсионных волноводов, что позволяет определить резонансные размеры сложного торсионного концентратора матричным методом. Представлен алгоритм численного метода начальных параметров для расчета оптимальных размеров сложного волновода. Рассмотрен конкретный пример расчета.

## Литература


1. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – Москва, URSS. – 2017. – 485 с.
2. *Гаврюшин С. С., Барышникова О. О., Борискин О. Ф.* Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 479 с.
3. *Тарасова Г. Б., Дюдин Б. В.* Ультразвуковой инструмент // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2004. – №1 (36). – С. 122–126.
4. *Svetlitsky V. A.* Engineering Vibration Analysis: Worked Problems. B. 1. – Berlin : Springer, 2000. – 316 p.
5. *Svetlitsky V. A.* Engineering Vibration Analysis: Worked Problems. B. 2. – Berlin : Springer, 2010. – 343 p.
6. *Pyae Phyo Aung, Grigoryev Y. V.* Waveguide modal analysis of the ultrasonic medical instrument // Journal of Physics: conference series. – 2020. – V. 1479, No. 012121.
7. *Cardoni A., Harkness P., Lucas M.* Ultrasonic Rock Sampling Using Longitudinal-Torsional Vibrations // Physics Procedia. – 2010. – No. 3. – P. 125–134.
8. *Zhou G., Zhang Y., Zhang B.* The Complex-mode Vibration of Ultrasonic Vibration Systems // Ultrasonics. – 2002. – V. 40. – P. 907–911.

УДК 539.3

# ПРОЦЕСС РАЗГРУЗКИ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТОРА

**Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. М. Буруруев, Т. К. Нестеров, Н. Э. Стадник**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

**Аннотация.** В работе рассматривается задача о расчете температурных напряжений в процессе охлаждения предварительно нагретого функционально-градиентного термоупругопластического тора. В качестве математической модели деформирования исследуемого материала использовалось классическое тело Прнадтля-Рейса, обобщенное на случай тепловых процессов. Параметры материала существенно зависят от процесса нагревания и охлаждения. В качестве начальных данных задачи использовались полученные ранее аналитические решения. Рассчитаны поля напряжений и перемещений.
**Ключевые слова:** остаточное температурное напряжение, деформация, упругость, пластичность, теплопроводность.

## Введение

Во многих отраслях современного машиностроения и самолетостроения значительно возросли потребности в использовании облегченных деталей и конструкций. Эту задачу частично решает использование функционально градиентных материалов (например, сплавов титана) [1–5]. Функционально градиентный материал это класс современных материалов с различными свойствами в зависимости от характерного микроструктурного размера. В природе функционально градиентными материалами являются кости, зубы и т. д. Одной из уникальных характеристик функционально градиентных материалов является их способность адаптироваться к конкретному эксплуатационным нагрузкам.

Другая актуальная проблема — это быстрая замена вышедших из строя деталей. В случае их замены, несомненными преимуществами обладают процессы аддитивного производства. К таким способам производства относятся: физическое или химическое осаждение из жидкой/газообразной фазы, плазменное напыление, самораспространяющийся высокотемпературный синтез, метод порошковой металлургии, метод центробежного литья и процесс лазерного осаждения металла. Процесс лазерного осаждения металла — это класс процессов аддитивного производства, который позволяет производить функциональную деталь непосредственно из трехмерной компьютерной модели детали и, возможно, из различных материалов.

Производимые такими способами изделия экономически более выгодны, а их производство менее токсично по сравнению с другими технологическими процессами. Тем не менее, полученные аддитивным способом изделия и материалы, зачастую проявляют микроструктурные особенности и являются функционально градиентными материалами.

Математические модели деформирования изделий, изготовленных описанными выше способами, несомненно должны учитывать температурные эффекты. Модель термоупругопластчиности, полученная обобщением классического модели Прандтля — Рейса полностью отвечает требованиям, предъявляемым современной инженерией к исследователям. Ранее авторами, настоящего сообщения, был решен ряд краевых задач по расчету температурных напряжений в телах с осевой и центральной симметрией [6–18]. В предлагаемой работе рассмотрим проблему расчета остаточных напряжений в условиях тороидальной симметрии. Основу расчетов пластического течения, предваряющего стадию разгрузки материала, возьмем результаты изложенные в публикациях [19–21].

## Основные соотношения

Преобразование от декартовых прямоугольных координат $(X,\ Y,\ Z)$ к псевдотороидальным координатам $(r,\ \theta,\ \varphi)$ определяется соотношениями:

$$X = \Omega\cos(\varphi),\quad Y = \Omega\sin(\varphi),\quad Z = R_0\cos(\theta),\quad \Omega = (R_0 + r\sin(\theta)),\tag{1}$$

где $R_0$ главный радиус тора, $r \in [r_1, r_2]$, $r_1$ и $r_2$ внутренний и внешний радиусы тора. При этом учитывается , что центр тора совпадает с началом декартовой системы координат, а центр тороидальной системы расположен на образующей оси тора.

Компоненты тензора малых деформаций $d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$, определяются через термоупругую $e_{ij}$ и пластическую $p_{ij}$ составляющие, а с компонентами вектора перемещений $u_i$ в псевдотороидальной системе координат связаны уравнениями

$$\begin{gathered}
d_{\theta\theta} = \frac{u_{\theta,\theta}}{r} + \frac{u_r}{r},\qquad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r\sin(\theta) + u_\theta\cos(\theta)}{\Omega} + \frac{u_{\varphi,\varphi}}{\Omega},\quad d_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right),\\
d_{rr} = u_{r,r},\quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{r,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,r} - \frac{u_\varphi\sin(\theta)}{\Omega}\right),\quad d_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{\theta,\varphi}}{\Omega} + u_{\varphi,\theta} - \frac{u_\varphi\cos(\theta)}{\Omega}\right).
\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь и далее индексом после запятой обозначается частное дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Уравнения равновесия в псевдотороидальной системе координат преобразуются к виду

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\Omega}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} + \mathrm{ctg}(\sigma_{r\theta})) = 0,\\
\sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\sin(\theta)}{\Omega}(\sigma_{r\theta} + \mathrm{ctg}(\theta)(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})) = 0,\\
\sigma_{r\varphi,r} + \frac{\sigma_{\theta\varphi,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}}{\Omega} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{2\sin(\theta)}{\Omega}(\sigma_{r\varphi} + \mathrm{ctg}(\theta)\sigma_{\theta\varphi}) = 0.
\end{gathered}\tag{3}$$

Определяющие соотношения термоупругого континуума можно принять в форме закона Дюгамеля — Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\mathrm{tr}e_{ij} - \alpha\delta_{ij}(3\lambda + 2\mu)(T - T_0) + 2\mu e_{ij},\tag{4}$$

где $\delta_{ij}$ — дельта Кронекера, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе, $\alpha$ — коэффициент линейного теплового расширения, $(T - T_0)$ — температур начально $T_0$ и текущей $T$.

Отметим, что в дальнейшем изложении материала статьи мы будем пренебрегать влиянием деформационных процессов на изменение температурного поля в исследуемом теле. Уравнение теплопроводности в псевдотороидальных координатах имеет форму

$$T_{,rr} + \frac{(R_0 + 2r\sin(\theta))T_{,r}}{r(R_0 + r\sin(\theta))} + \frac{T_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos(\theta)T_{,\theta}}{r(R_0 + r\sin(\theta))} + \frac{T_{,\varphi\varphi}}{(R_0 + r\sin(\theta))^2} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t}.\tag{5}$$

При заданных граничных условиях и известных распределениях необратимых деформаций $p_{ij}$ система уравнений (2)–(5) задает эволюцию напряженно-деформированного состояния, подвергающегося тепловой обработке тела тороидальной формы, в условиях тороидальной симметрии.

## Постановка задачи

Рассмотрим полый тор радиусов $R_0$ и $r_1 < r < r_2$. Температурное воздействие на термоупругий материал задается осесимметричным[1] температурным распределением. В таком случае,

1 Имеется ввиду симметрия относительно оси *oZ*.

напряженно-деформированное состояние не будет зависеть от угловой координаты $\varphi$. Тогда, следующие компоненты вектора перемещений, тензора деформаций и тензора напряжений, будут равны нулю

$$u_\varphi = 0, \quad d_{r\varphi} = d_{\theta\varphi} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0. \tag{6}$$

На внешней поверхности тора определим состояние свободного теплового расширения согласно краевым условиям

$$\sigma_{rr}(r_1,\theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_1,\theta) = 0, \quad \sigma_{rr}(r_2,\theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_2,\theta) = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим решение стационарного уравнения теплопроводности (5) с краевыми условиями:

$$T(r_1,\theta) = T_k, \quad T(r_2,\theta) = T_0. \tag{8}$$

Численный анализ решений уравнения теплопроводности показал, что вычисляемое распределение температуры существенно зависит от геометрии тора и при малых значениях параметра $\epsilon = r_2 / R_0$ может быть описано функцией, зависящей только от радиальной координаты. При стремлении $\epsilon = r_2 / R_0$ к нулю, тороидальная симметрия переходит в цилиндрическую, что позволяет принять с достаточной степенью точности одномерные аналитические решения в приближении гипотезы обобщенной плоской деформации. При таком подходе важным является определение допустимых конечных значений параметра $\epsilon$, при которых цилиндрические решения будут удовлетворительно описывать двумерные численные в псевдотороидальных координатах.

Стационарное уравнение теплопроводности при $\epsilon = 0$, т. е. в условиях осевой симметрии приобретает форму:

$$T_{,r} + r\ T_{,rr} = 0. \tag{9}$$

Численные эксперименты показали, что максимальное отклонение аналитического решения уравнения (9) от численного решения уравнения (5) составляет менее 2 % при $\epsilon = 0.1$ и $r_1 / r_2 = 0.4$. Следовательно с достаточно высокой степенью точности температурное распределение при $\epsilon < 0.1$ можно считать одномерным.

При $\epsilon = 0$. Уравнения равновесия и соотношения для деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta\theta,\theta}}{r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \\ &d_{rr} = F_{,r} \quad d_{\varphi\varphi} = C, \quad d_{\theta\theta} = \frac{F}{r}, \quad d_{r\theta} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $F(r)$ — неизвестная функция радиуса, $C$ — неизвестная константа. Компоненты вектора перемещений при этом можно представить в следующей форме:

$$u_r(r,\theta) = F(r) + R_0 C \sin(\theta), \quad u_\theta(r,\theta) = R_0 C \cos(\theta). \tag{11}$$

Вид функции $F(r)$ зависит от напряженно-деформированного состояния и определяется с учетом наличия или отсутствия пластического течения в заданной области материала.

## Напряженно-деформированное состояние материала при наличии остаточных деформаций

Как было показано в работах [19–21] при свободном тепловом расширении температурный градиент, заданный условиями (8) приводит к возникновению в материале нескольких областей деформирования: двух областей пластического течения, соответствующих ребру и грани призмы Треска, и области термоупругого деформирования. Решения в каждой области конкретной области приведены в [19–21] и отличаются друг от друга видом функции $F(r)$.

Рассмотрим процесс остывания материала тора, когда температурное поле возвращается к начальному распределению $(T = T_0)$. В этом случае, после пластического течения начнется процесс разгрузки, характеризуемый термоупругим деформированием с учетом накопленных необратимых деформаций. Выразив одну из компонент пластических деформаций через две другие $(p_{\varphi\varphi} = -p_{rr} - p_{\theta\theta})$, запишем в общем виде результирующие соотношения для напряжений, возникающих в материале при разгрузке:

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{\eta^2}\int_{r_1}^{r}\frac{p_{rr}(\rho)-p_{\theta\theta}(\rho)}{\rho}d\rho - \frac{2\mu^2}{(\lambda+2\mu)r^2}\int_{r_1}^{r}\rho(p_{rr}(\rho)+p_{\theta\theta}(\rho))d\rho + \frac{Q}{r^2}+P,$$
$$\sigma_{\theta\theta} = (r\sigma_{rr}(r)_{,r}),\quad \sigma_{\varphi\varphi} = \mu\gamma(p_{rr}(r)+p_{\theta\theta}(r)) + \frac{\lambda\sigma_{rr}(r)+\lambda\sigma_{\theta\theta}(r)}{2(\lambda+\mu)}. \tag{12}$$

Здесь $P$, $Q$ — константы интегрирования. Пластические деформации, согласно условиям пластичности [19–21], представим в виде:

$$p_{rr} = \begin{cases} p_{rr}^{*}, & r_1 \le r \le b,\\ p_{rr}^{**}, & b \le r \le a,\\ 0, & r_1 \le a \le r_2,\end{cases}\qquad p_{\theta\theta} = \begin{cases} p_{\theta\theta}^{*}, & r_1 \le r \le b,\\ 0, & b \le r \le a,\\ 0, & r_1 \le a \le r_2.\end{cases} \tag{13}$$

Соотношения (12) и (13) определяют напряженно деформированное состояние в условиях упругой разгрузки материала. Отметим, что в этом случае развитые зоны пластического деформирования не достаточны для возникновения повторного пластического течения.

**Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты (№ 19-51-60001, № 20-01-00666).

**Литература**

1. *Mahamood, R.* Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood et al. // Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. – 2019. – V. 30. – P. 51–58.

2. *Lasisi, A.* Experimental Investigation of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatings on Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notesin Mechanical Engineering. Springer. – 2020. – P. 515–522.

3. *Lasisi, A.* Effect of Process Parameters on the Hardness Property of Laser Metal Deposited Al–Cu–Ti Coatingson Ti–6Al–4V Alloy / A. Lasisi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. – Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Springer. – 2020. – P. 523–529.

4. *Akinlabi, E. T.* Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering. Lecture Notes in MechanicalEngineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. – Singapore. – Springer. – 2020. – P. 555–564.

5. *Naidoo, L.* C. Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu / Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. – 2020. – V. 51, No 6. – P. 766–773.

6. *Дац, Е. П.* Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е.П. Дац и др. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 1. – P. 32–43.

7. *Murashkin, E. V.* Numerical analysis of the elastic-plastic boundaries in the thermal stresses theory frameworks / E. V. Murashkin, E. P. Dats , V. V. Klindukhov // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing. – 2017. – V. 937, No 1. – P. 012030.

8. *Murashkin, E. V.* Piecewise Linear Yield Criteria in the Problems of Thermoplasticity / E. V. Murashkin, E. P. Dats, N. E. Stadnik // International Journal of Applied Mathematics. – 2017. – T. 47, No 3.

9. *Mack, W.* Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft / W. Mack //Archive of Applied Mechanics. – 1993. – V. 63, No 1. – P. 42–50.

10. *Burenin, A. A.* Formation of the residual stress field under local thermal actions / A. A. Burenin, E. P. Dats, E. V. Murashkin // Mechanics of Solids. – 2014. – V. 49, No 2. – P. 218–224.

11. *Dats, E.* On heating of thin circular elastic-plastic plate with the yield stress depending on temperature / E. Dats, E. Murashkin, N. Stadnik // Procedia engineering. – 2017. – V. 173. – P. 891–896.

12. *Dats, E.* On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing / E. Dats, E. Murashkin, N. Stadnik // Procedia Manufacturing. – 2017. – V. 7. – P. 427–434.

13. *Murashkin, E.* Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball / E. Murashkin, E. Dats // Mechanics of Solids. – 2017. – V. 52, No 5. – P. 495–500.

14. *Burenin, A.* Residual stresses in am fabricated ball during a heating process/ A. Burenin, E. Murashkin, E. Dats // AIP Conference Proceedings. – 2018. – V. 1959 – P. 1–5.

15. *Stadnik, N.* Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels / N. Stadnik, E. Dats // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – V. 991. – P. 1–7.

16. *Murashkin, E.* Coupled thermal stresses analysis in the composite elastic-plastic cylinder / E. Murashkin, E. Dats // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – V. 991. – P. 1–12.

17. *Akinlabi, E. T.* Thermoelasticplastic deformation of a functionally graded spherical layer / E. T. Akinlabi, E. Dats, E. Murashkin // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – V. 1474(1). – P. 012002.

18. *Orçan, Y.* Residual stresses and secondary plastic flow in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends / Y. Orçan // International journal of engineering science. – 1995. – V. 33, No 12. – P. 1689–1698.

19. *Murashkin, E.* Thermal stresses computation in donut / E. Murashkin, E. Dats // Engineering Letters. – 2019. – V. 27, No 3. – P. 568–571.

20. *Дац, Е. П.* Температурные напряжения в условиях тороидальной симметрии / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2019. – № 2. – С. 57–70.

21. *Murashkin, E. V.* Thermal stresses computation under toroidal symmetry conditions / E. V. Murashkin, E. P. Dats // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC. – 2019. – V. 2116, No 1. – P. 380012.

УДК 539.3

# О КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРА С ВЯЗКОУПРУГИМ ПОКРЫТИЕМ

**В. В. Дударев**

*Южный федеральный университет*

**Аннотация.** В работе рассмотрена задача об установившихся продольно-радиальных колебаниях полого цилиндра с неоднородным вязкоупругим покрытием. С помощью метода разделения переменных задача сведена к рассмотрению набора систем дифференциальных вещественных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Для численного решения этих систем с помощью метода пристрелки сформулированы необходимые задачи Коши. С помощью предложенного подхода можно проводить анализ изменения основных акустических характеристик цилиндра для различных законов неоднородности вязкоупругого покрытия.
**Ключевые слова:** цилиндр, колебания, вязкоупругое покрытие, метод пристрелки.

Рассмотрим задачу об установившихся продольно-радиальных колебаниях упругого изотропного полого цилиндра конечной длины $2h$ с неоднородным вязкоупругим покрытием. На торцах цилиндра реализованы условия скользящей заделки. Нормальная нагрузка приложена на внешней боковой поверхности. Постановка задачи после отделения временного множителя может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}+\rho\omega^2 u_r=0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}+\dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\dfrac{\sigma_{rz}}{r}+\rho\omega^2 u_z=0 \\ u_z=0, \sigma_{rz}=0, r\in[r_1,r_2], z=\pm h \\ \sigma_{rr}=\sigma_{rz}=0, r=r_1, z\in[-h,h] \\ \sigma_{rr}=-p^0 q(z), \sigma_{rz}=0, r=r_2, z\in[-h,h] \end{cases}, \qquad (1)$$

где $\sigma_{rr}=2\mu\varepsilon_{rr}+\lambda\theta,\ \sigma_{zr}=\sigma_{rz}=2\mu\varepsilon_{zr},\ \sigma_{\varphi\varphi}=2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}+\lambda\theta,\ \sigma_{zz}=2\mu\varepsilon_{zz}+\lambda\theta,\ \varepsilon_{rr}=\dfrac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_{\varphi\varphi}=\dfrac{u_r}{r},$ $\varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial u_z}{\partial z},\ \varepsilon_{rz}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial r}+\dfrac{\partial u_r}{\partial z}\right),\ \theta=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{zz},\ u_r=u_r(r,z),\ u_z=u_z(r,z)$ — компоненты вектора перемещения в радиальном и продольном направлениях, $r_1$ — внутренний радиус, $r_2$ — внешний, $p^0$ — амплитуда нагрузки, $q(z)$ — закон ее изменения, допускающий представление

$$q(z)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k\cos(\nu_k z), \qquad (2)$$

где $P_k=\dfrac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} q(z)\cos(\nu_k z)dz,\ P_0=\dfrac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} q(z)dz,\ \nu_k=\pi k/h,\ k=0,1\ldots$ Для описания свойств покрытия используется трехпараметрическая модель стандартного вязкоупругого тела. Следуя принципу соответствия, параметры Ламе для материала покрытия заменены на комплексные функции от радиальной координаты и частоты колебаний [1]:

$$\frac{\lambda(r,\omega)}{\lambda^*}=\frac{ib\kappa\varphi_{12}(\xi)+\varphi_{11}(\xi)}{1+ib\kappa}=L^R+iL^I, \frac{\mu(r,\omega)}{\lambda^*}=\frac{ib\kappa\varphi_{22}(\xi)+\varphi_{21}(\xi)}{1+ib\kappa}=M^R+iM^I, \qquad (3)$$

где $\Lambda^R(\xi,\kappa)=\dfrac{\varphi_{11}(\xi)+b^2\kappa^2\varphi_{12}(\xi)}{1+b^2\kappa^2},\ \Lambda^I(\xi,\kappa)=b\kappa\dfrac{\varphi_{12}(\xi)-\varphi_{11}(\xi)}{1+b^2\kappa^2},\ M^R(\xi,\kappa)=\dfrac{\varphi_{21}(\xi)+b^2\kappa^2\varphi_{22}(\xi)}{1+b^2\kappa^2},$

$M^I(\xi,\kappa) = b\kappa \dfrac{\varphi_{22}(\xi) - \varphi_{21}(\xi)}{1 + b^2\kappa^2}$, $\xi = \dfrac{r}{r_2}$, параметр $b = \dfrac{n}{r_2}\sqrt{\dfrac{\lambda^*}{\rho}}$ пропорционален времени релаксации $n$, параметр $\kappa^2 = \rho\omega^2 r_2^2 / \lambda^*$ — частоте колебаний. Таким образом, в рамках рассматриваемой задачи свойства упругой основной части и неоднородного вязкоупругого покрытия описываются переменными параметрами Ламе, которые задаются в виде кусочных функций: при $\xi \in [\xi_0, \xi_*)$ — постоянные вещественные законы, при $\xi \in [\xi_*, 1]$ — переменные комплекснозначные законы (3), $\xi_0 = \dfrac{r_1}{r_2}$, $\xi_* = \dfrac{r_*}{r_2}$. Учитывая вид граничных условий и закон изменения нагрузки, решение ищется в виде [2]:

$$
\begin{aligned}
&u_r = \sum_{k=0}^{\infty} r_2(u_k^R(\xi) + iu_k^I(\xi))\cos(\nu_k z), u_z = \sum_{k=0}^{\infty} r_2(w_k^R(\xi) + iw_k^I(\xi))\sin(\nu_k z),\\
&\sigma_{rr} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(s_{1k}^R(\xi) + is_{1k}^I(\xi))\cos(\nu_k z), \sigma_{zr} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(s_{2k}^R(\xi) + is_{2k}^I(\xi))\sin(\nu_k z),\\
&\sigma_{\varphi\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(s_{3k}^R(\xi) + is_{3k}^I(\xi))\cos(\nu_k z), \sigma_{zz} = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(s_{4k}^R(\xi) + is_{4k}^I(\xi))\cos(\nu_k z),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Отделяя вещественные и мнимые части, на основе (1) и определяющих соотношений можно получить набор канонических систем дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, которые дополнены граничными условиями:

$$
\begin{cases}
s_{10}^{R'} = -\dfrac{s_{10}^R - s_{30}^R}{\xi} - \kappa^2 u_0^R\\
s_{10}^{I'} = -\dfrac{s_{10}^I - s_{30}^I}{\xi} - \kappa^2 u_0^I\\
u_0^{R'} = \dfrac{s_{10}^R A^R + s_{10}^I A^I - \dfrac{u_0^R}{\xi}\left(\Lambda^R A^R + \Lambda^I A^I\right) - \dfrac{u_0^I}{\xi}\left(\Lambda^R A^I - \Lambda^I A^R\right)}{A^2}\\
u_0^{I'} = -\dfrac{s_{10}^R A^I - s_{1k}^I A^R - \dfrac{u_0^R}{\xi}\left(\Lambda^R A^I - \Lambda^I A^R\right) + \dfrac{u_k^I}{\xi}\left(\Lambda^R A^R + \Lambda^I A^I\right)}{A^2}\\
s_{10}^R(\xi_0) = 0, \quad s_{10}^I(\xi_0) = 0\\
s_{10}^R(1) = p_0, \quad s_{10}^I(1) = 0
\end{cases}
, \quad k = 0,
\tag{5}
$$

$$
\begin{cases}
s_{1k}^{R'} = -\beta_k s_{2k}^R - \dfrac{s_{1k}^R - s_{3k}^R}{\xi} - \kappa^2 u_k^R\\
s_{1k}^{I'} = -\beta_k s_{2k}^I - \dfrac{s_{1k}^I - s_{3k}^I}{\xi} - \kappa^2 u_k^I\\
s_{2k}^{R'} = s_{4k}^R - \dfrac{s_{2k}^R}{\xi} - \kappa^2 w_k^R\\
s_{2k}^{I'} = s_{4k}^I - \dfrac{s_{2k}^I}{\xi} - \kappa^2 w_k^I\\
u_k^{R'} = \dfrac{s_{1k}^R A^R + s_{1k}^I A^I - \left(\dfrac{u_k^R}{\xi} + \beta_k w_k^R\right)\left(\Lambda^R A^R + \Lambda^I A^I\right) - \left(\dfrac{u_k^I}{\xi} + \beta_k w_k^I\right)\left(\Lambda^R A^I - \Lambda^I A^R\right)}{A^2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
u_k^{I'} = -\dfrac{s_{1k}^R A^I - s_{1k}^I A^R - \left(\dfrac{u_k^R}{\xi} + \beta_k w_k^R\right)\left(\Lambda^R A^I - \Lambda^I A^R\right) + \left(\dfrac{u_k^I}{\xi} + \beta_k w_k^I\right)\left(\Lambda^R A^R + \Lambda^I A^I\right)}{A^2} \\
w_k^{R'} = \dfrac{s_{2k}^R M^R + s_{2k}^I M^I}{(M^R)^2 + (M^I)^2} + \beta_k u_k^R \\
w_k^{I'} = -\dfrac{s_{2k}^R M^I + s_{2k}^I M^R}{(M^R)^2 + (M^I)} + \beta_k u_k^I \\
s_{1k}^R(\xi_0) = 0, \quad s_{1k}^I(\xi_0) = 0, \quad s_{2k}^R(\xi_0) = 0, \quad s_{2k}^I(\xi_0) = 0 \\
s_{1k}^R(1) = p_k, \quad s_{1k}^I(1) = 0, \quad s_{2k}^R(1) = 0, \quad s_{2k}^I(1) = 0
\end{cases}
\qquad k = 1, 2 \ldots \text{(6)}
$$

где

$$
s_{3k}^R = A^R \frac{u_k^R}{\xi} + \Lambda^R\left(u_k^{R'} + \beta_k w_k^R\right) - A^I \frac{u_k^I}{\xi} - \Lambda^I\left(u_k^{I'} + \beta_k w_k^I\right),
$$

$$
s_{3k}^I = A^R \frac{u_k^I}{\xi} + \Lambda^R\left(u_k^{I'} + \beta_k w_k^I\right) + A^I \frac{u_k^R}{\xi} + \Lambda^I\left(u_k^{R'} + \beta_k w_k^R\right),
$$

$$
s_{4k}^R = A^R \beta_k^2 w_k^R + \Lambda^R\left(\beta_k u_k^{R'} + \frac{\beta_k u_k^R}{\xi}\right) - A^I \beta_k^2 w_k^I - \Lambda^I\left(\beta_k u_k^{I'} + \frac{\beta_k u_k^I}{\xi}\right),
$$

$$
s_{4k}^I = A^R \beta_k^2 w_k^I + \Lambda^R\left(\beta_k u_k^{I'} + \frac{\beta_k u_k^I}{\xi}\right) + A^I \beta_k^2 w_k^R + \Lambda^I\left(\beta_k u_k^{R'} + \frac{\beta_k u_k^R}{\xi}\right),
$$

$$
A^R = \Lambda^R + 2M^R, A^I = \Lambda^I + 2M^I, A^2 = \left(\Lambda^R + 2M^R\right)^2 + \left(\Lambda^I + 2M^I\right)^2,
$$

$$
\beta_k = \pi k r_2 / h, \quad p_k = -p^0 P_k / \lambda^*.
$$

Используя метод пристрелки, функции $u_0^R$, $u_0^I$ можно представить в виде:

$$
u_0^R = \alpha_1 u_0^{R(1)} + \alpha_2 u_0^{R(2)}, \quad u_0^I = \alpha_1 u_0^{I(1)} + \alpha_2 u_0^{I(2)},
$$

где $u_0^{R(i)}$, $u_0^{I(i)}$, $i = 1, 2$ — решения соответствующих задач Коши с начальными условиями

$$
\begin{bmatrix}
s_{10}^{R(1)}(\xi_0) & = 0 \\
s_{10}^{I(1)}(\xi_0) & = 0 \\
u_0^{R(1)}(\xi_0) & = 1 \\
u_0^{I(1)}(\xi_0) & = 0
\end{bmatrix},
\qquad
\begin{bmatrix}
s_{10}^{R(2)}(\xi_0) & = 0 \\
s_{10}^{I(2)}(\xi_0) & = 0 \\
u_0^{R(2)}(\xi_0) & = 0 \\
u_0^{I(2)}(\xi_0) & = 1
\end{bmatrix}.
$$

Коэффициенты $\alpha_i$ определяются из условия удовлетворения граничным условиям:

$$
\begin{cases}
s_{10}^R(1) = \alpha_1 s_{10}^{R(1)}(1) + \alpha_2 s_{10}^{R(2)}(1) = p_0 \\
s_{10}^I(1) = \alpha_1 s_{10}^{I(1)}(1) + \alpha_2 s_{10}^{I(2)}(1) = 0
\end{cases}.
$$

Аналогично строятся численные решения при $k = 1, 2 \ldots$:

$$
u_k^R = \gamma_1 u_k^{R(1)} + \gamma_2 u_k^{R(2)} + \gamma_3 u_k^{R(3)} + \gamma_4 u_k^{R(4)}, \quad u_k^I = \gamma_1 u_k^{I(1)} + \gamma_2 u_k^{I(2)} + \gamma_3 u_k^{I(3)} + \gamma_4 u_k^{I(4)},
$$

где $u_0^{R(i)}$, $u_0^{I(i)}$, $i = \overline{1, 4}$ — решения задач Коши с начальными условиями

$$\begin{cases} s_{1k}^{R(1)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{1k}^{I(1)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{2k}^{R(1)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{2k}^{I(1)}(\xi_0) &= 0 \\ u_k^{R(1)}(\xi_0) &= 1 \\ u_k^{I(1)}(\xi_0) &= 0 \\ w_k^{R(1)}(\xi_0) &= 0 \\ w_k^{I(1)}(\xi_0) &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} s_{1k}^{R(2)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{1k}^{I(2)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{2k}^{R(2)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{2k}^{I(2)}(\xi_0) &= 0 \\ u_k^{R(2)}(\xi_0) &= 0 \\ u_k^{I(2)}(\xi_0) &= 1 \\ w_k^{R(2)}(\xi_0) &= 0 \\ w_k^{I(2)}(\xi_0) &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} s_{1k}^{R(3)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{1k}^{I(3)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{2k}^{R(3)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{2k}^{I(3)}(\xi_0) &= 0 \\ u_k^{R(3)}(\xi_0) &= 0 \\ u_k^{I(3)}(\xi_0) &= 0 \\ w_k^{R(3)}(\xi_0) &= 1 \\ w_k^{I(3)}(\xi_0) &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} s_{1k}^{R(4)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{1k}^{I(4)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{2k}^{R(4)}(\xi_0) &= 0 \\ s_{2k}^{I(4)}(\xi_0) &= 0 \\ u_k^{R(4)}(\xi_0) &= 0 \\ u_k^{I(4)}(\xi_0) &= 0 \\ w_k^{R(4)}(\xi_0) &= 0 \\ w_k^{I(4)}(\xi_0) &= 1 \end{cases}.$$

Коэффициенты $\gamma_i$ определяются из алгебраической системы:

$$\begin{cases} s_{1k}^R(1) = \gamma_1 s_{1k}^{R(1)}(1) + \gamma_2 s_{1k}^{R(2)}(1) + \gamma_3 s_{1k}^{R(3)}(1) + \gamma_4 s_{1k}^{R(4)}(1) = p_k \\ s_{1k}^I(1) = \gamma_1 s_{1k}^{I(1)}(1) + \gamma_2 s_{1k}^{I(2)}(1) + \gamma_3 s_{1k}^{I(3)}(1) + \gamma_4 s_{1k}^{I(4)}(1) = 0 \\ s_{2k}^R(1) = \gamma_1 s_{2k}^{R(1)}(1) + \gamma_2 s_{2k}^{R(2)}(1) + \gamma_3 s_{2k}^{R(3)}(1) + \gamma_4 s_{2k}^{R(4)}(1) = 0 \\ s_{2k}^I(1) = \gamma_1 s_{2k}^{I(1)}(1) + \gamma_2 s_{2k}^{I(2)}(1) + \gamma_3 s_{2k}^{I(3)}(1) + \gamma_4 s_{2k}^{I(4)}(1) = 0 \end{cases}.$$

На основе представленного подхода проведен анализ влияния параметров вязкоупругого покрытия на амплитудно-частотные характеристики, измеренных на внешней поверхности цилиндра. Построены графики функций изменения компонент тензора напряжений и поля перемещения. Проведено сравнение с результатами, полученными с помощью МКЭ, реализованного в пакете FlexPDE.

## Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Ватульяна А. О. за предложенную задачу и методы ее исследования.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 18-11-00069).

## Литература

1. *Кристенсен, Р.* Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – Москва : Мир, 1974. – 340 с.

2. *Dudarev V. V., Mnukhin R. M., Nedin R. D., Vatulyan A. O.* Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder // Applied Mathematics and Computation. – 2020. – Vol. 382. – Article number 125333.

УДК 539.374

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЕ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО МАССИВА

**М. В. Зарецкая[1], В. В. Лозовой[2]**

*[1]Кубанский государственный университет*
*[2]Южный научный центр РАН*

**Аннотация.** В работе проведен анализ контактных напряжений в блочной структуре, моделирующей геологический массив. Состояние геологического массива описывается уравнениями движениями для однородной, изотропной упругой среды в форме Ляме относительно перемещений. Для исследования применяются теория блочных структур и метод блочного элемента. Построен трехмерный блочный элемент в форме прямоугольного параллелепипеда для дифференциального уравнения Гельмгольца: выписаны функциональные и псевдодифференциальные уравнения, получены интегральные представления блочного элемента. Установлены основные тенденции изменения контактных напряжений в зависимости от значений механических характеристик материала блоков и геометрических параметров структуры.
**Ключевые слова:** уравнения Ляме, разложение Грина — Ляме, уравнение Гельмгольца, модель геологического массива, блочная структура, блочный элемент, контактные напряжения, исследование динамики изменения.

## Введение

При решении задач определения общего поля напряжений в литосферной плите необходимо руководствоваться следующими положениями. Земная кора, по мнению академика М. А. Садовского [1], имеет неоднородное строение и разбита разломами и трещинами на блоки различного размера. В блоках и на неоднородностях накапливается упругая энергия, которая обеспечивает развитие динамических процессов и часто разряжается землетрясениями. Движение блоков в коре порождает напряженное состояние, в частности, тектонические напряжения. Динамика блочных структур влияет на распределение напряжений в земной коре.

Рассматриваем литосферную плиту как блочную структуру. При наличии трещин, разломов или включений меньших размерностей в литосферной плите последние надо рассматривать как границы блоков. Наиболее простым блоком, позволяющим моделировать геологические структуры любой сложности, является прямоугольный параллелепипед.

## 1. Построение математической модели геологической среды

Пусть состояние материала геологической среды описывается уравнениями движениями для однородной, изотропной упругой среды в форме Ляме относительно перемещений $\mathbf{u}(x,y,z)$:

$$(\lambda+2\mu)grad(div\mathbf{u})-\mu rot(rot\mathbf{u})+\rho\omega^2\mathbf{u}=0,$$

где $\lambda$, $\mu$ — упругие константы Ляме, $\rho$ — плотность материала, $\omega$ — частота установившихся колебаний.

Для произвольного вектора-функции $\mathbf{u}(x,y,z)$ справедливо разложение Грина — Ляме:

$$\mathbf{u}=grad\varphi+rot\boldsymbol{\psi},$$

позволяющее перейти от системы уравнений Ляме к двум независимым уравнениям относительно скалярного потенциала $\varphi$ и векторного потенциала $\boldsymbol{\psi}$:

$$\Delta\varphi + \kappa_1^2\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\Delta\psi_n + \kappa_2^2\psi_n = 0, \tag{2}$$

где $\kappa_1^2 = \rho\omega^2(\lambda + 2\mu)^{-1}$, $\kappa_2^2 = \rho\omega^2\mu^{-1}$, $n = 1, 2, 3.$

Потенциал $\varphi$ соответствует продольным волнам, вектор $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ описывает распространение поперечных волн в среде.

В связи с тем, что для конкретных геологических задач корректно сформулировать соответствующие граничные условия сложно, основное внимание уделено построению представлений решений в блочных элементах сложных геологических объектов, основанных на применении уравнений (1)–(2).

## 2. Метод блочного элемента исследования модели геологической среды

Далее приводится пример построения трехмерного блочного элемента в форме прямоугольного параллелепипеда для дифференциального уравнения Гельмгольца, являющегося обобщением уравнений (1) и (2) и имеющего вид:

$$(\Delta + k^2)u = 0, \tag{3}$$

где $\Delta = A_1\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + A_2\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + A_3\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, с некоторыми граничными условиями, например, Дирихле или Неймана.

Область выбранного параллелепипеда обозначим $\Omega$, его границу — $\partial\Omega$. Коэффициенты $A_i(x_1, x_2, x_3)$ и $k^2$ можно считать постоянными в границах блочного элемента.

Пусть в исходной системе координат область $\Omega$ описывается соотношениями:

$$\Omega : \left|x_1\right| \le a, \quad \left|x_2\right| \le c, \quad \left|x_3\right| \le b.$$

В процессе применения дифференциального метода факторизации [2, 3], являющегося основой метода блочного элемента, осуществляется касательное расслоение ориентированной границы $\partial\Omega$, и вводятся правые локальные системы координат с внешними нормалями $x_3^k$ и касательными $x_1^k$, $x_2^k$. Для прямоугольного параллелепипеда $k = 6$. Локальные координаты располагаются на гранях параллелепипеда, следуют против часовой стрелки, с начальным индексом $k = 1$ на верхней грани. Локальные системы координат на фронтальной грани и ей противоположной имеют индексы $k = 5$ и $k = 6$ соответственно.

В каждой локальной системе координат строятся системы функциональных и псевдодифференциальных уравнений блочного элемента. После обращения последних получаем общее представление решения, то есть блочного элемента, в локальной системе координат. Блочные элементы имеют представление в форме интеграла по границе области носителя.

Введем операторы преобразования Фурье:

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k)u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1^k, x_2^k)\mathrm{e}^{i\langle \boldsymbol{\alpha}^k,\, \mathbf{x}^k\rangle} dx_1^k dx_2^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k)U = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha_1^k, \alpha_2^k)\mathrm{e}^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}^k,\, \mathbf{x}^k\rangle} d\alpha_1^k d\alpha_2^k :$$

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k)u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1^k, x_2^k, x_3^k)\mathrm{e}^{i\langle \boldsymbol{\alpha}^k,\, \mathbf{x}^k\rangle} dx_1^k dx_2^k dx_3^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k, x_3^k)U = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_2^k)\mathrm{e}^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}^k,\, \mathbf{x}^k\rangle} d\alpha_1^k d\alpha_2^k d\alpha_3^k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, 6.$$

Функциональное уравнение краевой задачи представимо в форме

$$\mathbf{KF}(a_1^k, a_2^k, a_3^k)u = \iint_{\partial\Omega} \omega,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — внешняя форма, связанная с поставленной задачей.

Приведем вид получающихся функциональных и псевдодифференциальных уравнений в первой локальной системе координат, т. е. для $k = 1$.

Функциональное уравнение:

$$\mathrm{K}_1 U_1 = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1)\left\{\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_3\left(u'_{13} - i\alpha_{3-}^1 u_1\right) e^{i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right]} d\eta_1^1 d\eta_2^1 +\right.$$

$$+\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_1\left(u'_{22} + i\alpha_1^1 u_2\right) e^{i\left[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_{3-}^1\left(x_1^2 - b\right)\right]} dx_1^2 dx_2^2 + \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_3\left(u'_{33} + i\alpha_{3-}^1 u_3\right) e^{i\left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_{3-}^1 2b\right]} dx_1^3 dx_2^3 -$$

$$-\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_1\left(u'_{43} - i\alpha_1^1 u_4\right) e^{i\left[\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_{3-}^1\left(x_1^4 + b\right)\right]} dx_1^4 dx_2^4 + \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_2\left(u'_{53} + i\alpha_2^1 u_5\right) e^{i\left[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_{3-}^1\left(x_2^5 - b\right)\right]} dx_1^5 dx_2^5 +$$

$$\left.+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_2\left(u'_{63} - i\alpha_2^1 u_6\right) e^{i\left[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_{3-}^1\left(x_2^6 - b\right)\right]} dx_1^6 dx_2^6\right\} = 0,$$

$$\left|x_1^1\right| \le a, \quad \left|x_2^1\right| \le c.$$

Псевдодифференциальное уравнение имеет вид:

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k)\mathrm{K}_1 U_1 = 0, \ \left|x_1^1\right| \le a, \quad \left|x_2^1\right| \le c.$$

Аналогично выписываются псевдодифференциальные уравнения в локальных системах координат $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

Характеристические уравнения в локальных системах координат представимы в форме:

$$K_1(\alpha_1^m, \alpha_2^m, \alpha_3^m) = \sum_{i=1}^{3} A_i(\alpha_i^m)^2 - k^2, \ \ m = 1, 3;$$

$$K_2(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n) = A_3(\alpha_1^n)^2 + A_2(\alpha_2^n)^2 + A_1(\alpha_3^n)^2 - k^2, \ \ n = 2, 4;$$

$$K_3(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \alpha_3^p) = A_1(\alpha_1^p)^2 + A_3(\alpha_2^p)^2 + A_2(\alpha_3^p)^2 - k^2, \ \ p = 5, 6.$$

Корневые множества описываются соотношениями:

$$\alpha_{3-}^m(\alpha_1^m, \alpha_2^m) = -i\sqrt{A_3^{-1}\left[A_1(\alpha_1^m)^2 + A_2(\alpha_2^m)^2 - k^2\right]}, \ \ m = 1, 3;$$

$$\alpha_{3-}^n(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_1^{-1}\left[A_3(\alpha_1^n)^2 + A_2(\alpha_2^n)^2 - k^2\right]}, \ \ n = 2, 4;$$

$$\alpha_{3-}^p(\alpha_1^p, \alpha_2^p) = -i\sqrt{A_2^{-1}\left[A_1(\alpha_1^p)^2 + A_3(\alpha_2^p)^2 - k^2\right]}, \ \ p = 5, 6.$$

Здесь берутся те ветви аналитических функций, которые обеспечивают принадлежность корней нижней полуплоскости при достаточно больших по модулю вещественных параметрах преобразований Фурье.

Задавая в псевдодифференциальных уравнениях на границах значения функций или производных, получаем интегральные уравнения, решив которые и внеся решения в функциональные уравнения, получим интегральные представления блочного элемента.

В первой локальной системе координат это представление запишется:

$$u_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1)\mathrm{K}_1^{-1}\left\{\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_3\left(u'_{13} - i\alpha_3^1 u_1\right) e^{i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right]} d\eta_1^1 d\eta_2^1 +\right.$$

$$+\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_1\left(u'_{22} + i\alpha_1^1 u_2\right) e^{i\left[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1\left(x_1^2 - b\right)\right]} dx_1^2 dx_2^2 + \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_3\left(u'_{33} + i\alpha_3^1 u_3\right) e^{i\left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b\right]} dx_1^3 dx_2^3 -$$

$$-\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_1\left(u'_{43}-i\alpha_1^1 u_4\right)e^{i\left[\alpha_1^1 a+\alpha_2^1 x_2^4-\alpha_3^1\left(x_1^4+b\right)\right]}dx_1^4 dx_2^4 +\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_2\left(u'_{53}+i\alpha_2^1 u_5\right)e^{i\left[\alpha_1^1 x_1^5-\alpha_2^1 c+\alpha_3^1\left(x_2^5-b\right)\right]}dx_1^5 dx_2^5 +$$

$$\left.+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_2\left(u'_{63}-i\alpha_2^1 u_6\right)e^{i\left[-\alpha_1^1 x_1^6+\alpha_2^1 c+\alpha_3^1\left(x_2^6-b\right)\right]}dx_1^6 dx_2^6\right\}.$$

Для сопряжения блочных элементов необходимо применить гомеоморфизмы, что достигается введением фактор-топологических пространств [4]. В результате для блочных структур выводятся уравнения типа Винера — Хопфа, вид которых зависит от конкретных геометрических параметров блочной структуры. Обращение полученных уравнений позволяет определить перемещения и затем оценить возникающие контактные напряжения.

### 3. Численное исследование напряженности в блочной структуре геологической среды

Выполним исследование блочной структуры, состоящей из четырех прямоугольных параллелепипедов на основании, представленной на рис. 1, с целью установления основные тенденции изменения контактных напряжений в зависимости от значений механических характеристик материала блоков и геометрических параметров структуры.

Модель может соответствовать таким геологическим структурам как глубинные разломы, рифтовые образования, вертикальные трещины или включения, каньоны, некоторые типы вулканических структур.

В качестве варьируемого параметра выбраны: $l_1$ — расстояние между блоками 2, 4 и $l_2$ — расстояние между блоками 1, 3. Изменение этих параметров соответственно приводит к изменению размеров блоков и соотношения сторон в разломе.

Рассчитаны контактные напряжения между блоками и основанием при единичных начальных значениях $l_1$ и $l_2$, которые принимаются фоновыми.

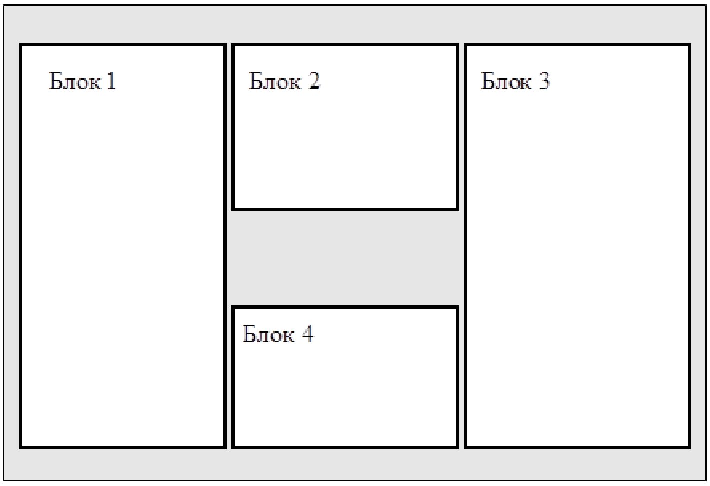



*Рис. 1. Пятиблочная модель блочной структуры геологической среды*

При фиксированном значении $l_2$ с уменьшением $l_1$ (блоки сближаются) наблюдается рост контактных напряжений. При этом они остаются величиной конечной.

При проведении расчетов с той же динамикой изменения $l_1$, но при увеличивающихся значениях $l_2$, наблюдается тенденция нелинейного роста напряжений, которые, тем не менее, остаются конечными.

Не выявлено таких соотношений $l_1$ и $l_2$, при которых наблюдался бы экспоненциальный рост контактных напряжений, описанный в работе [5]. Полученный результат позволяет предложить гипотезу, что бесконечный рост напряжений при «слипании» литосферных плит [5] объясняется, в том числе, и применением для моделирования полубесконечных блочных элементов.

## Заключение

В работе проведено исследование контактных напряжений в одной из блочных структур, моделирующих геологический массив сейсмоопасной территории. Для анализа использовался факторизационный подход, включающий метод блочного элемента и дифференциальный метод факторизациии, лежащий в его основе. Построена пятиблочная структура, состоящая из четырех прямоугольных параллелепипедов на полубесконечном основании. Для установления основных тенденций изменения контактных напряжений в зависимости от характеристик материала блоков и геометрических параметров структуры выполнены численные расчеты.

Полученные результаты могут быть полезны организациям, осуществляющим мониторинг региональной сейсмичности для оценки риска сейсмического события по результатам обработки измерений тектонических движений.

## Благодарности

Отдельные результаты работы получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00145), Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (проект № 19-41-230002).

## Литература

1. *Садовский, М. А.* Сейсмический процесс в блоковой среде / М. А. Садовский, В. Ф. Писаренко. – М. : Наука, 1991. – 95 с.

2. *Бабешко, В. А.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры / В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О. В. Евдокимова [и др.] // Доклады академии наук. – 2009. – Т. 424, № 1. – С. 36–39.

3. *Бабешко, В. А.* О методе блочного элемента / В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О. В. Евдокимова // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 3. – С. 155–163.

4. *Бабешко, В. А.* Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента / В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О. В. Евдокимова // Доклады академии наук. – 2011. – Т. 438, № 5. – С. 623–625.

5. *Бабешко В. А.* О стартовых землетрясениях при жёстком сцеплении литосферных плит с основанием / В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О. В. Евдокимова [и др.] // Доклады академии наук. – 2018. – Т. 478, № 4. – С. 406–412.

УДК 536.2:519.21

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОМЕРЗАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

**О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается задача нестационарной теплопроводности для матричного композита с жидкими включениями. Геометрические характеристики и расположение областей, заполненных включениями, не являются регулярными и обусловливают стохастический характер структуры и теплофизических свойств материала. Предлагается модель промерзания с использованием эффективных теплофизических характеристик многокомпонентной композиции, полученных на основе энергетического метода[1] в предположении о статистической однородности теплофизических свойств материала.
**Ключевые слова:** многокомпонентная композиция, промерзание, энергетический метод, эффективные характеристики, нестационарная теплопроводность.

## Введение

Варианты различных подходов к решению задачи теплопроводности неоднородного тела представлены в [2–4]. В работе [2] рассмотрен численный метод решения уравнения теплопроводности для неоднородного тела. При этом использована аппроксимация на крупной сетке и численное усреднение в неоднородной области.

В [3] представлено аналитическое исследование математической модели промерзания грунта при использовании уравнений теплопроводности и диффузии с постоянными коэффициентами в каждой из фаз.

При описании естественной неоднородности удобно предположить, что геометрические характеристики и расположение областей, заполненных включениями, не являются регулярными и обусловливают стохастический характер структуры и теплофизических свойств материала. В данной работе используется энергетический метод оценки макроскопических свойства композиции при промерзании, позволяющий использовать эффективные теплофизические свойства среды. При этом удается получить зависимость температурных полей в промерзшей и влажной зонах от теплофизических характеристик матрицы, содержимого пор и значений пористости.

## 1. Постановка задачи

В температурном поле $f(x)$ находится полупространство из материала, поры которого заполнены жидкостью. Структура материала представлена на рис. 1. Предполагается, что распределение пор не является регулярным. В таком случае теплофизические характеристики материала, и следовательно температурное поле можно описывать случайными функциями координат.

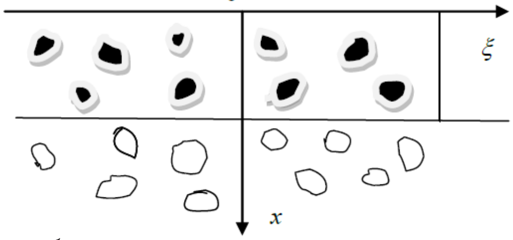



*Рис. 1. Две области промерзающего полупространства. Нижняя — влажная, верхняя с замерзшими порами*

В начальный момент времени на поверхности полупространства устанавливается температура $T(0,t)=f(t),\ f(t)<T_{зам}$, где $T_{зам}$ — температура замерзания жидкой компоненты среды. В результате образуется слой толщиной $\xi=\xi(\tau)$ с замерзшими порами. Нижняя подвижная граница слоя всегда имеет температуру замерзания. На этой границе происходит переход из одного агрегатного состояния вещества в другое. На это требуется теплота перехода $\rho.$ Таким образом, во влажной области

$$T(\xi,\tau)=T_{зам},$$

$$T(\infty,\tau)=T_0, \qquad T_0=\mathrm{const}.$$

Коэффициенты переноса промерзшей и влажной зон различны. Предполагаем, что перенос тепла в композите происходит только вследствие процесса теплопроводности. Будем рассматривать материал с замкнутыми мелкими порами, в которых исключается теплопередача конвекцией.

Рассмотрим случай, когда стохастическое распределение пор в материале таково, что нет их сгустков и разрежений. Тогда теплофизические характеристики материала можно считать статистически однородными и изотропными функциями координат. Будем рассматривать промерзшую и влажную зоны в виде двухкомпонентных композиций с одинаковыми свойствами матриц и различными свойствами включений. Далее воспользуемся представлением об эффективных теплофизических характеристиках, которые определяются концентрациями и свойствами компонент.

Значения температурных полей и коэффициентов температуропроводности в верхнем и нижнем слоях обозначим знаками + и –. Тогда одномерную краевую задачу можно записать в виде

$$\frac{\partial T^{+}(x,\tau)}{\partial\tau}=\overset{*}{k}_1(x)\frac{\partial^2T^{+}(x,\tau)}{\partial x^2},\ (\tau>0;0<x<\xi) \tag{1}$$

$$\frac{\partial T^{-}(x,\tau)}{\partial\tau}=\overset{*}{k}_2(x)\frac{\partial^2T^{-}(x,\tau)}{\partial x^2},\quad (\tau>0;\xi<x<\infty)$$

$$T^{+}(x,0)=f(x) \tag{2}$$

$$T^{+}(0,\tau)=f(\tau) \tag{3}$$

$$T^{+}(\xi,\tau)=T^{-}(\xi,\tau)=T_{зам}=\mathrm{const} \tag{4}$$

$$\frac{\partial T^{-}(\infty,\tau)}{\partial x}=0 \tag{5}$$

$$\overset{*}{\lambda}{}^{+}\frac{\partial T^{+}(\xi,\tau)}{\partial x}-\overset{*}{\lambda}{}^{-}\frac{\partial T^{-}(\xi,\tau)}{\partial x}=\rho p\gamma_2\frac{d\xi}{d\tau}. \tag{6}$$

В (1)–(6) $T^{+}(x,\tau),\ T^{-}(x,\tau)$ — температурные поля в верхней и нижней области, $\overset{*}{k}_i,\ \overset{*}{\lambda}_i$ $(i=1,2)$ — макроскопические значения коэффициентов температуропроводности и теплопроводности.

## 2. Решение Стефана

Для рассматриваемой среды из двух слоев композитов положим в (2) и (3)

$$f(x)=T_0=\mathrm{const},$$

$$\varphi(\tau)=T_{00}=\mathrm{const}.$$

Тогда

$$T^{+}(0,\tau)=T_{00},$$

$$T^{-}(x,0)=T_0$$

и решение для среды с макрохарактеристиками $\overset{*}{k}_1,\ \overset{*}{k}_2$ по аналогии с [4], представится в виде

$$T^{+}(x,\tau,\overset{*}{k}_1)=T_{00}+\frac{erf(u_1(x,\tau,\overset{*}{k}_1)}{erf(u_2(\beta,\overset{*}{k}_1)}\left(T_{зам}-T_{00}\right), \tag{7}$$

$$T^{-}(x,\tau,\overset{*}{k}_2)=T_0+\frac{erf(u_1(x,\tau,\overset{*}{k}_2)}{erf(u_2(\beta,\overset{*}{k}_2))}\left(T_{зам}-T_{00}\right), \tag{8}$$

$$u_1(x,\tau,k)=\frac{x}{2\sqrt{k\tau}},\quad u_2(\beta,k)=\frac{\beta}{2\sqrt{k}},\quad \beta=\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}, \tag{9}$$

Величина $\beta$, характеризующая скорость распространения зоны промерзания, является решением уравнения

$$\frac{\exp(-\frac{\beta^2}{4\overset{*}{k}_1})}{\sqrt{\overset{*}{k}_1}\cdot erf(u_2(\beta,\overset{*}{k}_1)}\left(T_{зам}-T_{00}\right)\cdot\overset{*}{\lambda}_1-\frac{\exp(-\frac{\beta^2}{4\overset{*}{k}_2})}{\sqrt{\overset{*}{k}_2}\cdot erf(u_2(\beta,\overset{*}{k}_2)}\left(T_{зам}-T_0\right)\cdot\overset{*}{\lambda}_2=\frac{\rho p\gamma_2\sqrt{\pi}}{2}\beta. \tag{10}$$

Макроскопические характеристики, входящие в (7), (8), (10) примем в виде [1]

$$\begin{gathered}\overset{*}{k}=\left\langle k\right\rangle-\frac{1}{3}\frac{D_k}{\left\langle k\right\rangle D_k+M_k+\alpha},\quad \left\langle k\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_i\cdot p_i,\\ D_k=\sum_{i=1}^{n}\left(k_i-\left\langle k\right\rangle\right)^2 p_i,\quad M_k=\sum_{i=1}^{n}\left(k_i-\left\langle k\right\rangle\right)^3 p_i.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $k_i$ и $p_i$ теплофизическая характеристика и соответствующая концентрация компоненты композиции с номером $i$, $\alpha$ — параметр, характеризующий внутреннюю геометрию.

Система (7)–(10) с учетом (11) отличается от известного решения Стефана наличием явной зависимости температурных полей  от структуры материала и теплофизических характеристик компонент.

### 3. Вариант двухкомпонентной среды

Воспользуемся (11) для двухкомпонентного варианта композиции. Явное выражение для коэффициента температуропроводности  в верхнем слое примем в виде [5]

$$\begin{gathered}\overset{*}{k}_1(k_1,k_2^{+})=\left\langle k^{+}\right\rangle-\frac{D_{k^{+}}}{3\left\langle k^{+}\right\rangle+(1-2p)\left(k_1-k_2^{+}\right)},\\ \left\langle k^{+}\right\rangle=k_1\cdot p+k_2^{+}(1-p),\\ D_{k^{+}}\left(k_1,k_2^{+}\right)=p\left(k_1-\left\langle k^{+}\right\rangle\right)^2+(1-p)\left(k_2^{+}-\left\langle k^{+}\right\rangle\right)^2\end{gathered} \tag{12}$$

в нижнем слое

$$\begin{gathered}\overset{*}{k}_2(k_1,k_2^{-})=\left\langle k^{-}\right\rangle-\frac{D_{k^{-}}}{3\left\langle k^{-}\right\rangle+(1-2p)\left(k_1-k_2^{-}\right)},\\ \left\langle k^{-}\right\rangle=k_1\cdot p+k_2^{-}(1-p),\\ D_{k^{-}}\left(k_1,k_2^{-}\right)=p\left(k_1-\left\langle k^{-}\right\rangle\right)^2+(1-p)\left(k_2^{-}-\left\langle k^{-}\right\rangle\right)^2.\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь знаки + и – обозначают соответствующие значения теплофизических характеристик включений при различных агрегатных состояниях.

Как видно, (12) и (13) отличаются значением коэффициента температуропроводности второй компоненты композиции в верхнем и нижнем слоях $(k_2^{+},k_2^{-})$ за счет ее замерзания.

С учетом (12), (13) температурные поля верхней и нижней зон композиции (7), (8) принимают явный характер зависимости от теплофизических матрицы и включений.

Пусть $T_0 = T_{зам}$. Разложим функции в левой части в ряд по переменной $\beta$ с сохранением членов первого порядка. Тогда оценку решения (10) можно представить в виде

$$\beta(\lambda_1, \lambda_2^+, p) = \sqrt{\frac{2\overset{*}{\lambda}_1(\lambda_1, \lambda_2^+, p)\left(T_{зам} - T_{00}\right)}{\rho\gamma^-}}. \tag{14}$$

Зависимость (14) в каждый момент времени характеризует связь глубины промерзания с концентрацией включений и коэффициентами теплопроводности фаз верхнего и плотности нижнего слоев.

Для $\overset{*}{\lambda}_1(\lambda_1, \lambda_2^+)$ примем выражения, аналогичные (13). Тогда для характеристики скорости распространения зоны промерзания получим

$$\bar{\beta}(\lambda_1, \lambda_2^+, p) = \sqrt{\lambda_1 \cdot p + \lambda_2^+(1-p) - \frac{p\left(\lambda_1 - \left\langle\lambda^+\right\rangle\right)^2 + (1-p)\left(\lambda_2^+ - \left\langle\lambda^+\right\rangle\right)^2}{3\left\langle\lambda^+\right\rangle + (1-2p)\left(\lambda_1 - \lambda_2^+\right)}}$$

$$\bar{\beta}(\lambda_1, \lambda_2^+, p) = \beta(\lambda_1, \lambda_2^+, p) \cdot \sqrt{\rho\gamma^- / 2\left(T_{зам} - T_{00}\right)} \tag{15}$$

$$\left\langle\lambda^+\right\rangle = \lambda_1 \cdot p + \lambda_2^+(1-p).$$

Чтобы сократить количество переменных, введем безразмерную величину $\lambda_1/\lambda_2^+ = m$. Тогда из (15) следует

$$\tilde{\beta}(m, p) = \sqrt{(m-1) \cdot p + 1 - \frac{(m-1)^2 p(1-p)}{(m-1)(2p+1)+3}} \tag{16}$$

$$\tilde{\beta}(m, p) = \bar{\beta}(\lambda_1, \lambda_2^+, p)/\lambda_2^+.$$

Очевидно, что оценка (16) справедлива в области, где выполняется условие

$$(m-1) \cdot p + 1 - \frac{(m-1)^2 p(1-p)}{(m-1)(2p+1)+3} > 0, \quad p \in (0,1), \quad m > 0.$$

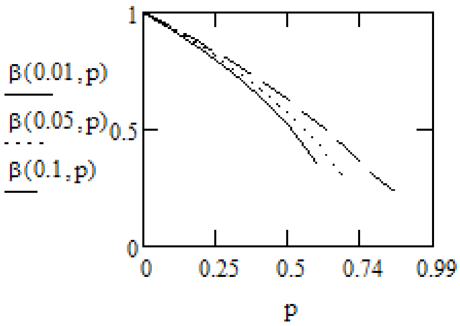



*Рис. 2. Зависимость $\tilde{\beta}$ от пористости среды*

Характер влияния пористости материала на скорость распространения мерзлой зоны для различных составов композиции представлен на рис. 2.

**Заключение**

Получены оценки температурных полей (7), (8) и скорости распространения зоны с измененным агрегатным состоянием (16). Эти оценки содержат параметры структуры среды, представленные пористостью материала. Теплофизические характеристики (13), (14) в этих оценках представлены их макроскопическими значениями в слоях с разным агрегатным состоянием. Рассмотрение проведено на примере промерзания, при возникновении зоны, жидкое содержимое пор которой затвердевает. На рис. 2 представлена скорость распространения зоны промерзания при различных значениях пористости. Используя (11), рассмотренный подход легко распространить на случай с многокомпонентной матрицей и разным содержимым пор.

### Литература


1. *Иванищева, О. И.* Моделирование упругих свойств пористого материала с учетом структурной характеристики / О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции. – Воронеж, 2009. – С. 302.
2. *Васильева, М. В.* Численное усреднение для задачи теплопроводности в неоднородных и перфорированных средах / М. В. Васильева, Д. А. Стальнов // Вестник Северо-Восточного федерального университета. 2017. – № 2(58). – С.49–59.
3. *Попов, В. В.* Математическая модель промерзания грунта // Математические заметки Вестника Северо-Восточного федерального университета (СВФУ). – 2017. – Т. 24, вып. 2. – С. 85–95.
4. *Лыков, А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – Москва : Высшая школа, 1967. – 599 с.
5. *Иванищева, О. И.* Статистическое моделирование в задачах механики неоднородных сплошных сред: учеб.-метод. пособие / О. И. Иванищева. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. – 34 с.

УДК 531.7

# МЕХАНИЧЕСКИЙ ГИРОСКОП И ЕГО ЭЛЕКТРОННЫЕ АНАЛОГИ

**Д. А. Киселев**

*Курганский государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрены конструкции гироскопических устройств от роторного до микромеханического. Их устройство анализируется с целью иллюстрации курса теоретической механики.
**Ключевые слова:** гироскоп, сложное движение, измерение, контроль.

## Введение

Изобретателем механического гироскопа является Иоанн Боненбергер (1817 г.). В середине XIX века французский физик Жан Бернар Леон Фуко усовершенствовал конструкцию и предложил название «гироскоп» (от греческих слов «круг» и «смотрю»). Простейшим примером гироскопа является детская игрушка юла (волчок) [1].

Главной деталью механического гироскопа является ротор. Вспомогательными, но очень важными и ответственными являются детали подвеса и подшипники. Если в гироскопе раскрутить ротор до высоких скоростей, он оказывает энергичное сопротивление попыткам изменить положение оси вращения. Это свойство используют для определения угловых отклонений объекта (углов рыскания корабля или летательного аппарата, углов килевой и бортовой качки корабля, углов тангажа и крена летательного аппарата), для стабилизации объекта или отдельных приборов и устройств, для решения навигационных задач и автоматического управления курсом [2].

## 1. Разновидности гироскопов

Существует множество разновидностей механического гироскопа. В качестве ротора гироскопа может быть использована жидкая среда. Широко распространены астатические гироскопы (в них центр тяжести совпадает с точкой пересечения осей подвеса, в результате чего сила тяжести не влияет на работу такого гироскопа). Но если сместить центр тяжести гироскопа относительно точки подвеса, получают так называемый позиционный гироскоп, обладающий избирательностью по отношению к некоторому направлению. Различаются гироскопы и по количеству степеней свободы, причем наиболее распространены двухстепенные и трехстепенные гироскопы [2].

С приближенной теорией механических гироскопов мы знакомимся в курсе теоретической механики. Но развитие науки и техники привело к появлению принципиально иных, немеханических гироскопов: кольцевых лазерных гироскопов, волновых твердотельных гироскопов, микроэлектромеханических систем и других.

Лазерный гироскоп представляет собой устройство, в котором циркулируют два встречных световых потока (луча). Для этого предусмотрен оптический квантовый генератор направленного излучения и образованный зеркалами плоский замкнутый контур. А для оценки разности хода лучей (по направлению вращения и против него) используется интерферометр [1].

Основным элементом волновых твердотельных гироскопов является резонатор, в котором создаются стоячие волны колебаний. При повороте гироскопа возникают кориолисовы силы, которые воздействуют на элементы вибрирующей массы резонатора и возбуждают парную форму колебаний [1].

Микроэлектромеханические системы — это микросхемы со встроенным датчиком инерции, которые способны переводить его механические перемещения в электрические импульсы. Управляющие системы по показаниям таких датчиков вычисляют текущее положение объекта и стабилизируют его при помощи электромоторов. Микроэлектромеханические системы работают или по принципу волновых твердотельных гироскопов, или как вибрационные гироскопы. В микромеханическом гироскопе вибрационного типа кремниевое кольцо свободно подвешено на кремниевых балочках-рессорах, которые одним концом крепятся к неподвижной центральной шайбе. Когда на управляющие электроды подается напряжение, кольцо начинает вибрировать, возникает стоячая волна, которую отслеживают считывающие электроды. Если кольцо под действием внешних сил поворачивается, стоячая волна искажается. По величине искажений судят о скорости поворота [3].

В гироскопе с воздушной опорой разработчики заменили шариковые подшипники, используемые в традиционном кардановом подвесе, газовой подушкой, что полностью устранило влияние износа материала опор во время работы и позволило почти неограниченно увеличить время службы прибора. Жесткость аэродинамического подвеса не меньше, чем обычных шарикоподшипников. К недостаткам газовых опор следует отнести довольно большие потери энергии и возможность внезапного отказа при случайном контакте поверхностей опоры между собой.

Динамически настраиваемые гироскопы (ДНГ) принадлежат к классу гироскопов с упругим подвесом ротора, в которых свобода угловых движений оси собственного вращения обеспечивается за счет упругой податливости конструктивных элементов (например, торсионов). В ДНГ в отличие от классического гироскопа используется так называемый внутренний карданов подвес, образованный внутренним кольцом, которое изнутри крепится торсионами к валу электродвигателя, а снаружи — торсионами к ротору. Момент трения в подвесе проявляется только в результате внутреннего трения в материале упругих торсионов. В динамически настраиваемых гироскопах за счет подбора моментов инерции рамок подвеса и угловой скорости вращения ротора осуществляется компенсация упругих моментов подвеса, приложенных к ротору. К достоинствам ДНГ следует отнести их миниатюрность, высокую стабильность показаний, относительно невысокую стоимость.

Значительные достижения в области разработки и промышленного выпуска световодов с минимальным значением погонного затухания и интегральных оптических компонентов привели к началу работ над волоконно-оптическим гироскопом (ВОГ), представляющим собой волоконно-оптический интерферометр, в котором распространяются встречные электромагнитные волны. Наиболее распространенный вариант ВОГ – многовитковая катушка оптического волокна. Достигнутые в лабораторных образцах точности ВОГ приближаются к точности КЛГ. ВОГ из-за простоты конструкции является одним из наиболее дешевых среднеточных гироскопов, и можно ожидать, что он вытеснит КЛГ в диапазоне точностей $10^{-20}$/ ч и ниже.

Вибрационные гироскопы основаны на свойстве камертона, заключающегося в стремлении сохранить плоскость колебаний своих ножек. Теория и эксперимент показывают, что в ножке колеблющегося камертона, установленного на платформе, вращающейся вокруг оси симметрии камертона, возникает периодический момент сил, частота которого равна частоте колебания ножек, а амплитуда пропорциональна угловой скорости вращения платформы. Поэтому, измеряя амплитуду угла закрутки ножки камертона, можно судить об угловой скорости платформы. Патент на вибрационный гироскоп принадлежит некоторым видам двукрылых насекомых, обладающих парой стержнеобразных придатков, называемых жужжальцами, которые вибрируют в полете с размахом до 75° и частотой около 500 Гц. При повороте туловища возникают колебания жужжалец в другой плоскости. Эти колебания воспринимаются особыми чувствительными клетками, расположенными в основании жужжалец и подающими команду на выравнивание корпуса насекомого. Система похожа на автопилот, в датчиках которого вращательное движение заменено на колебательное как на более естественное и экономичное для биологических систем.

Микромеханические гироскопы (ММГ) — это одноосные гироскопы вибрационного типа, изготавливаемые на базе современных кремниевых технологий. ММГ представляет собой своеобразный электронный чип с кварцевой подложкой площадью в несколько квадратных миллиметров, на которую методом фотолитографии наносится плоский вибратор типа описанного выше камертона.

## Заключение

В силу перечисленных обстоятельств эволюционное развитие гироскопической техники последних десятилетий подошло к рубежу крупных изменений, и именно поэтому внимание специалистов в области гироскопии сейчас сосредоточилось на поиске нетрадиционных областей применения приборов. Неожиданно открылись совершенно новые интересные задачи. Это и разведка полезных ископаемых, и предсказание землетрясений, и сверхточное измерение положений железнодорожных путей и нефтепроводов, медицинская техника и многое другое, где нас ждут новые результаты и, быть может, новые открытия.

## Литература

1 Гироскоп. – URL: https://ru.wikipedia.org/гироскоп (дата обращения 15.06.2020). – Текст : электронный.

2 Гироскопические устройства // Большая советская энциклопедия. – URL: https://bse.slovaronline.com/ (дата обращения 15.06.2020). – Текст : электронный.

3 Улитка гироскопических инноваций // Наука и технологии. – URL: https://stimul.online/articles/science-and-technology/ulitka-giroskopicheskikh-innovatsiy/?sphrase_id=11557 (дата обращения 15.06.2020).

УДК 539.3

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ И СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

**А. В. Ковалев[1,2], Ю. В. Малыгина[1]**

*[1]Воронежский государственный университет*
*[2]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е Жуковского и Ю. А. Гагарина»*

**Аннотация.** В работе определяется напряженное состояние в упругопластической трубе с условием пластичности Мизеса в случае плоской деформации для сжимаемого материала с учетом температуры. Предел текучести материала трубы предполагается не зависящим от температуры.
**Ключевые слова:** напряжение, пластичность, упругость, упрочнение, сжимаемость, температура.

В работах [1, 2] определено напряженно-деформированное состояние в упрочняющейся упруговязкопластической трубе с учетом температуры. При этом материал трубы считался несжимаемым. В работах [3, 4] с помощью метода возмущений решаются задачи определения напряженно-деформированного состояния в упругом пространстве, ослабленном цилиндрической полостью с учетом температуры и в упругопластической трубе с учетом сжимаемости материала. Напряженно-деформированное состояние упругопластической трубы с учетом сжимаемости материала было представлено в работе [5]. Случай учета температурных эффектов и сжимаемости при решении упругопластической задачи рассмотрен в работах [6–8]. В данной работе представлены соотношения для определения напряженного состояния упрочняющейся упругопластической трубы с учетом сжимаемости материала и температуры.

Рассмотрим упрочняющуюся упругопластическую трубу, поперечное сечение которой ограничено окружностями радиусов $a$ и $b$ $(a<b)$ из сжимаемого материала, находящейся под действием равномерного внутреннего давления $p$. Решение нашей задачи будем искать методом малого параметра [9]. Выражение для температуры трубы является известным решением уравнения теплопроводности и изменяется по логарифмическому закону, предел текучести будем считать не зависящим от температуры. Задачу будем решать в цилиндрической системе координат $(r,\theta,z)$.

Выпишем следующие соотношения, необходимые для решения задачи:

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=\frac{\sigma_\theta-\sigma_r}{r}, \tag{1}$$

где $\sigma_r,\sigma_\theta$ — компоненты тензора напряжений;

– соотношения Коши

$$e_r=\frac{du}{dr},\quad e_\theta=\frac{u}{r}, \tag{2}$$

где $e_r,e_\theta$ — компоненты тензора полных деформаций, $u$ — компонента радиального перемещения;

– соотношения закона Гука с учетом температуры, связывающие напряжения и упругие деформации

$$e_r^e=\frac{1}{E}\left[\sigma_r-\mu(\sigma_\theta+\sigma_z)\right]+\alpha T,$$

$$e_\theta^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)\right] + \alpha T, \quad (3)$$

$$e_z^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right] + \alpha T,$$

где $e_r^e, e_\theta^e, e_z^e$ — компоненты тензора упругих деформаций, $E$ — модуль упругости, $\mu$ — коэффициент Пуассона, $\alpha$ — коэффициент температуропроводности [10, 11], $T = T(r)$ — температура, которая является известным решением уравнения теплопроводности [12, 13];

– условие пластичности

$$(\sigma_\theta - \sigma_r - c(e_\theta^p - e_r^p))^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z - c(e_\theta^p - e_z^p))^2 + (\sigma_r - \sigma_z - c(e_r^p - e_z^p))^2 = 6k^2, \quad (4)$$

где $\sigma_z$ — компонента тензора напряжений, $e_r^p$, $e_\theta^p$, $e_z^p$ — компоненты тензора пластических деформаций, $k$ — предел текучести;

– соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$de_r^p = \frac{d\lambda}{3}(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - c(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p)),$$

$$de_\theta^p = \frac{d\lambda}{3}(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z - c(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p)), \quad (5)$$

$$de_z^p = \frac{d\lambda}{3}(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta - c(2e_z^p - e_r^p - e_\theta^p)),$$

где $d\lambda$ — скалярный положительный множитель, $c$ — коэффициент упрочнения;

– граничные условия

$$\sigma_r\,|_{r=a} = -p, \sigma_r\,|_{r=b} = 0, \quad (6)$$

– условия непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [u] = 0. \quad (7)$$

Квадратные скобки здесь и далее обозначают разность значений выражений, заключенных в скобки, соответствующих упругой и пластической областям.

Полные деформации тела в пластической зоне состоят из двух частей: упругой и пластической

$$e_r = e_r^e + e_r^p,\ e_\theta = e_\theta^e + e_\theta^p,\ e_z = e_z^e + e_z^p. \quad (8)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука с учетом температуры, а приращения пластических деформаций — ассоциированным законом пластического течения. При этом в случае плоской деформации $e_z = 0$. Тогда из (3)–(5) и (8) получим

$$de_r = \frac{1}{E}[d\sigma_r - \mu(d\sigma_\theta + d\sigma_z)] + d(\alpha T) + \frac{d\lambda}{3}(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - c(2e_r^p - e_\theta^p - e_z^p)),$$

$$de_\theta = \frac{1}{E}[d\sigma_\theta - \mu(d\sigma_r + d\sigma_z)] + d(\alpha T) + \frac{d\lambda}{3}(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z - c(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p)), \quad (9)$$

$$0 = \frac{1}{E}[d\sigma_z - \mu(d\sigma_r + d\sigma_\theta)] + d(\alpha T) + \frac{d\lambda}{3}(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta - c(2e_z^p - e_r^p - e_\theta^p)).$$

Представим искомые соотношения в виде рядов по параметру $\delta$, согласно методу малого параметра. В данной работе ограничимся первыми двумя членами ряда. Таким образом, решение будем искать в виде:

$$e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \delta e_{ij}^{(1)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)},$$

$$u = u^{(0)} + \delta u^{(1)},$$

$$T = T^{(0)} + \delta T^{(1)}, \quad \lambda = \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(1)}, \quad (10)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha^{(1)}, \quad \mu = \mu_0 + \delta\mu^{(1)},$$

где $\delta$ — малый параметр, $\mu_0 = 0.5$, $\mu^{(1)}$ — известная постоянная, верхний индекс (0), (1) определяет нулевое и первое приближения соответственно.

Подставив эти разложения в соотношения (1)–(4), (6), (7) и (9) и приравняв выражения при одинаковых степенях $\delta$, в каждом приближении получим систему дифференциальных уравнений.

В нулевом приближении имеет место плоская деформация упрочняющегося упругопластического несжимаемого материала, а значит, будет справедливо условие несжимаемости

$$e_r + e_\theta = 0. \tag{11}$$

Решение этой задачи имеет вид [9, 14, 15]

$$\begin{gathered}
\sigma_r^{p(0)} = -p + \frac{4E}{2E+3c} k ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{3ckr_s^{(0)2}}{2E+3c}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right), \\
\sigma_\theta^{p(0)} = -p + \frac{4E}{2E+3c} k\left(1 + ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \frac{3ckr_s^{(0)2}}{2E+3c}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2}\right), \\
\sigma_z^{p(0)} = -p + \frac{2E}{2E+3c} k\left(1 + 2ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \frac{3ckr_s^{(0)2}}{a^2(2E+3c)}, \\
u^{p(0)} = u^{e(0)} = \frac{3kr_s^{(0)2}}{2Er}, \\
\sigma_r^{e(0)} = kr_s^{(0)2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right], \\
\sigma_\theta^{e(0)} = kr_s^{(0)2}\left[\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right], \\
\sigma_z^{e(0)} = \frac{kr_s^{(0)2}}{b^2}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Выражение радиуса упругопластической границы $r_s^{(0)}$ может быть определено из следующего уравнения

$$r_s^{(0)2} = \frac{2E}{2E+3c} b^2 + \frac{2E}{2E+3c} 2b^2 ln\left(\frac{r_s^{(0)}}{a}\right) + \frac{3cr_s^{(0)2}}{2E+3c}\frac{b^2}{a^2} - \frac{p}{k}. \tag{13}$$

Рассмотрим первое приближение.

Уравнения равновесия (1) и соотношения Коши (2) линейны относительно компонент напряжений, деформаций и перемещений. Поэтому в первом приближении они могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \sigma_r^{(1)}}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}}{r}, \tag{14}$$

$$e_r^{(1)} = \frac{du^{(1)}}{dr}, \quad e_\theta^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{r}. \tag{15}$$

Условие пластичности (4) в первом приближении будет иметь вид

$$\begin{gathered}
2\left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - c\left(e_\theta^{p(0)} - e_r^{p(0)}\right)\right)\left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} - c\left(e_\theta^{p(1)} - e_r^{p(1)}\right)\right) + \\
+2\left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)} - c\left(e_\theta^{p(0)} - e_z^{p(0)}\right)\right)\left(\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c\left(e_\theta^{p(1)} - e_z^{p(1)}\right)\right) + \\
+2\left(\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)} - c\left(e_r^{p(0)} - e_z^{p(0)}\right)\right)\left(\sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)} - c\left(e_r^{p(1)} - e_z^{p(1)}\right)\right) = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Соотношения для выражения полных деформаций в пластической зоне (9) в первом приближении примут вид

$$de_r^{(1)}=\frac{1}{E}\left[d\sigma_r^{(1)}-\mu_0\left(d\sigma_\theta^{(1)}+d\sigma_z^{(1)}\right)-\mu^{(1)}\left(d\sigma_\theta^{(0)}+d\sigma_z^{(0)}\right)\right]+d\left(\alpha_0T^{(1)}\right)+d\left(\alpha^1T^{(0)}\right)+$$
$$+\frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left(2\sigma_r^{(1)}-\sigma_\theta^{(1)}-\sigma_z^{(1)}-c\left(2e_r^{p(1)}-e_\theta^{p(1)}-e_z^{p(1)}\right)\right)+\frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left(2\sigma_r^{(0)}-\sigma_\theta^{(0)}-\sigma_z^{(0)}-c\left(2e_r^{p(0)}-e_\theta^{p(0)}-e_z^{p(0)}\right)\right),$$
$$de_\theta^{(1)}=\frac{1}{E}\left[d\sigma_\theta^{(1)}-\mu_0\left(d\sigma_r^{(1)}+d\sigma_z^{(1)}\right)-\mu^{(1)}\left(d\sigma_r^{(0)}+d\sigma_z^{(0)}\right)\right]+d\left(\alpha_0T^{(1)}\right)+d\left(\alpha^1T^{(0)}\right)+ \qquad (17)$$
$$+\frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left(2\sigma_\theta^{(1)}-\sigma_r^{(1)}-\sigma_z^{(1)}-c\left(2e_\theta^{p(1)}-e_r^{p(1)}-e_z^{p(1)}\right)\right)+\frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left(2\sigma_\theta^{(0)}-\sigma_r^{(0)}-\sigma_z^{(0)}-c\left(2e_\theta^{p(0)}-e_r^{p(0)}-e_z^{p(0)}\right)\right),$$
$$0=\frac{1}{E}\left[d\sigma_z^{(1)}-\mu_0\left(d\sigma_r^{(1)}+d\sigma_\theta^{(1)}\right)-\mu^{(1)}\left(d\sigma_r^{(0)}+d\sigma_\theta^{(0)}\right)\right]+d\left(\alpha_0T^{(1)}\right)+d\left(\alpha^1T^{(0)}\right)+$$
$$+\frac{d\lambda^{(0)}}{3}\left(2\sigma_z^{(1)}-\sigma_r^{(1)}-\sigma_\theta^{(1)}-c\left(2e_z^{p(1)}-e_r^{p(1)}-e_\theta^{p(1)}\right)\right)+\frac{d\lambda^{(1)}}{3}\left(2\sigma_z^{(0)}-\sigma_r^{(0)}-\sigma_\theta^{(0)}-c\left(2e_z^{p(0)}-e_r^{p(0)}-e_\theta^{p(0)}\right)\right).$$

Граничные условия (6) в первом приближении примут форму [9]

$$\sigma_r^{(1)}\big|_{r=a}=0,\sigma_r^{(1)}\big|_{r=b}=0. \qquad (18)$$

Соотношения для уравнений неразрывности напряжений и перемещений на границе (7) в первом приближении имеют вид [9]

$$\left[\sigma_r^{(1)}+\frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr}r_s^{(1)}\right]=\left[\sigma_\theta^{(1)}+\frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{dr}r_s^{(1)}\right]=\left[u^{(1)}+\frac{du^{(0)}}{dr}r_s^{(1)}\right]=0. \qquad (19)$$

Рассмотрим третье уравнение соотношения (16).

$$\frac{1}{2}d\left(2\sigma_z^{(1)}-\sigma_r^{(1)}-\sigma_\theta^{(1)}\right)+\frac{E}{3}d\lambda^{(0)}\left(2\sigma_z^{(1)}-\sigma_r^{(1)}-\sigma_\theta^{(1)}-c\left(2e_z^{p(1)}-e_r^{p(1)}-e_\theta^{p(1)}\right)\right)=$$
$$=\mu^{(1)}\left(d\sigma_r^{(0)}+d\sigma_\theta^{(0)}\right)-\alpha^{(1)}EdT^{(0)}). \qquad (20)$$

Введем обозначение

$$\chi^{(1)}=2\sigma_z^{(1)}-\sigma_r^{(1)}-\sigma_\theta^{(1)}-c\left(2e_z^{p(1)}-e_r^{p(1)}-e_\theta^{p(1)}\right). \qquad (21)$$

Тогда предыдущее уравнение можно представить в виде

$$\frac{d\chi^{(1)}}{d\lambda^{(0)}}+\frac{2E+3c}{3}\chi^{(1)}=4\mu^{(1)}\frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}}-2\alpha^{(1)}E\frac{dT^{(0)}}{d\lambda^{(0)}}. \qquad (22)$$

Решив дифференциальное уравнение (21), получим

$$\chi^{(1)}=\exp\left(-\frac{2E+3c}{3}\lambda^{(0)}\right)\int\left[4\mu^{(1)}\frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda^{(0)}}-2\alpha^{(1)}E\frac{dT^{(0)}}{d\lambda^{(0)}}\right]\exp\left(\frac{2E+3c}{3}\lambda^{(0)}\right)d\lambda^{(0)}+\chi_e^{(1)},$$
$$\chi_e^{(1)}=4\mu^{(1)}\sigma_z^{(0)}-2\alpha^{(1)}ET^{(0)}. \qquad (23)$$

Вследствие введенного обозначения (20), можем определить компоненту напряжения $\sigma_z^{(1)}$ следующим образом

$$\sigma_z^{(1)}=\frac{1}{2}\left(\sigma_r^{(1)}+\sigma_\theta^{(1)}+\chi^{(1)}+c\left(2e_z^{p(1)}-e_r^{p(1)}-e_\theta^{p(1)}\right)\right). \qquad (24)$$

Определим деформации $e_r^{(1)}$ и $e_\theta^{(1)}$ в упругой области [6, 8]

$$e_r^{(1)}+e_\theta^{(1)}=-\frac{6\mu^{(1)}}{E}\sigma_z^{(0)}+3\alpha^{(1)}T^{(0)},$$
$$e_r^{(1)}-e_\theta^{(1)}=\frac{1}{2E}\left(3(\sigma_r^{(1)}-\sigma_\theta^{(1)})+2\mu^{(1)}(\sigma_r^{(0)}-\sigma_\theta^{(0)})\right). \qquad (25)$$

В пластической зоне, исходя из условия пластичности (15), с учетом (23) и известного нулевого приближения (12), получим

$$\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} = c\left(e_\theta^{p(1)} - e_r^{p(1)}\right) + \frac{4k^{(0)}k^{(1)}}{\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - c\left(e_\theta^{p(0)} - e_r^{p(0)}\right)}. \qquad (26)$$

Подставив полученное соотношение в уравнение равновесия (14), определим напряжения $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_\theta^{(1)}$ в пластической области.

Таким образом, с помощью метода малого параметра получим напряженно-деформированное состояние в упрочняющейся упругопластической задаче с учетом сжимаемости и температуры. Положив в задаче коэффициент упрочнения равным нулю, получим соотношения для определения напряженно-деформированного состояния сжимаемой упругопластической трубы с учетом температуры [8]. Также, приравняв нулю коэффициент упрочнения $c$ и коэффициент температурного расширения $\alpha$, получим соотношения, определяющие напряженно-деформированное состояние в сжимаемой упругопластической задаче [9].

**Литература**

1. *Горностаев, К. К.* О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры / К. К. Горностаев, А. В. Ковалев // Вестник Воронежского Государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 135–140.

2. *Горностаев, К. К.* О симметричной деформации упрочняющейся упруговязкопластической трубы с учетом температуры / А. В. Ковалев, К. К. Горностаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 3 (25). – С. 176–184.

3. *Ковалев, А. В.* Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры. /А. В. Ковалев, И. Г. Хвостов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – №2 (20). – С. 29–35.

4. *Ковалев, А. В.* Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации / А. В. Ковалев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – №1 (15). – С. 64–69.

5. *Ивлев, Д. Д.* Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации. / Д. Д. Ивлев, Е. В. Макаров, Ю. М. Марушкей // Изв. РАН. МТТ. – 1978. – № 4. – С. 80–87.

6. *Андреева, Ю. В.* К определению напряженного состояния в упругопластической трубе с учетом температуры и сжимаемости материала/Ю. В. Андреева, А. Н. Внуков, А . В. Ковалев // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева (Чебоксары 15–18 сентября 2015): в 2 ч. Ч.1. – Чебоксары : гос.пед.ун-т, 2015. – С. 167–172.

7. *Андреева, Ю. В.* К расчету сжимаемой упругопластической трубы / Ю. В. Андреева, А. Н. Внуков, А. В. Ковалев // Механика деформируемого твердого тела : сборник трудов 9 Всероссийской конференции в рамках Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. : электронный ресурс. – Воронеж, 2016. – С. 153–155.

8. *Gornostaev, K. K.* Stress-strain state in an elastoplastic pipe taking into account the temperature and compressibility of the material / K. K. Gornostaev, A. V. Kovalev, Y. V. Malygina // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. V. 973. – 012004.

9. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

10. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики : учебник для вузов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 742 с.

11. *Мелан, Э.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. / Э. Мелан, Г. Паркус. – М. : Физматгиз, 1958. – 167 с.

12. *Даниловская, В. И.* Упругопластическая симметричная деформация толстостенной трубы с учётом неравномерности распределения температуры вдоль радиуса / В. И. Даниловская // Прикладная механика. – 1965. – Т. I, № 6. – С. 8–13.

13. *Паркус, Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Перевод с немецкого. / Г. Паркус. – М. : Физматлит, 1963. – 253 с.

14. *Артемов, М. А.* Метод возмущений в теории упрочняющегося тела / М. А. Артемов // Прикладные задачи механики сплошных сред. – Воронеж, – 1988. – С. 51–53.

15. *Артемов М. А.* Метод возмущений в одном классе упругопластических задач с произвольным упрочнением / М. А. Артемов, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Воронеж гос. ун-т. – Воронеж, – 1995. – 30 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.03.96, № 685–В95.

УДК 539.3

# ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК КАК ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВУМЕРНОГО КОНТИНУУМА В КОСОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

**В. А. Козлов, Д. А. Каширина**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В отличие от известных подходов в теории оболочек, опирающихся на те или иные допущения и традиционного сведения трёхмерной задачи к двумерной, в работе статические и геометрические соотношения получены с позиции взаимодействия погонных сил и моментов в пространственно-искривленном двумерном континууме. Такой подход был применён Э. Рейсснером, но в ортогональной сетке и для физических компонентов. Соотношения представлены в тензорной, векторной и скалярной формах.
**Ключевые слова:** теория тонких оболочек, основные соотношения теории оболочек, статико-геометрическая аналогия.

## Введение

Известны различные методы построения вариантов теории оболочек, опирающихся на те или иные допущения [1, 2, 6]. В данной работе, в отличие от традиционного подхода сведения трёхмерной задачи к двумерной, статические и геометрические зависимости получены с позиции взаимодействия погонных сил и моментов в пространственно-искривленном двумерном континууме. При этом основные соотношения теории оболочек обладают значительной общностью и имеют компактный вид. С помощью некоторых преобразований и упрощений эти соотношения сводятся к уравнениям классической теории. Построение теории оболочек как двумерного континуума выполнено для общего случая в пространственной косоугольной системе координат, что повлекло за собой применение аппарата тензорного анализа.

## 1. Уравнения равновесия. Граничные условия

Итак, пусть некоторая параметризованная поверхность задана уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha^1, \alpha^2),$$

где $\alpha^1, \alpha^2$ — косоугольные гауссовы координаты. При этом проекции вектор-функции $\vec{r}$ точек поверхности в декартовой системе координат задаются непрерывными однозначными функциями

$$x = x(\alpha^1, \alpha^2), \quad y = y(\alpha^1, \alpha^2), \quad z = z(\alpha^1, \alpha^2).$$

Как известно, координатные векторы $\vec{r}_i = \partial \vec{r} / \partial \alpha^i$ $(i = 1, 2)$ вместе с ортом нормали $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 / \sqrt{a}$ образуют основной базис в любой точке поверхности; $\sqrt{a} = A_1 A_2 \sin\chi$, $A_1, A_2$ — параметры Лямэ, $\chi$ — угол между $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$; $d\sigma = \sqrt{a} d\alpha^1 d\alpha^2$ — площадь бесконечно малого четырёхугольного элемента поверхности, ограниченного координатными линиями $\alpha^1 = \text{const}$ и $\alpha^1 + d\alpha^1 = \text{const}$, $\alpha^2 = \text{const}$ и $\alpha^2 + d\alpha^2 = \text{const}$.

Выделим бесконечно малый элемент поверхности, который будет элементом некоторой оболочки, нагруженной распределённой нагрузкой $\vec{q}$ и моментом $\vec{m}$, приходящимися на единицу недеформированной площади. Пусть к четырём сторонам этого элемента приложены векторы сил $\vec{N}^i$ и моментов $\vec{M}^i$ в соответствии с рис. 1 (здесь и далее $(\ )_{,i} = \partial / \partial \alpha^i$ ).

При этом векторы сил и моментов можно представить в виде $(i, j = 1, 2)$

$$\vec{q} = q^j \vec{r}_j + q_n \vec{n}; \quad \vec{m} = m^j \vec{n} \times \vec{r}_j + m_n \vec{n}. \tag{1}$$

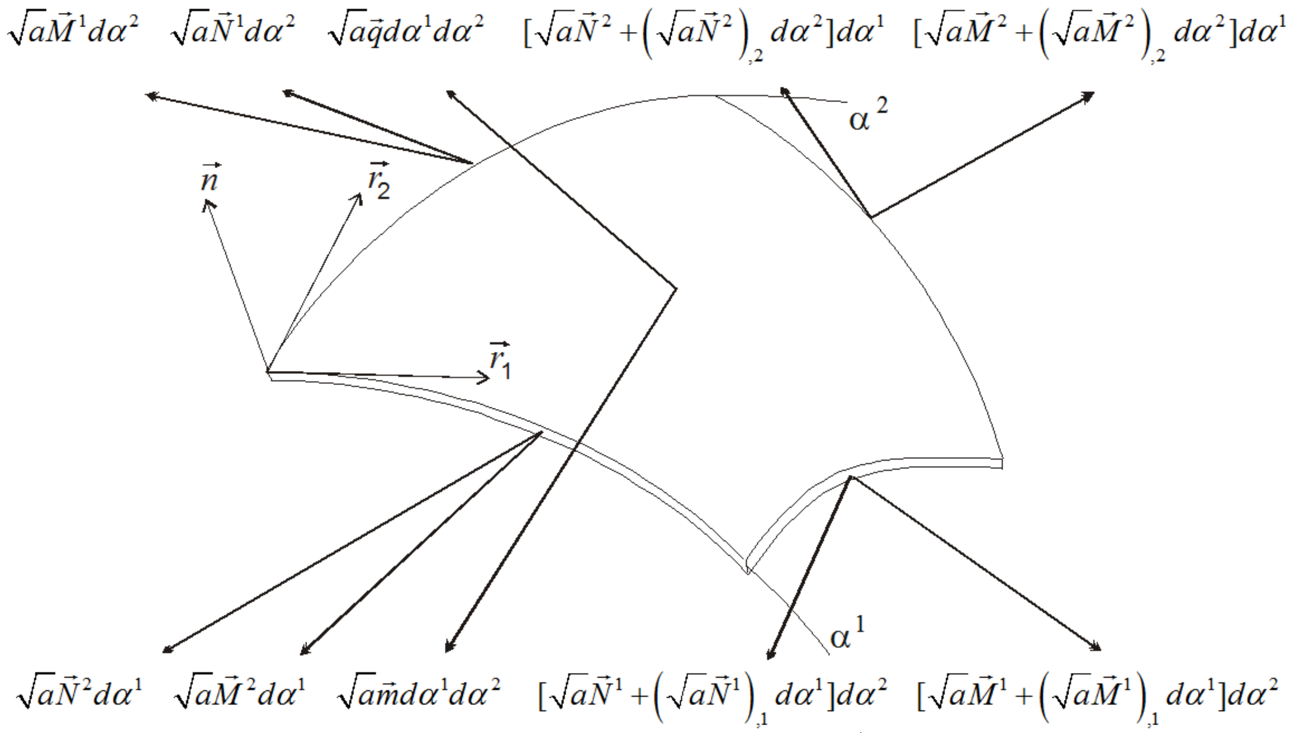



*Рис. 1. Схема нагружения элемента оболочки*

$$\vec{N}^i = N^{ij}\vec{r}_j + Q^i\vec{n}; \quad \vec{M}^i = M^{ij}\vec{n}\times\vec{r}_j + P^i\vec{n}. \tag{2}$$

В отличие от известных теорий оболочек здесь для векторов моментов вводятся нормальные к поверхности моментные составляющие $P^i$.

Рассматривая приращение сил и моментов при переходе от стороны $\alpha^1 = \text{const}$ к стороне $\alpha^1 + d\alpha^1 = \text{const}$ и от $\alpha^2 = \text{const}$ к $\alpha^2 + d\alpha^2 = \text{const}$, при соблюдении принципа равенства действия и противодействия и условий равенства нулю главного вектора и главного момента, получим векторные уравнения равновесия сил и моментов

$$\left(\sqrt{a}\vec{N}^i\right)_{,i} + \sqrt{a}\vec{q} = 0. \tag{3}$$

$$\left(\sqrt{a}\vec{M}^i\right)_{,i} + \vec{r}_i \times \left(\sqrt{a}\vec{N}^i\right) + \sqrt{a}\vec{m} = 0. \tag{4}$$

Для получения уравнений равновесия в скалярной форме потребуются формулы Гаусса-Вейнгартена дифференцирования векторов основного базиса. Эти деривационные равенства в теории поверхности являются аналогом формул Серре-Френе в теории пространственных кривых. Представим их в виде

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\vec{r}_k + b_{ij}\vec{n}; \quad \vec{n}_i = -b^k_i\vec{r}_k; \quad \vec{r}^i_j = -\Gamma^i_{jk}\vec{r}^k + b^i_j\vec{n}. \tag{5}$$

Здесь $\Gamma^k_{ij}, b_{ij}$ — символы Кристоффеля и коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, определяемые известными равенствами теории оболочек, а $b^k_i$ выражаются через $b_{ij}$ и коэффициенты первой квадратичной формы (параметры Лямэ); $\vec{r}^1 = \vec{r}_2 \times \vec{n}/\sqrt{a}$, $\vec{r}^2 = \vec{n}\times\vec{r}_1/\sqrt{a}$ — векторы взаимного локального базиса.

Разворачивая с помощью (5) уравнение (3) и последовательно умножая на координатные векторы вспомогательного базиса $\vec{r}^1, \vec{r}^2, \vec{n}$ ($\vec{r}_i \cdot \vec{r}^j = \delta^j_i$ — символ Кронекера, $\vec{r}_i \cdot \vec{n} = 0$), получим известные уравнения равновесия в скалярной форме

$$\begin{aligned} &\nabla_i N^{ik} - b^k_i Q^i + q^k = 0, \quad k = 1,2 \\ &\nabla_i Q^i + b_{ik}N^{ik} + q_n = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\nabla_i N^{ik} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}N^{ik}\right)_{,i} + N^{ij}\Gamma^k_{ij}; \quad \nabla_i Q^i = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}Q^i\right)_{,i}$.

Уравнения равновесия моментов (4) с учётом соотношения $\Gamma^j_{ji} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \dfrac{\partial \sqrt{a}}{\partial \alpha^i}$ можно преобразовать к виду

$$\nabla_i \vec{M}^i + \vec{r}_i \times \vec{N}^i + \vec{m} = 0, \tag{7}$$

где $\nabla_i \vec{M}^i = \dfrac{\partial \vec{M}^i}{\partial \alpha^i} + \Gamma^j_{ji} \vec{M}^i$.

Разворачивая (7) с помощью (1), (2) и последовательно скалярно умножая на $(\vec{n} \times \vec{r}^1)$, $(\vec{n} \times \vec{r}^2)$ и $\vec{n}$, получим три уравнения равновесия моментов

$$\begin{aligned} &\nabla_i M^{ik} - b_{ij} c^{kj} P^i - Q^k + m^k = 0, \quad k = 1,2 \\ &\nabla_i P^i + c_{ik} \left( N^{ik} + b^k_l M^{li} \right) + m_n = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\nabla_i M^{ik} = \frac{\partial M^{ik}}{\partial \alpha^i} + \Gamma^i_{li} M^{lk} + \Gamma^k_{li} M^{il} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \sqrt{a} M^{ik} \right)_{,i} + \Gamma^k_{ij} M^{ij}; \ \nabla_i P^i = \frac{\partial P^i}{\partial \alpha^i} + \Gamma^i_{li} P^l = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \sqrt{a} P^i \right)_{,i}.$$

Без учёта $P^i$ и $m_n$ уравнения (8) совпадают с известными из литературы [3, 9]. С учётом этих величин третье моментное уравнение не является алгебраическим и тождественно не удовлетворяется. Из него же следует, что для моментных составляющих $P^i$ определяющей является компонента $m_n$ поверхностного момента.

К уравнениям равновесия (3), (4), которые выполняются во внутренней области оболочки, необходимо присоединить статические граничные условия, которые можно представить в виде

$$\vec{N} = A_i \vec{N}^i \cos(\nu, \alpha^i); \quad \vec{M} = A_i \vec{M}^i \cos(\nu, \alpha^i), \tag{9}$$

где $\vec{N}, \vec{M}$ — заданные краевые силы и моменты;

$\nu$ — тангенциальная нормаль к граничной линии поверхности.

## 2. Геометрические соотношения

Определим возможные смещения и возможные деформации как систему бесконечно малых кинематически возможных перемещений и деформаций, которые позволяют выразить возможную работу в такой форме, что уравнения (3), (4), (9) будут эквивалентны следующему

$$\iint_{(\sigma)} \left( \vec{N}^i \delta\vec{\varepsilon}_i + \vec{M}^i \delta\vec{\kappa}_i \right) \sqrt{a}\, d\alpha^1 d\alpha^2 = \iint_{(\sigma)} (\vec{q}\delta\vec{u} + \vec{m}\delta\vec{\varphi}) \sqrt{a}\, d\alpha^1 d\alpha^2 + \oint (\vec{N}\delta\vec{u} + \vec{M}\delta\vec{\varphi}) ds, \tag{10}$$

$\delta\vec{\varepsilon}_i$, $\delta\vec{\kappa}_i$ — векторы возможных деформаций и поворотов (изгиб и кручение) соответственно;
$\delta\vec{u}$, $\delta\vec{\varphi}$ — векторы возможных поступательных и вращательных смещений.

В классической теории оболочек необходимым и достаточным условием выполнения (10) являются уравнения (3), (4), (9). Используем уравнение (10) в обратной форме: будем считать, что (3), (4), (9) заданы, и с их помощью при произвольных $\vec{N}^i$ и $\vec{M}^i$ из (10) исключим величины $\vec{q}, \vec{m}, \vec{N}, \vec{M}$:

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} \left( \vec{N}^i \delta\vec{\varepsilon}_i + \vec{M}^i \delta\vec{\kappa}_i \right) \sqrt{a}\, d\alpha^1 d\alpha^2 = &\oint \left( A_i \vec{N}^i \delta\vec{u} + A_i \vec{M}^i \delta\vec{\varphi} \right) \cos(\nu, \alpha^i) ds - \\ &- \iint_{(\sigma)} \left\{ \left( \sqrt{a}\vec{N}^i \right)_{,i} \delta\vec{u} + \left[ \left( \sqrt{a}\vec{M}^i \right)_{,i} + \vec{r}_i \times \left( \sqrt{a}\vec{N}^i \right) \right] \delta\vec{\varphi} \right\} d\alpha^1 d\alpha^2. \end{aligned} \tag{11}$$

С помощью формулы интегрирования по частям получим равенства

$$
\begin{aligned}
&-\iint\limits_{(\sigma)}\left(\sqrt{a}\vec{N}^i\right)_{,i}\delta\vec{u}d\alpha^1d\alpha^2=\iint\limits_{(\sigma)}\vec{N}^i\left(\delta\vec{u}\right)_{,i}\sqrt{a}d\alpha^1d\alpha^2-\oint\sqrt{a}\delta\vec{u}\left(\vec{N}^1d\alpha^2+\vec{N}^2d\alpha^1\right);\\
&-\iint\limits_{(\sigma)}\left(\sqrt{a}\vec{M}^i\right)_{,i}\delta\vec{\varphi}d\alpha^1d\alpha^2=\iint\limits_{(\sigma)}\vec{M}^i\left(\delta\vec{\varphi}\right)_{,i}\sqrt{a}d\alpha^1d\alpha^2-\oint\sqrt{a}\delta\vec{\varphi}\left(\vec{M}^1d\alpha^2+\vec{M}^2d\alpha^1\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Контурный интеграл в (11) представим в виде

$$
\begin{aligned}
&\oint\left(A_i\vec{N}^i\delta\vec{u}+A_i\vec{M}^i\delta\vec{\varphi}\right)\cos(\nu,\alpha^i)ds=\\
&=\oint\vec{N}^1\delta\vec{u}A_1A_2\cos(\nu,\alpha^1)d\alpha^2+\oint\vec{N}^2\delta\vec{u}A_1A_2\cos(\nu,\alpha^2)d\alpha^1+\\
&+\oint\vec{M}^1\delta\vec{\varphi}A_1A_2\cos(\nu,\alpha^1)d\alpha^2+\oint\vec{M}^2\delta\vec{\varphi}A_1A_2\cos(\nu,\alpha^2)d\alpha^1=\\
&=\oint\sqrt{a}\delta\vec{u}\left(\vec{N}^1d\alpha^2+\vec{N}^2d\alpha^1\right)+\oint\sqrt{a}\delta\vec{\varphi}\left(\vec{M}^1d\alpha^2+\vec{M}^2d\alpha^1\right).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В этом выражении $\cos(\nu,\alpha^1)=\cos(90-\chi)=\sin\chi$ (рис. 2); аналогично и $\cos(\nu,\alpha^2)=\sin\chi$.

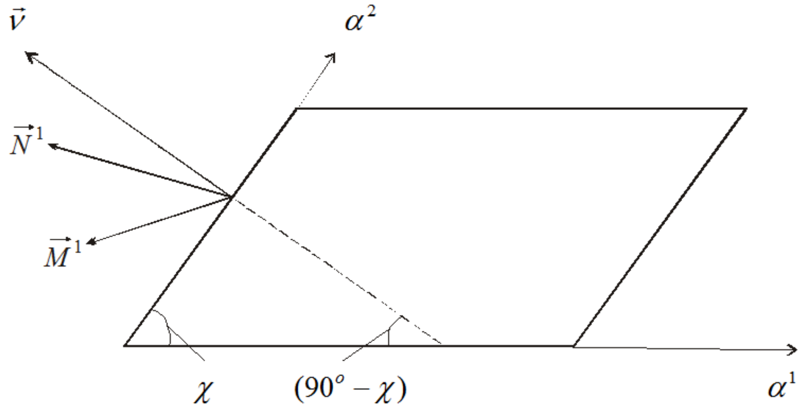



*Рис. 2*

С учётом свойств смешанного произведения векторов

$$
\left(\vec{r}_i\times\sqrt{a}\vec{N}^i\right)\cdot\delta\vec{\varphi}=-\left(\vec{r}_i\times\delta\vec{\varphi}\right)\cdot\sqrt{a}\vec{N}^i
$$

и равенств (12), (13) уравнение (11) приводится к виду

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{(\sigma)}\left(\vec{N}^i\delta\vec{\varepsilon}_i+\vec{M}^i\delta\vec{\kappa}_i\right)\sqrt{a}d\alpha^1d\alpha^2=\\
&=\iint\limits_{(\sigma)}\left\{\vec{N}^i\left[\left(\delta\vec{u}\right)_{,i}+\vec{r}_i\times\delta\vec{\varphi}\right]+\vec{M}^i\left(\delta\vec{\varphi}\right)_{,i}\right\}\sqrt{a}d\alpha^1d\alpha^2.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

В силу произвольности векторов $\vec{N}^i$ и $\vec{M}^i$ из (14) следуют соотношения между возможными деформациями и возможными перемещениями

$$
\delta\vec{\varepsilon}_i=\left(\delta\vec{u}\right)_{,i}+\vec{r}_i\times\delta\vec{\varphi};\quad \delta\vec{\kappa}_i=\left(\delta\vec{\varphi}\right)_{,i}.
$$

Отсюда, переходя к действительным деформациям и перемещениям, получим

$$
\vec{\varepsilon}_i=\vec{u}_{,i}+\vec{r}_i\times\vec{\varphi};\quad \vec{\kappa}_i=\vec{\varphi}_{,i}. \tag{15}
$$

Векторы деформаций и поворотов, поступательных и вращательных смещений представим в виде

$$
\vec{\varepsilon}_i=\varepsilon_{ij}\vec{r}^j+\gamma_i\vec{n};\quad \vec{\kappa}_i=\kappa_{ij}\vec{n}\times\vec{r}^j+\lambda_i\vec{n}; \tag{16}
$$

$$
\vec{u}=u_j\vec{r}^j+w\vec{n};\quad \vec{\varphi}=\varphi_j\vec{n}\times\vec{r}^j+\omega\vec{n}. \tag{17}
$$

Здесь в отличие от классической теории оболочек в векторах $\vec{\kappa}_i$ учитываются направленные по нормали к поверхности составляющие $\lambda_i$, отвечающие $P^i$ в разложениях (2).

Развернув с помощью формул Гаусса-Вейнгартена (5) векторные уравнения (15), получим соотношения между деформациями и перемещениями в скалярной форме

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} - \Gamma^k_{ij} u_k - b_{ij} w - c_{ij}\omega, \quad \gamma_i = w_{,i} + b^k_j u_k + \varphi_i; \tag{18}$$

$$\kappa_{ij} = \phi_{j,i} - \Gamma^k_{ij}\phi_k - c_{jk} b^k_i \omega, \quad \lambda_i = \omega_{,i} + c^{jk} b_{ik} \varphi_j. \tag{19}$$

Сравнивая равенства для $\lambda_i$ с выражениями для формально введённых при получении геометрических соотношений $\zeta_j$ [9, с. 84] или $\xi_s$ [4, с. 84], приходим к выводу, что эти величины полностью идентичны между собой. Для указанных величин не оговаривается их конкретный геометрический смысл, хотя в работе [8, с. 103] сделано предположение, что «они представляют собой некоторые параметры деформации». Предлагаемый вариант теории оболочек позволяет дать вспомогательным геометрическим величинам $\zeta_j$ или $\xi_s$ конкретное физическое истолкование, отвечающее $\lambda_i$ в разложениях (16). Итак, эти компоненты представляют собой нормальные к срединной поверхности оболочки составляющие векторов $\vec{\kappa}_i$ изгибной деформации (деформация кручения в срединной поверхности).

### 3. Уравнения совместности деформаций

Выражения (15) из очевидных соотношений $\vec{\varphi}_{,12} = \vec{\varphi}_{,21}$ и $\vec{u}_{,12} = \vec{u}_{,21}$ позволяют получить два векторных уравнения совместности деформаций

$$\vec{\kappa}_{2,1} - \vec{\kappa}_{1,2} = 0; \quad \vec{\varepsilon}_{2,1} - \vec{\varepsilon}_{1,2} + \vec{r}_1 \times \vec{\kappa}_2 - \vec{r}_2 \times \vec{\kappa}_1 = 0. \tag{20}$$

Легко заметить, что соотношения (20) и однородные уравнения, отвечающие уравнениям равновесия (3), (4), переходят друг в друга при следующей замене

$$\vec{\varepsilon}_i \leftrightarrow c_{ji}\vec{M}^j, \quad \vec{\kappa}_i \leftrightarrow c_{ji}\vec{N}^j.$$

То есть однородные уравнения равновесия и (20) выражают собой векторную форму статико-геометрической аналогии теории тонких оболочек.

Впервые на статико-геометрическую аналогию в теории тонких оболочек обратили внимание А. И. Лурье и А. Л. Гольденвейзер. В дальнейших исследованиях пути её приложения оказались весьма разнообразными [4, 5, 9]. Но полной в общем случае статико-геометрическую аналогию, рассмотренную в указанных источниках, назвать нельзя, так как имеются «лишние» равенства и величины, на что и указывается в фундаментальной монографии [4]. В этом смысле предложенный вариант теории оболочек даёт полное соответствие между статическими и геометрическими соотношениями и величинами.

Разворачивая векторные соотношения (20), получим шесть скалярных уравнений, которые без учёта компонент $\gamma_i$ поперечной деформации совпадают с известными [4, с. 84; 9, с. 86]

$$\begin{aligned}
&\nabla_i\left(c^{ij}c^{kl}\kappa_{jl}\right) - b^k_i\left(-c^{ij}\lambda_j\right) = 0, (k=1,2)\\
&\nabla_i\left(-c^{ij}\lambda_j\right) + b_{ik}\left(c^{ij}c^{kl}\kappa_{jl}\right) = 0,\\
&\nabla_i\left(-c^{ij}c^{kl}\varepsilon_{jl}\right) - b_{ij}c^{kj}\left(-c^{il}\gamma_l\right) - \left(-c^{kj}\lambda_j\right) = 0, (k=1,2)\\
&\nabla_i\left(-c^{ij}\gamma_j\right) + c_{ik}\left(c^{ij}c^{kl}\kappa_{jl}\right) + c_{ik}b^k_l\left(-c^{lj}c^{im}\varepsilon_{jm}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Однородные уравнения равновесия, отвечающие (6), (8) и уравнения совместности (21) тождественны друг другу по структуре, что позволяет установить соответствие между скалярными статическими и геометрическими величинами:

$$N^{ik} \leftrightarrow c^{ij}c^{kl}\kappa_{jl}, \quad Q^i \leftrightarrow -c^{ij}\lambda_j; \quad M^{ik} \leftrightarrow -c^{ij}c^{kl}\varepsilon_{jl}, \quad P^i \leftrightarrow -c^{ij}\gamma_j. \tag{22}$$

В известных теориях оболочек компонентам поперечной сдвиговой деформации $\gamma_i$ не ставятся в соответствие компоненты статических величин ($P^i$), а поперечным сдвиговым силам

$Q^i$ соответствуют формально вводимые величины $\zeta_j$ [9, с. 84] или $\xi_s$ [4, с. 84] без истолкования их конкретного физического смысла (в предлагаемом варианте это нормальные к срединной поверхности компоненты $\lambda_i$ вектора $\vec{\kappa}_i$ изгибной деформации).

Опираясь на статико-геометрическую аналогию, можно ввести функции напряжений

$$\vec{U} = U^j \vec{r}_j + W\vec{n}, \quad \vec{\Phi} = \Phi^j \vec{n} \times \vec{r}_j + \Omega \vec{n}, \tag{23}$$

двойственные к векторам $\vec{u}$ и $\vec{\varphi}$: $\vec{U} \leftrightarrow \vec{\varphi}$, $\vec{\Phi} \leftrightarrow \vec{u}$. При этом $\vec{M}^i$ и $\vec{N}^i$ выражаются через $\vec{U}$ и $\vec{\Phi}$ по формулам, аналогичным по структуре (18), (19):

$$\begin{aligned} M^{ij} &= c^{ik}\left(\Phi^j_{,k} - \Gamma^l_{kj}\Phi^l - c^{jl}b^l_k\Omega - a_{kj}W\right); \\ P^i &= c^{ik}\left(\Omega_{,k} - c^{jl}b_{kj}\Phi^l + c_{kl}U^l\right); \\ N^{ij} &= c^{ik}\left(U^j_{,k} + \Gamma^j_{lk}U^l - b^j_k W\right); \\ Q^i &= c^{ik}\left(W_{,k} + b_{lk}U^l\right). \end{aligned} \tag{24}$$

## 4. Физические соотношения

Чтобы предложенный вариант теории оболочек имел замкнутую структуру, необходимо добавить к статическим и геометрическим уравнениям соотношения упругости. Полученные традиционным способом, эти уравнения теории оболочек с учётом поперечного сдвига в скалярной форме имеют вид [7, с. 87].

$$N^{ik} = KE^{ikjs}\varepsilon_{js}, \quad Q^i = k^2K(1-\nu)\gamma^i, \quad M^{ik} = DE^{ikjs}\kappa_{js}, \tag{25}$$

где $E^{ikjs} = a^{ij}a^{ks} + \nu c^{ij}c^{ks}$; $\nu$ — коэффициент Пуассона;

$K = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$ — жёсткость балки-полоски шириной, равной единице, работающей в составе пластины, подверженной равномерному растяжению параллельно оси полоски;

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жёсткость (жёсткость той же полоски, но гнущейся в составе пластины по цилиндрической поверхности).

Получить этим же путём недостающее соотношение между $P^i$ и $\lambda^i$ не представляется возможным. Но, опираясь на статико-геометрическую аналогию (22) и выражение (25) для $Q^i$, это соотношение можно представить в виде

$$P^i = k^*D\lambda^i, \tag{26}$$

где $k^*$ — коэффициент, определяемый опытным путём (аналог $k^2$ в формуле (25) для $Q^i$).

В векторной форме соотношения (25), (26) имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{N}^i &= K\left\{a^{ik}\vec{\varepsilon}_k + \nu c^{ik}(\vec{\varepsilon}_k \times \vec{n}) + [k^2(1-\nu)\gamma_i - a^{ik}\gamma_k]\vec{n}\right\}, \\ \vec{M}^i &= D\left\{a^{ik}\vec{\kappa}_k + \nu c^{ik}(\vec{\kappa}_k \times \vec{n}) + [k^*\lambda_i - a^{ik}\lambda_k]\vec{n}\right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Зависимости (25), а, следовательно, и (26), получены с применением гипотез Киргофа-Лява: нормаль к срединной поверхности до деформации остаётся нормалью к ней и после деформации, сохраняя при этом длину отрезка нормали; нормальные напряжения, перпендикулярные к срединной поверхности, малы по сравнению с остальными напряжениями ($\sigma^{33} = 0$). Кроме того, при их выводе пренебрегают величинами $zb_{ik}$ по сравнению с единицей (z направлено по нормали к срединной поверхности). Как следствие этого [3, с. 95]

$$g^{ik} \approx a^{ik}, \quad \varepsilon^{ik}_z = g^{is}g^{kj}\varepsilon^z_{sj} \approx a^{is}a^{kj}(\varepsilon_{sj} + z\kappa_{sj}).$$

Поэтому зависимости (25), (26) или (27) можно назвать лишь формулами первого приближения. Учёт в них второстепенных членов делает симметричными общие соотношения теории оболочек, которые более удобны при теоретических исследованиях.

Несомненно, что дальнейшее уточнение и более строгий вывод физических соотношений теории оболочек является потенциально результативной задачей. Здесь возможны два пути. Первый состоит в разработке программ экспериментального определения соотношений усилия — деформации без явной привязки к пространственной природе конструкции. Второй заключается в дальнейшем развитии аналитических методов вывода этих соотношений, дающих по своей структуре представление об оболочке как о трёхмерном континууме. В этом направлении наибольшее распространение получили различные асимптотические методы, которые были использованы в работах К. З. Галимова, А. Л. Гольденвейзера, В. В. Новожилова, Э. Рейсснера и др.

**Заключение**

В предлагаемом варианте теории тонких оболочек, в отличие от классических подходов, в векторах погонных моментов учтены составляющие, направленные по нормали к срединной поверхности, а в векторах изгибной деформации — соответствующие им компоненты кручения. Это и позволило получить соответствие каждой статической величине геометрической и каждому однородному уравнению равновесия — уравнение совместности деформаций. В известных теориях оболочек компонентам поперечной сдвиговой деформации не ставятся в соответствие какие-либо компоненты статических величин, а поперечным сдвиговым силам соответствуют некоторые формально вводимые величины. В предложенном варианте эти величины также присутствуют, но имеют конкретный физический смысл, а именно — это нормальные к срединной поверхности компоненты вектора изгибной деформации. Всё это оправдывает учёт вводимых компонентов с теоретической точки зрения, так как с практической их удержание нецелесообразно: это ведёт к повышению порядка дифференциальных уравнений равновесия (третье скалярное уравнение моментов уже не удовлетворяется тождественно, как в классической теории оболочек).

**Литература**

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М. : Наука, 1974. – 446 с.

2. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения вариантов теории оболочек. – М. : Наука, 1982. – 288 с.

3. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань, 1975. – 326 с.

4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. – М. : Наука, 1976. – 512 с.

5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. – Л. : Гос. союзное изд-во судостроительной промышленности, 1962. – 431 с.

6. *Огибалов П. Н., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. – М., 1969. – 695 с.

7. Теория оболочек с учётом поперечного сдвига / Под ред. К.З. Галимова. – Казань: изд – во КГУ, 1977. – 211 с.

8. *Филин А. П.* Элементы теории оболочек. – Л. : Стройиздат, 1987. – 384 с.

9. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек: В 2-х ч. – Л., Ч.1, 1962. – 274 с. Ч. 2, 1964. – 395 с.

УДК 624.21:533.6; 699.83

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НДС СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ С УЧЁТОМ ЖЁСТКОСТИ СОЕДИНИТЕЛЬНОГО ШВА

**А. В. Козлов, В. А. Козлов**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Представлены результаты испытаний масштабной модели однопролетной сталежелезобетонной балки, максимально приближенной к реальным конструкциям пролетных строений мостов с объединением железобетонной плиты со стальными балками при помощи гибких штыревых упоров. Распределение экспериментальных значений сдвиговых деформаций и нормальных напряжений в поясах балки хорошо совпадают с расчетными данными, учитывающими сдвиговую жёсткость стыка, и имеют по ряду величин отличия от вычисленных классическим подходом.

**Ключевые слова:** пролётные строения мостов, сталежелезобетонные составные конструкции, сдвиговая жёсткость соединительного шва.

## Введение

В работах [1–4] предложен уточнённый алгоритм расчета однопролётных и неразрезных многопролетных балок мостовых сооружений с возможностью учета податливости сдвигового соединения между железобетонными и стальными конструктивными элементами. Отмечено, что при этом повышается точность определения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции, уточняется расчёт мостовых сооружений.

В данной работе представлены результаты натурных испытаний масштабной модели однопролетной сталежелезобетонной балки, максимально приближенной к реальным конструкциям пролетных строений мостов и изготовленной согласно требованиям СП 35.13330.2011 [5] с объединением железобетонной плиты со стальными балками при помощи гибких штыревых упоров. Целью проводимых экспериментальных исследований является изучение влияния учета линейной сдвиговой жесткости стыка с гибкими штыревыми упорами на НДС сталежелезобетонной балки. При проведении испытаний на изгиб неразрушающим методом на образце масштабной модели балки определяется её несущая способность и деформация сдвига, проводится анализ результатов испытаний. Полученные экспериментальные значения сдвиговых деформаций и нормальных напряжений в поясах сравниваются с расчетными, полученными с помощью предложенного уточнённого подхода.

## 1. Описание натурной модели, измерительное и контрольное оборудование

Для выполнения натурных испытаний с приложением внешней нагрузки использовалась, как и в предыдущих экспериментальных работах [6–8], гидравлическая система INSTRON 600 KN, для измерения напряжений и деформаций — измерительный модуль с датчиками линейных перемещений, прогибомерами и тензорезисторными датчиками. Визуализация схемы испытаний масштабной модели сталежелезобетонной балки показана на рис. 1, на рис. 2 представлена фотография балки на стенде с измерительным и контрольным оборудованием.

Согласно принятой методике испытания в качестве испытательной схемы принимается однопролетная шарнирно-опертая балка с приложением сосредоточенной силы в середине пролета. Перед началом испытаний проверялась работоспособность измерительных систем и пресса посредством пробного загружения образца нагрузкой на уровне 20–25 % от теорети-

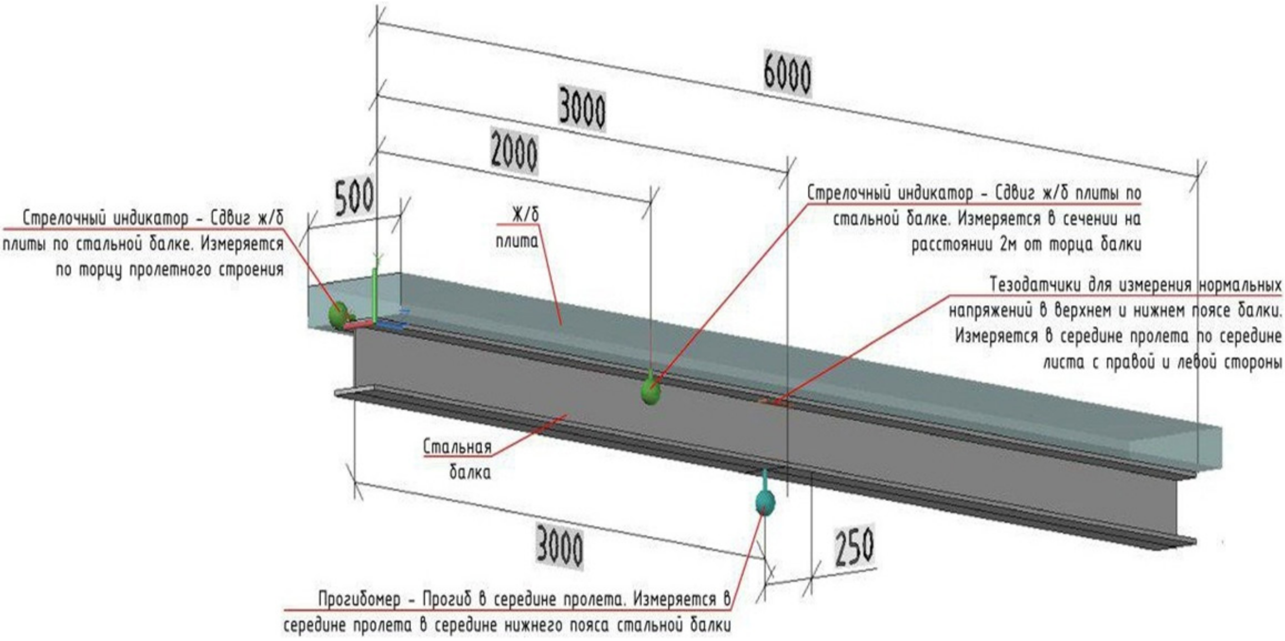



*Рис. 1. Принципиальная схема расположения прогибомера и стрелочных индикаторов*


*Рис. 2. Модель однопролетной сталежелезобетонной балки на испытательном стенде INSTRON 600 kN*

ческой несущей способности балки. После окончания проверки нагрузка снижается до 0. На следующем этапе нагрузку увеличивают постепенно, ступенями по 0,1 от теоретической несущей способности балки. Продольные деформации сдвига по контакту между железобетонной плитой и стальным сечением фиксировались в расчетных сечениях непрерывно в процессе нагружения или на каждом этапе. Параллельно измерялись нормальные напряжения в верхнем и нижнем поясе балки и прогиб балки в середине пролета.

В масштабной модели сталежелезобетонной балки упоры устанавливаются рядами по 2 шт. с шагом 200 мм вдоль оси балки, следовательно, на 1 п. м. приходится 10 упоров. При этом теоретическая величина погонной сдвиговой жесткости стыка масштабной модели составила 170600 $т/м^2$. Использование в данной модели конструкции стыка с высокой погонной сдвиговой жесткостью обусловлено тем, что в коротких балках, работающих на изгиб, напряжения сдвига в стыке получаются ближе к своей несущей способности, чем нормальные напряжения в остальных частях составной балки. Поэтому, для получения фиксируемых результатов (с приближением к достижению теоретической несущей способности в линейной постановке и прогибами на уровне нескольких десятков миллиметров) требуется устроить такой стык, чтобы его несущая способность не была превышена и соответственно, в нем не возникло пластической работы, исключающей возможность сравнения полученных результатов с аналитическими.

## 2. Конечно-элементная модель с податливой и жёсткой связью между элементами составной балки

Представим плоскую схему сталежелезобетонной балки, выполненную методом конечных элементов в ПК ЛИРА-САПР, в которой плита крепится к стальной части дискретными (по длине пролета) связями. На рис. 3: а) модель с податливыми связями (черным цветом; очень малая жесткость, близкая к условной работе частей по отдельности); б) модель с жесткими связями (красным цветом; по жесткостным характеристикам соответствуют бетону плиты).

Для наглядной демонстрации влияния податливости связей на НДС составного стержня составлены две КЭ-модели балки пролетом 10 *м*, нагруженной сосредоточенной силой 35 *т* в середине пролета. Геометрические и механические (модуль упругости $E$, коэффициент Пуассона $\nu$) характеристики «плиты» и «стальной балки» в обоих моделях одинаковые, а характеристики «упоров» кардинально разные: на схеме а) для податливых упоров черного цвета заданы $E = 280$ $т/м^2$, $\nu = 0,4$, на схеме б) для жестких упоров красного цвета $E = 3000000$ $т/м^2$, $\nu = 0,2$.

На рис. 4 внизу справа показаны усредненные по высоте сечения каждого элемента («плита»; «стальная балка» и «связь») нормальные напряжения в крайних элементах:

– в «плите» у балки с податливыми связями сжимающее напряжение 45,3 $т/м^2$, в то время как у балки с жесткими связями 162 $т/м^2$;

– в «стальной балке» растягивающее напряжение у балки с податливыми связями 111 т/м2, у балки с жесткими связями 445 $т/м^2$;

– в «связях» также очень значительно изменяется сдвигающее усилие: у балки с податливыми связями продольное напряжение в «связи» 15,1 $т/м^2$, в то время как у балки с жесткими связями — 127 $т/м^2$.

Таким образом, на рис. 3 и 4 наглядно показано перераспределение внутренней пары сил при податливых и жестких связях: с увеличением сдвиговой жесткости связи увеличиваются как усилия в ней, так и осевые силы в соединяемых стержнях (т.к. эти осевые силы прямо пропорциональны разнице сдвигающих усилий в соседних связях).

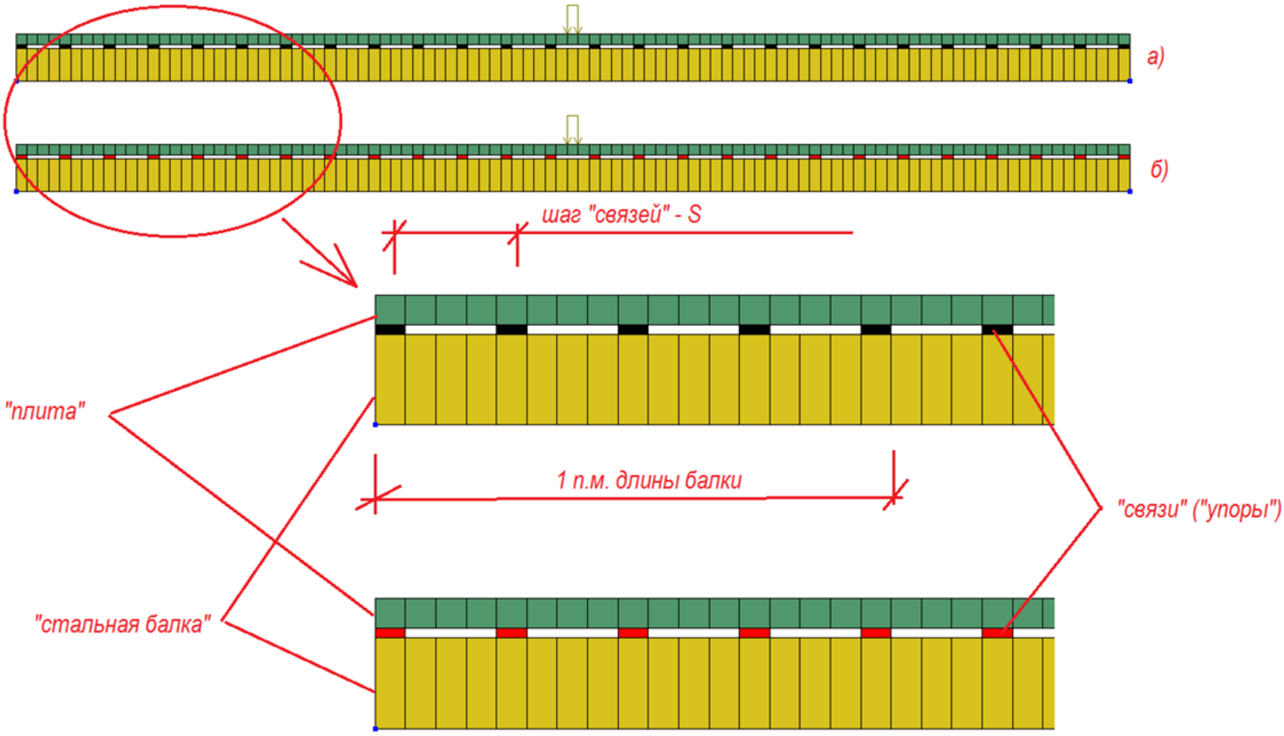



*Рис. 3. Условная пара КЭ-моделей составного стержня со связями, воспринимающими отрыв и сдвиг*

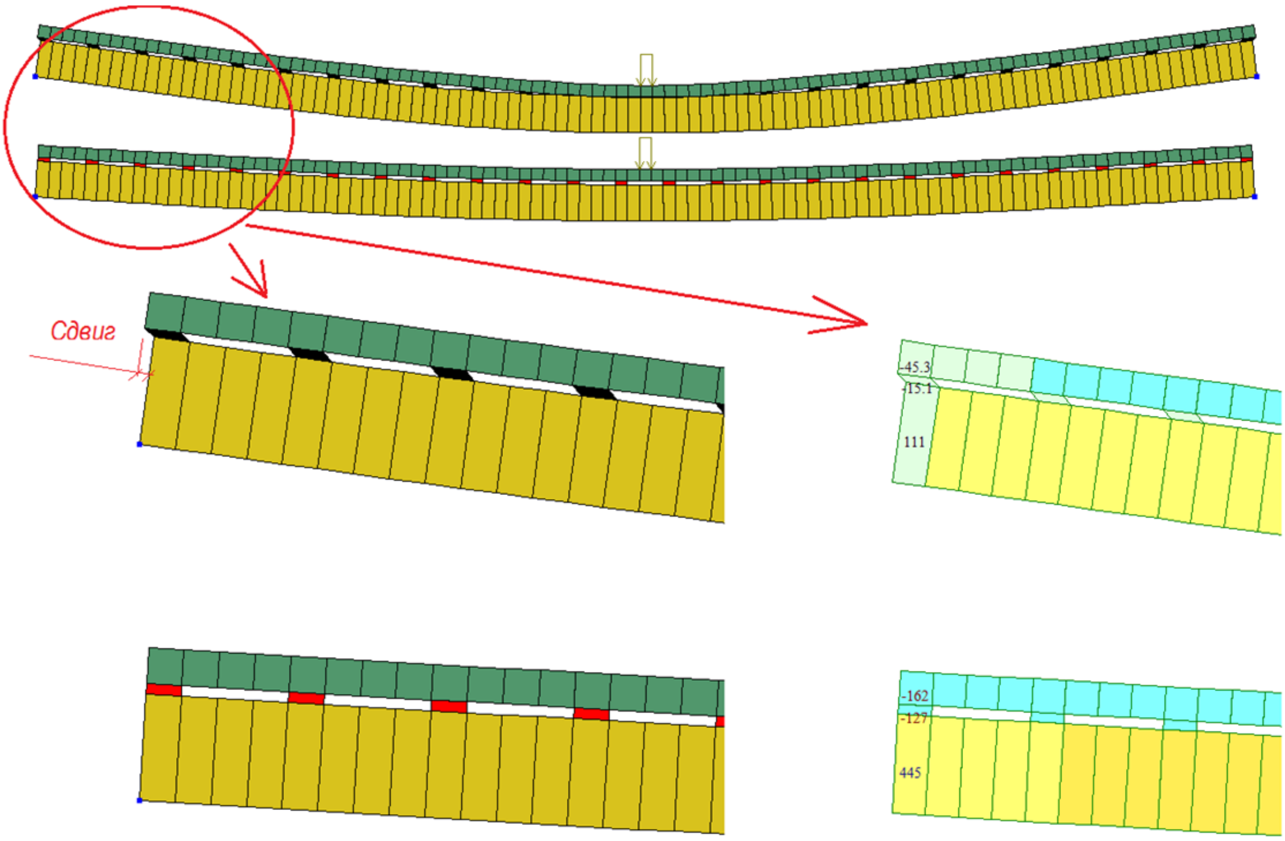



*Рис. 4. НДС схем а) и б): у составной балки с податливыми связями (вверху) прогиб заметно больше; при этом от середины пролета к торцам нарастает сдвиг плиты по балке*

### 3. Экспериментальные данные, их сравнение с численными результатами

В табл. 1 представлены результаты испытаний масштабной модели однопролетной сталежелезобетонной балки, в табл. 2 показаны значения, полученные численно с помощью конечно-элементной модели в программном комплексе ЛИРА-САПР, при аналогичных нагрузках. В табл. 1 и 2 напряжения $\sigma_в$ — в уровне нижней части верхней полки, т.к. верхняя часть закрыта железобетонной плитой, и измерение там невозможно.

Таблица 1

*Результаты испытаний натурной модели балки*

| Шаг | Нагрузка, *кН* | Сдвиг плиты по балке $\delta_x$ (*мм*) в сечении (*м*) | | | Прогиб $\Delta Z$, *мм* | Нормальные напряжения, *МПа* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | | $\sigma_в$ | $\sigma_н$ |
| 1 | 35,3 | 0,001 | 0,010 | 0,024 | 2,206 | 11,54 | 29,58 |
| 2 | 67,2 | 0,0015 | 0,033 | 0,053 | 4,305 | 22,25 | 54,74 |
| 3 | 101,2 | 0,008 | 0,057 | 0,081 | 6,482 | 31,93 | 82,11 |
| 4 | 135,3 | 0,029 | 0,083 | 0,107 | 8,623 | 40,79 | 108,8 |
| 5 | 170,9 | 0,050 | 0,114 | 0,118 | 10,85 | 49,03 | 138,6 |
| 6 | 206,4 | 0,069 | 0,150 | 0,129 | 13,03 | 56,24 | 167,3 |
| 7 | 242,6 | 0,090 | 0,189 | 0,153 | 15,30 | 63,24 | 198,7 |
| 8 | 278,1 | 0,111 | 0,220 | 0,171 | 17,49 | 69,63 | 230,7 |
| 9 | 313,2 | 0,179 | 0,246 | 0,198 | 19,71 | 75,81 | 265,0 |
| 10 | 348,2 | 0,224 | 0,272 | 0,225 | 22,01 | 82,19 | 302,4 |

Таблица 2

*Расчетные значения для конечно-элементной модели балки*

| Шаг | Нагрузка, *кН* | Сдвиг плиты по балке $\delta_x$ (*мм*) в сечении (*м*) | | | Прогиб $\Delta Z$, *мм* | Нормальные напряжения, *МПа* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | | $\sigma_в$ | $\sigma_н$ |
| 1 | 35,3 | 0,033 | 0,034 | 0,027 | 2,568 | 9,571 | 29,68 |
| 2 | 67,2 | 0,055 | 0,059 | 0,047 | 4,422 | 18,21 | 56,51 |
| 3 | 101,2 | 0,078 | 0,085 | 0,069 | 6,398 | 27,43 | 85,09 |
| 4 | 135,3 | 0,102 | 0,112 | 0,092 | 8,380 | 36,67 | 113,8 |
| 5 | 170,9 | 0,125 | 0,139 | 0,115 | 10,45 | 46,32 | 143,7 |
| 6 | 206,4 | 0,152 | 0,167 | 0,138 | 12,51 | 55,94 | 173,5 |
| 7 | 242,6 | 0,177 | 0,195 | 0,162 | 14,61 | 65,75 | 204,0 |
| 8 | 278,1 | 0,201 | 0,223 | 0,185 | 16,68 | 75,37 | 233,8 |
| 9 | 313,2 | 0,226 | 0,250 | 0,208 | 18,72 | 84,88 | 263,4 |
| 10 | 348,2 | 0,250 | 0,277 | 0,230 | 20,75 | 94,37 | 292,8 |

Из сравнительного анализа данных таблиц следует, что для прогиба $\Delta Z$ и нормальных напряжений $\sigma_в$, $\sigma_н$ имеет место удовлетворительное совпадение между экспериментальными и численными значениями на всех шагах нагрузки, для сдвига $\delta_x$ это наблюдается в сечениях $x=0$ и $x=1$ *м* при достаточно большой величине нагрузки, приближающейся к предельной.

На рис. 5 представлены графические зависимости величины нормальных напряжений $\sigma_в$ в верхнем поясе (ось ординат, *МПа*) от нагрузки (ось абсцисс, *кН*) в середине пролёта балки.

Верхняя кривая линия (салатовая) — экспериментальные данные, средняя прямая (красная) — численный расчёт с учётом проскальзывания плиты по балке, нижняя (синяя) — численный расчёт без учёта сдвига. Аналогичные зависимости представлена на рис. 6 для нормальных напряжений $\sigma_н$ в нижнем поясе балки.

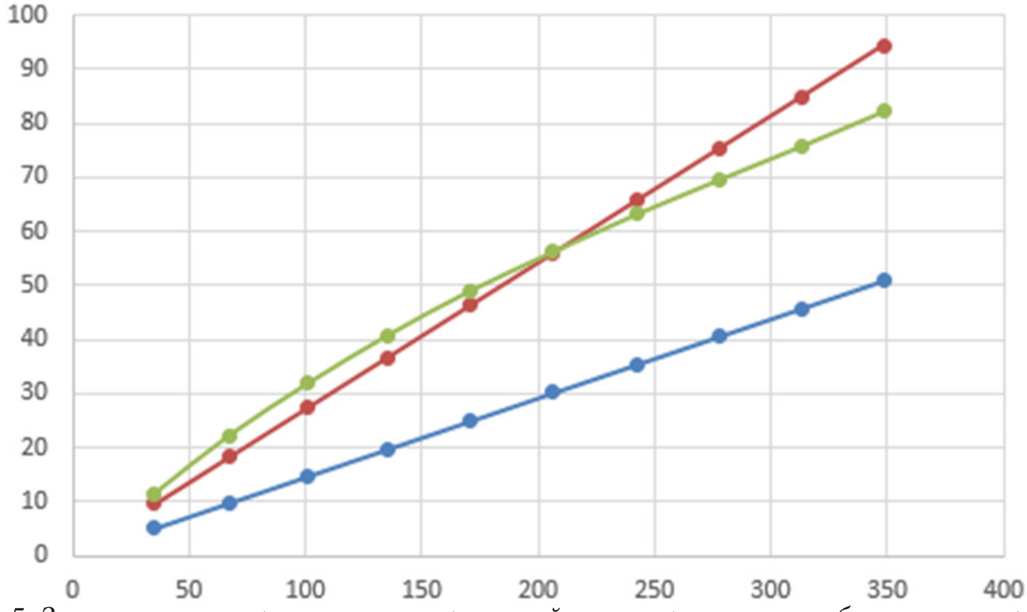



*Рис. 5. Зависимость нормальных напряжений $\sigma_в$ в верхнем поясе балки от нагрузки*

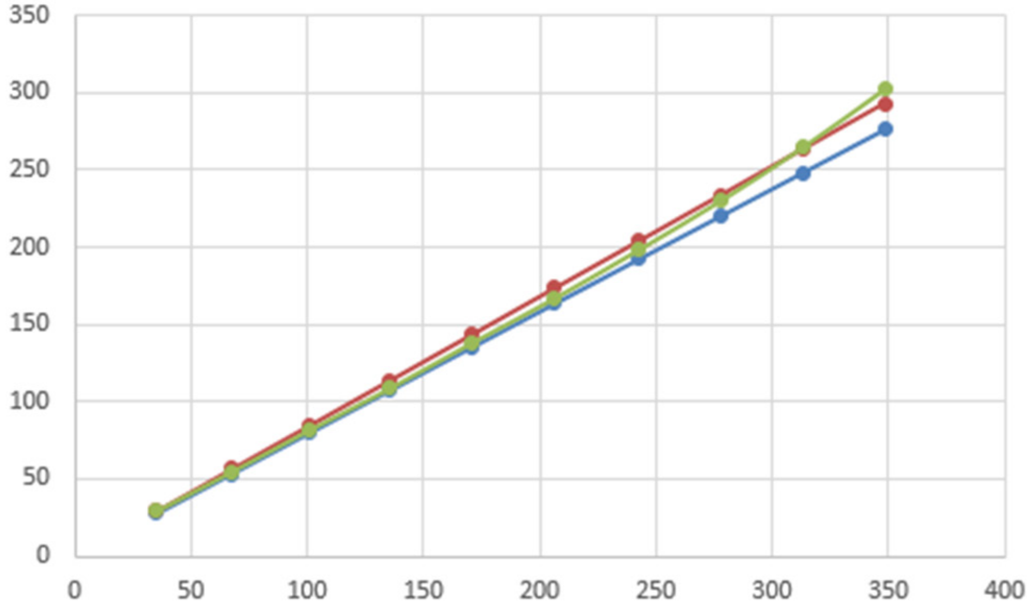



*Рис. 6. Зависимость нормальных напряжений $\sigma_н$ в нижнем поясе балки от нагрузки*

## Заключение

При проведении натурных испытаний масштабной модели сталежелезобетонной конструкции пролётной мостовой балки деформации сдвига плиты по балке вблизи места приложения внешней нагрузки практически полностью (до десяти микрон) совпадают с теоретическим значением при расчете методом конечных элементов, и несколько ниже теоретического значения по аналитической методике. На концевом участке балки экспериментальные значения сдвига меньше теоретических на 30–40 %, что объясняется наличием между плитой и балкой трения, накапливаемого от центра к местам опор, которое очень сложно достоверно учесть аналитическим расчетом. Особенно важно подтверждение значительного увеличения нормальных напряжений в верхнем поясе при учете сдвига: экспериментальное значение почти в 2 раза превысило расчетное по стандартной методике СП35.13330.2011. Следовательно, при проектировании сталежелезобетонных пролетных строений мостов необходим учет сдвиговой жесткости между стальной балкой и железобетонной плитой проезжей части.

**Литература**

1. *Еремин, В. Г.* Аналитическая зависимость смещения от сдвиговой жесткости шва между железобетонной плитой и стальной балкой в пролетных строениях мостов / В. Г. Еремин, А. В. Козлов // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2019. – № 3(55). – С. 94–103.

2. *Еремин, В. Г.* Аналитические зависимости, учитывающие сдвиг между железобетонными и стальными конструктивными элементами мостов в неразрезных многопролетных балках / В. Г. Еремин, А. В. Козлов // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2019. – № 4 (56). – С. 109–120.

3. *Yeremin, V. G.* Analytical dependence of the shift from the shear stiffness of the seam between the concrete slab and steel beam in bridge spans / V. G. Yeremin, A. V. Kozlov // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2019. – Issue № 4 (44). – P. 70–81.

4. *Yeremin, V. G.* Analytical expressions, taking into account the shift between the concrete and steel structural elements of bridges in continuous multi-span beams / V. G. Yeremin, A. V. Kozlov // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2020. – Issue № 1 (45). – P. 98–110.

5. СП 159.1325800.2014 Сталежелезобетонные пролетные строения автодорожных мостов. Правила расчета.

6. *Козлов, А. В.* Механическое взаимодействие железобетонной плиты и стальной балки в пролетах мостовых сооружений / А. В. Козлов, В. А. Козлов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: А43 сб. тр. Международной научной конференции, Воронеж, 11-13 ноября 2019 г. – Воронеж: изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2020. – С. 1377–1385. Электронный код доступа: http://www.amm.vsu.ru/conf/index.php?page=Doklads

7. *Козлов, А. В.* Экспериментальные исследования сдвиговой жёсткости стыка сталежелезобетонной конструкции с гибкими штыревыми упорами / А. В. Козлов, В. А. Козлов, А. М. Хорохордин, П. П. Чураков // Научно-технический журнал «Строительная механика и конструкции». – 2020. – № 1 (24). – С. 54–62.

8. *Kozlov Vladimir A and Kozlov Alexey V.* Mechanical interaction of a reinforced concrete slab and a steel beam in bridge spans // Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems / IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1479 (2020) 012140 (doi:10.1088/1742-6596/1479/1/012140) – 10 р. Электронный код доступа: https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1479/1

УДК 539.3

# РАЗРУШЕНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

**О. Ю. Коптельцева, А. А. Маркин**

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрена статически неопределимая система, состоящая из $n$ стержней, которые в начальном состоянии задаются единичным векторами. Представлены основные уравнения равновесия и равновесности в безразмерном виде до достижения в стержнях критической деформации в упругой и упругопластической области. Приведены основные уравнения, позволяющие учесть догрузку или разгрузку стержневой системы в момент достижения критической деформации в упругопластической области. Показан процесс нагружения системы в случае простого нагружения.

**Ключевые слова:** гстержневые системы, разрушение, уравнения равновесия и равновесности, узловые силы, упругопластическая область, простое нагружение, догрузка, разгрузка.

## Введение

Рассмотрим систему, состоящую из $n$ стержней. Стержни в начальном состоянии задаются единичными векторами $\boldsymbol{k}_i$, направленными вдоль $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{O}$ (рис. 1).

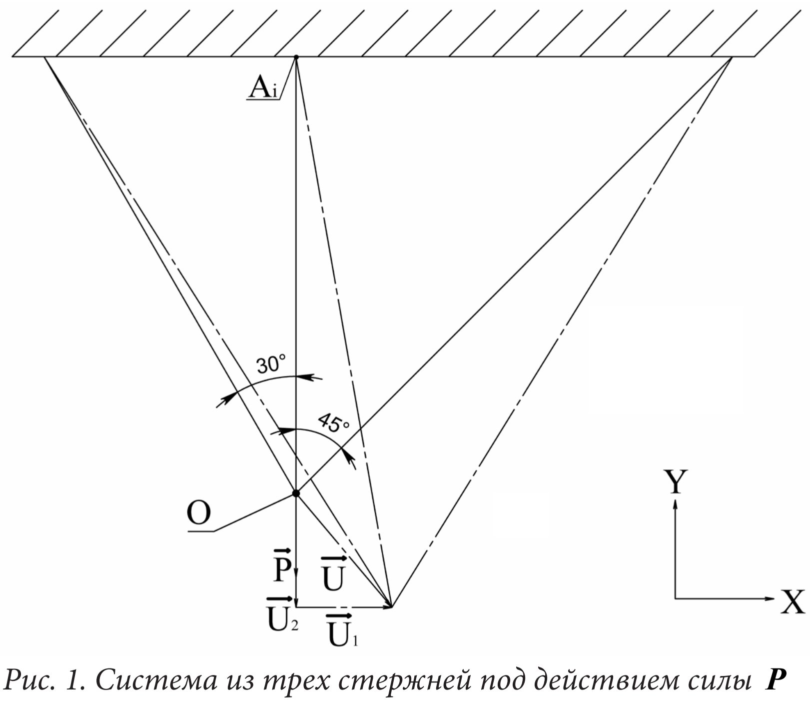



*Рис. 1. Система из трех стержней под действием силы* $\boldsymbol{P}$

При заданных начальных параметрах системы необходимо найти глобальные перемещения $U_1$ и $U_2$, деформации $\varepsilon_i$, напряжения $\sigma_i$ и перемещения вдоль каждого стержня $u_i$. Начальные параметры:

– $n$ — количество стержней;
– $l_i$ — длины стержней;
– $\alpha_i$ — угол между $i$-м стержнем и направлением оси ординат
– $E$ — модуль упругости первого рода;

– $E_k$ — касательный модуль;
– $F_i$ — площадь поперечного сечения $i$ -го стержня;
– $\hat{\varepsilon}_k$ — предел прочности по деформациям;
– $\sigma_{упр}$ — предел упругости стержней; (не используется)
– $\sigma_B$ — предел прочности стержней;
– $\varepsilon_e$ — предел упругости по деформациям.

В отличие от постановки задачи, приведенной в работе [1] воздействие на узловую точку будет силовым, а не кинематическим. Кроме того, в данной работе учитывается процесс разрушения стержня, сопровождаемый догрузкой остальных стержней.

В работе рассматриваются статически неопределимые системы, методы, решения которых приведены в работах [2, 3].

Представим перемещение узловой точки стержней в глобальной системе

$$\boldsymbol{U}_0 = U_1\boldsymbol{e}_1 + U_2\boldsymbol{e}_2. \tag{1}$$

Деформации стержней задаются в виде:

$$\varepsilon_i = \frac{u_i}{l_i}, i = 1,2,3... \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим деформации через узловые перемещения

$$\varepsilon_i = \frac{\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{k}_i}{l_i} = U_1\frac{\sin\alpha_i}{l_i} + U_2\frac{\cos\alpha_i}{l_i}, \tag{3}$$

где $\alpha_i$ — угол между $\boldsymbol{k}_i$ и $\boldsymbol{e}_1$,
$\boldsymbol{k}_i$ — единичный вектор, направленный вдоль $i$-го стержня,
$\boldsymbol{e}_1$ — единичный вектор в декартовой системе координат.

## 1. Условия равновесия и равновесности

При решении задачи используем условия равновесия и равновесности, представленные в работе [4]. Из условия равновесия узла $O$ получим

$$\boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{i=n}\boldsymbol{N_i} = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{N_i}$ — силы, действующие на $i$-й узел, $\boldsymbol{R_i} = -\boldsymbol{N_i}$ — реакция со стороны стержня на узел.

Дифференцируя (4) по «времени» получим условие равновесности

$$\dot{\boldsymbol{P}} + \sum_{i=1}^{i=n}\dot{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{i}} = 0, \tag{5}$$

Используя билинейную зависимость «напряжения-деформации» (рис. 2) [2] запишем определяющие соотношения в «скоростях»

$$\begin{gathered}\dot{\sigma}_i = E\dot{\varepsilon}_i, 0 \le \varepsilon_i \le \varepsilon_e,\\ \begin{cases}\dot{\sigma}_i = E_k\dot{\varepsilon}_i, \varepsilon_i > \varepsilon_e, \dot{\varepsilon}_i > 0,\\ \quad\dot{\sigma}_i = E\dot{\varepsilon}_i, \dot{\varepsilon}_i < 0,\end{cases}\end{gathered} \tag{6}$$

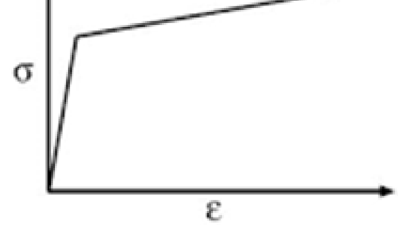



*Рис. 2. Билинейная зависимость «напряжения-деформации»*

Силы в стержнях выражаются в виде

$$\boldsymbol{N_i} = -\,\sigma_i\ F_i\ \boldsymbol{k}_i, \tag{7}$$

где $F_i$ — площадь сечения.

Скорости сил

$$\dot{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{i}} = -\,\dot{\sigma}_i\ F_i\ \boldsymbol{k}_i, \tag{8}$$

Найдем значения скоростей $\dot{\boldsymbol{N}}_i$ через узловые перемещения в упругой области. Из (3), (6), (8) получим

$$^{(e)}\dot{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{i}} = -(\dot{U}_{\boldsymbol{1}} \frac{\sin\alpha_i}{l_i} EF_i + \dot{U}_{\boldsymbol{2}} \frac{\cos\alpha_i}{l_i} EF_i)\ \boldsymbol{k}_i. \tag{9}$$

В упруго-пластической области

$$^{(P)}\dot{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{i}} = -(\dot{U}_{\boldsymbol{1}} \frac{\sin\alpha_i}{l_i} E_k F_i + \dot{U}_{\boldsymbol{2}} \frac{\cos\alpha_i}{l_i} E_k F_i)\ \boldsymbol{k}_i. \tag{10}$$

Условия равновесности (5) в проекциях на оси $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ с учетом выражения (9) представляются в виде:

$$\begin{gathered}
\dot{P}_1 - \left( EF_i \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin^2\alpha_i}{l_i} \right) \dot{U}_1 - \left( EF_i \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin 2\alpha_i}{2l_i} \right) \dot{U}_2 = 0, \\
-\dot{P}_2 - \left( EF_i \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin 2\alpha_i}{2l_i} \right) \dot{U}_1 - \left( EF_i \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\cos^2\alpha_i}{l_i} \right) \dot{U}_2 = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Система (11) легко интегрируется в упругой области, так как коэффициенты постоянные. Если задавать перемещения, то получаем соответствующие им значения компонент узловой силы. Решая систему (11) относительно $U_1$ и $U_2$ найдем зависимость перемещений от узловой силы. При достижении в одном или одновременно нескольких стержнях значения предела упругости модуль $E$ в этом стержне заменяется на $E_k$ и система интегрируется до достижения предела упругости в следующем стержне.

Запишем систему (11) в безразмерном виде. Чтобы не оперировать с малыми по абсолютной величине перемещениями отнесем их к предельной упругой деформации и характерной длине — $a$, тогда

$$V_1 = \frac{U_1}{a\varepsilon_l}, \quad V_2 = \frac{U_2}{a\varepsilon_l},$$

где $V_1,\ V_2$ — безразмерные перемещения, $a$ — характерный размер.

Величины, имеющие размерность силы отнесем к $\sigma_i F = E\varepsilon_e F$. В дальнейшем полагаем площади сечений одинаковыми

$$\begin{cases}
\dot{\hat{P}}_1 - \left( \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin^2\alpha_i}{\hat{l}_i} \right) \dot{V}_1 - \left( \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin 2\alpha_i}{2\hat{l}_i} \right) \dot{V}_2 = 0, \\
-\dot{\hat{P}}_2 - \left( \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin 2\alpha_i}{2\hat{l}_i} \right) \dot{V}_1 - \left( \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\cos^2\alpha_i}{\hat{l}_i} \right) \dot{V}_2 = 0,
\end{cases} \tag{12}$$

$$\hat{P} = \frac{P}{EF_i\varepsilon_i}.$$

Критическая относительная деформация находится в соответствии с формулой (3)

$$^{(e)}\hat{\varepsilon}_i = 1 = V_1 \frac{\sin\alpha_i}{\hat{l}_i} + V_2 \frac{\cos\alpha_i}{\hat{l}_i}. \tag{13}$$

Из системы (12) следует, что в упругой области связь между компонентами узловой силы и узлового перемещения является универсальной линейной. Коэффициенты в этой связи зависят только от геометрии системы $(\alpha_i, \hat{l}_i)$. Поэтому в упругой области связи между скоростями сил и перемещений такие же как и между силами и перемещениями.

## 2. Упругопластическая область

Переход в эту область происходит после достижения в стержне с номером «$k$» единичной относительной деформации в соответствии с (13). Обозначим соответствующие значения узловых сил и перемещений ${}^{(e)}\hat{P}_1,\ {}^{(e)}\hat{P}_2,\ {}^{(e)}\hat{V}_1,\ {}^{(e)}\hat{V}_2$.

Скорость силы в стержне «$k$» в безразмерном виде получим из формулы (10)

$$ {}^{(P)}\dot{\hat{\boldsymbol{N}}}_{\boldsymbol{k}} = -\left( \dot{V}_{\mathbf{1}} \frac{\sin\alpha_k}{\hat{l}_k} + \dot{V}_{\mathbf{2}} \frac{\cos\alpha_k}{\hat{l}_k} \right) \hat{E}_k \boldsymbol{k}_k, $$

где $\hat{E}_k = \dfrac{E_k}{E}$ — отношение касательного модуля к модулю упругости.

Система уравнений равновесности принимает вид

$$ \begin{cases} \dot{\hat{P}}_1 - \left( A_{-k} + \dfrac{\sin^2\alpha_k}{\hat{l}_k}\hat{E}_k \right)\dot{V}_1 - \left( B_{-k} + \dfrac{\sin 2\alpha_k}{2\hat{l}_k}\hat{E}_k \right)\dot{V}_2 = 0, \\ \dot{\hat{P}}_2 - \left( B_{-k} + \dfrac{\sin 2\alpha_k}{2\hat{l}_k}\hat{E}_k \right)\dot{V}_1 - \left( C_{-k} + \dfrac{\cos^2\alpha_k}{\hat{l}_k}\hat{E}_k \right)\dot{V}_2 = 0, \end{cases} \tag{14} $$

$$ A_{-k} = \sum\nolimits_{i=1}^{n,n\neq k} \frac{\sin^2\alpha_i}{\hat{l}_i},\ B_{-k} = \sum\nolimits_{i=1}^{n,n\neq k} \frac{\sin 2\alpha_i}{2\hat{l}_i},\ C_{-k} = \sum\nolimits_{i=1}^{n,n\neq k} \frac{\cos^2\alpha_i}{\hat{l}_i}, $$

где $A_{-k},\ B_{-k},\ C_{-k}$ — суммы без $k$-го слагаемого.

Интегрируем (14) от значений $\hat{P}_i = {}^{(e)}\hat{P}_i,\ \hat{V}_i = {}^{(e)}\hat{V}_i$ до достижения предела упругости в следующем стержне. Если задан закон нагружения $\hat{P}_1(t),\ \hat{P}_2(t)$, то следует проверять возможность разгрузки в стержнях $\dot{\varepsilon}_i < 0$.

## 3. Простое нагружение

Рассмотрим случай простого нагружения, когда вектор внешней силы имеет постоянное направление вдоль единичного вектора $\boldsymbol{e}$

$$ \boldsymbol{P} = P\boldsymbol{e}. $$

При $P \geq {}^{(e)}P$ — $k$-й стержень переходит в пластическое состояние. Интегрируя систему (14) получим

$$ \begin{cases} \Delta P_1 = (P - {}^{(e)}P)\sin\alpha_p = (A_{-k} + \dfrac{\sin^2\alpha_k}{l_k}E_k)(V_1 - {}^{(e)}V_1) + (B_{-k} + \dfrac{\sin 2\alpha_k}{2l_k}E_k)(V_2 - {}^{(e)}V_2), \\ \Delta P_2 = (P - {}^{(e)}P)\cos\alpha_p = (B_{-k} + \dfrac{\sin 2\alpha_k}{2l_k}E_k)(V_1 - {}^{(e)}V_1) + (C_{-k} + \dfrac{\cos^2\alpha_k}{l_k}E_k)(V_2 - {}^{(e)}V_2). \end{cases} \tag{15} $$

Решая систему (15), находим

$$ V_1 - {}^{(e)}V_1 = (P - {}^{(e)}P)\left[ C_{11}\sin\alpha_p + C_{12}\cos\alpha_p \right], $$

$$ V_2 - {}^{(e)}V_2 = (P - {}^{(e)}P)\left[ C_{21}\sin\alpha_p + C_{22}\cos\alpha_p \right]. $$

Далее по определяющим законам находим силу $P$, соответствующую переходу в пластичность следующего стержня.

## 4. Описание деформирования системы в процессе разрушения одного из стержней

Пусть в стержне с индексом «$k$» достигнут предел прочности по деформациям

$$\hat{\varepsilon}_k = {}^{(P)}\hat{\varepsilon}_k = {}^{(P)}V_1 \frac{\sin\alpha_k}{\hat{l}_k} + {}^{(P)}V_2 \frac{\cos\alpha_k}{\hat{l}_k} > 1.$$

Сила, действующая на $k$-й стержень в начале разрушения ${}^{(P)}\hat{\boldsymbol{N}}_k = -{}^{(P)}\hat{\boldsymbol{R}}_k$. Изменение силы $\boldsymbol{N}_k$ в процессе разрушения представим в виде

$$\hat{\boldsymbol{N}}_k = {}^{(P)}\hat{\boldsymbol{N}}_k \left(1-t\right)\boldsymbol{k}, \tag{16}$$

где $0 \le t \le 1$ — монотонно изменяющийся параметр.

*Из закона (16) следует, что в процессе разрушения сила в стержне изменяется от* ${}^{(P)}\hat{\boldsymbol{N}}_k$ *до 0. При этом сила* $\hat{\boldsymbol{P}}_k$, *достигнутая в момент начала разрушения, не изменяется. Условие равновесности принимает вид*

$$-\dot{\boldsymbol{N}}_k - \sum_{i=1}^{i=k-1} \dot{\boldsymbol{N}}_i - \sum_{i=1}^{i=k} \dot{\boldsymbol{N}}_i = 0. \tag{17}$$

Из закона (16) также следует, что

$$\dot{\boldsymbol{N}}_k = -{}^{(P)}\hat{\boldsymbol{N}}_k = -\hat{N}_k \boldsymbol{k}_k. \tag{18}$$

В уравнение (17) подставляем выражения сил через узловые скорости по формулам (9), если стержень в момент разрушения в упругой области

$$\dot{\hat{\boldsymbol{N}}}_{\boldsymbol{m}} = -(\dot{V}_{\boldsymbol{1}} \frac{\sin\alpha_m}{\hat{l}_m} + \dot{V}_{\boldsymbol{2}} \frac{\cos\alpha_m}{\hat{l}_m})\, \boldsymbol{k}_m. \tag{19}$$

Если стержень в пластической области, то в (17) подставляем

$$\dot{\hat{\boldsymbol{N}}}_{\boldsymbol{j}} = -(\dot{V}_{\boldsymbol{1}} \frac{\sin\alpha_j}{\hat{l}_j} + \dot{V}_{\boldsymbol{2}} \frac{\cos\alpha_j}{\hat{l}_j})\ \hat{E}_k \boldsymbol{k}_j. \tag{20}$$

Систему уравнений (17)–(20) относительно безразмерных узловых перемещений интегрируем при начальных условиях

$$V_1\big|_{t=0} = {}^{(P)}V_1, V_2\big|_{t=0} = {}^{(P)}V_2.$$

При интегрировании следим за тем, какие стержни переходят из упругого состояния в пластическое, а какие разрушаются. Кроме того необходимо следить за возможной разгрузкой, когда $\dot{\varepsilon}_i < 0$. Если в момент времени $t = t_e$ стержень «$l$» достигает предела прочности и начинает разрушаться, зависимость от $t$ принимает вид

$$\hat{N}_l = {}^{(P)}\hat{N}_l \left(t_e - t + 1\right)\boldsymbol{k}_k,$$

где $t_e \le t \le t_e + 1$.

## Заключение

Данный способ описания процесса деформирования и разрушения позволяет описывать сложные системы с $n$-м количеством узловых точек, что говорит о его применимости к решению задач численными методами.

## Литература


1. *Энгельман О. Е.* Процессы сложного деформирования упругопластической стержневой системы // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 1 – С. 123–131.

2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для вузов. – М. : Наука, 1988. – 712 с.

3. *Ильюшин А. А.* Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность / Составители Е. А. Ильюшина, М. Р. Короткина. – М. : Физматлит, 2004. – 480 с.

4. *Маркин А. А., Глаголев В. В.* Термомеханическая модель дискретного разделения упругопластических тел // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2006. – Т. 12, Вып. 2. – С. 103–128.

УДК 519.652

# АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ДАВЛЕНИЯ В СХЕМЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ/ДАВЛЕНИЕ МКЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ 10/4

**В. В. Корзунина, З. А. Шабунина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается применение схемы перемещение/давление МКЭ в пространственных задачах деформирования упругопластических сред. Предложен метод исключения давления из разрешающей системы уравнений МКЭ. Предполагается что отдельный конечный элемент является тетраэдром. Для квадратичной аппроксимации в тетраэдре вводятся 10 узлов в вершинах и на серединах рёбер. Для аппроксимации давления — узел в центре тяжести. Проведено точное аналитическое интегрирование для компонент матриц отдельного элемента. Описана процедура исключения давления.
**Ключевые слова:** метод конечных элементов, квадратичные элементы, упругое деформирование, пластическое деформирование, вариационный принцип, схема перемещение давление.

Известно, что при определении напряжённо-деформированного состояния в твёрдых телах линейные элементы в МКЭ имеют повышенную жёсткость [1,2]. Поэтому, такие явления, как потеря устойчивости и гофрообразование, необходимо считать, используя элементы более высокого порядка. Квадратичные элементы позволяют выявлять многие особенности деформирования, которые недоступны линейным элементам.

Наиболее простая и распространённая схема МКЭ — схема перемещений. Она отлично себя зарекомендовала в теории упругости, когда перемещения незначительны, а деформации малы. Но для задач теории пластичности при сложных нагружениях она плохо работает: напряжения определяются с неудовлетворительной точностью. Поэтому необходимо вводить схемы перемещение/давление, в основе которых лежит вариационный принцип Ху-Васидзу [3].

Более того, пренебрегая упругими деформациями в теории пластичности с развитыми пластическими деформациями, мы неизбежно сталкиваемся с проблемой деформирования почти несжимаемых сред [1]. Доказано, что для таких случаев в эффективных КЭ порядок интерполяции перемещений должен быть ниже порядка интерполяции давления. То есть, фактически вводятся разные сетки для интерполяции перемещений и давления. Это приводит к тому, что в обобщённой матрице жёсткости системы значительно возрастает ширина ленты и, как следствие, время счёта.

В настоящей работе предложен метод исключения давления из разрешающей системы уравнений для МКЭ (схема перемещение/давление) на примере элемента 10/4.

Тетраэдральный элемент 10/4 имеет 4 узла в вершинах тетраэдра и шесть — на серединах рёбер. Узлы в вершинах имеют номера 1, 2, 3, 4. При этом, если смотреть из вершины с номером 4 на противоположную грань, то узлы 1, 2, 3 должны быть пронумерованы против часовой стрелки. Нумерация узлов связана с нумерацией рёбер посредством следующей матрицы:

$$pp = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В ней в первом и втором столбцах $l$-й строки находятся номера начала и конца $l$-го ребра, а номер узла, лежащего на середине $l$-го ребра, равен $l+4$. Для перемещений реализуется квадратичная аппроксимация в пределах каждого КЭ.

$$\begin{Bmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \\ W(x,y) \end{Bmatrix}^e = [N_1 I N_2 I \ldots N_{10} I]\{\delta\}^e. \tag{2}$$

Здесь $N_m$, $m = 1 \div 10$ — квадратичные функции формы элемента, $I$ — единичные матрицы размерности $3\times 3$, $\{\delta\}^e = \left[U_1 V_1 W_1 U_2 V_2 W_2 \ldots U_{10} V_{10} W_{10}\right]^T$ — вектор-столбец перемещений узлов элемента.

Для давления используется линейная линейная интерполяция по вершинным узлам $i$, $j$, $k$, $p$.

$$p^e(x,y) = \left[N_i N_j N_k N_p\right]\{p\}^e. \tag{3}$$

Здесь $N_m$, $m = i,j,k,p$ — линейные функции формы элемента, $\{p\}^e = \left[p_i p_j p_k p_p\right]^T$ — вектор-столбец значений давления в вершинных узлах.

Буквенная нумерация вершинных узлов соответствует численной:

$$(i,j,k,p) \approx (1,2,3,4). \tag{4}$$

К примеру, $i$-й узел — это узел с номером 1 в локальной нумерации КЭ. Но функции формы $N_i$ и $N_1$ существенно различны: первая линейная, вторая – квадратичная.

Линейная функция формы $N_i$ имеет вид:

$$N_i(x,y) = \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z). \tag{5}$$

Коэффициенты $a_i, b_i, c_i, d_i$ зависят от координат вершинных узлов. Формулы для их вычисления можно найти в [2]. Функции $N_i$, $N_k$, $N_p$ вычисляются аналогично, но следует подчеркнуть, что циклическая перестановка индексов $i$, $j$, $k$, $p$ в случае 3D не имеет места.

Квадратичные функции формы запишем в виде:

$$N_l\left(L_1, L_2, L_3, L_4\right) = \begin{cases} L_l(2L_l - 1), \; \textit{если} \;\; l \le 4 \\ 4L_r L_s, \; \textit{если} \;\; l > 4 \end{cases}. \tag{4}$$

Здесь $r = pp(l-4,1)$, $s = pp(l-4,2)$.

Если неизвестные для отдельного КЭ расположить в следующем порядке,

$$\left[U_1 V_1 W_1 U_2 V_2 W_2 \ldots U_{10} V_{10} W_{10} p_1 p_2 p_3 p_4\right] = \left[\{\delta\}^{eT}, \{p\}^{eT}\right], \tag{7}$$

то матрица отдельного элемента $\left[K\right]^e$ представима в виде:

$$\left[K\right]^e = \begin{bmatrix} \left[K_{uu}\right] & \left[K_{up}\right] \\ \left[K_{pu}\right] & \left[K_{pp}\right] \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Здесь $[K_{uu}]$ — матрица размерности $30\times 30$, $[K_{pu}]$ — матрица $4\times 30$, $[K_{up}] = [K_{pu}]^T$, $[K_{pp}]$— матрица $4\times 4$.

Последние 4 строки матрицы $[K]^e$ дают уравнение:

$$\left[K_{pu}\right]\{\delta\}^e + \left[K_{pp}\right]\{p\}^e = 0. \tag{9}$$

Первые 30 строк подлежат процедуре ансамблирования.

Матрица $[K_{pp}]$ вычисляется по правилу:

$$[K_{pp}] = -\frac{1}{K}\int\left[N_i N_j N_k N_p\right]^T\left[N_i N_j N_k N_p\right]dV. \tag{10}$$

Здесь $K$ — упругий модуль объёмной деформации. Интегрирование ведётся по объёму КЭ.

Объёмная деформация $\theta=\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)$ с учётом (2) представима в виде

$$\theta=B_v\left\{\delta\right\}^e \tag{11}$$

$$B_V=\left[N_{1,x}N_{1,y}N_{1,z}N_{2,x}N_{2,y}N_{2,z}\ldots N_{10,x}N_{10,y}N_{10,z}\right]. \tag{12}$$

Матрица $[K_{pu}]$ записывается как

$$[K_{pu}]=-\int\left[N_iN_jN_kN_p\right]^T B_v dV. \tag{13}$$

Здесь интегрирование ведётся по объёму КЭ. Используемые матрицы определены в (3), (12).

Матричное уравнение (9) позволяет выразить $\left\{p\right\}^e$ через перемещения $\left\{\delta\right\}^e$, что, в свою очередь, уменьшает размерность $\left[K\right]^e$ за счёт исключения давления $\left\{p\right\}^e$.

Вычислим матрицы $[K_{pp}],[K_{pu}]$ из (9). Интегрирование по объёму КЭ будем проводить с использованием известных формул [2].

$$\int L_1^aL_2^bL_3^cL_4^d dV=\frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!}6V. \tag{14}$$

Здесь $V$ — объём КЭ.

Из (10) следует, что $[K_{pp}]_{ij}=-\dfrac{1}{K}\int N_iN_j dV$ Проведя интегрирование, получим

$$\left[K_{pp}\right]=-\frac{1}{K}\frac{V}{20}\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}. \tag{15}$$

При вычислении $[K_{pu}]$ используются производные функций формы второго порядка. К примеру:

$$\frac{\partial N_l}{\partial x}(L_1,L_2,L_3,L_4)=\begin{cases}(4L_l-1)\dfrac{b_i}{6V}, l\le 4\\ (L_sb_r+L_rb_s)\dfrac{4}{6V}, l>4\end{cases}. \tag{16}$$

Здесь для индексов $r$, $s$ использованы обозначения из (6), для индекса $i$ — из (5). Производные по $y$ легко получить из (16), заменив $b_i,b_r,b_s$ на $c_i,c_r,c_s$ соответственно, а производные по $z$ — заменой на $d_i,d_r,d_s$. Далее будем представлять $[K_{pu}]$ в блочном виде

$$[K_{pu}]=[G^1G^2G^3G^4G^5\ldots G^{10}], \tag{17}$$

где $G^m, m=1\div 10$ — матрицы размерности $4\times 3$. Структура первых четырёх матриц $G^m$, $m=1\div 4$ такова: $m$-я строка матрицы $G^m$ имеет вид $\dfrac{1}{5!}[3b_m,3c_m,3d_m]$, остальные — $\dfrac{1}{5!}[-b_m,-c_m,-d_m]$.

Здесь опять использовано соответствие между цифровыми и буквенными обозначениями (4). Опишем структуру матриц $G^m$, $m=5\div 10$. Для этого опять воспользуемся обозначениями:

$$r=pp(l-4,1), s=pp(l-4,2). \tag{18}$$

Тогда $r, s$ принимают одно из значения от 1 до 4 (см. (1)).

В матрице $G^m$, $m=5\div 10$ строка с номером r имеет вид:

$$\frac{4}{5!}[b_r+2b_s,c_r+2c_s,d_r+2d_s]. \tag{19}$$

Строка с номером $s$:

$$\frac{4}{5!}[2b_r+b_s,2c_r+c_s,2d_r+2d_s]. \tag{20}$$

Две строки с номерами, отличными от $r$, $s$:

$$\frac{4}{5!}[b_r + b_s, c_r + c_s, d_r + d_s]. \tag{21}$$

Приведём пример матрицы $G^9$, $r = 2$, $s = 4$. Вспоминая, что для линейного тетраэдра имеет место соответствие индексов (4), получим:

$$G^9 = \begin{bmatrix} b_j + b_p & c_j + c_p & d_j + d_p \\ b_j + 2b_p & c_j + 2c_p & d_j + 2d_p \\ b_j + b_p & c_j + c_p & d_j + d_p \\ 2b_j + b_p & 2c_j + c_p & 2d_j + d_p \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Обратим внимание на то, что нумерация рёбер (1) позволила записать блочное представление $[K_{pu}]$, удобное для численной реализации.

Из матричного уравнения (9) имеем:

$$\{p\}^e = -[K_{pp}]^{-1}[K_{pu}]\{\delta\}^e. \tag{23}$$

Здесь для матриц $[K_{pp}], [K_{pu}]$ проведено точное аналитическое интегрирование, и они выписаны в явном виде (15), (17)–(21).

Обращая матрицу $[K_{pp}]$, запишем окончательный вид $\{p\}^e$:

$$\{p\}^e = \frac{4K}{V}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\left[K_{pu}\right]\{\delta\}^e = [W]\{\delta\}^e. \tag{24}$$

Здесь матрица $[W]$ имеет размерность $4\times30$. Таким образом, матрицу отдельного КЭ $\left[\tilde{K}\right]^e$ размерности $30\times30$ можно представить, как

$$\left[\tilde{K}\right]^e = [K_{uu}] + [K_{up}][W]. \tag{25}$$

При этом $[K_{up}]$ уже не требует интегрирования, поскольку матрица $[K_{pu}] = [K_{up}]^T$ получена выше.

## Литература


1. *Бате, Клаус-Юрген.* Методы конечных элементов = Finite element procedures / К.-Ю. Бате ; пер. с англ. В. П. Шидловского под ред. Л. И. Турчака. – М. : Физматлит, 2010. – 1022 с.

2. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике : Перевод с английского / О. Зенкевич ; Под ред. Б.Е. Победри. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

3. *Васидзу, Кюитиро.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу ; Перевод с англ. В. В. Кобелева, А. П. Сейраняна; Под ред. Н. В. Баничука. – М. : Мир, 1987. – 542 с.

УДК 519.652

# ИСКЛЮЧЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В УРАВНЕНИЯХ СХЕМЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ/ДАВЛЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**В. В. Корзунина, З. А. Шабунина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассмотрена схема перемещение/давление метода конечных элементов, в которой аппроксимация перемещений и давления проводится на разных сетках. Схема перемещение/давления описана для трехмерных задач с тетраэдральными элементарными конечными элементами. Аппроксимация перемещений квадратична (10 узлов в тетраэдре), аппроксимация давления кусочно-константна (1 узел в тетраэдре). Приведена структура матрицы жёсткости элемента размерности 30×30 после исключения давления. Проведено точное аналитическое интегрирование для элементов матрицы жесткости.
**Ключевые слова:** метод конечных элементов, объёмная деформация для почти несжимаемых сред, напряжения в МКЭ, вариационный принцип, квадратичная аппроксимация, эффективные тетраэдры.

Метод переменных параметров упругости при развитых пластических деформациях для таких металлов, как стали и титаны, даёт значение модуля Пуассона $\nu$, близкое к 0,5. То есть можно говорить, что имеет место почти несжимаемость.

При этом классическая схема МКЭ в перемещениях даёт неудовлетворительные значения для гидростатического давления. И, как следствие, крайне неточные значения напряжений. Это объясняется тем, что объёмная деформация определяется со значительно меньшей точностью, чем сами перемещения. Погрешности объёмной деформации, стремящейся к нулю при $\nu \to 0,5,$ влекут за собой большие погрешности в значениях напряжений.

Низкая точность вычисления напряжений приводит к тому, что внешние нагрузки не уравновешиваются напряжениями. Разумное измельчение конечно-элементной сетки при $\nu$, близком к 0.5, не приводит к существенному повышению качества численного решения.

Эффективные конечно-элементные модели для почти несжимаемых сред базируются на вариационном принципе Ху-Васидзу [1], в котором перемещения и гидростатическое давление рассматриваются как независимые переменные.

Рассмотрим простейший трёхмерный элемент схемы перемещение/давление — тетраэдральный элемент 10/1[2]. В нём 10 узлов расположены в вершинах и рёбрах тетраэдра. Эти узлы служат для квадратичной аппроксимации перемещений, а один внутренний узел — для аппроксимации давления, которое постоянно для всего тетраэдра.

Принимаем традиционную нумерацию узлов квадратичного тетраэдра: вершинные узлы имеют номера 1, 2, 3, 4. При этом, если смотреть из вершины с номером 4 на противоположную грань, то узлы с номерами 1, 2, 3 должны быть пронумерованы против часовой стрелки. Нумерация узлов связана с нумерацией рёбер посредством матрицы.

$$pp = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

В матрице $pp$ в первом и втором столбце $l$-й строки находятся номера начала и конца $l$-го ребра. Номер срединного узла $l$-го ребра равен $l+4$.

Линейные функции формы $M_l(x,y,z)$ тетраэдра с узлами $1 \div 4$ имеют вид:

$$M_l = \frac{1}{6V}\left(a_l + b_l x + c_l y + d_l z\right), \; l = 1 \div 4. \tag{2}$$

Здесь $V$ — объём тетраэдра. Коэффициенты $a_l, b_l, c_l, d_l$ вычисляются из условий:

$$M_l(x_m, y_m, z_m) = \delta_{lm}, \; l, m = 1 \div 4. \tag{3}$$

Здесь $\delta_{lm}$ — символ Кронекера. Конкретные выражения для этих коэффициентов можно найти в [3].

Квадратичные функции формы $N_l(L_1, L_2, L_3, L_4)$, $l = 1 \div 10$ в принятой выше нумерации узлов тетраэдра можно получить в виде:

$$N_l(L_1, L_2, L_3, L_4) = \begin{cases} L_l(2L_l - 1), \; \textit{если} \; l \le 4 \\ 4L_{pp(1-4,1)}L_{pp(1-4,1)}, \; \textit{если} \; L > 4 \end{cases}. \tag{4}$$

Здесь $L_1, L_2, L_3, L_4$ — $L$-координаты тетраэдра [3].

Матрица жёсткости элемента $\left[K\right]^e$ имеет размерность $31 \times 31$: 30 компонент соответствуют вектору перемещений узлов квадратичного тетраэдра и одна компонента — гидростатическому давлению $p$.

$$p = K\theta. \tag{5}$$

Здесь $\theta$ — объёмная деформация, $K$ — упругий модуль объёмной деформации. Структуру матрицы $\left[K\right]^e$ удобно представить в виде:

$$\left[K\right]^e = \begin{bmatrix} \left[K_{uu}\right] & \left[K_{up}\right] \\ \left[K_{pu}\right] & \left[K_{pp}\right] \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $\left[K_{uu}\right]$ — матрица $30 \times 30$, $[K_{pu}]$ — вектор-строка $1 \times 30$, $[K_{up}] = [K_{pu}]^T$.

Первые 30 строк матриц отдельных элементов подлежат известной процедуре ансамблирования, а последняя строка даёт самостоятельное уравнение.

$$\left[K_{pu}\right]\{\delta\}^e + \left[K_{pp}\right]p^e = 0. \tag{7}$$

Здесь $\{\delta\}^e$ — вектор-столбец перемещений узлов квадратичного тетраэдра размерности $30 \times 1$.

Таким образом, давление в конечном элементе может быть выражено через перемещения узлов $\{\delta\}^e$. Следовательно, для каждого конечного элемента можно сформировать матрицу жёсткости размерности $30 \times 30$. Далее эти матрицы будут подвергаться процедуре ансамблирования и обобщённая система уравнений запишется в терминах перемещений.

В работе [4] был получен общий вид $[K_{pu}]$:

$$[K_{pu}] = -\int [N_{1,x}N_{1,y}N_{1,z}N_{2,x}N_{2,y}N_{2,z}\ldots N_{10,x}N_{10,y}N_{10,z}]dV. \tag{8}$$

Вычислим эти значения. Производные функций формы по $x$ для вершинных узлов $(l \le 4)$ с учётом (4) имеют вид:

$$N_{l,x} = (4L_1 - 1)\frac{b_l}{6V}. \tag{9}$$

Производные по x для срединных узлов $(l > 4)$

$$N_{l,x} = \frac{2}{3V}(L_s b_r + L_r b_s). \tag{10}$$

Здесь $r = pp(l-4,1)$, $s = pp(l-4,2)$. Производные функции формы по $y$, $z$ аналогичны по форме выражениям (9) и (10).

Интегрирование по объёму тетраэдра производных вида (9) и (10) даёт следующие результаты:

$$l \le 4 : \int N_{l,x} dV = \int N_{l,y} dV = \int N_{l,z} dV = 0 \quad (11)$$

$$l > 4 : \int N_{l,x} dV = \frac{1}{6}(b_r + b_s), \int N_{l,y} dV = \frac{1}{6}(c_r + c_s), \int N_{l,z} dV = \frac{1}{6}(d_r + d_s). \quad (12)$$

Таким образом, первые 12 компонент $[K_{pu}]$ равны нулю, а остальные можно получить из (12).

Согласно матрице жёсткости (6) первые 30 строк матрицы $\left[K\right]^e$ элемента 10/1 дают вклад в обобщённую систему уравнений МКЭ, равный:

$$[K_{uu}]\{\delta\}^e + [K_{up}]p^e. \quad (13)$$

Уравнение (7) позволяет выразить давление $p^e$ через перемещения:

$$p^e = \frac{K}{V}\left[K_{pu}\right]\left\{\delta\right\}^e. \quad (14)$$

Тогда вклад элемента (13) в обобщённую систему уравнений равен

$$(\left[K_{uu}\right] + \frac{K}{V}\left[K_{up}\right]\left[K_{pu}\right])\left\{\delta\right\}^e. \quad (15)$$

Из последней записи следует, что новая матрица жёсткости элемента размерности $30 \times 30$ имеет вид:

$$\left[K_{uu}\right] + \frac{K}{V}\left[K_{up}\right]\left[K_{pu}\right]. \quad (16)$$

## Заключение

Отметим, что исключение давления в схеме перемещение/давление возможно не всегда. В [2] приводится эффективный элемент 10/4 с квадратичной аппроксимацией для перемещений и линейной — для давления. Для такого элемента имеет место непрерывность перемещений и давления на границах между элементами. Но вершинные узлы служат одновременно для интерполяции смещений и давления. Поэтому исключение давления невозможно.

## Литература


1. *Васидзу, Кюитиро*. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу ; Перевод с англ. В. В. Кобелева, А. П. Сейраняна; Под ред. Н. В. Баничука. – М. : Мир, 1987. – 542 с.

2. *Бате, Клаус-Юрген*. Методы конечных элементов = Finite element procedures / К.-Ю. Бате ; пер. с англ. В. П. Шидловского под ред. Л. И. Турчака. – М. : Физматлит, 2010. – 1022 с.

3. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике : Перевод с английского / О. Зенкевич ; Под ред. Б. Е. Победри. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

4. Конечно-элементная матрица жесткости в схеме перемещения/давление для тетраэдрального элемента 10/1 почти несжимаемого упругого тела / В. В. Корзунина, З. А. Шабунина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 17–18 декабря 2018 г. – Воронеж, 2019. – С. 794–797. – URL: http://www.amm.vsu.ru/conf/ (дата обращения: 01.10.2020).

УДК 539.3

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТРУКТУРНО-ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛАХ

**Г. Н. Кувыркин, И. Ю. Савельева, Д. А. Кувшинникова**

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана*

**Аннотация.** Широкое использование современных структурно-чувствительных материалов в экстремальных условиях и возникающие при этом новые нелинейные динамические задачи обуславливают актуальность проблемы разработки методов математического моделирования, исследования и прогнозирования механического поведения таких материалов в условиях высокоинтенсивных внешних воздействий. В работе рассмотрена модель динамических температурных напряжений с учетом пространственных нелокальных эффектов. Данная модель основана на методах обобщенной термодинамики и позволяет получить интегро-дифференциальные уравнения для описания напряжений, возникающих в элементах конструкций. Также, в работе предложен алгоритм для численного решения поставленной начально-краевой задачи на основе метода конечных элементов. Получены распределения напряжений в слое материала и проанализировано влияние основных параметров, отвечающих за нелокальные эффекты, на решения задачи.
**Ключевые слова:** математическая модель, динамические напряжения, структурно-чувствительные материалы, высокоинтенсивное нагружение, обобщенная термодинамика.

## Введение

Потребность в нелокальной термодинамике в физических науках и технике возникла еще в середине прошлого столетия. Несколько экспериментальных наблюдений температурного поля на металлических поверхностях раздела, а также изменение параметров проводимости в окрестности термостатированных областей показывают локализацию градиентов температуры вблизи границ [1].

В современном мире подобные явления наблюдаются при молекулярно-динамическом (МД) моделировании теплопередачи в нанопроводах, показывающем, что наличие термостатированных областей включает фонон-фононное рассеяние, которое изменяет свойство проводимости материалов [2].

Строгое и полное описание механического поведения реальных материалов является очень сложной задачей. Обычно для решения конкретных практических задач вводятся упрощающие предположения о свойстве материала и характере его поведения. Такая замена реального вещества воображаемой средой составляет суть построения модели материала.

Тенденции развития современной науки и техники требуют создания моделей для описания поведения материалов с очень мелкими особенностями их структурной организации. Такие материалы, как правило, получают компактированием нанопорошков, осаждением на подложку, кристаллизацией аморфных сплавов и при помощи интенсивной пластической деформации [1]. В ходе создания такие материалы приобретают неоднородность структуры, которая не позволяет описывать их в рамках классической механики сплошной среды. Благодаря особенностям структуры такие материалы получили название «структурно-чувствительные», а их изучение становится возможным в рамках обобщенной механики сплошной среды.

Для структурно-чувствительных материалов вводится понятие среды с микроструктурой [2]. Это такая сплошная среда, в которой каждая бесконечно малая «точка» несет в себе информацию о структуре материала. По сравнению с классической сплошной средой в «точках» подобных усложненных сред чаще всего вводятся дополнительные силы, содержащие в себе поправки на влияние ближайших точек.

В настоящее время разрабатываются модели, способные наиболее точно описать термомеханическое поведение структурно-чувствительных материалов при высокоинтенсивном внешнем нагружении. Наиболее простым и популярным является подход предложенный А. К. Эрингеном [3]. Он основан на учете влияния элементов структуры на данную точку при помощи функции влияния нелокальности. Такой подход взят в данной работе за основу для построения соотношений, позволяющих описать динамические температурные напряжения в структурно-чувствительных материалах.

### 1. Математическая модель

Уравнение теплопроводности в векторной форме имеет вид [4]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V, \qquad i = \overline{1,3} \tag{1}$$

где $\rho$ — плотность материала; $c$ — теплоемкость материала; $T(\mathbf{x},t)$ — абсолютная температура; $q_i(\mathbf{x},t)$ — проекция вектора плотности теплового потока на ось $Ox_i$ прямоугольной системы координат; $q_v(\mathbf{x},t)$ — объемная плотность мощности внутренних источников (стоков) теплоты; $x_i$ — пространственная координата; $t$ — время.

В классических моделях для связи теплового потока $q_i(\mathbf{x},t)$ и температуры $T(\mathbf{x},t)$ используется закон теплопроводности Фурье. Для изотропного и однородного тела закон теплопроводности имеет вид [4]:

$$q_i^{(l)}(\mathbf{x},t) = -\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial x_j}, \tag{2}$$

где $\lambda_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора теплопроводности.

Эффект нелокальности среды состоит в том, что физические характеристики элементов структурно-чувствительного материала подвержены влиянию прочих окружающих элементов структуры. В связи с этим выражение для теплового потока может быть записано в виде [5]:

$$q_i^{(nl)}(\mathbf{x},t) = -p_1 \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial x_j} - p_2 \lambda_{ij}^{(T)} \int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}',t)}{\partial x'_j} dx'_j, \tag{3}$$

где $p_1, p_2$ — весовые доли влияния нелокальности, $p_1 + p_2 = 1$; $\varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)$ — функция влияния нелокальности, причем: $\int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)\mathrm{d}\mathbf{x}' = 1$.

Подставляя выражение (3) в начальное соотношение (1) получаем уравнение теплопроводности в векторной форме, учитывающее нелокальность среды:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial x_j} + p_2 \lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \varphi(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}',t)}{\partial x'_j} dx'_j. \tag{4}$$

Изменение температуры тела приводит к тепловому расширению, которое вызывает появление температурных напряжений и деформаций внутри твердого тела. Уравнение, которое описывает возникающие напряжения можно записать в следующем виде [4]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}), \tag{5}$$

где $\sigma_{ij}$ — компонены тензора напряжений; $C_{ijkl}$ — компоненты тензора, характеризующего механические свойства тела; $\varepsilon_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора температурной деформации; $\varepsilon_{kl}$ — компоненты тензора деформации.

В случае учета пространственной нелокальности компоненты тензора диформации вычисляются по формуле [5]:

$$\varepsilon_{kl} = p_1 \varepsilon_{kl}^{(l)} + p_2 \int_V \varphi(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) \varepsilon_{kl}^{(l)}(\mathbf{x}',t) dx'. \tag{6}$$

Тогда уравнение для определения напряжений (5) примет вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left( p_1\varepsilon_{kl}^{(l)} + p_2\int\limits_V \varphi(|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|)\varepsilon_{kl}^{(l)}(\mathbf{x}',t)d\mathbf{x}' - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right). \tag{7}$$

Соответсвующее уравнение для определения температурных напряжений в этом случае будет иметь вид [5]:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -TC_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}\alpha_{ij}^{(T)} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V, \tag{8}$$

где $\alpha_{ij}^{(T)}$ — компоненты тензора температурной деформации.

Уравнения (7)–(8) с заданными граничными и начальными условиями позволяют описать термомеханическое поведение иследуемого материала.

## 2. Постановка одномерной задачи

Рассмотрим однородный изотропный слой с теплоизолированной боковой поверхностью. Пусть основные физические свойства материала, такие как теплопроводность, теплоемкость и плотность являются постоянными.

Пусть термомеханическая нагрузка действует по нормали к граничной поверхности, а отличной от нуля является только деформация в направлении этой нормали. Температура и напряжения зависят только от времени $t$ и координаты $x$, направленной по нормали вглубь тела. Тогда определяющие соотношения для вычисления температурных напряжений будут иметь вид:

$$\rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -(3\lambda+2\mu)T_0\alpha^{(T)}\dot{\varepsilon} - \frac{\partial q}{\partial x} \tag{9}$$

$$\sigma = \left(\lambda+2\mu\right)\varepsilon - \left(3\lambda+2\mu\right)\alpha^{(T)}\Delta T \tag{10}$$

где $c_\varepsilon$ — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации; $\lambda$, $\mu$ — константы Ламе, характеризующие упругие свойства материала; $\alpha^{(T)}$ — температурный коэффициент линейного расширения; $T_0 = \mathrm{const}$ — температура естественного состояния; $\sigma$ — компонента тензора напряжений, отвечающая за напряжения по оси $x$.

Для получения закона сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности необходимо конкретизировать выражение для вектора плотности теплового потока $q$ в соотношении (9). Выражение для теплового потока (3) в одномерном случае имеет вид:

$$q(x,t) = -p_1\lambda^{(T)}\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial x} - p_2\lambda^{(T)}\int\limits_V \varphi\left(\left|x'-x\right|\right)\frac{\partial T\left(x',t\right)}{\partial x'}dx',\ \ x\in\left(0,L\right),\ t>0. \tag{11}$$

где $\lambda^{(T)}$ — коэффициент теплопроводности.

Определяющие соотношения модели термомеханических процессов в твердом теле можно переписать в терминах абсолютной температуры и локальной деформации, если подставить в (9) соотношения (10) и (11), а также использовать закон сохранения движения $\partial\sigma/\partial x = \rho\ddot{u}$ и соотношение Коши $\varepsilon = \partial u/\partial x$. Уравнение описывающее динамические температурные напряжения в данном случае примет вид:

$$p_1\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + p_2\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial}{\partial x}\left( \lambda^{(T)}\int\limits_V \varphi\left(\left|x'-x\right|\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x'}dx' \right) = \rho\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + \\ +\rho\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha^{(T)}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2},\quad 0<x<L,\ 0<t<T. \tag{12}$$

Введем безразмерные параметры и переменные [6]:

$$a = \frac{\lambda^{(T)}}{\rho c};\ \ z = \frac{x}{\sqrt{at_0}};\ \ \theta = \frac{T-T_0}{T*};\ \ T* = \frac{At_0^m\sqrt{at_0}}{\lambda};\ \ t_1 = \frac{t}{t_0};\ \ Q_1 = \frac{q_1}{At_0^m};\ \ Q_2 = \frac{q_2}{At_0^m};$$

$$V_\sigma^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho};\quad \bar\sigma=\frac{\sigma}{(3\lambda+2\mu)\alpha^{(T)}T^*};\quad R^2=\frac{a}{V_\sigma^2 t_0},$$

где $a$ — коэффициент температуропроводности; $z$ — безразмерное расстояние; $t_0$ — некоторый момент времени; $t_1$ — безразмерное время; $A$ — размерный коэффициент; $Q_1, Q_2$ — безразмерная плотность теплового потока; $R^2$ — безразмерный параметр, обратно пропорциональный квадрату скорости звука $V_\sigma$.

Для простоты примем $a=1$. Перепишем выражения (9) и (12) с учетом введенных безразмерных обозначений:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t_1}=p_1\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+p_2\frac{\partial}{\partial z}\int_V\varphi(|z'-z|)\frac{\partial\theta}{\partial z'}dz',\ \ z\in(0,\bar L),\ t_1>0. \tag{13}$$

$$p_1\frac{\partial^2\bar\sigma}{\partial z^2}+p_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_V\varphi(|z'-z|)\frac{\partial\bar\sigma}{\partial z'}dz'\right)=R^2\left(\frac{\partial^2\bar\sigma}{\partial {t_1}^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial {t_1}^2}\right),\quad 0<z<\bar L,\ 0<t_1<\bar T. \tag{14}$$

Фунция влияния $\varphi$ может быть выбрана различными способами в зависимости от особенностей конкретной задачи. Для примера возьмем функцию влияния в виде [3]:

$$\varphi(|z'-z|)=\frac{1}{2a}\exp\left(-\frac{|z'-z|}{a}\right),\quad |z'-z|<a,$$

где $a$ — радиус зоны влияния нелокальности.

Рассмотрим задачу с граничными условиями второго рода для уравнения теплопроводности (13), а для уравнения движения в напряжениях (14) — граничные условия первого рода. Запишем начальные и граничные условия в безразмерном виде:

$$\theta(z,0)=\theta_0=\text{const},\ \bar\sigma(z,0)=0,\ \dot{\bar\sigma}(z,0)=0;$$
$$-\left.\frac{\partial\theta(z,t_1)}{\partial z}\right|_{z=0}=Q_1(t_1),\qquad \left.\frac{\partial\theta(z,t_1)}{\partial z}\right|_{z=L}=Q_2(t_1); \tag{15}$$
$$\bar\sigma(0,t_1)=0,\ \bar\sigma(\bar L,t_1)=0$$

## 2. Численное решение

Введем равномерную сетку с постоянным шагом по времени $\tau$. Тогда применив стандартный метод конечных элементов [7] к уравнениям (13)–(14) можно получить две системы линейных алгебраических уравнений, которые в матричной форме могут быть записаны в виде (16)–(17), соответственно:

$$[C]\{\theta\}_t^{k+1}+([K]+[K^{(nloc)}])\{\theta\}^k=\{F\} \tag{16}$$

$$[A_2]\{\bar\sigma\}^{k+1}=\{b_2\}, \tag{17}$$

где

$$C_{ij}=\int_0^{\bar L}\varphi_i(z)\varphi_j(z)dz,\ K_{ij}=p_1\int_0^{\bar L}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}dz,\ K_{ij}^{nloc}=p_2\frac{1}{2a}\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}}\frac{\partial\varphi_i(z)}{\partial z}\int_{z_{i-1}-a}^{z_{i+1}+a}\exp\left(\frac{|z-z'|}{a}\right)\frac{\partial\varphi_j(z')}{\partial z'}dz'dz,$$

$$F_i=Q_1(t)\varphi_i(0)+Q_2(t)\varphi_i(\bar L),\quad A_2=\tau^2\left[K^{(nl)}\right]+\tau\left[K^{(loc)}\right]+[M];$$

$$\{b_2\}=2[M]\{\bar\sigma\}^k-[M]\{\bar\sigma\}^{k-1}-\tau^2\{f_2\}^k,\quad [\mathrm{M}]=R^2[C];$$

$\varphi_i(z)$ – базисные функции.

Рассмотрим задачу высокоинтенсивного импульсного поверхностного нагрева [8, 9]. В слое длины $L=10$ с теплоизолированной боковой поверхностью на левой границе задан высокоинтенсивный тепловой поток с параметром интенсивности $m = 2$. На рис. 1 представлены распределения температурных напряжений в слое на момент времени $t = 2$ при различном значении вклада локальной составляющей $p_1$. Видим, что при увеличении вклада нелокальной составляющей (уменьшении $p_1$) величина температурных напряжений увеличивается по модулю в точки пика. Сам пик напряжений смещается чуть дальше вглубь стержня. Данный эффект говорит о том, что структурно-чувствительные материалы значительно лучше поглощают тепловые воздействия и могут быть использованы в качестве защитных покрытий от температурных деформаций.

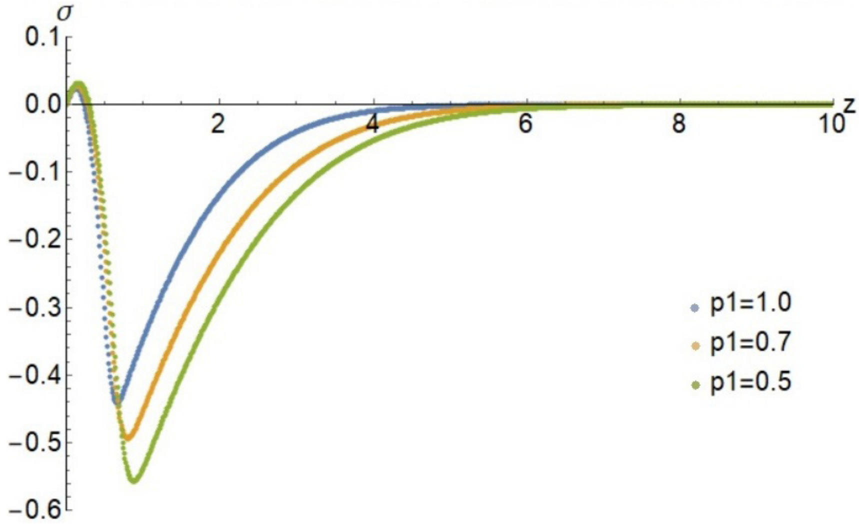



*Рис. 1. Влияние параметра вклада локальной составляющей на распределение температурных напряжений в слое*

Далее рассмотрим, как влияет диаметр нелокальности на распределение напряжений в слое. На рис. 2 представлены распределения температурных напряжений в слое на момент времени $t = 2$ при различном значении диаметра нелокальности $a$. Видим, что увеличение диаметра нелокальности как бы «сглаживает» распределение напряжений в слое. При этом пик значений по модулю немного смещается вглубь слоя. Данный эффект связан с тем, что в область влияния попадает больше значений, которые непосредственно влияют на значение напряжения в конкретной точке пространства. Так как количество точек, попадающих в область нелокальности, связанно непосредственно со структурой материла, то оно должно определяться в ходе численного эксперимента в зависимости от диаметра области нелокальности.

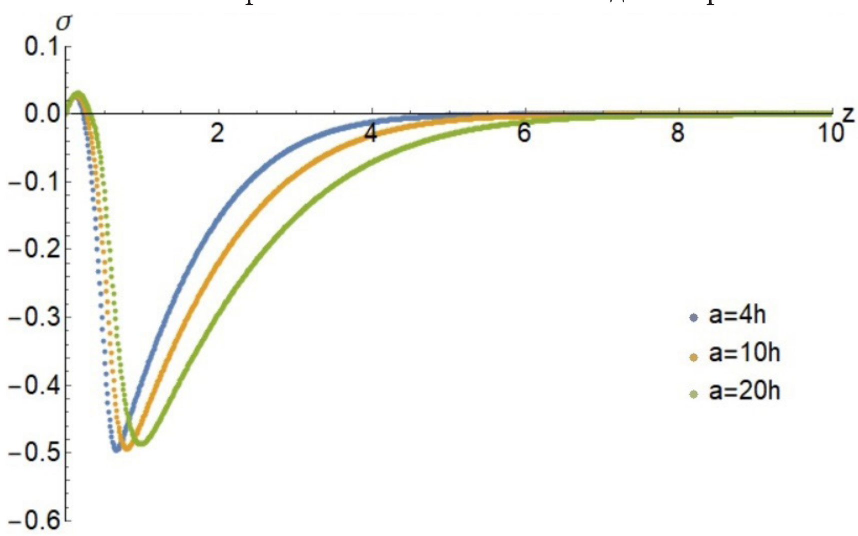



*Рис. 2. Влияние диаметра нелокальности на распределение температурных напряжений в слое*

## Заключение

Рассмотренная в работе математическая модель позволяет моделировать термомеханические процессы в деформируемом твердом теле при различных допущениях относительно структуры материала. При помощи предложенной расчетной схемы на основе метода конечных элементов, найдены распределения динамических температурных напряжений в слое материла. Проанализировано влияние параметров нелокальности на полученные решения.

## Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 0705-2020-0032).

## Литература

1. *Андриевский, Р. А.* Наноструктурные материалы / Р. А. Андриевский, А. В Рагуля. – Москва : Академия, 2005. – 192 с.

2. *Алымов, М. И.* Методы получения и физико-механические свойства объемных нанокристаллических материалов / М. И. Алымов, В. А. Зеленский. – Москва : ЭЛИЗ, 2007. – 148 с.

3. *Eringen, A. C.* Nonlocal continuum field theories / A. C. Eringen – New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. – 376 p.

4. *Зарубин, В. С.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.

5. *Зарубин, В. С.* Математическая модель нелокальной среды с внутренними параметрами состояния / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин, И. Ю. Савельева. – Минск : Инженерно-физический журнал. – 2013. – Т. 86, № 4. – С. 768–773.

6. *Кувыркин, Г. Н.* Термомеханика деформируемого твердого тела при высоко-интенсивном нагружении / Г. Н. Кувыркин. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1993. – 142 с.

7. *Зенкевич, О.* Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – Москва : Мир, 1986. – 320 с.

8. *Kuvyrkin, G. N.* Mathematical model of the heat transfer process taking into account the consequences of nonlocality in structurally sensitive materials / G. N. Kuvyrkin, I. Y. Savelyeva, D. A. Kuvshynnikova – IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2018. – Vol. 991(1). – DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012050

9. *Kuvyrkin, G. N.* Non-stationary heat conduction in a curvilinear plate with account for spatial nonlocality / G. N. Kuvyrkin, I. Yu. Savelyeva, D. A. Kuvshinnikova. – Physical Engineering Journal. – 2019. –V. 92, No 3. – P. 608–613.

УДК 539.3

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАЛЕЧИВАНИЯ ТРЕШИН В ПЛАСТИНАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНЫМ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

**К. В. Кукуджанов, А. Л. Левитин**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** На основе предложенной электротермомеханичской модели воздействия короткоимпульсного высокоэнергетического электромагнитного поля на материал с макротрещиной исследуются процессы концентрации поля (тока) в ее вершине, протекания электрического тока между свободными поверхностями трещины посредством автоэлектронной и термоэлектронной эмиссий, выделения джоулева тепла, фазовых превращений (плавления и испарения) и влияние этих процессов на залечивание трещины. Проводится сравнение полученных результатов моделирования с имеющимися экспериментальными данными по воздействию импульсного поля на краевую трещину в пластине.
**Ключевые слова:** импульсное электромагнитное воздействие, залечивание дефектов, торможение трещины, высокоэнергетическое поле.

Будем прикладывать к образцу внешнее электромагнитное поле, которое индуцирует в материале образца ток с плотностью тока от $10^8$ до $10^{11}$ А/м$^2$ в течение достаточно короткого интервала времени продолжительностью до нескольких 100 мкс. Такое поле принято называть высокоэнергетическим электромагнитным полем (далее — ВЭМП).

Наличие дефектов в токопроводящей среде приводит к локализации (концентрации) электрического поля в их окрестности. Это вызывает локально неоднородное распределение температуры в материале, вследствие повышенной диссипации электромагнитной энергии в области дефектов, а точнее в их острых кончиках. Использование этого обстоятельства для объяснения залечивания короткими импульсами тока большой плотности трещин, распространяющихся в кремнистом железе, было осуществлено впервые в работе [1]. При этом в проведенных экспериментах было показано, что при воздействиях тока на макротрещины в черных и цветных металлах в окрестности их вершин наблюдалось резкое повышение температуры, сопровождаемое плавлением и испарением материала, а также микровзрывом с образованием кратера [1–2].

Таким образом, образовавшейся кратер препятствовал дальнейшему распространению трещины, приводя к ее залечиванию.

В частности эти эксперименты показывали, что при воздействиях короткими импульсами тока большой плотности, индуцируемыми ВЭМП, на краевую трещину в тонкой пластине в окрестности ее вершины наблюдалось резкое повышение температуры: измеренные скорость нагрева составляла $10^7$°С/с, градиенты температуры — $6{,}0 \cdot 10^6$–$5{,}0 \cdot 10^7$°С/м, причем вдали от трещины температура не превышала 10°С. Такие скорость и концентрация выделения тепла приводили к тому, что в кончике трещины происходило плавление и испарение материала, сопровождаемое микровзрывом, который выбрасывал продукты взрыва из вершины трещины в направлении перпендикулярном плоскости пластины. При этом в вершине трещины образовывался кратер [1–2].

Рядом исследователей были предприняты попытки моделирования электрических, тепловых и механических процессов, происходящих при вышеописанном импульсном воздействия ВЭМП на краевую трещину в пластине. Данные процессы рассматривались как в квазистатике [3–8], так и в динамике [9]. Материал пластины предполагался упругим [3, 7, 8], жесткопластическим [4, 5], упругопластическим [6, 9], а деформации — малыми. Процесс теплопроводности описывался законом Фурье.

Моделирование показало, что вблизи макротрещины возникает неоднородное температурное поле с локализацией температуры, которая достигает температуры плавления в окрестности вершин макротрещины. Возникающие в окрестности вершины трещины сжимающие напряжения приводили не просто к торможению трещины, но и к сближению ее берегов (частичному закрытию дефекта). Однако эти модели позволяли описать процесс нагрева и деформирования только качественно: скорость нагрева, градиенты температуры, время начала плавления в окрестности вершины трещины, получающиеся в результате моделирования, оказывались значительно меньше, наблюдаемых в экспериментах [1–2]. Температура в вершине трещины не достигала температуры испарения, соответственно в рамках рассматриваемых моделей не удавалось описать процессы микровзрыва и образования кратера в вершине.

В силу математических сложностей при аналитическом решении электротермоупругой(-жесткопластической) и численном решении электро-термоупругопластической задач (с учетом предположения о малости деформаций), ни одна из моделей [3–9] не позволяла последовательно проследить влияния напряженно-деформированного состояния в окрестности дефекта на электрическое и температурное поля и взаимосвязано исследовать весь процесс эволюции дефектов под воздействием импульса тока. Кроме того ни одна из этих моделей не учитывала зависимость физико-механических свойств металла от температуры и изменений агрегатного состояния вещества в процессе деформирования. Между тем, как показано в [1–2] абсолютные значения температуры (и ее градиенты), полученные в экспериментах, очень велики, они заведомо превышают температуру плавления и достигают температуры испарения металла. Не учитывать при таких условиях зависимости свойств металла от температуры, а также изменений агрегатного состояния вещества невозможно.

Проведенные аналитические оценки показывают, что при импульсном воздействии ВЭМП плотность тока в вершине трещины оказываются такой, что относительное изменение температуры на расстояниях порядка длины свободного пробега фононов (и электронов) оказывается больше единицы. Применять в рассматриваемом случае закон теплопроводности Фурье не корректно. Кроме того время электромагнитного воздействия на материал мало и составляет $10^{-5}$–$10^{-4}$ с. Поэтому теплопроводностью следует пренебречь и считать процесс адиабатическим.

Для устранения этих недостатков в настоящей работе предлагается квазистационарная модель воздействия импульсным ВЭМП на трещины в металле и численный метод решения получающейся системы уравнений. Деформации предполагаются конечными. Принимается аддитивность скоростей упругих, пластических и температурных деформаций. Температура в рассматриваемых процессах изменяется в диапазоне значений от комнатной до температуры испарения металла [1]. Поэтому в предлагаемой модели все физико-механические характеристики материала (плотность, удельная теплоемкость, электропроводность, коэффициент температурного расширения, упругие модули, предел текучести и т. д.), входящие в уравнения модели, зависели от температуры [10–12]. Модель учитывает фазовые превращения (плавления и испарения) материала, происходящие в окрестности дефектов и соответствующие изменения реологии материала в областях этих трансформаций, а также возможность протекания электрического тока между свободными поверхностями трещины (пробоя воздуха за счет эмиссии электронов).

Решение получающейся системы уравнений ищется численно методом конечных элементов на подвижных сетках с использованием смешанного эйлеро-лагранжева метода.

На основе построенной модели решается задача о кратковременном воздействии ВЭМП на краевую трещину (с закругленной вершиной) в пластине, которая численно воспроизводит эксперимент, выполненный в работах [1–2]. Изучаются изменения электромагнитного и температурного полей, а также агрегатных состояний в окрестности трещины.

Исследование этих процессов позволит глубже понять механизм залечивания макротрещин в пластинах при воздействии ВЭМП и приблизиться к объяснению экспериментально наблюдаемых процессов залечивания усталостных трещин путем сварки их берегов.

Результаты расчетов по предлагаемой модели сравнивались с экспериментальными данными [1–2]. Результаты, полученные по предложенной модели для цинка, неплохо количественно согласуются с экспериментом: вычисленные (в окрестности кончика трещины радиусом 10 мкм) средняя скорость нагрева достигала $6{,}3 \cdot 10^{7}$ °C/с, градиенты температуры – $10^{7}$–$10^{8}$ °C/м. Вдали от трещины температура поднималась не более 10°C (в момент времени 100мкс), нагрев также не происходил на берегах трещины вдали от кончика. Процесс сопровождался плавлением в вершине трещины, а также испарением металла.

Таким образом, при рассматриваемом воздействии током в вершине трещины формируется кратер, который препятствует дальнейшему распространению трещины, приводя к ее залечиванию.

**Благодарности**

Исследование К. В. Кукуджанова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-19-00616)

**Литература**

1. *Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А.* О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 4. – С. 848–851.

2. *Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А.* Разрушение вершины трещины силовым электромагнитным полем // Док. АН СССР. – 1977. – Т. 237, № 2. – С. 325–327.

3. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Рубчинский Б. Д.* Электромагнитное и температурное поле в пластине с разрезом конечной длины // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – № 1. – С. 110–118.

4. *Клюшников В. Д., Овчинников И. В.* Плоская задача о воздействии мгновенного точечного источника тепла // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 4. – С. 118–122. = *Klyushnikov V. D., Ovchinnikov I. V.* Plane Problem of Effect of an Instantaneous Point Heat Source // Mech. Solids. – 1988. – V. 23, No. 4. – P. 113–117.

5. *Овчинников И. В.* Определение ресурса пластичности при воздействии тока // Проблемы прочности. – 1993. – № 6. – С. 54–59.

6. *Кукуджанов В. Н., Коломиец-Романенко А .В.* Модель термоэлектропластичности изменения механических свойств металлов на основе реорганизации структуры дефектов под воздействием импульсного электрического тока // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 6. – С. 6–21.

7. *Liu T.J.C.* Effects of temperature-dependent material properties on stress and temperature in cracked metal plate under electric current load // International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering. – 2010. – V. 4, No. 5. – P. 387–392.

8. *Yu J., Zhang H., Deng D., Hao S., and Iqbal A.* Numerical Calculation and Experimental Research on Crack Arrest by Detour Effect and Joule Heating of High Pulsed Current in Remanufacturing // Chinese journal of mechanical engineering. – 2014. – V. 27, No. 4. – P. 745–753. DOI: 10.3901/CJME.2014.0414.075.

9. *Кукуджанов К. В., Левитин А. Л.* Процессы деформирования упругопластического материала с дефектами при электродинамическом нагружении // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 1. – С. 106–120. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.1.07

10. *Кукуджанов К. В.* Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 4. – С. 138–158. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.09

11. *Кукуджанов К. В., Левитин А. Л.* Процессы трансформации и взаимодействия микротрещин в металле под воздействием высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2016. – № 2. – С. 89–110. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.07

12. *Kukudzhanov K. V., Levitin A. L.* Modeling the Healing of Microcracks in Metal Stimulated by a Pulsed High-Energy Electromagnetic Field. Part I // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. – 2015. – V. 6, Issue 3. – P. 233–250. DOI: 10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v6.i3.60

УДК 539.3

# ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ С ЧАСТИЧНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

**Н. В. Минаева[1], С. Ю. Гриднев[2], Ю. И. Скалько[3], Е. Е. Александрова[1]**

[1]*Воронежский государственный университет*
[2]*Воронежский государственный технический университет*
[3]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** Рассмотрено квазистатическое деформирование консольного стержня, на конце которого есть сосредоточенная масса, превышающая по величине массу стержня. Стержень нагружен следящей и горизонтальной силами. Получено условие, при выполнении которого возможно рассмотрение изгиба на основе решение задачи статики.
**Ключевые слова:** квазистатический изгиб, стержень, непотенциальная сила, область притяжения.

## Введение

При рассмотрении квазистатических процессов [1–3] пренебрегают скоростью изменения параметра внешнего воздействия и, как следствие, изменением во времени характеристики, описывающей поведение рассматриваемого объекта. Тем самым предполагается, что скорость изменения характеристики, описывающей поведение объекта, непрерывно зависит от скорости изменения характеристики внешнего воздействия на него. Следовательно, возникает проблема изучения этой зависимости, т.е. при каких значениях параметра внешнего воздействия процесс будет оставаться квазистатическим. Границу области изменения внешнего воздействия, в пределах которой изучаемая непрерывность зависимости выполняется, будем называть границей области существования квазистатического процесса.

Известны работы по сформулированной проблеме, проведенные на основе различных критериев устойчивости, например [4, 5]. Но в них, как правило, на определенном этапе исследований задавалась траектория нагружения и параметры нагрузок переставали быть независимыми.

В [6] получено, что в случае, когда внешние силы являются потенциальными, условия непрерывной зависимости решения от исходных данных будут достаточными для того, что бы существовал квазистатический процесс.

Но при этом следует сделать некоторые ограничения на выбор пространства состояний [7]. Будем использовать только те пары пространств, в которых производная Фреше отображения является изоморфизмом. Подобные пространства с соответствующими нормами обычно используются при решении задач механики деформируемого твердого тела, например, $C^2([a,b],\mathbf{R}^m)$, $C^4([a,b],\mathbf{R}^m)$, пространства Гельдера, гильбертово пространство и др.

При исследовании квазистатического поведения деформируемой системы в том случае, когда среди внешних сил есть непотенциальные, необходимо исходить из определенных предположений относительно распределения масс и способа диссипации энергии в исследуемой системе.

Выполнение условий непрерывной зависимости в этом случае является необходимым условием для возможности квазистатического осуществления процесса, соответствующего некоторому решению исследуемой задачи, для любой траектории, не выходящей за границу области непрерывности. Для нахождения нижней границы области существования квазистатического процесса требуется провести исследование асимптотической устойчивости тривиального решения рассматриваемой системы уравнений.

Следуя [4, 5], рассмотрим простейший вариант, заключающийся в предположении, что на конце консольного стержня имеется сосредоточенная масса, превосходящая по величине массу стержня.

## Постановка задачи

Рассмотрим квазистатическое деформирование стержня с сосредоточенной массой, нагруженного силами $p_1$ и $p_2$, как показано на рис. 1

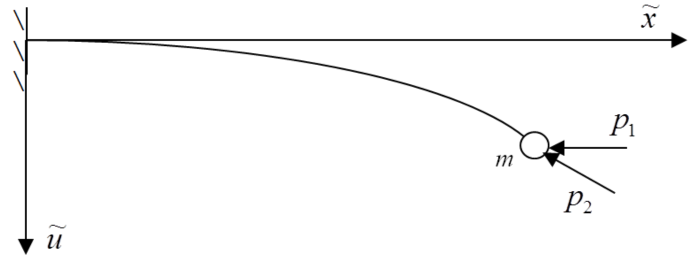



*Рис. 1*

В линейной постановке уравнение, описывающее поведение стержня, будет иметь вид:

$$EI(\tilde{u}'' - \tilde{f}'') - (p_1 + p_2)(\tilde{u}(\ell,t) - \tilde{u}(\tilde{x},t)) + (\ell - \tilde{x})(p_2\tilde{u}'(\ell,t) + m\ddot{\tilde{u}}(\ell,t) + b\dot{\tilde{u}}(\ell,t)) + \\ + m\rho^2\ddot{\tilde{u}}'(\ell,t) + b\dot{\tilde{u}}'(\ell,t) = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}'(0,t) = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{f}(\tilde{x})$ — функция, характеризующая ось стержня в ненагруженном состоянии (начальное несовершенство), причем $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = 0.$ Штрихом обозначено дифференцирование по $\tilde{x}$, а точкой — по $t$.

Перейдем в (1), (2) к безразмерным переменным с помощью следующих соотношений $\tilde{x} = x\ell,\ \tilde{u} = u\ell,\ \tilde{f} = f\ell,\ p_i = \dfrac{\alpha_i EI}{\ell^2},\ m = \dfrac{\gamma_1 EI}{\ell^3},\ b = \dfrac{\beta EI}{\ell^3},\ m\rho^2 = \dfrac{\gamma_2 EI}{\ell^2}.$

Тогда задача (1), (2) запишется так (при $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$)

$$u'' + \alpha^2 u = f'' + \alpha^2 u(1,t) - (1-x)(\alpha_2 u'(1,t) + \gamma_1\ddot{u}(1,t) + \beta\dot{u}'(1,t)) - \gamma_2\ddot{u}'(1,t) - \beta\dot{u}'(1,t) \\ u(0,t) = u'(0,t) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha^2 = \alpha_1 + \alpha_2$.

При $p_i = \text{const}$ и $f(x) = f_0(x)$ задача (3) допускает некоторое решение, не зависящее от $t$, т. е. $u = u_0(x, p_1, p_2)$, и являющееся решением задачи статики

$$u'' + \alpha^2 u = f_0'' + \alpha^2 u(1) - (1-x)\alpha_2 u'(1) \\ u(0) = u'(0) = 0. \tag{4}$$

## Исследование квазистатического изгиба стержня

Выясним, при каких условиях возможно квазистатическое деформирование стержня, соответствующее $u = u_0(x, p_1, p_2)$. Для этого, как следует из [6–8], необходимо составить следующую вспомогательную задачу относительно функции $\zeta(x)$:

$$u_0'' + \zeta'' + \alpha^2(u_0 + \zeta) = f_0'' + \alpha^2(u_0(1) + \zeta(1)) - (1-x)\alpha_2(u_0'(1) + \zeta'(1)) \\ u_0(0) + \zeta(0) = u_0'(0) + \zeta'(0) = 0. \tag{5}$$

Поскольку $u_0$ — решение задачи (4), то из (5) получаем задачу для $\zeta(x)$

$$\zeta'' + \alpha^2\zeta = \alpha^2\zeta(1) - (1-x)\alpha_2\zeta'(1) \\ \zeta(0) = \zeta'(0) = 0. \tag{6}$$

Общее решение уравнения из (6) ищем в виде

$$\zeta = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \zeta(1) - \frac{\alpha_2}{\alpha^2}(1-x)\alpha_2\zeta'(1). \tag{7}$$

Подставим (7) в условия из (6), получили систему для нахождения неизвестных констант

$$\begin{gathered} A\sin\alpha + B\cos\alpha = 0 \\ A\left(\cos\alpha - \frac{\alpha_2 - \alpha^2}{\alpha_2}\right) - B\sin\alpha = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Условие существования нетривиального решения задачи (6) принимает вид

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_2}\right)\cos\alpha - 1 = 0. \tag{9}$$

Из (9) имеем соотношение, описывающее статически особую кривую

$$k = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\cos\alpha. \tag{10}$$

На рис. 2 представлен график, соответствующий (10) при $\alpha_1 = \pi$

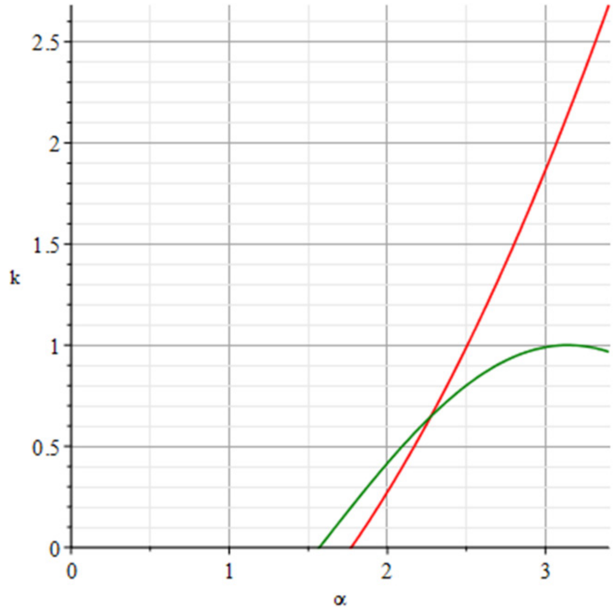



*Рис. 2. Линии, ограничивающие область непрерывной зависимости*

Поскольку есть непотенциальная сила $p_2$, то достаточным условием существования квазистатического процесса является наличие областей притяжения для каждого состояния равновесия, соответствующего $u = u_0(x, p_1, p_2)$.

Будем искать решение задачи (3) в виде

$$u(x,t) = u_0 + w(x,t). \tag{11}$$

В результате подстановки (11) в (3) с учетом того, что $u_0$ является решением задачи (4), получили следующую задачу относительно функции $w$

$$\begin{gathered} w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 T - (1-x)(\alpha_2\varphi + \gamma_1\ddot{T} + \beta\dot{T}) - \gamma_2\ddot{\varphi} - \beta\dot{\varphi} \\ w(0,t) = w'(0,t) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь

$$T = w(1,t), \;\; \varphi = w'(1,t). \tag{13}$$

Проинтегрировав уравнение (12) по $x$, нашли функцию $w$

$$w = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + T - \frac{1}{\alpha^2}(1-x)(\alpha_2\varphi + \gamma_1\ddot{T} + \beta\dot{T}) - \frac{1}{\alpha^2}(\gamma_2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi}). \quad (14)$$

В результате подстановки в условия из (12) имеем

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{\alpha^3}(1-x)(\alpha_2\varphi + \gamma_1\ddot{T} + \beta\dot{T}) \\ \hat{A} &= \frac{1}{\alpha^2}(\gamma_1\ddot{T} + \beta\dot{T} + \alpha_2\varphi + \gamma_2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi}) - T. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13)-(15) получаем следующую задачу относительно неизвестной функции T

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{T} + a_{12}\dot{T} + a_{13}T + b_{11}\ddot{\varphi} + b_{12}\dot{\varphi} + b_{13}\varphi = 0 \\ a_{21}\ddot{T} + a_{22}\dot{T} + a_{23}T + b_{21}\ddot{\varphi} + b_{22}\dot{\varphi} + b_{23}\varphi = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} &a_{11} = \gamma_1(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha), \qquad a_{12} = \beta(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha) \\ &a_{13} = -\alpha^3\cos\alpha, \quad b_{11} = \gamma_2(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha), \qquad b_{12} = \alpha\beta(\cos\alpha - 1) \\ &b_{13} = \alpha_2(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha), \qquad a_{21} = \gamma_1(1 - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha) \\ &a_{22} = \beta(1 - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha), \quad a_{23} = \alpha^3\sin\alpha, \quad b_{21} = -\gamma_2\alpha\sin\alpha \\ &b_{22} = \alpha\beta\sin\alpha, \quad b_{23} = \alpha_2(1 - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha) - \alpha^2. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее (16) имеет вид

$$a_0\mu^4 + a_1\mu^3 + a_2\mu^2 + a_3\mu^1 + a_4 = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} &a_0 = \alpha\gamma_2\gamma_1(2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha), \qquad a_1 = \alpha\beta(\gamma_2 + \gamma_1)(2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) \\ &a_2 = \alpha^2\gamma_1(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) + \alpha^4\gamma_2\sin\alpha + \alpha\beta^2(2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) \\ &a_3 = \alpha^2\beta((1+\alpha^2)\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) \\ &a_4 = \frac{\alpha^5}{1+k}(k + \cos\alpha). \end{aligned}$$

Условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (17) в форме Льенара — Шипара в данном случае следующие

$$\begin{aligned} &a_i > 0 \quad (i = 0,\ldots,4) \\ &(a_2a_3 - a_1a_4)a_1 > a_0{a_3}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку $\alpha > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\beta > 0$, то требование положительности коэффициентов $a_i > 0$ примет вид

$$\begin{aligned} &(1+\alpha^2)\sin\alpha - \alpha\cos\alpha > 0 \\ &2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha > 0 \\ &\alpha\gamma_1(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) + \alpha^3\gamma_2\sin\alpha + \beta^2(2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) > 0 \\ &k + \cos\alpha > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Первое из неравенств (19) нарушается при $\alpha \approx 3,4$, второе выполняется при $\alpha < 2\pi$. Поскольку $\sin\alpha - \alpha\cos\alpha > 0$ при $\alpha < 4,5$, то третье неравенство в (19) при достаточно малом значении $\gamma_2$ также будут выполняться при всех $\alpha < 3,4$.

Особая кривая, соответствующая первым пяти условиям из (18), состоит из графиков функций

$$\begin{aligned} &k = -\cos\alpha \\ &\alpha = 3,4. \end{aligned} \quad (20)$$

Кривая, соответствующая последнему из (18), при $\alpha \le 3,4$ и достаточно малых $\beta$ и $\gamma_2$ имеет вид

$$k = \frac{\alpha^2 g_2 \cos\alpha - \alpha^2 g_1 \sin\alpha - g_1{}^2}{\alpha^2 g_1 \sin\alpha + g_1{}^2 - \alpha^2 g_2}, \tag{21}$$

где $g_1 = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha, \quad g_2 = 2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha.$

Графики, соответствующие (20), (21) при $\alpha_1 = \pi$, изображены на рис. 3.

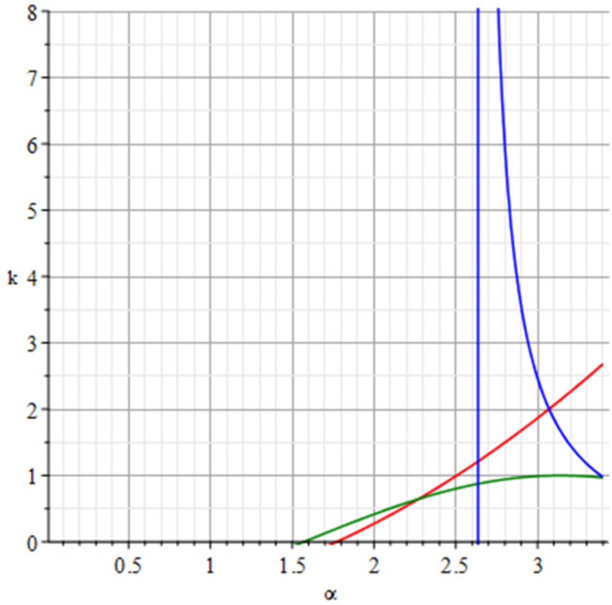



*Рис. 3. Линии, ограничивающие область существования квазистатического процесса*

Асимптотой графика функции (21) будет прямая $\dfrac{\alpha}{\pi} \approx 0,82$. Область существования квазистатического процесса $u = u_0(x, p_1, p_2)$ ограничена линиями (20), (21).

## Заключение

В пространстве параметров внешних воздействий получена кривая, ограничивающая область существования квазистатического процесса, соответствующего $u = u_0(x, p_1, p_2)$. За ее пределами изучение изгиба рассматриваемого стержня не следует проводить на основе решения задачи статики.

## Литература


1. *Серенсен, С. В.* Квазистатическое и усталостное разрушение материалов и элементов конструкций. Избранные труды / С. В. Серенсен. – Т. 3. – Киев : Наук. думка, 1985. – 232 с.

2. *Терегулов, И. Г.* Квазистатический изгиб и устойчивость оболочек при ползучести (теория наследственности) / И. Г. Терегулов, Р. З. Муртазин // Исследование по теории пластин и оболочек. – Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1964. – С. 145–158.

3. *Петренко, Т. П.* Решение квазистатической задачи изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / Т. П. Петренко // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. – 33 (5). – P. 38–43.

4. *Болотин, В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 339 с.

5. *Пановко, Я. Г.* Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

6. *Минаева, Н. В.* Анализ и исследование проблемы существования квазистатического процесса / Н. В. Минаева, А. И. Шашкин // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 52–57 .

7. *Зачепа, В. Р.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В. Р. Зачепа, Ю. И. Сапронов. – Воронеж : Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. – 185 с.

8. *Минаева Н. В.* Адекватность математических моделей деформируемых тел / Минаева Н. В. – М. : Научная книга, 2006. – 236 с.

УДК 539.3

# ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОТЯЖЕННОМ ПОДЗЕМНОМ ТРУБОПРОВОДЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ГРУНТОМ ПО МОДЕЛИ «ИДЕАЛЬНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА»

**И. Мирзаев[1], Ж. Ф. Шомуродов[2]**

[1]*Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз*
[2]*Ташкентский государственный транспортный университет*

**Аннотация.** Методом конечных разностей решена кусочно-линейная задача о действии распространяющейся в грунте волны на протяженный подземный трубопровод, взаимодействующий с грунтом по модели «идеального упругопластического тела». Приведены результаты вычисления скоростей, деформаций и бокового касательного напряжений для трех форм волны: ступенчатой, импульса и гармонической. Проведен анализ полученных результатов и показан эффект обратного выталкивания трубопровода при действии импульса перемещения, распространяющегося в грунте, в виде синус в квадрате. Также рассмотрен выход на стационарный режим при синусоидальном воздействии.
**Ключевые слова:** волна, скорость, деформация, касательное напряжение, трубопровод, грунт, взаимодействие, идеальное упругопластическое тело, конечно-разностная схема.

## Введение

Исследование поведения подземных трубопроводов как систему жизнеобеспечения при землетрясениях является важной задачей. Обзор работ в этом направлении приведено в [1–3]. Экспериментальные исследования [1, 2, 4] позволили обосновать упрощенные модели вязкоупругого и упругопластического взаимодействия грунта и трубопровода. Здесь, при определенных условиях, основную роль играет свойство грунта, это подтверждает проведенные эксперименты по определению модуля сдвига мелкозернистого грунта при различных скоростях нагружения [5].

В линейных задачах сейсмодинамики подземных сооружений в системе уравнений движения входят члены без производных от перемещений и углов поворотов [1, 6]. Построение конечно-разностных схем для таких уравнений без паразитных осцилляций приведено в [7–9]. Пространственные задачи для сложных систем подземных трубопроводов рассмотрены в [10–13].

В нелинейных задачах сейсмодинамики подземных сооружений используют различные модели взаимодействия трубопровода с грунтом. В [14] рассмотрена задача воздействия заданной волны, распространяющейся в грунте, на бесконечный прямолинейный трубопровод при сухом трении. Построено решение для стационарной задачи и описано поведение её решения. Нестационарные задачи для стержня с внешним сухим трением решены методом характеристик в работах [4, 15, 16]. В [17] построена конечно-разностная аппроксимация уравнения движения стержня с внешним сухим трением и построен алгоритм решения, позже этот алгоритм использован в [18–20]. Стационарная задача сейсмодинамики протяженного прямолинейного трубопровода с нелинейными моделями взаимодействия с использованием функции пластичности рассмотрена в [21].

В настоящей работе задача сейсмодинамики протяженного прямолинейного подземного трубопровода с моделью взаимодействия «идеального упругопластического тела» решается конечно-разностным методом с использованием логического алгоритма определения переходов в предельное состояние и обратно.

## 1. Постановка задачи

Пусть по грунту распространяется со скоростью $c_g$ плоская продольная волна $v_g\ (t - x / c_g)$, нормаль, к фронту которой, параллельна к оси трубопровода длины $l$. Начало координатной оси $Ox$ расположим на левом торце трубопровода. Предположим, что движение грунта задано и не искажается из-за присутствия трубопровода, который моделируется упругим стержнем. При этом взаимодействие трубопровода с окружающего его грунтом учитывается по модели «идеального упругопластического тела», константы которой определены экспериментальным путем. Уравнения динамики протяженного подземного трубопровода представим в форме

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\pi D}{F\rho}\tau, \\ &\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ &\tau = \left\{ \begin{array}{l} \tau_s + k_x\left(u_g - u - U_s\right), \ \ при\ \ |\tau| < \tau_p; \\ sign(v_g - v)\cdot \tau_p, \ \ при\ достижении\ предельного\ значения; \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями $u|_{t=0} = 0$ и $v|_{t=0} = 0,$ а также граничными условиями, свободными от напряжения. Здесь $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость распространения волны в трубопроводе; $E, \rho$ — модуль упругости и плотность материала трубопровода; $\varepsilon,\ v,\ u$ — деформация, скорость и перемещение частиц по оси трубопровода; $v_g,\ u_g$ — скорость и перемещение частиц грунта по оси трубопровода; $D,\ F$ — диаметр и площадь поперечного сечения трубопровода; $k_x$ — коэффициент упругого взаимодействия поверхности трубопровода с грунтом; $\tau_p$ — абсолютное значение предельного касательного напряжения; $\tau_s,\ U_s$ — значение предельного бокового касательного напряжения и разность перемещений соответствующих точек грунта и трубопровода в момент $s$-го перехода из предельного состояния в состояние упругого взаимодействия $(\tau_0 = 0;\ U_0 = 0).$ Необходимо обратить внимание на два обстоятельства: скорости распространения волны в грунте и трубопроводе различаются в несколько раз, и взаимодействие трубопровода с грунтом описывается кусочно-линейной моделью.

## 2. Метод решения

Разобьем трубопровод длиной $l$ на отрезки размером $\Delta x$ на $m$ частей $l = m\cdot\Delta x.$ По переменной $t$ определим шаг по времени $\Delta t = \Delta x / c,$ являющийся предельным условием устойчивости Куранта для явной конечно-разностной схемы. Введем обозначение: $k = \dfrac{\pi D}{F\rho}.$

Дискретные значения деформации возьмем на концах отрезков $\Delta x,$ а скорости частиц в середине отрезков $\Delta x.$ По времени дискретные значения деформации возьмем в середине шага, а скорости частиц на каждом шаге по времени.

Представим уравнения (1) их конечно-разностной аппроксимацией первого порядка точности по $\Delta x$ и $\Delta t$

$$\begin{aligned} &\frac{v_{i+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^{j}}{\Delta t} = c^2 \frac{\varepsilon_{i+1}^{j+1/2} - \varepsilon_{i}^{j+1/2}}{\Delta x} + k\frac{\tau_{i+1/2}^{j+1} + \tau_{i+1/2}^{j}}{2}; \\ &\tau_{i+1/2}^{j+1} = \left\{ \begin{array}{l} \tau_s + k_x\left(u_{g i+1/2}^{j+1} - u_{i+1/2}^{j} - \Delta t\ v_{i+1/2}^{j+1} - U_s\right), \ при\ \left|\tau_{i+1/2}^{j+1}\right| < \tau_p; \\ sign(v_{g i+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^{j+1})\cdot \tau_p, \ \ при\ достижении\ предельного\ значения; \end{array} \right\} \\ &\frac{\varepsilon_{i+1}^{j+1/2} - \varepsilon_{i}^{j-1/2}}{\Delta t} = \frac{v_{i+1/2}^{j} - v_{i-1/2}^{j}}{\Delta x}; \end{aligned} \tag{2}$$

$$u_{i+1/2}^{j+1} = u_{i+1/2}^{j} + \Delta t\ (v_{i+1/2}^{j+1} + v_{i+1/2}^{j}) / 2;$$
$$u_{gi+1/2}^{j+1} = u_{gi+1/2}^{j} + \Delta t\,(v_{gi+1/2}^{j+1} + v_{gi+1/2}^{j}) / 2,$$
где нижний индекс соответствует координате, а верхний — времени. Достаточным условием устойчивости разностной схемы (2) является следующее условие: $k \cdot k_x \cdot (\Delta t)^2 << 1$.

Из уравнений (2) определяем последовательно: $\varepsilon_{i+1}^{j+1/2}$, $v_{i+1/2}^{j+1}$, $u_{i+1/2}^{j+1}$, $u_{gi+1/2}^{j+1}$. На каждом шаге по времени проверяем значение $\tau$ во всех точках. В тех точках, где значение $|\tau| \geq \tau_p$, заново вычисляем скорости частиц с осредненным значением $\tau$ с предыдущего шага по времени и $sign(v_{gi+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^{j+1}) \cdot \tau_p$. Сохраним информацию о переходе в этой точке в предельное состояние с направлением силы трения. На последующих шагах по времени в этих точках последний член первого уравнения системы (2) необходимо поменять на предельное значение силы трения. Далее, производится проверка на переход в состояние упругой разгрузки по изменению знака относительной скорости $v_g - v$. В момент начала разгрузки запоминаются значения $\tau_s$, $U_s$, первый шаг разгрузки сопровождается вычислением скорости с осредненным значением $\tau$ на этом шаге по времени и $sign(v_{gi+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^{j+1}) \cdot \tau_p$ с учетом значений $\tau_s$, $U_s$. На последующих шагах по времени вычисления производятся в соответствии с состоянием процесса взаимодействия в каждой точке.

### 3. Обсуждение результатов

Вычисления производились при следующих исходных данных: $l = 1000$ м; $D = 0.61$ м; $F = 0.019$ м²; $c_g = 500$ м/с; $c = 5000$ м/с; $\rho = 7800$ кг/м³; $k_x = 10^7$ Н/м³; $\tau_p = 10$ кПа; $\Delta t = 0.0001$ с.

Проведем расчет действия ступенчатой волны амплитудой $v_{gm} = 0.19$ м/с. На рис. 1 представлены безразмерные скорости частиц грунта и трубопровода в различные моменты времени, под осью абсциссы указаны номера точек дискретизации по длине трубопровода. Впереди фронта волны в грунте по трубопроводу распространяется возмущение, в котором по мере дальнейшего распространения амплитуда уменьшается. Если левый торец трубопровода перемещался бы одинаково с грунтом, тогда фронт волны в трубопроводе был бы разрывным и распространялся бы без затухания [6]. На рис. 1 $(b, c, d)$ видно, что процесс распространения волны в трубопроводе почти выходит на стационарный режим [15], здесь заметны влияние отраженных от торцов трубопровода волн небольшой амплитуды. На рис. 2 представлены нормированные графики деформации грунта $\varepsilon gn = \varepsilon_g / \varepsilon_{gm}$ (здесь $\varepsilon_{gm} = 0.00038$) и трубопровода $\varepsilon n = \varepsilon / \varepsilon_{gm}$, а также бокового касательного напряжения $\tau n = \tau / \tau_p$ в различные моменты времени. Здесь видны разрывность деформации на фронте волны в грунте и участки с предельным состоянием по графику бокового касательного напряжения. Следует заметить, что боковое касательное напряжение достигает предельного состояния перед разрывным фронтом волны в грунте.

На рис. 3 и рис. 4 приведены результаты расчетов, когда заданная волна представляется в виде импульса $v_g = 2v_{gm} \sin[\pi(t - x/c_g)/t_0] \cos[\pi(t - x/c_g)/t_0][H(t - x/c_g) - H(t - t_0 - x/c_g)]$, где $H(t)$ — функция Хевисайда, $t_0 = 0.165$ с. На рис. 3 можно увидеть процесс формирования волны в трубопроводе. Так как разрывного фронта волны в грунте в этом случае отсутствует, предельное состояние бокового касательного напряжения наступает за фронтом волны в грунте (рис. 4). На небольшом участке у левого торца трубопровода также боковое касательное напряжение может достичь предельного состояния из-за отражения волн от этого свободного от напряжения торца. Передняя часть волны деформации грунта является сжимающей, и в этой области происходит переход к предельному состоянию, переданная энергия трубопроводу распространяется по нему с большой скоростью и тратится на преодоление сопротивления пружин. Задняя часть этой волны является растягивающей, а переданная трубопроводу энергия вызывает растягивающую волну, которая распространяясь с большой скоростью, достигает зоны с предельным состоянием уменьшая значение сжимающих деформаций. В итоге получается эффект обратного выталкивания трубопровода за счет наличия областей скольжения с трением. Это показано на рис. 4($d$), где $u$, $ug$ — перемещения точек трубопровода и грунта, соответственно, указаны в метрах. Такой картины в случае модели упругого взаимодействия не наблюдается.

На рис. 5 и рис. 6 приведены результаты расчетов, когда заданная волна представляется в виде $v_g = v_{gm}\cos[\pi(t - x/c_g)/t_0]H(t - x/c_g)$, $t_0 = 0.165$ с. На этих рисунках виден процесс выхода на стационарный режим после первого полупериода $t_0$ волны, распространяющейся в грунте. Вблизи разрывного фронта волны, распространяющейся в грунте, на левом торце скорости частиц трубопровода начинает расти, затем по мере удаления от этого торца начинает уменьшаться и далее на некотором расстоянии от левого торца переходит в стационарный режим.

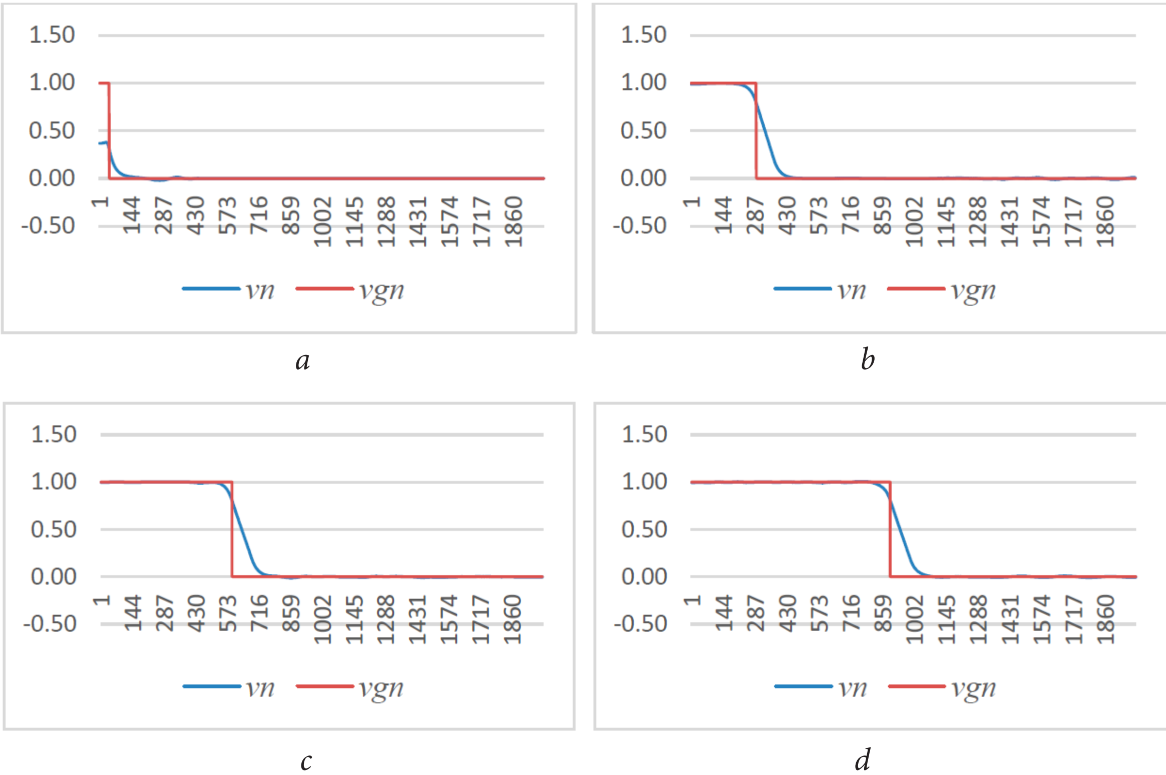
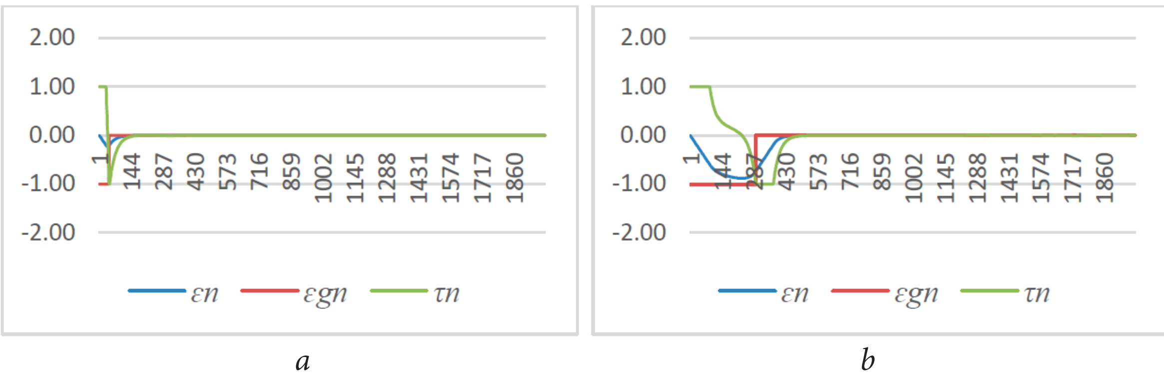
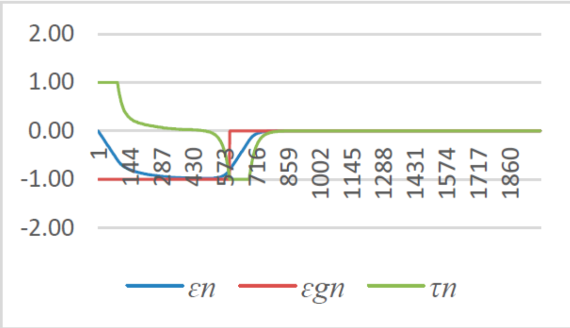
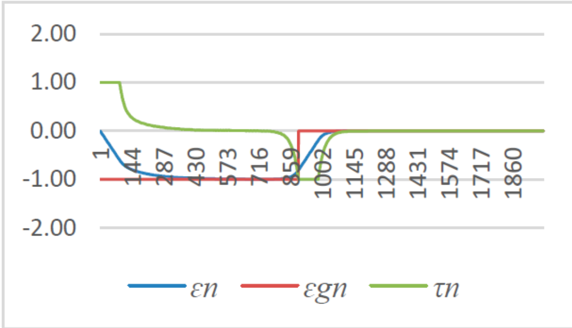



*Рис. 1. Безразмерные скорости частиц грунта $vgn = v_g / v_{gm}$ и трубопровода $vn = v / v_{gm}$ в моменты времени: $t = 0.05$ с (a), $t = 0.3$ с (b), $t = 0.6$ с (c), $t = 0.9$ с (d)*

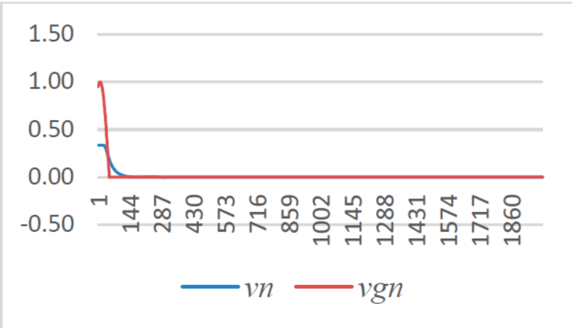


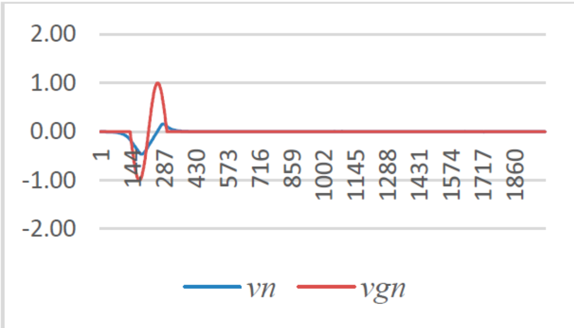


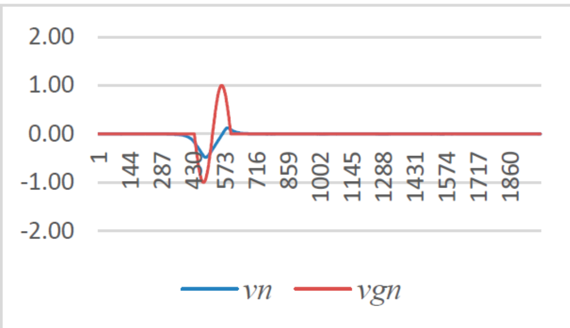

*c* *d*

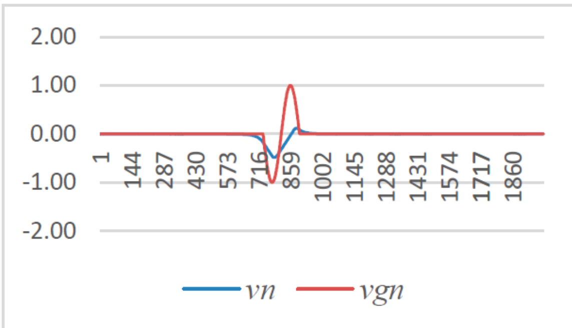
*Рис. 2. Нормированные деформации грунта* $\varepsilon gn = \varepsilon_g / \varepsilon_{gm}$ *и трубопровода* $\varepsilon n = \varepsilon / \varepsilon_{gm}$, *а также бокового касательного напряжения* $\tau n = \tau / \tau_p$ *в моменты времени:* $t = 0.05$ *с (a),* $t = 0.3$ *с (b),* $t = 0.6$ *с (c),* $t = 0.9$ *с (d)*



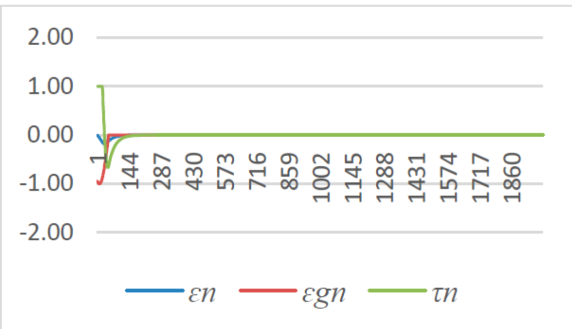

*a* *b*

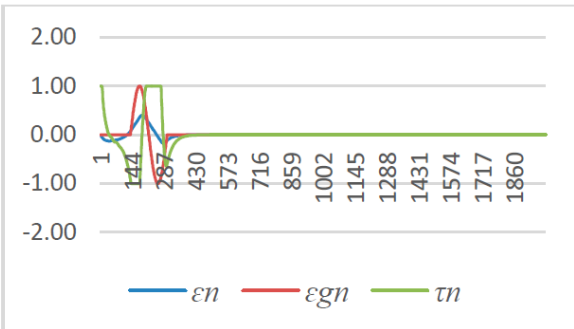


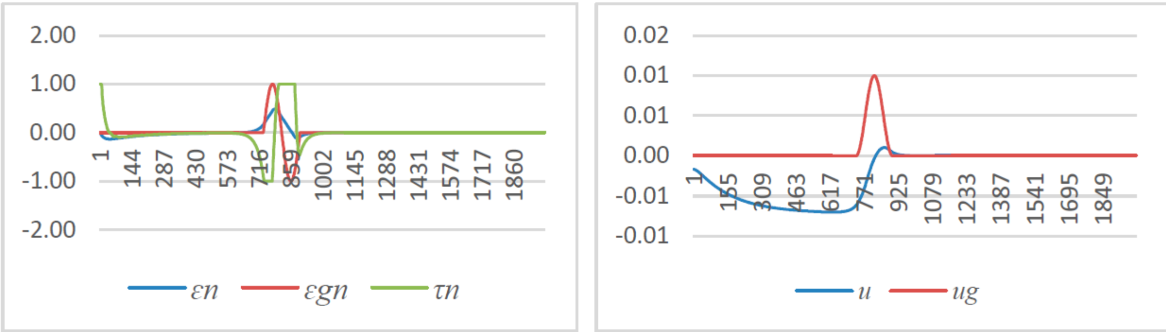

*c* *d*

*Рис. 3. Безразмерные скорости частиц грунта* $vgn = v_g / v_{gm}$ *и трубопровода* $vn = v / v_{gm}$ *в моменты времени:* $t = 0.05$ *с (a),* $t = 0.3$ *с (b),* $t = 0.6$ *с (c),* $t = 0.9$ *с (d)*



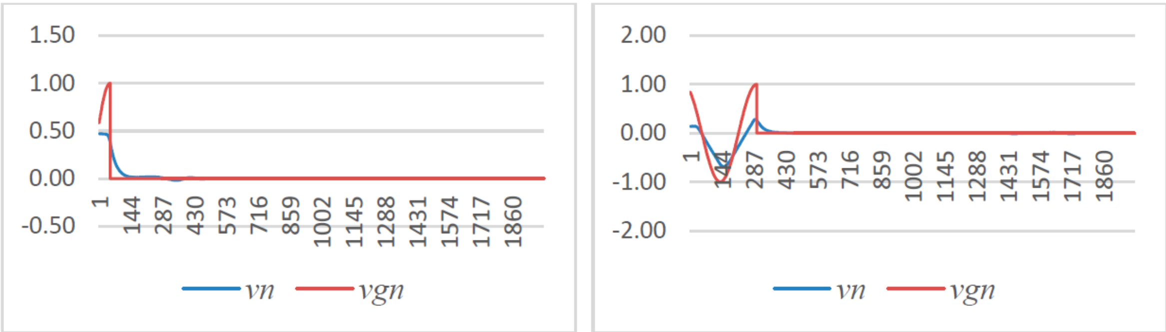




*a* *b*

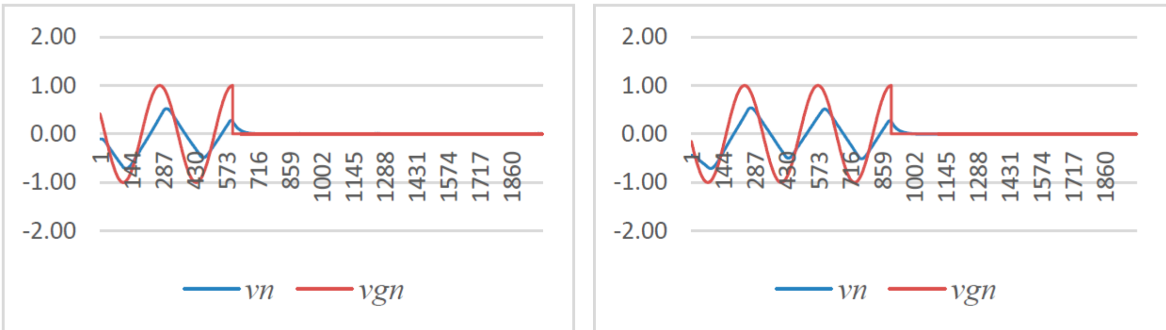



*c* *d*

*Рис. 4. Нормированные деформации грунта* $\varepsilon gn = \varepsilon_g / \varepsilon_{gm}$, *трубопровода* $\varepsilon n = \varepsilon / \varepsilon_{gm}$, *бокового касательного напряжения* $\tau n = \tau / \tau_p$ *в моменты времени:* $t = 0.05$ *c (a),* $t = 0.3$ *c (b),* $t = 0.9$ *c (c), а также перемещения (в метрах) при* $t = 0.9$ *c (d)*

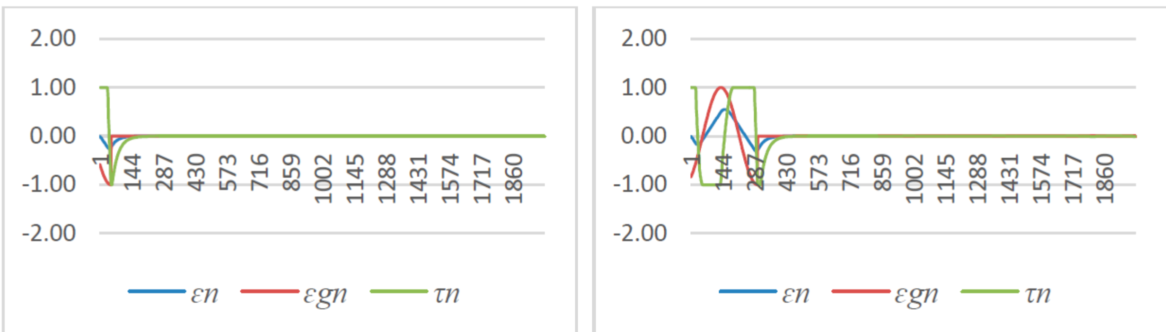



*a* *b*

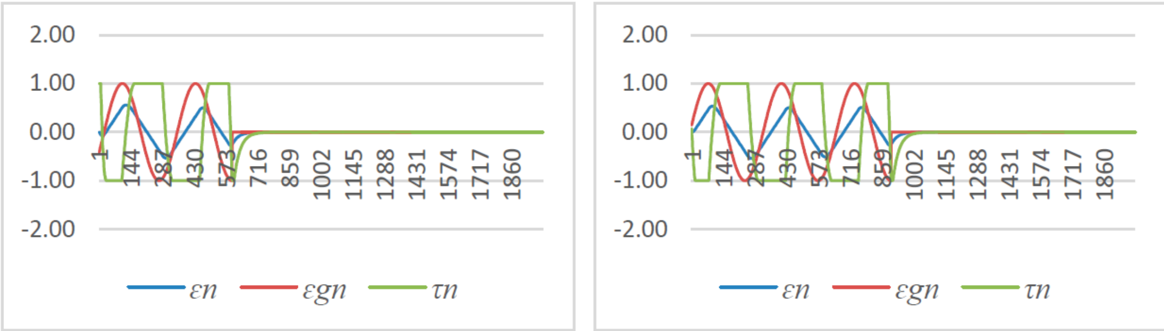



*c* *d*

*Рис. 5. Безразмерные скорости частиц грунта* $vgn = v_g / v_{gm}$ *и трубопровода* $vn = v / v_{gm}$ *в моменты времени:* $t = 0.05$ *c (a),* $t = 0.3$ *c (b),* $t = 0.6$ *c (c),* $t = 0.9$ *c (d)*




*a* *b*




*c* *d*

*Рис. 6. Нормированные деформации грунта* $\varepsilon gn = \varepsilon_g / \varepsilon_{gm}$ *и трубопровода* $\varepsilon n = \varepsilon / \varepsilon_{gm}$, *а также бокового касательного напряжения* $\tau n = \tau / \tau_p$ *в моменты времени:* $t = 0.05$ *с (a),* $t = 0.3$ *с (b),* $t = 0.6$ *с (c),* $t = 0.9$ *с (d)*

## 4. Заключение

Методом конечных разностей по явной схеме решена нестационарная задача о воздействии плоской продольной волны, распространяющейся в грунте, на подземный трубопровод конечной длины при взаимодействии его с грунтом по модели «идеального упругопластического тела». Получены численные значения скоростей, деформаций и боковых касательных напряжений для трех форм волны: ступенчатой, импульса и гармонической. Показан процесс формирования волны в трубопроводе. Получен эффект обратного выталкивания трубопровода при действии импульса перемещения, распространяющегося в грунте, в виде синус в квадрате. Для синусоидальной волны в грунте показан выход на стационарный режим распространения волны в трубопроводе.

## Литература

1. *Рашидов Т.* Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. -180 с.

2. *Рашидов Т., Хожметов Г. Х.* Сейсмостойкость подземных трубопроводов. – Ташкент: Фан, 1985. – 152 с.

3. *Исраилов М. Ш.* Сейсмодинамика протяженных подземных сооружений: границы применимости инженерных подходов и неправомерность аналогии с наземными сооружениями // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2017. – № 1. – С. 55–60.

4. *Султанов К. С.* Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. –Ташкент: Фан, 2016. – 392 с.

5. *Массарш К. Р.* Деформационные свойства мелкозернистых грунтов на основе показателей сейсмических испытаний // Реконструкция городов и геотехническое строительство. – 2005. – № 9. – С. 203–220. – www.georec.spb.ru

6. *Рашидов Т. Р., Кузнецов С. В., Мардонов Б. М., Мирзаев И.* Прикладные задачи сейсмодинамики сооружений. Книга 1. Действие сейсмических волн на подземный трубопровод и фундаменты сооружений, взаимодействующих с грунтовой средой. – Ташкент : «Navro'z», 2019. – 268 с.

7. *Mirzaev, I. M., Nikiforovskii, V. S.* Plane wave propagation and fracture in elastic and imperfectly elastic jointed structures. Soviet Mining Science. – 1973. – 9. – P. 161–165. Doi:10.1007/BF02506181.

8. *Никифировский В. С., Шемякин Е. И.* Динамичекое разрушение твердых тел. – Новосибирск : Наука, 1979. – 272 с.

9. *Virginia Corrado, Berardino D'Acunto, Nicola Fontana, Maurizio Giugni*. Inertial Effects on Finite Length Pipe Seismic Response // Mathematical Problems in Engineering. – Hindawi Publishing Corporation. Vol. 2012. 2012. – Article ID 824578, doi:10.1155/2012/824578.

10. *Mirzaev I., Bekmirzaev D. A., Kosimov E. A.* Formation of Bending Waves in Underground Extended Pipelines under the Action of Seismic Wave. International Journalof Advanced Research in Science, Engineering and Technology. – 2019. – 6(8). – P. 10553–10557.

11. *Bekmirzaev D. A., Mirzaev I.* Dynamic Processes In Underground Pipelines Of Complex Orthogonal Configuration At Different Incidence Angles Of Seismic Effect. International journal of scientific & technology research, april. – 2020. – V. 9, issue 04. – P. 2449–2453.

12. *Bekmirzaev D., Mirzaev I., Mansurova N., Kosimov E. and Juraev D. P.* Numerical methods in the study of seismic dynamics of underground pipelines. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – 869. – 052035 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/869/5/052035

13. *Рашидов Т., Мардонов Б., Мирзаев И.* О колебаниях подземных трубопроводов под действием сейсмических волн // Проблемы механики. – 2018.– № 4. – С. 19–23.

14. *Ильюшин А. А., Рашидов Т. Р.* О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. АН РУз. Сер. Техн. Наук. – 1971. – № 1. – С. 3–11.

15. *Никитин Л. В.* Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. – М. : Моск. лицей, 1998 – 261 с.

16. *Mogilevsky R. I., Ormonbekov T. O., Nikitin L. V.* Dynamics of rods with interfacial dry friction // J. Mech. Behav. Mater. – 1993. – V. 5, N 1. – P. 85–93.

17. *Мирзаев И. М.* Динамика предварительного напряженного стержня при действии ударной нагрузки // Динамические задачи неупругой среды: Динамика сплошной среды. Институт гидродинамики СО РАН СССР. – 1985. – Вып. 71. – С. 65–74.

18. *Исаков А. Л., Шмелев В. В.* Анализ волновых процессов при забивании металлических труб в грунт с использованием генераторов ударных импульсов // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. – 1998. – № 2. – С. 48–58.

19. *Смирнов А. Л.* Расчет процесса ударного погружения свай в грунт // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. – 1989. – № 4. – С. 72–79.

20. *Александрова Н. И.* Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I: Внешняя среда не деформируема // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. – 2012. – № 5. – С. 104–119.

21. *Колмакова Е.* Действие стационарной сейсмической волны на длинный трубопровод при учете пластических свойств взаимодействия с грунтом. – В кн.: Трение, износ и смазочные материалы, Т. 5, Труды межд. Научной конф., Ташкент : Фан, 1985. – С. 139–140.

УДК 539.3

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ С ДВУМЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОСТЕЛИ

**К. Л. Морозов**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация.** В работе рассматривается подход к исследованию закритического поведения для модели неоднородных покрытий с двумя коэффициентами постели. Показаны формирование неквадратичного и квадратичного функционалов потенциальной энергии, переход к безразмерным параметрам, построение нелинейной системы уравнений на основе неквадратичного функционала потенциальной энергии и метода Ритца. Представлен анализ закритического поведения для различных случаев жесткости основания, неоднородности покрытий.

**Ключевые слова:** закритическое поведение, неквадратичный функционал потенциальной энергии, метод Ритца.

В предыдущих работах [1, 2] были рассмотрены две модели для однородного покрытия. Рассматривалось упругое бесконечное покрытия, предварительно сжатое продольной нагрузкой, имеющее предварительное ослабление связей с основанием на участке $[-b, b]$. Влияние сил упругого основания описывается коэффициентами постели. В работе[1] представлена модель, учитывающая один коэффициент постели, в работе [2] — два коэффициента постели.

Вопрос об исследовании отслоения тонких покрытий находит продолжение в текущей работе, где на основе идей [1, 2] была построена модель для неоднородного покрытия, учитывающая два коэффициента постели, и подробно изучено закритическое поведение неоднородных покрытий [3].

Следуя идеям работы [4, 5] сформулируем неквадратичный функционал для упругого бесконечного покрытия (аналогично балочному покрытию).

$$\Lambda_0 = 1/2\int_{-\infty}^{\infty}[D_0 w_0''^2(1+w_0'^2) + D_1(w_0'^2 + 1/4 w_0'^4) + D_2 w_0^2]\, dx_1, \tag{1}$$

соответствующий ему квадратичный функционал имеет вид

$$\Lambda_{0*} = 1/2\int_{-\infty}^{\infty}[D_0 w_0''^2 + D_1 w_0'^2 + D_2 w_0^2]\, dx_1, \tag{2}$$

где $D_0, D_1, D_2$ — в общем случае функции от $x_1$ и определяются согласно следующим соотношениям

$$D_0 = D, \quad D_1 = -P + B_2, \quad D_2 = B_1. \tag{3}$$

Коэффициенты (3) представлены в общем виде для системы покрытие-подложка, имеющей толщину $h+H$ ($h$ — толщина покрытия, $H$ — толщина подложки, $\lambda$, $\mu$ — коэффициенты Ламе) [4]:

$$P = \int_H^{h+H} \sigma\, dx_3, \quad D = \int_H^{h+H} (\lambda + 2\mu)(x_3 - H)^2\, dx_3,$$
$$B_1 = (\lambda + 2\mu)/H, \quad B_2 = \mu H/3, \tag{4}$$

В данном случае принимается упрощение, что $B_1$, $B_2$ в зоне отслоения равны нулю. В действительности, это не всегда так, потому как на практике отрыв сопровождается потерей несущих свойств покрытия. $B_1, B_2$ по своей сути являются двумя коэффициентами постели, $P$— определяет предварительную нагрузку, а $D$ — является аналогом изгибной жесткости.

Будем считать, что величина $h+H$ мала, соответственно покрытие является тонким. Физико-геометрические свойства тонкого покрытия и нагрузка зависят от $x_1$. Пусть $x_1 = b\xi$, $w = w_0 / b$, $[-b,b] \to [-1,1]$. Теперь выразим $D_0$, $D_1$, $D_2$ через безразмерные функции $d_0$, $d_1(\xi)$, $d_2(\xi)$, для чего введем функции $f(\xi)$, $q_1(\xi)$, $q_2(\xi)$, которые будут определять характер основных свойств покрытия, подложки и нагрузку $D(x) = EJ\, f(x)$, $B_1(x) = B_1 q_1(x)$, $B_2(x) = B_2 q_2(x)$. Также введём параметры $k$, $\eta_1$, $\eta_2$, которые определены как $k^2 = \sigma b^2 / D_0$, $\eta_1^2 = B_1 b^4 / D_0$, $\eta_2^2 = B_2 b^2 / D_0$.

Перепишем функционалы (1) и (2) с учётом введенных обозначений

$$\Lambda = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} [d_0(\xi) w''^2 (1 + w'^2) + d_1(\xi)(w'^2 + 1/4 w'^4) + d_2(\xi) w^2]\, d\xi \tag{5}$$

$$\Lambda_* = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} [d_0(\xi) w''^2 + d_1(\xi) w'^2 + d_2(\xi) w^2] d\xi, \tag{6}$$

где

$$d_0(\xi) = f(\xi), \quad d_1(\xi) = \eta_2^2 q_2(\xi) - k^2, \quad d_2(\xi) = \eta_1^2 q_1(\xi). \tag{7}$$

Здесь $q_1(\xi)$, $q_2(\xi)$ определяют характер поведения коэффициентов постели — на участке $\xi \in [-1,1]$ значение коэффициентов равно нулю

$$q_1 = q_2 = \begin{cases} 1, & \xi > 1 \cup \xi < -1 \\ 0, & -1 \le \xi \le 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Функция, определяющая неоднородность покрытия, задается в виде некоторой функции $f(\xi)$, имеющей максимум в точке $\xi_0$.

$$f(\xi) = A_1 e^{-|\xi - \xi_0|} + A_2, \quad A_1, A_2 > 0. \tag{9}$$

Для изучения закритического поведения необходимо решить задачу о потере устойчивости для определения параметра критической нагрузки. Воспользуемся методом Ритца и квадратичным функционалом (6). Представим решение в виде линейной комбинации координатных функций $\phi_k$ (10)

$$W = \sum_{k=1}^{N} C_k \phi_k, \tag{10}$$

которые выберем следующим образом

$$\phi_k = \xi^{k-1} e^{-\xi^2}. \tag{11}$$

Из условия минимума функционала получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_k$, нетривиальное решение которой достигается при равенстве нулю определителя системы, откуда имеем критическое значение $k$.

Изучение закритического поведения покрытия будем проводить, исходя из нелинейной модели покрытия, для чего воспользуемся неквадратичным функционалом (5). Также введем параметр закритичности, определяемый как $k_1 = \delta k$, где $k$ определяется из функционала (6) методом Ритца. Таким образом для каждого набора параметров $A_1$, $A_2$, $\xi_0$, $\eta_1$, $\eta_2$ необходимо будет решать задачу о потере устойчивости. Определим минимально необходимое количество координатных функций, требуемых для обеспечения погрешности критического значения не более чем 1 %. Результаты представим ниже в табл. 1 для следующего набора параметров $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $\xi_0 = 0.5$, значению $k^{(1)}$ соответствуют параметры $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0.1$, значению $k^{(2)}$ — параметры $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 10$.

Таблица 1

*Значения $k$ с ростом $N$*

| $N$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k^{(1)}$ | 2.688764 | 2.514615 | 2.513698 | 2.513296 | 2.513262 | 2.512712 | 2.512711 |
| $k^{(2)}$ | 3.922432 | 3.600122 | 3.596572 | 3.579177 | 3.574286 | 3.564338 | 3.562377 |

Из табл. 1 следует, что для случая $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0.1$ при $N = 9$ относительная погрешность составляет 0.076 %, а для случая $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 10$ — 1.058 %. Таким образом, выбрав количество координатных функций $N = 9$, будет обеспечена требуемая точность как для первого, так и для второго случая.

Построим вычислительную схему для определения $C_k$ на основе функционала (5). Находя минимальное значение функционала для различного числа координатных функций, получим нелинейную систему $N$ уравнений относительно $C_k$, которую решим численно методом градиентного наискорейшего спуска. В качестве начального приближения для системы $N$ уравнений будем выбирать решение системы $N-1$ уравнений, дополненное нулевым значением.

Рассмотрим результаты работы построенной вычислительной схемы на примере следующих параметров: параметры $A_1 = A_2 = 1$, $\xi_0 = 0.1$, $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0.1$, $\delta = 1.05$. Ниже в табл. 2–3 приведем результаты расчетов. Отметим, что относительная погрешность при $N > 6$ для значений $C_k$ и функционала $\Lambda$ не превышает 3.5 %.

Таблица 2

*Значения $C_k$ для функционала $\Lambda$*

| $N$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 1.1761176 | –0.0057504 | –0.0550432 | –0.1321235 | –0.1336038 | –0.1346141 |
| $C_2$ | 0.0516064 | 0.0364812 | 0.2869976 | 0.2932596 | 0.2929252 | 0.2930509 |
| $C_3$ | 4.1490064 | 3.7308437 | 3.7138869 | 3.6379269 | 3.6345307 | 3.6336835 |
| $C_4$ | –0.5134083 | –0.8074417 | –0.6313976 | –0.6250574 | –0.6250807 | –0.6249536 |
| $C_5$ | | –1.6546998 | –1.6570571 | –1.6920551 | –1.6951861 | –1.6960789 |
| $C_6$ | | | 0.2006584 | 0.1934433 | 0.1931833 | 0.1932590 |
| $C_7$ | | | | 0.0095744 | 0.0046936 | 0.0027427 |
| $C_8$ | | | | | –0.0020601 | –0.0022368 |
| $C_9$ | | | | | | –0.0082494 |

Таблица 3

*Значения функционала $\Lambda$*

| $N$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda$ | 324.274 | 104.115 | 89.471 | 85.343 | 85.665 | 88.612 |

Определим параметры $A_1 = A_2 = 1$.

Рассмотрим, как зависит структура закритического поведения от параметра $\xi_0$ для следующего вида покрытия, когда параметры $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0.1$, параметр $\xi_0$ будет варьироваться: линия 1 — 0.1, линия 2 — 0.5, линия 3 — 1.5, линия 4 — 3, линия 5 — 6, линия 6 — 15. Коэффициент закритичности $\delta = 1.05$.

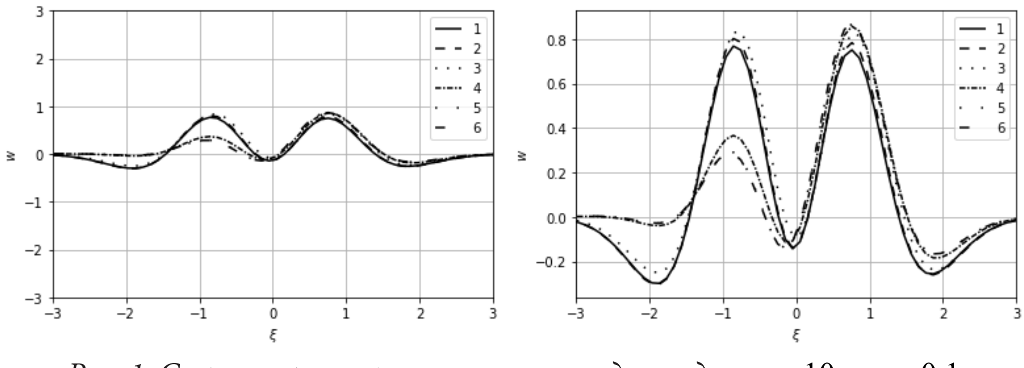



*Рис. 1. Структура закритического поведения для $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0.1$*

Как видно из рис. 1, когда точка $\xi_0$ входит в зону предварительного отслоения, либо близка к ней, структура прогиба имеет форму линий 1–3 — два выпуклых холма, причем левый холм незначительно выше правого холма. С увеличением $\xi_0$, величина прогиба увеличивается. Но, с отдалением от зоны предварительного отслоения структура приобретает форму линий 4–6 — также два выпуклых холма, однако, правый холм значительно выше левого холма. С увеличением параметра $\xi_0$ структура стабилизируется возле некоторого решения.

Из приведенных выше расчетов можно обобщить следующее, когда параметр $\xi_0$ попадает в зону отслоения или близок к ней, структура прогиба близка к симметричной и характеризуется двумя холмами. С отдалением $\xi_0$ от зоны отслоения один из холмов уменьшается, что в результате дает асимметричную форму прогиба со смещением другого «холма» вправо по оси $\xi$.

Также определим параметры $A_1 = A_2 = 1$.

Рассмотрим, как зависит структура закритического поведения от параметра $\xi_0$ для вида покрытия, когда параметры $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 10$, параметр $\xi_0$ будет варьироваться аналогично предыдущему случаю: линия 1 — 0.1, линия 2 — 0.5, линия 3 – 1.5, линия 4 — 3, линия 5 — 6, линия 6 — 15. Коэффициент закритичности $\delta = 1.05$.

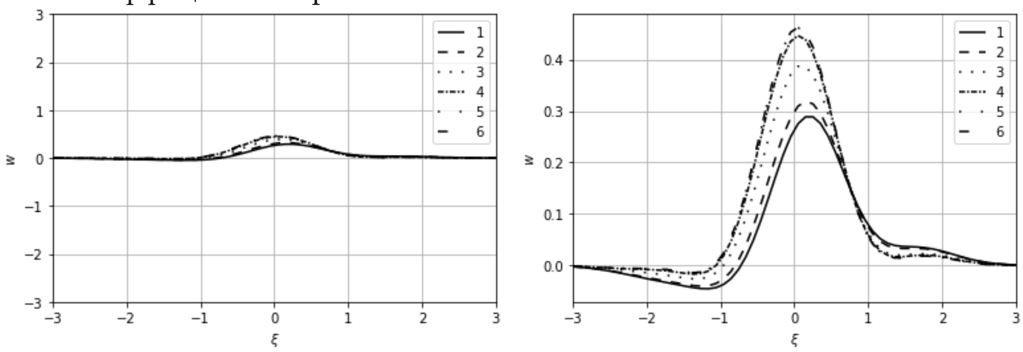



*Рис. 2. Структура закритического поведения для $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 10$*

Как видно из рис. 2, при отдалении точки $\xi_0$ от зоны отслоения структура прогиба начинает приобретать более симметричную форму. Величина прогиба увеличивается с ростом $\xi_0$, однако, при $\xi_0 > 6$ структура прогиба изменяется незначительно.

Покажем влияние параметра закритичности на величину прогиба. Зафиксируем параметры $A_1 = A_2 = 1$, $\xi_0 = 0.5$, параметры, определяющие тип основания, выберем как $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 10$. Параметр $\delta$ будет варьироваться: линия 1 — 1.05, линия 2 — 1.25, линия 3 — 1.45, линия 4 — 1.65, линия 5 — 1.85, линия 6 — 2.05.

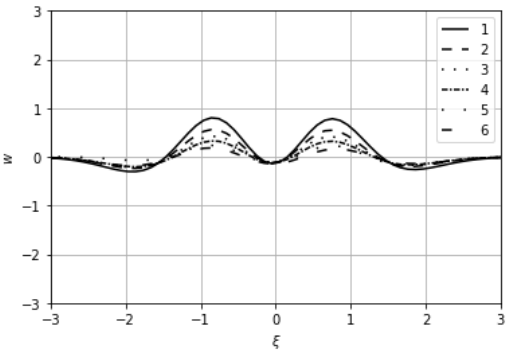



*Рис. 3. Зависимость величины прогиба от величины параметра закритичности $\delta$*

Как можно отметить из рис. 3, с увеличением параметра $\delta$ величина прогиба уменьшается.

Рассмотрим влияние параметров неоднородности $A_1$, $A_2$ на характер отслоения. Выберем параметры $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0.1$, параметр закритичности $\delta = 1.05$. На рис. 4 слева: параметры неоднородности зафикисируем $\xi_0 = 0.5$, $A_2$, а параметр $A_1$ будем варьировать следующим образом: линия 1 — 0.2, линия 2 — 0.4, линия 3 — 0.6, линия 4 — 0.8, линия 5 — 1.0. На рис. 4 справа: параметры неоднородности зафиксируем $\xi_0 = 0.5$, $A_1$, а параметр $A_2$ будем варьировать следующим образом: линия 1 — 0.2, линия 2 — 0.4, линия 3 — 0.6, линия 4 — 0.8, линия 5 — 1.0.

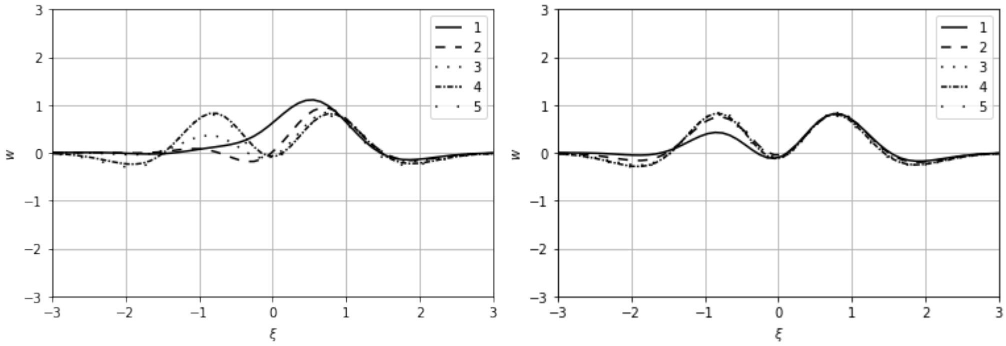


*Рис. 4. Зависимость структуры прогиба от параметров $A_1$, $A_2$ для $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 0.1$*

Как видно из результатов расчетов (рис. 4), увеличение параметров $A_1$, $A_2$ увеличивает вклад экспоненты из функции неоднородности (9), что приводит к росту второго левого холма в структуре прогиба.

Рассмотрим влияние параметров неоднородности $A_1$, $A_2$ на характер отслоения для второго случая. Выберем параметры $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 10$, параметр закритичности $\delta = 1.05$. На рис. 5 слева: параметры неоднородности зафикисируем $\xi_0 = 0.5$, $A_2$, а параметр $A_1$ будем варьировать следующим образом: линия 1 — 0.2, линия 2 — 0.4, линия 3 — 0.6, линия 4 — 0.8, линия 5 — 1.0. На рис. 5 справа: параметры неоднородности зафиксируем $\xi_0 = 0.5$, $A_1$, а параметр $A_2$ будем варьировать следующим образом: линия 1 — 0.2, линия 2 — 0.4, линия 3 — 0.6, линия 4 — 0.8, линия 5 — 1.0.

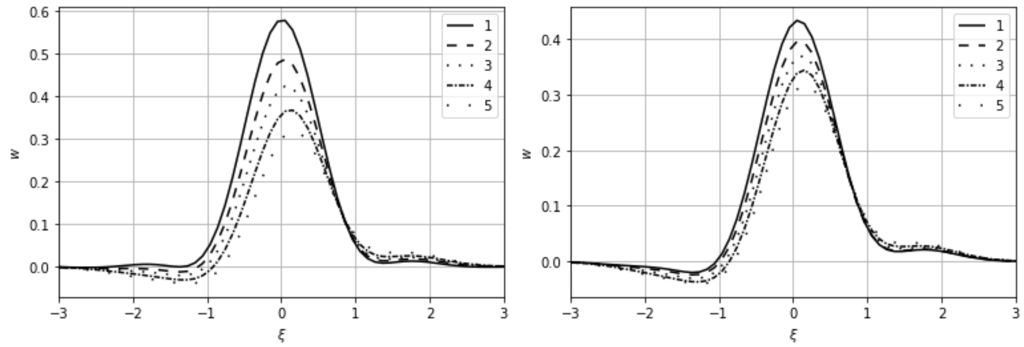


*Рис. 5. Зависимость структуры прогиба от параметров $A_1$, $A_2$ для $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 10$*

Как видно из результатов расчетов (рис. 5), увеличение параметров $A_1$, $A_2$ приводит к увеличению несимметричности отслоения и подъему правого края покрытия.

**Заключение**

В текущей работе была представлена модель для исследования неоднородных покрытий, аналогичная балочной модели, учитывающая два коэффициента постели. В рамках представленного подхода, базирующегося на метод Ритца, было подробно исследовано закритическое поведение для модели неоднородных покрытий на примере неоднородности, имеющей максимум в некоторой точке покрытия. Были рассмотрены различные случаи расположения этой точки. Показано и проанализировано влияние неоднородности на структуру отслоения покрытия.

## Литература

1. *Ватульян А. О., Морозов К. Л.* Об отслоении покрытия, лежащего на упругом основании // ПМТФ. – 2020. – № 1. – С. 133–143.

2. *Ватульян А. О., Морозов К. Л.* Об исследовании отслоения от упругого основания на основе модели с двумя коэффициентами постели // Известия РАН МТТ. – 2020. – № 2. – С. 64–76.

3. *Пастернак П. Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М. : Госиздательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 56 с.

4. *Ватульян А. О., Плотников Д. К., Коссович Е. Ю.* О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур // Известия РАН МТТ. – 2017. – № 4. – С. 94–100.

5. *Астапов Н. С., Корнев В. М.* Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании // ПМТФ – 1994. – № 2. – С. 130–142.

УДК 539.3

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХМНОГОЦИКЛОВЫХ РЕЖИМОВ НАГРУЖЕНИЯ КОРСЕТНЫХ ОБРАЗЦОВ

**А. Д. Никитин, И. С. Никитин, Б. А. Стратула**

*Институт автоматизации проектирования Российской академии наук*

**Аннотация.** В работе рассматривается проблема сверхмногоциклового разрушения титановых образцов при различных режимах нагружения. Предполагается, что усталостное разрушение может происходить по двум механизмам: за счёт развития микротрещин нормального отрыва и микротрещин сдвига. Выбраны критерии усталости, учитывающие данные механизмы разрушения. Для описания различных диапазонов циклического нагружения использована схема бимодальной усталостной кривой. Приведены расчеты напряженно-деформированного состояния для корсетных образцов в испытаниях на сверхмногоцикловую усталость при различных режимах нагружения, таких как растяжение-сжатие, кручение или их комбинация. Проведены расчеты долговечности образов для указанных режимов по критериям, учитывающих различные механизмы развития микротрещин. Показано, что усталостная долговечность при комбинированном нагружении значительно меньше, чем для отдельно взятых режимов кручения или растяжения-сжатия.
**Ключевые слова:** усталостное разрушение, сверхмногоцикловая усталость, пьезоэлектрическая установка, математическое моделирование, критерий усталостного разрушения, многоосное нагружение.

## Введение

Экспериментальное исследования конструкционных материалов в области больших долговечностей ($10^7$–$10^9$ циклов) показало принципиальную возможность разрушения образцов из стали, чугуна, титановых, алюминиевых и других сплавов при уровнях напряжений, существенно ниже классического предела усталости. Традиционно предел усталости определяется на следующих базах испытаний: $10^6$ циклов нагружения для материалов с физическим пределом усталости и $10^8$ циклов для материалов без физического предела. В работе [1] было показано, что для некоторых материалов (высокопрочные стали) различие в пределах усталости на базе испытаний $10^6$ и $10^9$ может достигать 30 %. Подобное усталостное поведение обусловлено принципиальной сменой механизма зарождения усталостных трещин при больших долговечностях. Этот диапазон долговечностей (> $10^8$ циклов) стали называть сверхмногоцикловой усталостью (СВМУ).

В настоящее время в ряде лабораторий разрабатываются сложные схемы нагружения, такие как кручение [2, 3] или трехточечный изгиб [4, 5] для испытаний на сверхмногоцикловую усталость. Однако в условиях эксплуатации элементы конструкции зачастую подвержены более сложным (многоосным) видам нагружения. В работах [6, 7] показано, что некоторые элементы авиационных двигателей, таких как диски компрессора и лопатки, могут разрушаться в эксплуатации в режиме СВМУ. При этом нагружение является многоосным, сочетающим кручение с изгибом, или растяжением-растяжением. В настоящее время не предложены схемы СВМУ нагружения, позволяющие воспроизводить эксплуатационные режимы, что приводит к необходимости разработки экспериментальных схем для многоосного СВМУ разрушения и их предварительного математического моделирования.

В настоящей работе проводится анализ возможных новых схем СВМУ нагружения. Приводятся результаты численного моделирования различных режимов нагружения для образцов (растяжение-сжатие, кручение) и представлена оценка усталостной долговечности образца, подверженного комбинированному режиму нагружения на основании предложенной авторами модели [8].

## 1. Математическое моделирование различных мод СВМУ нагружения

Исследования в области СВМУ требуют принципиально нового подхода к методологии проведения испытаний в связи с огромным количеством циклов нагружения. С повышением производительности вычислительной техники стало возможно точное управление параметрами нагружения даже при высоких частотах (~20 КГц). Принцип работы подобных устройств основан на возбуждении упругих стоячих волн в образцах посредствам пьезоэлектрических конвертеров. Образцы для испытаний в этом случае должны иметь определенную геометрию, позволяющую обеспечить формирование стоячих волн на заданных частотах нагружения (резонансный режим нагружения). Важным параметром в такой схеме нагружения является скорость распространения упругих колебаний. Выделяют два типа волн — продольные и поперечные. Анализ продольных колебаний используется для разработки геометрии образцов на растяжение-сжатие и растяжение-растяжение. На основе поперечных (крутильных) колебаний проектируется геометрия для образцов, нагружаемых в режиме чистого кручения. В общем случае образец состоит из корсетной части и резонансной. Корсетная часть имеет свои стандартные параметры, в то время как резонансная длина определяется на основании свойств конкретного материала. Таким образом, рабочая или корсетная часть образца остается унифицированной для всех видов материалов, а различие в образцах обусловлено лишь длиной резонансной части.

### *1.1. Растяжение-сжатие*

На основании предложенного в работе [1] принципа СВМУ испытаний была получена оценка для резонансной длины продольных колебаний образца, изготовленного из титанового сплава ВТ3-1. Основные механические свойства материала: динамический модуль Юнга 115 ГПа, плотность 4500 кг/м$^3$, коэффициент Пуассона 0,3. Длина корсетной части определяется исключительно геометрическими размерами образца и равна 26.6 мм. Для резонансной длины было получено значение 20.5 мм. Геометрия титанового образца для СВМУ испытаний на растяжение-сжатие представлена на рис. 1.

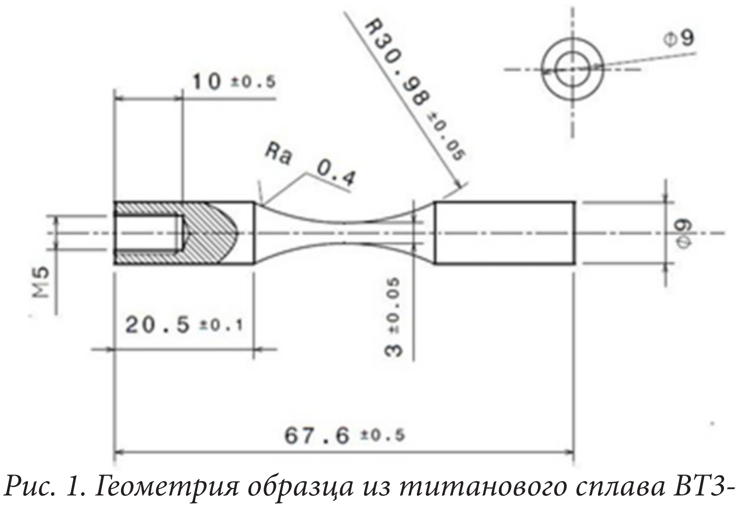



*Рис. 1. Геометрия образца из титанового сплава ВТ3-1 для испытаний на растяжение-сжатие в режиме СВМУ*

Для расчета полей напряжений, соответствующих нагружению смещениями высокой частоты, необходимо последовательное проведение модального и гармонического анализов. Распределение полей напряжений и смещений для образца, представленного на рис. 1, приведено на рис. 2.

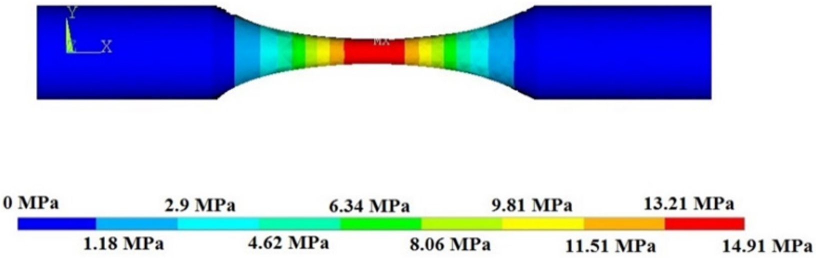
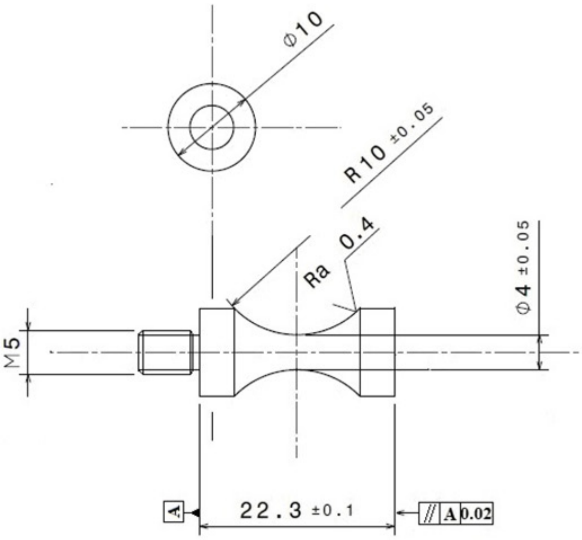


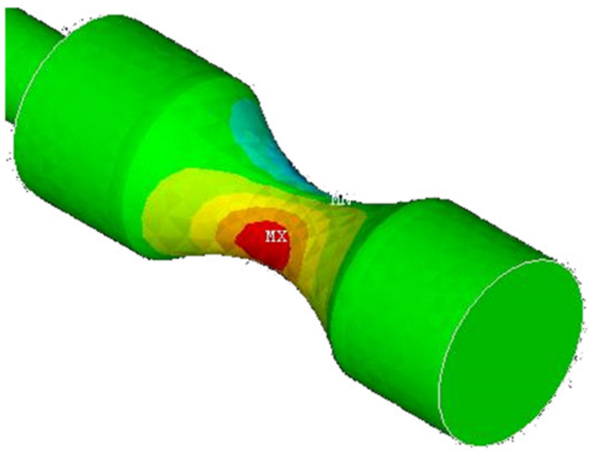

*Рис. 2. Поля напряжений и перемещений для образца из титанового сплава ВТ3-1 на растяжение-сжатие в режиме СВМУ*

Как показано на рис. 2 одному микрометру смещений соответствует растягивающее напряжение в рабочей части, равное 14.5 МПа. Поле напряжений обладает ярко выраженным градиентом и концентрируется в наиболее узкой корсетной части, где в итоге и происходит СВМУ разрушение.

### *1.2. Кручение*

Аналогичная процедура была проведена для режима нагружения крутильными колебаниями. В этом случае в качестве расчетных параметров выбираются скорости распространения поперечных волн и сдвиговые модули. В результате получаем геометрию образца, представленную на рис. 3-а.




*(а)* *(б)*

*Рис. 3. Геометрия образца из титанового сплава ВТ3-1 для испытания на кручение в области СВМУ (а) и результаты гармонического анализа (б)*

Крутильные колебания на пьезоэлектрической установке по-прежнему возбуждаются механическими смещениями, заданными углом закрутки. При выполнении гармонического анализа вместо момента к СВМУ образцу прикладываются смещения с заданной частотой, направленные по касательной к цилиндрической части образца. На рисунке 3-б представлены результаты гармонического анализа образца, нагруженного касательными смещениями в 1 мкм. В результате расчета было показано, что нагружению в 1 мкм соответствует напряжение в рабочей части равное 5 МПа.

В силу линейности задачи комбинированное напряженное состояние может быть получено путем суперпозиции решений для случая растяжение-сжатия и кручения в каждом узле расчетной стеки. Для этого необходимо дополнить расчетные программы утилитой, работающей с узловыми значениями. Для представленных выше геометрий эта процедура была проделана и проведен анализ усталостной долговечности корсетного образца в условиях комбинированного нагружения по двум модам.

## 2. Многоосный СВМУ критерий разрушения и результаты численного моделирования

В общем виде многоосный критерий усталостного разрушения может быть записан в следующем виде

$$\sigma_{eq} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta},$$

где $\sigma_{eq}$ — некоторое эквивалентное напряжение, характеризующее напряженно-деформированное состояние, $\sigma_u$, $\sigma_L$ — величины, характеризующие механические свойства материала, $\beta$ — константа, определяемая из усталостных испытаний. В рамках бимодального рассмотрения полной усталостной кривой следует выделять левую и правую ветви. К левой ветви относятся области малоцикловой (МЦУ) и многоцикловой усталости (МНЦУ), а к правой ветви — область сверхмногоцикловой усталости (СВМУ).

**МЦУ – МНЦУ.** Обобщая результаты испытаний металлических материалов в условиях, приводящих к повторно-статическому разрушения (наблюдается до $N \sim 10^3$ циклов нагружения), по методу [9] можно определить значение параметра $\sigma_L = 10^{3\beta}(\sigma_B - \sigma_u)$, где $\sigma_B$ — предел прочности материала, $\sigma_u$ — классический предел усталости, полученный из одноосных испытаний при симметричном цикле нагружения, а $\beta = \beta_{LH}$ — степенной параметр, описывающий поведение левой ветви бимодальной усталостной кривой.

Таким образом, для выбранного многоосного критерия разрушения при однородном напряженном состоянии мы получаем количество циклов до разрушения:

$$N = 10^3 \left[ (\sigma_B - \sigma_u) / \left\langle \sigma_{eq} - \sigma_u \right\rangle \right]^{1/\beta}.$$

**СВМУ.** Для перехода от МНЦУ к СВМУ характерно наличие значительно разброса экспериментальных данных, которое некоторыми авторами трактуется как некоторое «плато» или асимптота. Подобное поведение усталостной диаграммы может наблюдаться вплоть до числа циклов $N \sim 10^8$. Затем диаграмма описывается правой ветвью усталостной кривой. Из подобия левой и правой ветвей можно получить выражения для параметров, входящих в многоосный критерий [9] $\sigma_L = 10^{8\beta}(\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)$, где $\sigma_u$ — классический предел усталости, $\tilde{\sigma}_u$ — «новый» предел усталости в области СВМУ, $\beta = \beta_{VH}$ — показатель степени, определяемый из одноосных испытаний на СВМУ усталость при симметричном цикле нагружения.

Аналогично левой ветви, для правой ветви можно представить выражение, определяющее количество циклов до разрушения в случае СВМУ нагружения:

$$N = 10^8 \left[ (\sigma_u - \tilde{\sigma}_u) / \left\langle \sigma_{eq} - \tilde{\sigma}_u \right\rangle \right]^{1/\beta}.$$

### *2.1. Критерий СВТ*

Многоосный критерий усталостного разрушения Смита — Ватсона — Топпера (СВТ) [10, 11] (механизм развития микротрещин нормального отрыва) имеет следующий вид:

$$\sqrt{\left\langle \sigma_{1_{\max}} \right\rangle \Delta\sigma_1 / 2} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta},$$

где $\sigma_1$ — наибольшее главное напряжение, $\Delta\sigma_1$ — размах наибольшего главного напряжения за цикл, $\Delta\sigma_1 / 2$ — его амплитуда, $\left\langle \sigma_{1_{\max}} \right\rangle = \sigma_{1_{\max}} H(\sigma_{1_{\max}})$. Согласно выбранному критерию только растягивающее напряжений приводит к разрушению. Таким образом, имеем значение эквивалентного напряжения:

$$\sigma^n = \sqrt{\left\langle \sigma_{1_{\max}} \right\rangle \Delta\sigma_1 / 2}.$$

### *2.2 Критерий КСВ*

Многоосный критерий усталостного разрушения Карпинтери — Спаньоли — Вантадори (КСВ) [12] (механизм развития микротрещин сдвига) имеет вид:

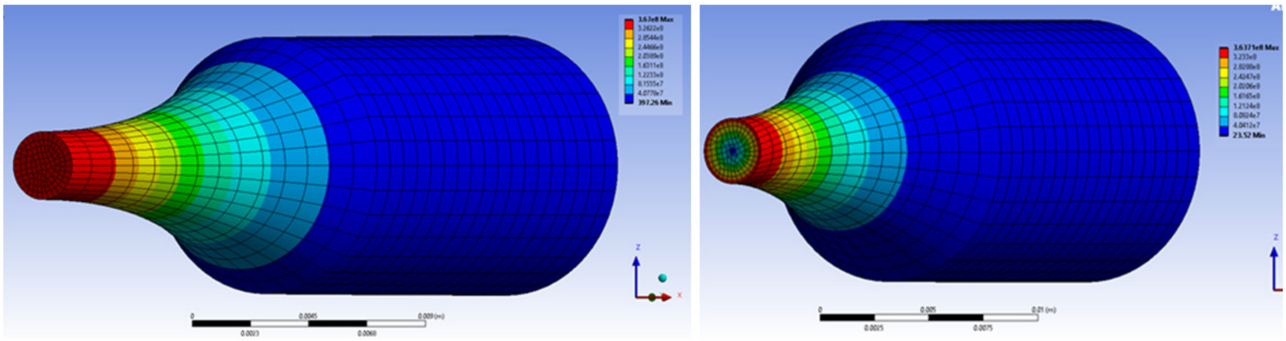
$$\sqrt{(\langle\Delta\sigma_n\rangle/2)^2 + k_c^2(\Delta\tau_n/2)^2} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta},$$

где $\Delta\tau_n/2$ — амплитуда касательных напряжений на критической плоскости, где они принимают максимальные значения, $\Delta\sigma_n/2$ — амплитуда нормальных напряжений (растягивающих) на критической плоскости, $\langle\Delta\sigma_n\rangle = \Delta\sigma_n H(\sigma_{n_{\max}})$. В данном выражении предел усталости при сдвиге обозначен как $\tau_u$ для случая симметричного режима нагружения $(R=-1)$. В упрощенном виде мы можем принять следующее выражение для данного крутильного предела усталости $k_c \approx \sigma_u/\tau_u$, $k_c \approx \sqrt{3}$. Данный критерий учитывает сдвиговой механизм формирования микротрещин. Таким образом, эквивалентное напряжение имеет вид:

$$\sigma^\tau = \sqrt{(\langle\Delta\sigma_n\rangle/2)^2 + 3(\Delta\tau_n/2)^2}.$$

## 3. Оценка усталостной долговечности при комбинированном нагружении

По приведенным выше критериям были оценены долговечности образцов для проведения СВМУ испытаний в различных режимах нагружения: растяжение-сжатие, кручение и комбинированное напряженно-деформированное состояние. Результаты расчетов НДС для простых режимов представлен на рис. 4.



(а) (б)

*Рис. 4. Пример расчета НДС сплава ВТ3-1 для испытания на растяжение – сжатие (а) и кручение (б) в области СВМУ*

При анализе режима растяжение-сжатие эквивалентные напряжения по СВТ и КСВ критериям совпали и составили 367 МПа. Данному уровню напряжений соответствует долговечность $8.9\times10^7$ циклов. При анализе режима кручения эквивалентное напряжение по СВТ критерию составило 210 МПа, по КСВ критерию 363 МПа. Ему соответствует долговечность $9.8\times10^7$ циклов. В комбинированном режиме наибольшее эквивалентное напряжение было обнаружено по критерию КСВ с соответствующим значением долговечности $1.6\times10^6$ циклов. Таким образом, усталостное разрушение в комбинированном режиме наступает раньше и в значительной степени определяется сдвиговым механизмом.

## Заключение

Предложен мультирежимный подход к моделированию усталостного разрушения корсетных образцов с применением многоосных критериев, связанных с развитием микротрещин нормального отрыва и сдвига. Для определения параметров многоосных критериев использованы результаты испытаний на одноосное нагружение и диаграмма бимодальной усталостной кривой для различных диапазонов циклического нагружения МЦУ-МНЦУ, СВМУ.

Проведены расчеты эквивалентных напряжений и соответствующих долговечностей для различных режимов нагружения по критериям СВТ и КСВ. Проведен анализ комбинированного нагружения при одновременном растяжении-сжатии и кручении. Показано, что такое нагружение приводит к существенному снижению усталостной долговечности. Значительную роль в усталостном разрушении при этом играет развитие микротрещин сдвига.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект № 19-19-00705

**Литература**

1. *Bathias C., Paris P. C.* Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. – New York : Dekker, 2005.

2. *Mayer H.* Ultrasonic torsion and tension-compression fatigue testing: measuring principles and investigations on 2024-T351 // International Journal of Fatigue. – 2006. – V. 28. – P. 1446–1455.

3. *Xue H. Q, Emin Bayraktar, Israel Marines-Garcia, Bathias C.* Torsional fatigue behaviour in gigacycle regime and damage mechanism of the perlitic steel // Journal of Achievements of Materials and Manufacturing Engineering. – 2008. – V. 31(2). – P. 391–397.

4. *Bathias C.* Piezoelectric fatigue testing machines and devices // International Journal of Fatigue. – 2006. – V. 28. – P. 1438–1445.

5. *Brugger C., Palin-Luc T., Osmond P., Blanc M.* Gigacycle fatigue behavior of a cast aluminum alloy under biaxial bending: experiments with a new piezoelectric fatigue testing device // Procedia Structural Integrity. – 2016. – V. 2. – P. 1173–1180.

6. *Shanyavskiy A. A.* Very-High-Cycle-Fatigue of in-service air-engine blades, compressor and turbine // Science China: Physics, Mechanics and Astronomy. – 2013. – V. 57(1).

7. *Burago N. G., Zhuravlev A. B., Nikitin I. S., Yakushev V. L.* Study of different modes of fatigue fracture and durability estimation for compressor disc of gas turbine engine // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2016. – V. 8, No 5. – P. 523–532.

8. *Burago N. G., Nikitin I. S., Nikitin A. D., Stratula B. A.* Algorithms for calculation damage processes // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2019. – V. 49. – P. 212–224.

9. *Burago N. G., Zhuravlev A. B., Nikitin I. S.* Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements. Mechanics of Solids. – 2011. – V. 46, N. 6. – P. 828–838.

10. *Smith R. N., Watson P., Topper T. H.* A stress-strain parameter for the fatigue of metals // J. of Materials. – 1970. – V. 5. – P. 767–778.

11. *Gates N., Fatemi A.* Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // Int. J. of fatigue. – 2016. – V. 91. – P. 337–351.

12. *Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S.* Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion // Int. J. of Fatigue. – 2011. – V. 33. – P. 969–976.

УДК 539.3

# ПРИМЕРЫ УПРАВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОСЛОЙНО ИЗГОТАВЛИВАЕМЫХ ИЗДЕЛИЙ В РАМКАХ МОДЕЛИ НАРАЩИВАЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Д. А. Паршин**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*

**Аннотация.** Предложена математическая модель квазистатики наращиваемых деформируемых твердых тел для механического анализа технологических процессов медленной многослойной силовой намотки тонкого полотка на наружную боковую поверхность заранее изготовленной достаточно жесткой круговой основы. С помощью полученных в рамках этой модели аналитических зависимостей сформулированы и решены различного типа задачи о технологическом управлении характеристиками развивающегося в процессе намотки напряженного состояния формируемого слоя материала путем задания надлежащих программ изменения в течение этого процесса толщины и силы натяжения наматываемого полотна.

**Ключевые слова:** послойное изготовление, аддитивный процесс, наращиваемое тело, квазистатика, многослойная намотка полотна, жесткая круговая основа, предварительное натяжение, начальные напряжения, контактное давление, распределение технологических напряжений, задача технологического управления, интегральное уравнение.

## Введение

В ряде технологических процессов изготовления оболочечных элементов конструкций, деталей машин и механизмов их формообразование осуществляется за счет послойного присоединения дополнительного материала к поверхности некоторой заранее изготовленной основы — формы, оправки, подложки. Обычно вследствие протекающих при этом физико-химических процессов, а также в силу определенных механических воздействий на формируемое изделие в последнем возникают и начинают развиваться поля напряжений и, следовательно, деформации.

Появление и эволюция напряжений в теле в ходе его формирования не в последнюю очередь зависит от того, в каком начальном напряженно-деформированном состоянии отдельные слои нового материала включаются в состав постепенно формируемого тела. Выяснив, каким образом реализуется эта зависимость в конкретном аддитивном технологическом процессе, можно получить возможность активно влиять на текущие и результирующие характеристики распределений технологических напряжений, приобретаемых получаемыми в данном процессе изделиями, иными словами, управлять этими характеристиками, варьируя надлежащим образом начальные напряжения в добавляемом материале. Постановке и решению задач такого управления и посвящена настоящая работа.

## 1. Описание задачи и цель исследования

Рассматривается пример технологического процесса изготовления изделия в форме цилиндрического слоя путем медленной силовой намотки тонкого полотна на круговую основу, которая имеет жесткость, существенно превышающую жесткость материала, получаемого в процессе намотки, и поэтому при моделировании рассматриваемого процесса считается абсолютно жесткой. Эквивалентные механические свойства получаемого слоя материала принимаются однородными и изотропными. Слой считается настолько протяженным в осевом направлении, что его деформацию допустимо рассматривать как плоскую. Исследования проводятся для квазистатических процессов деформирования формируемого слоя под действием начальных напряжений в присоединяемом материале, вызванных натяжением наматываемого полотна, в условиях малой деформации. Заметим, что медленная намотка при достаточно малой толщине присоединяемых к формируемому слою дополнительных элементарных слоев материала дает очень малую скорость роста со временем толщины всего формируемого в результате намотки изделия. В [1] показано, что в подобных ситуациях учет деформационного последействия (ползучести) материала практически не влияет на получаемые итоговые распределения технологических напряжений в аддитивно формируемых телах, и поэтому, когда нет необходимости учитывать пластические эффекты, можно ограничиться рассмотрением чисто упругой деформации, что и делается в настоящей работе.

Достаточно очевидно, что в получаемых путем силовой намотки изделиях должны действовать существенные окружные напряжения, вызывающие, как следствие, развивающееся с увеличением толщины намотанного слоя радиальное обжатие используемой основы. Это обжатие в каких-то ситуациях может играть весьма позитивную роль, компенсируя рабочее давление, создаваемое в процессе дальнейшей эксплуатации изделия внутри его (полой) цилиндрической основы, и повышая тем самым функциональные характеристики этого изделия. Речь здесь может идти, к примеру, о цилиндрических сосудах высокого давления или о стволах огнестрельных орудий. Однако в иных ситуациях то же самое радиальное обжатие может явиться очень негативным фактором, провоцируя, например, потерю устойчивости используемой основы, причем уже в самом процессе намотки. Прочность же всего получаемого изделия, как в процессе намотки, так и после ее завершения, будет определяться видом возникших распределений технологических напряжений по всей толщине намотанного слоя. Стоит также заметить, что характер механического взаимодействия используемой основы и формируемого на ней дополнительного слоя материала имеет принципиальное значение для корректной постановки и решения ряда износо-контактных задач, актуальных в технике и технологии [2–5].

Настоящая работа ставит своей целью исследовать закономерности влияния начального натяжения наматываемого полотна на характер развития величины радиального обжатия основы постепенно формируемым на ней слоем материала и на получаемые распределения технологических напряжений в последнем, а также построить программы изменения этого преднатяжения во время намотки, обеспечивающие требуемый закон изменения обжатия в ходе этого процесса или же требуемое итоговое распределение окружных напряжений по толщине готового слоя.

## 2. Специфика механической постановки исследуемой задачи

Для корректного решения сформулированной проблемы принципиально недостаточно оставаться в рамках классической механики деформируемого твердого тела, рассматривающей деформирование тел постоянного материального состава. В нашем случае мы имеем дело с постепенно формируемым твердым телом, которое деформируется уже в процессе своего формирования. Такие тела принято называть наращиваемыми, или растущими [6]. Как известно [7], основной отличительной особенностью процесса деформирования любого наращиваемого тела является отсутствие у всего такого тела в целом полностью свободной от напряжений конфигурации, в ее традиционном для механики сплошной среды представлении. Эта особенность делает невозможным стандартное представление деформированного состояния наращиваемого тела в терминах перемещений и требует разработки иных подходов к математическому описанию этого состояния [8–10]. Разработке таких подходов и применению их к решению различных классов соответствующих задач механики деформируемого твердого тела посвящены работы отечественной научной школы в области механики наращиваемых тел, созданной профессором А.В. Манжировым (см., например, [11–16]).

В моделируемом в настоящей работе процессе частицы дополнительного материала после присоединения к наращиваемому телу продолжают движение в составе сплошного континуума. В каждый момент времени во всей мгновенно занимаемой этим растущим континуумом области определено достаточно гладкое поле скоростей, ассоциированное с процессом деформирования данного континуума. Поэтому мы можем сформулировать математическую задачу об описании этого процесса в переменной во времени области физического пространства в терминах скоростей изменения характеристик напряженно-де-формированного состояния рассматриваемого наращиваемого тела.

Поскольку толщина присоединяемых в процессе намотки элементарных слоев материала считается достаточно малой, намотку допустимо моделировать как процесс непрерывного осесимметричного наращивания цилиндрического тела по всей его внешней боковой поверхности. Допущение о малости возникающих деформаций позволяет считать заданным закон изменения со временем внешнего радиуса $x$ этого тела. Очевидно, что в отсутствие реологических проявлений в механическом поведении материала под «временем» можно понимать любой параметр, монотонно изменяющийся с течением физического времени, например, саму величину внешнего радиуса $x$.

Как указано выше, дополнительный материал, присоединяющийся к наращиваемому телу, имеет определенное начальное напряженное состояние. Это состояние в нашем случае вызывается предварительным натяжением наматываемого полотна, то есть присоединяемые элементарные слои материала подвергаются в момент присоединения некоторому растяжению в окружном направлении. Будем считать, что величина этого растяжения не успевает изменяться в пределах одного витка полотна и поэтому в нашей модели непрерывного осесимметричного роста имеет место равномерное растяжение каждого вновь присоединенного элементарного цилиндрического слоя материала радиуса $x$ некоторым окружным напряжением $\sigma_{\varphi}^{0}(x)$. Исходя из реальных условий создания этого напряжения, можно принять

$$\sigma_{\varphi}^{0}(x)=\frac{P(x)}{h(x)}, \tag{1}$$

где $h(x)$ и $P(x)$ — усредненные по одному витку толщина (размер в радиальном направлении) наматываемого полотна и усилие его натяжения на единицу его ширины (размера в осевом направлении) в тот момент процесса намотки, когда внешний радиус всего уже сформированного на основе слоя равен $x$ (будем кратко называть этот момент «моментом $x$»). В осевом направлении полотно не претерпевает растяжения, поэтому осевое напряжение у внешней поверхности рассматриваемого наращиваемого тела равно нулю. Если наматываемое полотно не прижимается дополнительно в радиальном направлении к формируемому в процессе намотки цилиндрическому телу, то радиальное напряжение на внешней поверхности этого тела также будет равно нулю. Однако последнее ни в коем случае не означает, что радиальные напряжения не будут развиваться в тех же самых точках, но уже оказавшихся внутри тела в процессе его дальнейшего роста. Будем пренебрегать скручивающим воздействием наматываемого полотна на формируемое тело, тогда касательные напряжения на его внешней поверхности также будут отсутствовать.

Следует отметить, что в технологических процессах намотки, как правило, имеет место вращение формируемого слоя вместе с основой. В таком случае формируемый слой будет подвергаться воздействию инерционных массовых сил, и это воздействие, как показано в [17] на примере центробежных сил инерции, может существенно влиять на процесс деформирования формируемого слоя либо вообще превалировать над механическими воздействиями на него со стороны накладываемого дополнительного материала, обусловленные создаваемыми в этом материале начальными напряжениями. Поскольку мы фокусируемся в настоящей работе именно на последних воздействиях, будем считать вращение слоя вместе с основой достаточно медленным (с достаточно низкой угловой скоростью) и плавным (с достаточно малым угловым ускорением) для того, чтобы можно было пренебречь силами инерции вращательного движения — как центробежными, так и тангенциальными.

## 3. Математическая модель исследуемого механического процесса

### *3.1. Характеристики напряженно-деформированного состояния формируемого слоя*

Будем обозначать через $\rho$ полярный радиус, то есть расстояние от рассматриваемой точки формируемого цилиндрического тела до его оси, через $\varphi$ — полярный угол, отсчитываемый в поперечном сечении этого тела, через $z$ — осевую (продольную) координату, а через $\mathbf{e}_\rho(\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ и $\mathbf{e}_z$ — орты, задающие в данной точке соответственно радиальное, окружное и осевое направления.

В конструируемой модели ввиду плоской деформации, осевой симметрии и отсутствия факторов, вызывающих закручивание формируемого цилиндрического слоя вокруг его оси, поле скоростей его деформационного движения в момент $x$ будет иметь вид:

$$\mathbf{V}(\rho,\varphi,x)=V(\rho,x)\,\mathbf{e}_\rho(\varphi).$$

Этому полю скоростей отвечает тензор скоростей деформации (здесь и далее $(\,)'=\partial(\,)/\partial\rho$)

$$\mathbf{D}(\rho,\varphi,x)=V'(\rho,x)\,\mathbf{e}_\rho(\varphi)\,\mathbf{e}_\rho(\varphi)+\frac{V(\rho,x)}{\rho}\,\mathbf{e}_\varphi(\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi(\varphi). \tag{2}$$

В терминах тензора (2) и тензора скоростей изменения напряжений $\dot{\mathbf{T}}$ должно быть сформулировано материальное уравнение для рассматриваемого аддитивно формируемого однородного изотропного упругого тела (здесь и далее $\dot{(\,)}=\partial(\,)/\partial x$):

$$\dot{\mathbf{T}}/G=2\mathbf{D}+(\kappa-1)\,\mathbf{I}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}, \tag{3}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, $\kappa=(1-2\nu)^{-1}$, $\nu$ — коэффициент Пуассона, $G$ — модуль сдвига.

Из (3) и (2) находим, что

$$\dot{\mathbf{T}}(\rho,\varphi,x)=\dot\sigma_\rho(\rho,x)\,\mathbf{e}_\rho(\varphi)\,\mathbf{e}_\rho(\varphi)+\dot\sigma_\varphi(\rho,x)\,\mathbf{e}_\varphi(\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi(\varphi)+\dot\sigma_z(\rho,x)\,\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z, \tag{4}$$

$$\dot\sigma_\rho/G=(\kappa+1)V'+(\kappa-1)V/\rho,\quad \dot\sigma_\varphi/G=(\kappa+1)V/\rho+(\kappa-1)V',\quad \dot\sigma_z=\nu(\dot\sigma_\rho+\dot\sigma_\varphi). \tag{5}$$

Из (4) следует, что

$$\mathbf{T}(\rho,\varphi,x)=\sigma_\rho(\rho,x)\,\mathbf{e}_\rho(\varphi)\,\mathbf{e}_\rho(\varphi)+\sigma_\varphi(\rho,x)\,\mathbf{e}_\varphi(\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi(\varphi)+\sigma_z(\rho,x)\,\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z,$$

$$\sigma_{\rho,\varphi,z}(\rho,x)=\sigma_{\rho,\varphi,z}(\rho,\rho)+\int_\rho^x\dot\sigma_{\rho,\varphi,z}(\rho,\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

### *3.2. Дифференциальное уравнение в переменной области пространства, занимаемой рассматриваемым наращиваемым телом, и его общее решение*

Если $x_0$ — радиус рабочей поверхности основы, на которую осуществляется намотка материала, то в каждый момент $x$ в переменной области пространства $x_0<\rho<x$, занимаемой всей уже сформированной на данный момент частью рассматриваемого наращиваемого цилиндрического тела, будет справедлив скоростной аналог стандартного локального уравнения равновесия: $\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}}=\mathbf{0}$. Внося в это уравнение представления (4), (5), можно получить следующее уравнение равновесия рассматриваемого наращиваемого тела в скоростях перемещений его точек:

$$V''+V'/\rho-V/\rho^2=0.$$

Общее решение этого обыкновенного дифференциального уравнения по переменной $\rho$ с параметром $x$ относительно искомой функции $V(\rho, x)$ имеет вид:

$$V(\rho, x) = C_1(x)\,\rho + C_2(x)/\rho, \tag{7}$$

где неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подлежат определению из граничных условий, которые необходимо выставить на внутренней и внешней поверхностях наращиваемого слоя сообразно с оговоренными выше предположениями.

### *3.3. Формулировка граничных условий для формируемого слоя и построение эволюции его напряженно-деформированного состояния*

На внутренней поверхности рассматриваемого наращиваемого слоя необходимо наложить условие его полного сцепления с жесткой основой: $V(x_0, x) = 0$. Удовлетворяя этому условию, находим связь $C_2(x) = -x_0^2 C_1(x)$.

На внешней поверхности слоя, к которой присоединяется дополнительный материал, в соответствии со сказанным в Разделе 2, задаются значения всех нетривиальных компонент тензора напряжений $\mathbf{T}$ в рассматриваемой системе координат:

$$\sigma_\rho(x, x) = 0, \quad \sigma_\varphi(x, x) = \sigma_\varphi^0(x), \quad \sigma_z(x, x) = 0, \tag{8}$$

где функция $\sigma_\varphi^0(x)$ вычисляется согласно формуле (1).

По скоростям деформационных перемещений точек тела $V(\rho, x)$ возможно однозначно восстановить только скорости изменения напряжений в этих точках — см. представления (5), — но не сами напряжения. Поэтому из условий (8) необходимо получить граничное условие на напряжения скоростного типа. Это можно сделать, вычисляя полную производную по параметру времени $x$ от соотношения (8) для компоненты $\sigma_\rho$ с привлечением стандартного уравнения равновесия и его скоростного аналога. Опуская соответствующий вывод, приведем здесь только окончательное условие:

$$\dot{\sigma}_\rho(x, x) = -\frac{\sigma_\varphi^0(x)}{x}. \tag{9}$$

Соотношение (9), как видим, определяет стартовую скорость изменения радиального напряжения в только что присоединившихся точках рассматриваемого растущего тела, или, иными словами, темп, с которым начнет изменяться первоначально нулевое радиальное напряжение в этих точках сразу же, как только они станут внутренними для данного тела. Удовлетворяя условию (9) с использованием первого из соотношений (5), находим

$$C_1(x) = -\frac{\sigma_\varphi^0(x)}{2Gx} \Bigg/ \left(\kappa + \frac{x_0^2}{x^2}\right).$$

В итоге из (5) и (7) имеем следующие выражения для скоростей изменения напряжений в рассматриваемом теле:

$$\dot{\sigma}_{\substack{\rho\\ \varphi}}(\rho, x) = -\left(\kappa \pm \frac{x_0^2}{\rho^2}\right)\frac{\sigma_\varphi^0(x)\,x}{\kappa x^2 + x_0^2}, \quad x_0 < \rho < x.$$

Отсюда на основании (6) и (8) находим

$$\sigma_\rho(\rho, x) = -\left(\kappa + \frac{x_0^2}{\rho^2}\right)\int_\rho^x \frac{\sigma_\varphi^0(\xi)\,\xi\,d\xi}{\kappa\xi^2 + x_0^2}, \quad \sigma_\varphi(\rho, x) = \sigma_\varphi^0(\rho) - \left(\kappa - \frac{x_0^2}{\rho^2}\right)\int_\rho^x \frac{\sigma_\varphi^0(\xi)\,\xi\,d\xi}{\kappa\xi^2 + x_0^2}. \tag{10}$$

## 4. Задачи управления технологическими напряжениями

### *4.1. Управление контактным давлением на основу в процессе намотки*

В рамках разработанной выше математической модели мы можем предсказать эволюцию в процессе намотки контактного давления $p(x)$ наматываемого слоя на поверхность основы, на которой этот слой формируется. Из формулы (10) для $\sigma_\rho$ при $\rho = x_0$ имеем:

$$p(x) = -\sigma_\rho(x_0, x) = (\kappa+1)\int_{x_0}^{x} \frac{\sigma_\varphi^0(\xi)\,\xi\,d\xi}{\kappa\xi^2 + x_0^2}. \tag{11}$$

Если требуется обеспечить необходимый закон изменения этого давления в процессе намотки путем подбора надлежащей программы изменения начальных напряжений $\sigma_\varphi^0(x)$, то последнюю можно найти дифференцированием (11) по параметру времени $x$:

$$\sigma_\varphi^0(x) = \frac{\kappa x^2 + x_0^2}{(\kappa+1)\,x}\,\dot{p}(x). \tag{12}$$

Зависимость (12) показывает, в частности, что при наращивании с ненулевыми начальными напряжениями контактное давление на основу не может оставаться постоянным. А поскольку, как видно из определения материальной константы $\kappa$ (см. выше), $\kappa > 0$ при любом $\nu < 1/2$, то при намотке слоя с произвольным переменным, но всегда положительным усилием натяжения полотна невозможно добиться не возрастающего со временем контактного давления формируемого слоя на основу.

### *4.2. Управление распределением окружных напряжений в полностью готовом слое*

Моделируемый в настоящей работе процесс намотки может восприниматься как процесс изготовления или усиления некоторого изделия в виде полого цилиндра (трубы, ствола, сосуда), внутренней частью стенки которого будет служить исходно взятая основа. Как правило, основным режимом работы таких изделий в процессе их эксплуатации является сопротивление окружному растяжению. В связи с этим, создаваемое в процессе намотки по определенной программе преднатяжение полотна может позволить сформировать в готовом изделии наиболее выгодное с точки зрения этой работы итоговое распределение технологических окружных напряжений $\sigma_\varphi^{\mathrm{fin}}(\rho) = \sigma_\varphi(\rho, x_1)$, где через $x_1$ обозначено финальное значение внешнего радиуса формируемого в процессе намотки усиливающего слоя материала на исходно взятой основе.

Поставим задачу обеспечить требуемое итоговое распределение окружных напряжений $\sigma_\varphi^{\mathrm{fin}}(\rho)$ в окончательно изготовленном слое $x_0 < \rho < x_1$ путем задания надлежащей программы изменения в процессе намотки величины преднатяжения полотна $\sigma_\varphi^0(\rho)$ в зависимости от текущего радиуса $\rho$ его очередного накладываемого витка.

Рассматривая построенную выше зависимость (10) для компоненты $\sigma_\varphi$ при $x = x_1$, приходим к выводу, что для решения поставленной в настоящем подразделе задачи управления необходимо решить следующее интегральное уравнение Вольтерра относительно неизвестной функции $\sigma_\varphi^0(\rho)$ на отрезке $\rho \in [x_0, x_1]$:

$$\sigma_\varphi^0(\rho) - \left(\kappa - \frac{x_0^2}{\rho^2}\right)\int_{\rho}^{x_1} \frac{\sigma_\varphi^0(\xi)\,\xi\,d\xi}{\kappa\xi^2 + x_0^2} = \sigma_\varphi^{\mathrm{fin}}(\rho).$$

Опуская процедуру построения решения, выпишем сразу окончательный результат:

$$\sigma_\varphi^0(\rho) = \sigma_\varphi^{\mathrm{fin}}(\rho) + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\kappa\rho^2 - x_0^2}{\kappa\rho^2 + x_0^2}\int_{\rho}^{x_1} \sigma_\varphi^{\mathrm{fin}}(\xi)\,d\xi.$$

Анализируя полученный результат, мы можем заметить, например, что при вычислении требуемой величины $\sigma_\varphi^0$ напряжения преднатяжения наматываемого полотна для конкретного текущего значения $\rho$ радиуса его витка нам следует исходить из информации об эпюре желаемых финальных окружных напряжений лишь на ее участке от данного радиуса до финального радиуса свободной поверхности получаемого намоткой материального слоя. Вычисляемая величина преднатяжения будет при этом зависеть от рабочего радиуса используемой жесткой основы, а также от общей толщины и от коэффициента Пуассона формируемого на ней слоя материала.

## Заключение

В работе предложена квазистатическая модель механики наращиваемых деформируемых твердых тел для анализа процесса медленной многослойной силовой намотки тонкого полотка материала на наружную боковую поверхность заранее изготовленной круговой цилиндрической основы. Дана математическая постановка соответствующей эволюционной задачи. Построено ее замкнутое решение в квадратурах. Напряженно-деформированное состояние изготавливаемого путем силовой намотки тела в исследуемых условиях целиком определяется начальным напряженным состоянием последовательно присоединяемых к нему элементарных слоев дополнительного материала. Последнее зависит от применяемых программ изменения в процессе намотки толщины и силы натяжения наматываемого полотна. Полученные в работе аналитические зависимости позволяют сформулировать и решить ряд задач о технологическом управлении характеристиками развивающегося в процессе намотки напряженного состояния формируемого на используемой основе слоя материала путем надлежащего задания указанных программ. В работе даются примеры решения таких задач. Рассмотрены случаи управления контактным давлением на основу со стороны изготавливаемого на ней слоя и управления распределением итоговых окружных напряжений по всей толщине готового слоя. Сделаны практические выводы.


## Благодарности

Исследование выполнено в рамках госзадания по теме № АААА-А20-120011690132-4, а также частично по проектам РФФИ №№ 18-01-00770-а, 18-01-00920-а, 20-51-05007-Арм_а.


## Литература


1. *Manzhirov, A. V.* Influence of the erection regime on the stress state of a viscoelastic arched structure erected by an additive technology under the force of gravity / A. V. Manzhirov, D. A. Parshin // Mechanics of Solids. – 2015. – V. 50, No. 6. – P. 657–675.
2. *Kurdina, S. P.* Axisymmetric contact problem for a punch and nonuniform foundation with rough surfaces / S. P. Kurdina, K. E. Kazakov // AIP Conference Proceedings. – 2019. – V. 2116. – P. 380006.
3. *Kazakov, K. E.* Wear of elastic tube with nonuniform coating by rigid bush / K. E. Kazakov // E3S Web of Conferences. – 2020. – V. 162. – P. 02002.
4. *Kazakov, K. E.* Contact problems for bodies with complex coatings / K. E. Kazakov, S. P. Kurdina // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2020. – V. 43, No. 13. – P. 7692–7705.
5. *Kazakov, K. E.* On linear wear of a layered base by a system of rough punches / K. E. Kazakov, S. P. Kurdina // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – V. 1474. – P. 012022.
6. *Manzhirov, A. V.* The general non-inertial initial-boundaryvalue problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion / A. V. Manzhirov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1995. – V. 59, No. 5. – P. 805–816.

7. *Parshin, D. A.* Analytic solution of the problem of additive formation of an inhomogeneous elastic spherical body in an arbitrary nonstationary central force field / D. A. Parshin // Mechanics of Solids. – 2017. – V. 52, No. 5. – P. 530–540.

8. *Manzhirov, A. V.* Fundamentals of mechanical design and analysis for AM fabricated parts / A. V. Manzhirov // Procedia Manufacturing. – 2017. – V. 7. – P. 59–65.

9. *Manzhirov, A. V.* Advances in the theory of surface growth with applications to additive manufacturing technologies / A. V. Manzhirov // Procedia Engineering. – 2017. – V. 173. – P. 11–16.

10. *Manzhirov, A. V.* Mechanics of growing solids and phase transitions / A. V. Manzhirov // Key Engineering Materials. – 2013. – V. 535–536. – P. 89–93.

11. *Manzhirov, A. V.* Accretion of a viscoelastic ball in a centrally symmetric force field / A. V. Manzhirov, D. A. Parshin // Mechanics of Solids. – 2006. – V. 41, No. 1. – P. 51–64.

12. *Manzhirov, A. V.* Arch structure erection by an additive manufacturing technology under the action of the gravity force / A. V. Manzhirov, D. A. Parshin // Mechanics of Solids. – 2015. – V. 50, No. 5. – P. 559–570.

13. *Manzhirov, A. V.* Application of prestressed structural elements in the erection of heavy viscoelastic arched structures with the use of an additive technology / A. V. Manzhirov, D. A. Parshin // Mechanics of Solids. – 2016. – V. 51, No. 6. – P. 692–700.

14. *Manzhirov, A. V.* 2D problems of surface growth theory with applications to additive manufacturing / A. V. Manzhirov, M. N. Mikhin // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – V. 991. – P. 012057.

15. *Manzhirov, A. V.* Analytical solution of the mechanical problem on additive thickening of aging viscoelastic tapers under nonstationary longitudinal end forces / A. V. Manzhirov, D. A. Parshin // Engineering Letters. – 2018. – V. 26, No. 2. – P. 267–275.

16. *Kazakov, K. E.* Mechanical modeling the processes of additive manufacturing bearing pillars of viscoelastic aging materials by thickening over the lateral surface under axial loading / K. E. Kazakov, D. A. Parshin // IOP Conference Series: Material Science Engineering. – 2019. – V. 520. – P. 012013.

17. *Manzhirov, A. V.* Modeling the accretion of cylindrical bodies on a rotating mandrel with centrifugal forces taken into account / A. V. Manzhirov, D. A. Parshin // Mechanics of Solids. – 2006. – V. 41, No. 6. – P. 121–134.

УДК 539.3

# РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

**В. Б. Пеньков, Д. А. Иванычев, Л. В. Левина, Е. А. Новиков**

*Липецкий государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе представлен подход к получению приближенного решения первой основной задачи теории упругости для физически нелинейных трансверсально-изотропных сред, когда нелинейная кривая деформирования несильно отличается от линейной. Рассмотрены тела, ограниченные одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения. Аналитический вид полученных выражений позволяет быстро получать готовое решение нелинейной задачи для тела заданной формы.
**Ключевые слова:** метод граничных состояний, метод малого параметра, физически-нелинейная среда, транстропия, краевые задачи, тела вращения.

## 1. Разложение по малым параметрам физически нелинейной трансверсально-изотропной среды

Решение задач теории упругости для физически нелинейных сред сводится к нелинейным дифференциальным уравнениям, аналитическое решение которых можно получить лишь в простейших случаях. Поэтому широкое распространение получили различные приближенные методы решения физически нелинейных задач и родственных им, задач пластичности. Эти методы основаны на линеаризации дифференциальных уравнений и сводятся к решению линейных задач теории упругости.

Целью данной работы является разработка метода построения упругих полей для однородного физически нелинейного трансверсально-изотропного тела.

Для физически нелинейной трансверсально-изотропной среды, к которым относятся задачи пластичности, обобщенный закон Гука имеет вид [1]:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{xx} = (\lambda_2+\lambda_4)\theta + \lambda_3\varepsilon_x + 2\lambda_4(1-\pi(p))\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2};\\
\sigma_{yy} = (\lambda_2+\lambda_4)\theta + \lambda_3\varepsilon_x + 2\lambda_4(1-\pi(p))\frac{\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xx}}{2};\\
\sigma_{zz} = \lambda_3\theta + \lambda_1\varepsilon_x;\ \theta = \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy};\\
\sigma_{xy} = 2\lambda_4(1-\pi(p))\varepsilon_{xy};\\
\sigma_{xz} = 2\lambda_5(1-\chi(q))\varepsilon_{xz};\\
\sigma_{yz} = 2\lambda_5(1-\chi(q))\varepsilon_{yz},
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $\pi(p)$ и $\chi(q)$ — функции пластичности [2], равные нулю в упругой зоне; $\lambda_i$ — параметры транстропной среды, вычисляемые через технические константы следующими соотношениями:

$$\lambda_1 = E_z(1-\nu)/l;\ \lambda_2 = E(\nu+k\nu_z^2)/l[(1+\nu)l];\ \lambda_3 = E\nu_z/l;\ \lambda_4 = G = E/[2(1+\nu)];$$

$$\lambda_5 = G_z;\ l = 1-\nu-2\nu_z^2k;\ k = E/E_z.$$

Если в обобщенном законе Гука (1) вместо модулей сдвига $G$ и $G_z$ использовать секущие модули $G_c = G(1-\beta)$ и $G_z^c = G_z(1-\alpha)$, а функции $\pi(p)$ и $\chi(q)$ заменить на дискретные значения $\beta$, $\alpha$ соответственно, то он будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}=[\lambda_2+2\lambda_4(1-\beta)]\varepsilon_{xx}+\lambda_2\varepsilon_{yy}+\lambda_3\varepsilon_{zz};\\ \sigma_{yy}=[\lambda_2+2\lambda_4(1-\beta)]\varepsilon_{yy}+\lambda_2\varepsilon_{xx}+\lambda_3\varepsilon_{zz};\\ \sigma_{zz}=\lambda_3\theta+\lambda_1\varepsilon_{zz};\\ \sigma_{xy}=2\lambda_4(1-\beta)\varepsilon_{xy};\\ \sigma_{xz}=2\lambda_5(1-\alpha)\varepsilon_{xz};\\ \sigma_{yz}=2\lambda_5(1-\alpha)\varepsilon_{yz},\\ \beta=1-\frac{A}{G}-\frac{B}{G}\gamma_i^{k-1},\ \alpha=1-\frac{C}{G_z}-\frac{D}{G_z}\gamma_i^{h-1},\end{gathered}\tag{2}$$

где $A,\ B,\ k$ — константы материала, определяемые из эксперимента на чистый сдвиг в плоскости изотропии транстропного материала; $C,\ B,\ h$ — константы материала, определяемые из эксперимента на сдвиг в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии, $\gamma_i^{k-1}$ — интенсивность деформаций сдвига [2].

Введем асимптотические ряды:

$$u_i=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n u_i^{(n)};\ \varepsilon_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\varepsilon_{ij}^{(n)};\ \sigma_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\sigma_{ij}^{(n)}.\tag{3}$$

(у компонент $\sigma_{rz},\ \sigma_{z\theta}$ тензора напряжений и $\varepsilon_{rz},\ \varepsilon_{z\theta}$ тензора деформаций вместо параметра $\beta$ фигурирует параметр $\alpha$).

Верхние индексы в скобках, равные степени малого параметра, идентифицируют номер соответствующего элемента в асимптотическом ряду.

Соотношения (2) после замены переменных суммирования и постулирования нулевыми значений для любого формально не существующего элемента разложения, у которого индекс имеет отрицательное значение $(n<0)$, приводит к следствию:

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}^{(n)}=\lambda_2\theta^{(n)}+2\lambda_4\varepsilon_{xx}^{(n)}+\lambda_3\varepsilon_{zz}^{(n)}+\tilde\sigma_{xx}^{(n)}; && \tilde\sigma_{xx}^{(n)}=-2\lambda_4\varepsilon_{xx}^{(n-1)};\\ &\sigma_{yy}^{(n)}=\lambda_2\theta^{(n)}+2\lambda_4\varepsilon_{yy}^{(n)}+\lambda_3\varepsilon_{zz}^{(n)}+\tilde\sigma_{yy}^{(n)}; && \tilde\sigma_{yy}^{(n)}=-2\lambda_4\varepsilon_{yy}^{(n-1)};\\ &\sigma_{zz}^{(n)}=\lambda_3\theta^{(n)}+\lambda_1\varepsilon_{zz}^{(n)}+\tilde\sigma_{zz}^{(n)}; && \tilde\sigma_{zz}^{(n)}=0;\\ &\sigma_{xy}^{(n)}=2\lambda_4\varepsilon_{xy}^{(n)}+\tilde\sigma_{xy}^{(n)}; && \tilde\sigma_{xy}^{(n)}=-2\lambda_4\varepsilon_{xy}^{(n-1)};\\ &\sigma_{yz}^{(n)}=2\lambda_5\varepsilon_{yz}^{(n)}+\tilde\sigma_{yz}^{(n)}; && \tilde\sigma_{yz}^{(n)}=-2\lambda_5\varepsilon_{yz}^{(n-1)};\\ &\sigma_{xz}^{(n)}=2\lambda_5\varepsilon_{xz}^{(n)}+\tilde\sigma_{xz}^{(n)}; && \tilde\sigma_{xz}^{(n)}=-2\lambda_5\varepsilon_{xz}^{(n-1)}.\end{aligned}\tag{4}$$

После переобозначения (тензорно-индексная форма записи)

$$s_{ij}^{(n)}=\sigma_{ij}^{(n)}-\tilde\sigma_{ij}^{(n)},\tag{5}$$

получаем для элементов разложения обобщенный закон Гука для трансверсально-изотропного тела, записанного через константы $\lambda_i$:

$$\begin{aligned}&s_{xx}^{(n)}=\lambda_2\theta^{(n)}+2\lambda_4\varepsilon_{xx}^{(n)}+\lambda_3\varepsilon_{zz}^{(n)};\\ &s_{yy}^{(n)}=\lambda_2\theta^{(n)}+2\lambda_4\varepsilon_{yy}^{(n)}+\lambda_3\varepsilon_{zz}^{(n)};\\ &s_{zz}^{(n)}=\lambda_3\theta^{(n)}+\lambda_1\varepsilon_{zz}^{(n)};\\ &s_{xy}^{(n)}=2\lambda_4\varepsilon_{xy}^{(n)};\\ &s_{yz}^{(n)}=2\lambda_5\varepsilon_{yz}^{(n)};\\ &s_{xz}^{(n)}=2\lambda_5\varepsilon_{xz}^{(n)}.\end{aligned}\tag{6}$$

Соотношение Коши преобразуется в аналогичную форму:

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)}\right). \tag{7}$$

Обозначая через $X_i^0$ объемные силы и полагая известным ряд

$$X_i^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n X_i^{0(n)},$$

переписываем уравнения равновесия в форме

$$s_{ij,j}^{(n)} + X_i^{(n)} = 0; \qquad X_i^{(n)} = X_i^{0(n)} + \tilde{\sigma}_{ij,j}^{(n)}. \tag{8}$$

Соотношения (6)–(8) по форме соответствуют деформированному состоянию линейно упругого тела. Общий метод решения таких задач известен [3].

В работе [4], применяя описанное разложение, исследовано равновесие трансверсально-изотропного куба в условиях одноосного растяжения. С помощью метода граничных состояний [3], на каждом шаге решалась задача линейной эластостатики, которая, в общем случае, имеет приближенное решение. Дополнительно к этому, возникала необходимость в определении упругого поля от действия фиктивных объемных сил, что усложняло задачу. Если учесть, что сам метод малого параметра является приближенным, то накопленная результирующая погрешность может привести к непригодности результата.

Здесь покажем подход, использующий только одно упругое состояние и, если оно определено достаточно точно, накопления погрешности с каждой итерацией не происходит.

Пусть имеется решение $\xi^{(0)}$ линейной первой основной задачи теории упругости при отсутствии массовых сил $X_i^0 = 0$. Это нулевой шаг: $n = 0$. Здесь же устанавливается тензор $\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}$, компоненты которого вычисляются через деформации по правым формулам (4) (верхний индекс $(n-1)$ у деформаций во внимание не берется). Так как заданные граничные условия (ГУ) в полной мере учтены уже на нулевом шаге, то на следующем шаге $n = 1$ поправка в граничные условия не вносится, это приводит к $s_{ij}^{(n)} = 0$ и, согласно (5), напряжения на первом шаге $\sigma_{ij}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}$, далее по закону Гука для линейной среды вычисляются деформации и по формулам Чезарро [5] – перемещения. Формируется состояние $\xi^{(1)} = \{\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}\}$. Аналогичным образом формируется состояние $\xi^{(n)}$ на последующих шагах, учитывая $\sigma_{ij}^{(n)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(n-1)}$. Окончательно решение есть ряд (аналогично соотношениям (3)):

$$\xi = \xi^{(0)} + \xi^{(1)}\beta + \xi^{(2)}\beta^2 + \ldots + \xi^{(n)}\beta^n, \; n = 1, 2, 3\ldots .$$

После выполнения достаточного количества приближений, подставляются значения малых параметров $\beta$, $\alpha$ и вычисляется нелинейное упругое состояние.

## 2. Решение задачи для цилиндра

Рассмотрим первую основную задачу для тела в форме кругового цилиндра (используется цилиндрическая система координата) из однонаправленного композита бороалюминия [6], волокна которого направлены параллельно оси вращения. После процедуры обезразмеривания, аналогия которой показана в [7], тело занимает область $V = \{(r,z) \mid 0 \le r \le 1, \, -2 \le z \le 2\}$ и технические константы материала: $E_r = 1.3992$; $E_z = 2.6682$; $\nu_r = 0.0682$; $\nu_z = 0.248$; $G_r = 0.6549$; $G_z = 0.5396$; $A = 0.5$; $B = 0.2$; $C = 0.4$; $D = 0.1$; $k = 2$; $\varepsilon_i = 0.1$. Малые параметры: $\beta =$ 0.206026; $\alpha =$ 0.240178.

Тело нагружено усилиями:

$$\{p_r, p_z\} = \begin{cases} \{1, 0\}, \mid \; r = 1, -2 \le z \le 2; \\ \{0, -1\}, \mid \; z = -2, 0 \le r \le 1; \\ \{0, 1\}, \mid \; z = 2, 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

Объемные силы отсутствуют: $X_i^0 = 0$.

Решение линейно упругой задачи очевидно: $u = 0.573\,r$; $w = 0.18889\,z$; $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = 1$; $\sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0$.

Искомое приближенное решение (3) имеет вид (по причине громоздкости выражений, приведем компоненты вектора перемещения в неполном виде, показав выражения при $\beta$ до $n = 4$):

$$u \approx 0.573\,r + 0.4998\,r\beta + 0.436\,r\beta^2 + 0.3803\,r\beta^3 + 0.331\,r\beta^4 + \ldots;$$
$$w = 0.1889\,z - 0.1395\,z\beta - 0.1217\,z\beta^2 - 0.1061\,z\beta^3 - 0.092\,z\beta^4 - \ldots; \qquad (9)$$
$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = 1;\ \ \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0.$$

После подстановки малых параметров и удержании членов при $n = 3$, деформации, вычисленные по соотношениям Коши [5], равны:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0.697819;\ \ \varepsilon_z = 0.154051;\ \ \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} = 0.$$

Оценку погрешности проведем путем сопоставления деформаций полученного состояния с деформациями упругого состояния материала, технические константы которого соответствуют секущим модулям сдвига $G_c$, $G_z^c$:

$$E_r = \frac{4\lambda_4(\beta-1)(\lambda_3^2 - \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_4 - \beta\lambda_4))}{\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2 + 2(\beta-1)\lambda_1\lambda_4} = 1.12778;$$
$$E_z = \lambda_1 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_2 + \lambda_4(1-\beta)} = 2.62834;$$
$$\nu_r = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_3^2 - \lambda_1(\lambda_2 - 2\lambda_4(\beta-1))} = 0.084403;$$
$$\nu_z = \frac{\lambda_3}{2(\lambda_2 + \lambda_4(1-\beta))} = 0.297818;$$
$$G_z = \lambda_5(1-\alpha) = 0.42;\ G_r = \frac{E_r}{2(1+\nu_{r\theta})} = 0.52.$$

Для последнего состояния:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0.698547;\ \ \varepsilon_z = 0.153848;\ \ \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} = 0.$$

Для деформаций погрешности составили: $\varepsilon_r$ и $\varepsilon_\theta$ — 0.1 %; $\varepsilon_z$ — 0.13 %; т. е. трех итераций для достижения высокой точности вполне достаточно.

Предположим теперь, что материал обладает малым упрочнением и диаграмма 2 на рис. 2 сильно отличается от линейной. Примем: $A = 0.2$; $B = 0.5$; $C = 0.2$; $D = 0.1$; $k = 2$; $\varepsilon_i = 0.1$, тогда малые параметры: $\beta = 0.618282$; $\alpha = 0.610823$.

Сравнение теперь необходимо осуществить с состоянием цилиндра из материала, у которого: $E_r = 0.58044$; $E_z = 2.46816$; $\nu_r = 0.16089$; $\nu_z = 0.49798$; $G_r = 0.25$; $G_z = 0.21$. Для этого состояния:

$$u = 1.24386\,r; \quad w = 0.00163\,z.$$

После подстановки малых параметров в ряды (9), перемещения составили:

при $n = 3$: $u = 1.13861\,r$; $w = 0.031\,z$;

при $n = 10$: $u = 1.24246\,r$; $w = 0.00202\,z$;

при $n = 16$: $u = 1.24382\,r$; $w = 0.00164\,z$.

Таким образом, точность обеспечивается путем увеличения числа итераций.

Анализ вышеизложенного позволяет сделать вывод о том, что предложенный подход оказался эффективным средством выписывания явного решения физически нелинейных задач теории упругости для трансверсально-изотропных тел. Для построения решения используется только одно упругое решение для линейной среды, которое может быть получено методом граничных состояний.

**Благодарности**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 «р_а».


**Литература**


1. *Победря, Б. Е.* Механика композиционных материалов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.

2. *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Часть 1. Упругопластические деформации. – М. : Л. : ОГИЗ, 1948. – 376 с.

3. *Пеньков, В. Б.* Метод граничных состояний для решения задач линейной механики / В. Б. Пеньков, В. В. Пеньков // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2, № 2. – С. 115–137.

4. *Penkov, V. B.* Using the method of boundary states with perturbations to solve physically nonlinear problems of the theory of elasticity / V. B. Penkov, D. A. Ivanychev, L. V. Levina, E. A. Novikov // Journal of Physics: Conference Series Current Problems. Сер. «International Conference «Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: "Current Problems" 1479. – 2019. – No 012134. – P. 1–14. DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012134.

5. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости – Москва : Наука, 1966, 707 с.

6. *Полатов, А. М.* Компьютерное моделирование деформированного состояния физически нелинейных трансверсально-изотропных тел с отверстием / Вычислительная механика сплошных сред. – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 25–35. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.1.3

7. *Левина, Л. В.* Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела / Л. В. Левина, О. С. Новикова, В. Б. Пеньков // Вестник ЛГТУ. – 2016. – № 2 (28). – С. 16–24.

УДК 539.3

# РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛАБО-НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ СРЕДСТВАМИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

**В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, Е. А. Новиков, С. Ю. Назаров**

*Липецкий государственный технический университет*

**Аннотация.** Обосновано применение численно-аналитического метода граничных состояний с возмущениями (МГСВ) к задачам анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) геометрически нелинейных изотропных упругих тел. Определяющие соотношения представлены слабо-нелинейным операторным уравнением, аддитивно содержащим нелинейный оператор, декомпозируемый в линейную комбинацию последовательности линейных операторов. Выполнено решение для простого случая линейно-неоднородного одноосного нагружения протяженной полутрубы по торцам. Даже при таком варианте нагружения геометрическая нелинейность сказывается на формоизменении тела: обнаружено явное выпучивание. Проведен анализ НДС, сделаны выводы, обозначены перспективы.

**Ключевые слова:** метод граничных состояний, МГС, МГСВ, напряженно-деформированное состояние, НДС, геометрическая нелинейность, упругость, протяженное тело.

## Введение

Работа является продолжением и развитием статьи [1]. Определяющие соотношения геометрически нелинейной среды, а именно соотношения Коши (1), обобщенный закон Гука (2) и уравнения равновесия (3), представлены в тензорно-индексной форме:

$$2E_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j}, \tag{1}$$

$$\Sigma_{ij} = \lambda\, E_{kk}\,\delta_{ij} + 2\,\mu\, E_{ij}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial X_j} = 0. \tag{3}$$

Здесь $U_i, E_{ij}, \Sigma_{ij}$ — компоненты безразмерных векторов перемещений, тензоров деформаций и напряжений соответственно; $\lambda,\ \mu$ — безразмерные параметры Ламе, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Принята тензорно-индексная форма записи, в том числе соглашение суммирования по повторяющимся индексам.

Выполнена замена переменных [2] с включением параметра $0 < \beta << 1$:

$$x_i = \beta\, X_i,\quad E_{ij} = \beta\,\varepsilon_{ij},\quad U_i = u_i,\quad \Sigma_{ij} = \beta\,\sigma_{ij}, \tag{4}$$

после чего уравнения (1)–(3) преобразуются к виду (5)–(7):

$$2\,\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + \beta\, u_{k,i}\, u_{k,j}, \tag{5}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}, \tag{6}$$

$$\sigma_{ij,j} = 0. \tag{7}$$

Присутствие параметра $\beta$ в (5) характеризует эти соотношения как слабо-нелинейные.

Используя метод возмущений, запишем характеристики состояния $\xi = \{u_i,\ \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$ в виде степенных рядов:

$$\xi = \sum_k \beta^k\, \xi^{(k)},\quad \xi^{(k)} = \{u_i^{(k)},\ \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}. \tag{8}$$

Метод Пуанкаре был применен для оценки состояния не осесимметричного тела (полуцилиндр) [1]. Ниже демонстрируется его эффективность (в сочетании с численно-аналитическим методом граничных состояний) для анализа состояния протяженного тела оболочечного типа (полутруба).

### 1. Слабо-нелинейное операторное уравнение

Пусть система определяющих соотношений объекта имеет слабую нелинейность, характеризуемую малым параметром $\beta << 1$, и в общем случае представляется операторной формой

$$L\xi + \beta\, K\xi = 0, \tag{1.1}$$

которая при $\beta = 0$ является линейной. Здесь $\xi = \xi(x)$ — набор характеристик состояния объекта, $x \in R^n$, $n$ — размерность пространства, $L$ — линейный оператор, определяющий главную часть соотношений для объекта, $K$ — нелинейный оператор над характеристиками объекта. Используя методологию теории возмущений, будем искать состояние $\xi$ в виде ряда (8). Будем предполагать для оператора $K$ возможность «итерационного разложения»

$$K\xi = K\left(\sum_k \beta^k \xi^{(k)}\right) = \sum_k \beta^k K^{(k)} \xi^{(k)}, \tag{1.2}$$

где $K^{(k)}$ — нелинейные относительно $\xi^{(k)}$ операторы, характер которых к моменту выполнения шага $k$ разложения полностью определен. Тогда (1.1) преобразуется к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k L\xi^{(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k K^{*(k-1)} \xi^{(k-1)} = 0. \tag{1.3}$$

Сравнение выражений при одинаковых степенях мономов $\beta^k$ приводит к последовательности линейных операторных уравнений

$$L\xi^{(0)} = 0,$$
$$L\xi^{(k)} + K^{*(k-1)}\xi^{(k-1)} = 0, k \in N_0 = [1, 2, \ldots],$$

т. е. к виду однородного либо неоднородного линейного операторного уравнения

$$L\xi^{(k)} = f, \;\; f = -K^{*(k-1)}\xi^{(k-1)}. \tag{1.4}$$

В выражении (1.4) правая часть $f$ является известной функцией состояний $\xi^{(0)}$, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(k-1)}$, предполагаемых построенными на всех предшествующих $k$ шагах итерационного процесса.

Для успешного выполнения каждого шага процесса требуется эффективно строить как общее решение однородного уравнения

$$L\xi = 0, \tag{1.6}$$

так и частное решение уравнения (1.4).

### 2. Возмущенная линейно упругая среда

В изотропной линейной эластостатике ставятся задачи об отыскании напряженно- деформированного состояния (НДС) среды, заключенной в области $V$ с границей $\partial V$. Внутреннее состояние [3] $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$ представляет собой избыточный набор информации из компонентов вектора перемещения, тензоров деформаций и напряжений. Контекстно линейный оператор $L$ содержит информацию о соотношениях Коши (5), обобщенном законе Гука (6) и уравнениях равновесия при отсутствии объемных сил (7).

При корректной постановке решение задачи находят численно (методы конечных, граничных элементов и др.). Современные компьютерные технологии позволяют строить численно-аналитическое решение (МГС, МГСВ) [3, 4]. Разработана также идеология построения полно-параметрического решения (ППР) [5].

Общее решение (1.6) представляет собой линейную комбинацию элементов счетного базиса гильбертова пространства внутренних состояний. В случае наличия неоднородной составляющей в уравнении

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \tag{2.1}$$

где $X_i$ — полиномиальные объемные силы, разработаны эффективные методы построения частного решения [6, 7].

Рассмотрим определяющие соотношения (5)–(7) с возмущением состояния за счет внесения малой нелинейной добавки с параметром $\beta << 1$, которая и порождает нелинейный оператор $K$. Поиск решения при $\xi^{(k)} = \{u_i^{(k)},\ \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}$ в форме (1.2) приводит к последовательности задач. На итерации $k = 0$ получаем $u_i^{(0)}$, $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(0)}$, т. е. имеем дело с классической задачей однородной изотропной эластостатики при отсутствии массовых сил.

На последующих итерациях приходим к соотношениям

$$2\,\varepsilon_{ij}^{(k)} = u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)} + \sum_{s=0}^{k-1} u_{m,i}^{(s)} u_{m,j}^{(k-s-1)} + 2\varepsilon_{ij}^{*(k-1)},$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \lambda\, e_{mm}^{(k)} \delta_{ij} + 2\,\mu\, e_{ij}^{(k)} + \left[\lambda\, \varepsilon_{ij}^{(k-1)} + 2\,\mu\, \varepsilon_{ij}^{(k-1)}\right],$$

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} + \tilde{X}_i^{(k)} = 0,$$

где $e_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon_{ij}^{*(k-1)}$, $\tilde{X}^{(k)} = \lambda\, \varepsilon_{mm}^{*(k-1)} \delta_{ij} + 2\,\mu\, \varepsilon_{ij}^{*(k-1)}$, $\varepsilon_{ij}^{*(k-1)} = \dfrac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} u_{m,i}^{(s)} u_{m,j}^{(k-s-1)}$ контекстно определяют нелинейные операторы итерационного разложения в (1.3).

Далее, вводя обозначения $s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{*(k-1)}$, приходим к классической форме постановки задачи для изотропной эластостатики

$$2\,e_{ij}^{(k)} = u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}, \quad s_{ij}^{(k)} = \lambda\, e_{mm}^{(k)} \delta_{ij} + 2\,\mu\, e_{ij}^{(k)}, \quad s_{ij,j}^{(k)} + \tilde{X}_i^{(k)} = 0. \tag{2.1}$$

Решение задачи относительно состояния $\{u_i^{(k)},\ \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}$ возвращает поля этих характеристик. После восстановления деформаций и напряжений в итерации $k$ в соответствии с введенными обозначениями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)} &= s_{ij}^{(k)} + \sigma_{ij}^{*(k-1)}, \\ \varepsilon_{ij}^{(k)} &= e_{ij}^{(k)} + \varepsilon_{ij}^{*(k-1)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

получаем состояние $\xi^{(k)} = \{u_i^{(k)},\ \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}$. Результирующее внутреннее состояние тела есть комбинация (1.2).

**Замечание.** Добавление объемных сил в уравнения равновесия принципиально не меняет методики решения. Эта сила внесет некоторые добавки в $\tilde{X}_i^{(0)}$ или во все $\tilde{X}_i^{(k)}$.

### 3. Неравномерное нагружение цилиндрической полутрубы

Ниже постановка задачи выполнена в безразмерном виде. Масштаб по длине выбран равным радиусу трубы $R$, масштаб по напряжениям — модулю сдвига $\mu$.

Рассмотрено нагружение протяженного полуцилиндра (рис. 1,а) осевыми усилиями. Высота тела значительно превышает радиус его основания ($l = 10\,R$). Граничные условия задачи представлены формулой (3.1) (безразмерная форма):

$$\mathbf{p} = \begin{cases} \{0,0,0\}, (x,y,z) \in S_1 \cup S_2 \cup S_5 \cup S_6, \\ \{0,0,\mp p_0\, x\}, \quad (x,y,z) \in S_3, S_4\,, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $S_1 = \{(x,y,z) \in R^3 \,|\, x^2 + y^2 = 0.81, x \geq 0,\ z \in [-5,5]\}$,

$S_2 = \{(x,y,z) \in R^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0,\ z \in [-5,5]\}$,

$$S_{3,4} = \{(x,y,z) \in R^3 \,\big|\, 0.81 \le x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ z = \mp 5\},$$

$$S_5 = \{(x,y,z) \in R^3 \,|\, x = 0,\ y \in [-1,-0.9],\ \ z \in [-5,5]\},$$

$$S_6 = \{(x,y,z) \in R^3 \,|\, x = 0, y \in [0.9,1],\ \ z \in [-5,5]\}.$$

Требуется восстановить напряженно-деформированное состояние протяженной полутрубы для изотропного физически линейно-упругого материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$ с учетом геометрической нелинейности деформаций (1).

Средствами МГСВ построено НДС при трех итерациях. Ниже представлен вектор перемещений (округлено до тысячных)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.05(y^2 - x^2) - 0.2z^2 \\ -0.1xy \\ 0.4xz \end{pmatrix} + 0.1\beta \begin{pmatrix} -0.03x + 0.25y^2 + 0.21xz^2 \\ 0.17x - 0.5xy \\ -0.01x - 0.20x^2 z \end{pmatrix} + 0.1\beta^2 \begin{pmatrix} 0.023x + 0.082y^2 - 0.019xz^2 \\ 0.048x - 0.16xy \\ -0.11x + 0.019x^2 z \end{pmatrix}$$

Форма трубы после деформирования представлена на рис. 1,б.

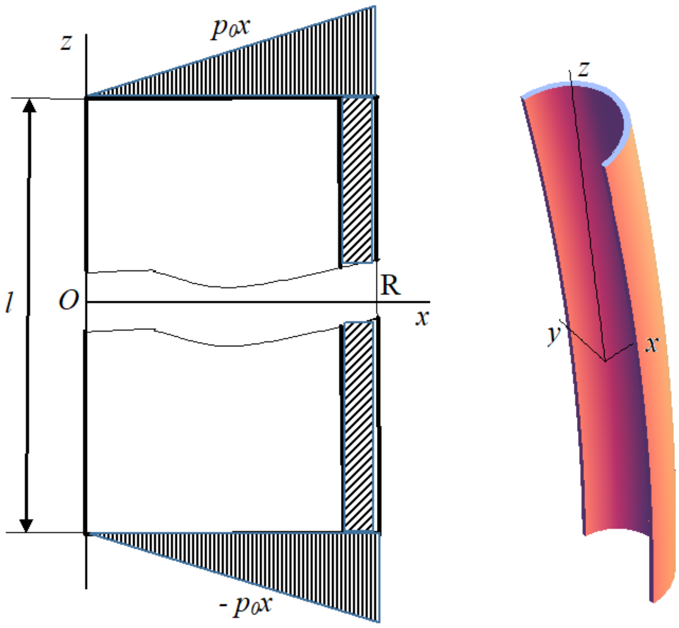



*Рис. 1. Полутруба: а) схема нагружения; б) форма после деформирования*

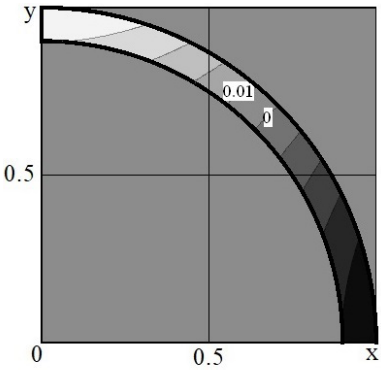
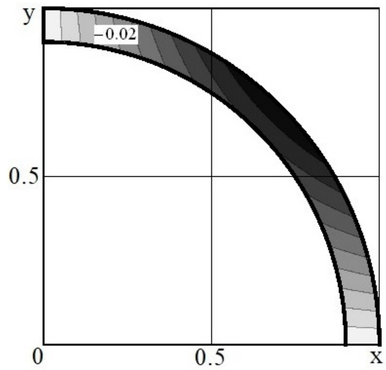
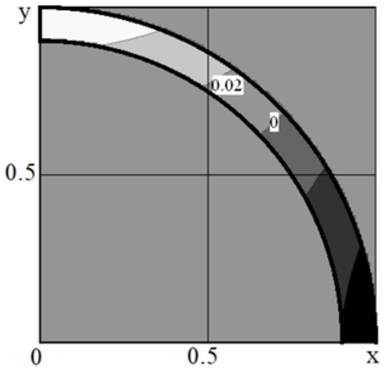
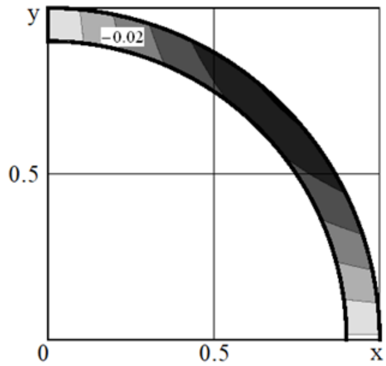
Эффективным средством решения задачи может служить МГС, «обвязанный» методом малого параметра [1]. Алгоритм МГСВ реализован в системе Mathematica и предоставляет решение в численно-аналитическом виде. В табл. 1, 2 представлены распределение перемещений в осевых сечениях.

В табл. 1 приведено распределение перемещений точек сечения $z = 0$ тела, численно уточняющих характер деформирования. Фон рисунка соответствует нулевому значению перемещений. Сопоставления линейного варианта с геометрически нелинейным обнаруживает заметное влияние нелинейной добавки на форму тела, сохраняя в целом характер перемещений. Белая зона для $u_x$ свидетельствует о смещении грани полутрубы в сторону $x > 0$ (выпучивание) при наличии незначительного смятия средней области, в то время как зоны вблизи $z = 2.5$ (табл. 2) и при $z = 5$ смещаются в противоположную сторону (явный характер выпучивания). Сопоставления перемещений $u_x$, $u_y$ позволяет сделать вывод о том, что промежуточная область между зонами $\varphi = 0$ (ось $x$) и $\varphi = \pi/2$ (ось $y$) сплющивается и принимает овальную (не окружную) форму с большим диаметром полуоси вдоль $Oy$.

На рис. 2 представлены напряжения $\sigma_{zz}$ результирующей итерации в сечении $z = 0$.

Таблица 1

*Перемещения $u_x$, $u_y$ нулевой и результирующей итерациях в сечении $z = 0$*

| | $u_x$ | $u_y$ |
|---|---|---|
| Линейное приближение |   |   |
| Учет геометрической нелинейности |   |   |

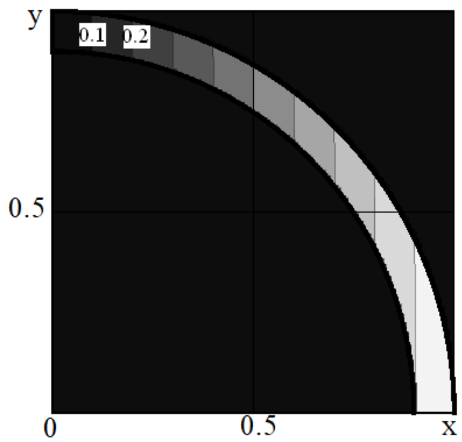



*Рис. 2. Напряжения $\sigma_{zz}$ результирующей итерации в сечении $z = 0$*

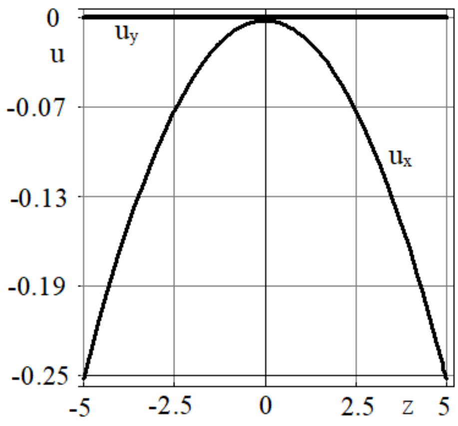


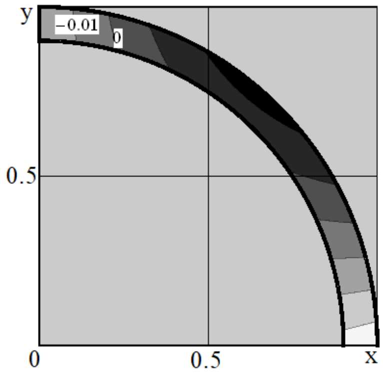
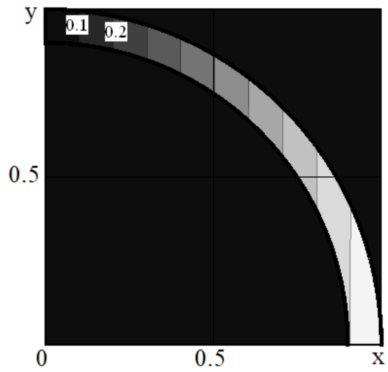
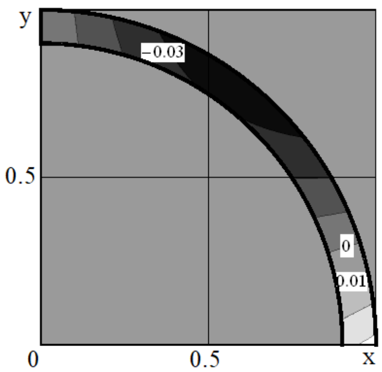
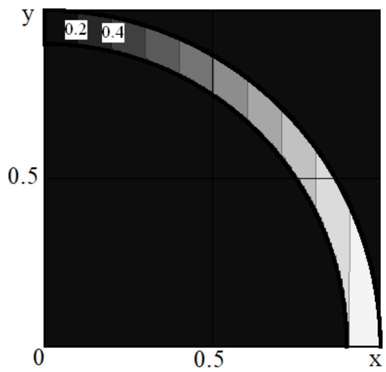

*Рис. 3. Перемещения $u_x$, $u_y$ результирующей итерации в сечении $y = 0$*

Картина напряженного состояния (рис. 2) в поперечном сечении $z = 0$ $(x, y > 0)$ практически не меняется от итерации к итерации и отвечает явному растяжению продольных волокон в соответствии со схемой нагружения.

На рис. 3. представлены перемещения $u_x$, $u_y$ результирующей итерации в сечении $y = 0$. Эпюры перемещений среднего волокна $(y = 0,\ x = 1,\ z \in [-5, 5])$ количественно четко оценивает характер изгиба.

Таблица 2

*Перемещения $u_y$, $u_z$ результирующей итерации в сечении $z = 2.5$ и $z = 5$*

| | $u_y$ | $u_z$ |
|---|---|---|
| $z = 2.5$ |   |   |
| $z = 5$ |   |   |

## Выводы

1. Анализ НДС протяженной полутрубы продемонстрировал важность учета нелинейных составляющих тензоров деформаций, поскольку они приводят к конечным перемещениям точек тела даже при относительно малых составляющих деформаций.

2. МГСВ заявил себя в качестве эффективного средства анализа состояний геометрически нелинейных упругих тел.

3. Процесс привлечения МГС совместно с методом возмущений открыл направления совершенствования алгоритмического и программного обеспечения развивающейся вычислительной системы: автоматизация наполнения базисов пространств состояний, автоматизация построения частных решений пошаговых задач итерационного процесса от фиктивных объемных сил полиномиального характера, автоматизация иллюстрирования промежуточных и финишных результатов счета.

## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003.

## Литература

1. *Пеньков, В. Б.* Сочетание методов граничных состояний и Линштедта — Пуанкаре в геометрически нелинейной эластостатике / В. Б. Пеньков, Л .В. Левина, О.С. Новикова, Е. А. Но-

виков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2020. – С. 1484–1491.

2. *Nayfeh, A. H.* Introduction to perturbation techniques / A. H. Nayfeh. – USA: A wiley–interscience publication. John Wiley & Sons, Inc., 1993. – 519 p.

3. *Пеньков, В. Б.* Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., Germany. – 2012. – 108 с.

4. *Пеньков, В. Б.* Метод граничных состояний для решения задач линейной механики / В. Б. Пеньков, В. В. Пеньков // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т.2, № 2. – С. 115–137.

5. *Levina, L. V.* Using computer algebra to construct analytical solutions for elastostatic problem / L. V. Levina, E. A. Novikov, O. S. Novikova, V. B. Penkov // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series: International Conference «Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems» 17–19 December 2018, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. – 2019. – V. 1203, No 012020. – 12 p. – DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012020.

6. *Пеньков, В. Б.* Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении / В. И. Кузьменко, Н. В. Кузьменко, Л. В. Левина, В. Б. Пеньков // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 1. – С. 84–94.

7. *Пеньков, В. Б.* Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение / В. Б. Пеньков, О. С. Новикова, Л. В. Левина // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2020. – Т. 24. В.1. – С. 56–73.

УДК 539.3

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИН СО СВЯЗЯМИ В КОНЦЕВОЙ ОБЛАСТИ С ПРЕПЯТСТВИЯМИ И ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА СРЕД

**М. Н. Перельмутер**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

**Аннотация.** Представлены результаты исследования эффекта торможения трещин в составных конструкциях с пространственным изменением свойств, при наличии трещин со связями в концевой области и зон неидеального соединения материалов. Конструкция моделируется набором однородных подобластей с трещинами, расположенными на границах между подобластями. Расчеты выполнены методом граничных интегральных уравнений.

**Ключевые слова:** трещины, концевая область, неидеальное соединение материалов, граничные интегральные уравнения.

## Введение

Модели трещины с взаимодействием берегов позволяют объединить при исследовании развития трещин подходы механики и физики разрушения. Зона взаимодействия берегов трещины примыкает, как правило, к вершине трещины и рассматривается как часть трещины, в которой силы адгезии или подкрепляющие волокна (в композитах) препятствуют раскрытию трещины. Приближенные методы оценки трещиностойкости, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой областью, неприменимы, если длина концевой области трещины не является малой по сравнению с размером трещины. В таких случаях необходимо прямое моделирование напряженного состояния в концевой области трещины с учетом деформационных характеристик связей и последующим использованием критерия разрушения для анализа роста трещины [1–3]. Для трещин со связями в областях конечного размера наиболее эффективно использование метода граничных интегральных уравнений (МГИУ), требующего при численном решении упругой задачи дискретизации только поверхности тела. При использовании МГИУ составная конструкция моделируется набором однородных подобластей с трещинами, расположенными на границах раздела между подобластями. Такой подход позволяет учитывать идеальные и неидеальные условия соединения подобластей, трещины в однородных телах при несимметричном нагружении [4], а также трещины на границе раздела материалов. При вычислении коэффициентов влияния каждая подобласть конструкции рассматривается независимо от других, что позволяет эффективно использовать в МГИУ алгоритмы распараллеливания вычислений [5–7]. В данной работе МГИУ используется для анализа напряженного состояния вблизи трещины, расположенной на границе неидеального соединения материалов (обобщенная задача для модели Прандтля [8]), а также для исследования взаимодействии трещин с препятствиями и границами раздела сред.

## 1. Методика численного решения

Граничное интегральное уравнение для каждой однородной подобласти составного тела при отсутствии массовых сил имеет вид [9]

$$c_{ij}(p)u_i(p)=\int_{\Gamma}\left[G_{ij}(q,p)t_i(q)-F_{ij}(q,p)u_i(q)\right]d\Gamma(q),\quad i,j=1,\ m \tag{1}$$

где точки $p$ и $q$ принадлежат границе подобласти $\Gamma$, $u_i(q)$ перемещения и $t_i(q)$ усилия на границе подобласти, $c_{ij}(p)$ — функции, зависящие от локальной геометрии в точке $p$, для гладкой границы $c_{ij}(p) = 0.5\delta_{ij}$, $G_{ij}(q,p)$ и $F_{ij}(q,p)$ — фундаментальные решения Кельвина для задачи упругости, $m = 2, 3$ — для двумерной и пространственной задачи, соответственно.

На участках идеального контакта подобластей выполняются условия непрерывности для перемещений и равновесия для усилий

$$u_i^k(q) = u_i^n(q), \qquad t_i^k(q) = -t_i^n(q) \tag{2}$$

Здесь $k$ и $n$ — номера соседних подобластей.

На участках границ подобластей, содержащих трещины со свободными от связей берегами, перемещения в каждой подобласти рассматриваются как независимые переменные.

Дополнительные условия (заменяющие условия (2)) вводятся при наличии связей между берегами в концевой области трещины (обобщенный закон деформирования связей)

$$t_i(q) = \kappa_i(q,\sigma)\,\Delta u_i(q)\,, \quad \Delta u_i(q) = u_i^k - u_i^n\,, \quad \kappa_i(q,\sigma) = \gamma_i(q,\sigma)\frac{E_b}{H}. \tag{3}$$

В выражениях (2)–(3) $i = 1,\ 2$ соответствует касательному и нормальному к плоскости трещины направлениям (двумерная задача). Система координат определяется в подобласти с меньшим номером $M$, так что $M = \min(n,k)$, $t_i(q)$ и $\Delta u_i(q)$ — компоненты вектора усилий и раскрытия трещины в локальной системе координат, $\kappa_i(q,\sigma)$ — жесткость связей в концевой области трещины, зависящая от положения точки $p$ вдоль концевой области трещины и натяжения связей, $\gamma_i(q,\sigma)$ — безразмерные функции. Если жесткость связей в концевой области трещины не зависит от натяжения связи, то зависимости (3) определяют линейно-упругий закон деформирования связей. Аналогичные соотношения используются при моделировании неидеального контакта подобластей. При решении трехмерных задач к уравнениям (2)–(3) добавляется еще одно уравнение для тангенциальной компоненты усилий в связях.

Для численного решения ГИУ в двумерной задаче используем изопараметрические квадратичные граничные элементы и специальные граничные элементы вблизи вершины трещины, учитывающие асимптотическое поведение переменных (перемещений и поверхностных усилий). Дискретизация границ подобластей и аппроксимация переменных позволяет заменить вычисление интегралов по всей поверхности подобласти в ГИУ (1) суммой интегралов по совокупности граничных элементов, представляющих поверхность подобласти, и получить для каждой точки коллокации $p$ дискретное представление ГИУ. Сингулярное поведение фундаментальных решений в дискретном представлении ГИУ (1) проявляется, в основном, при вычислении интегралов по элементам, содержащим точку коллокации $p$. Рассматривается два случая расположения точки $p$: а) $p \notin e$, б) $p \in e$, здесь $e$ — граничный элемент по которому выполняется интегрирование. В первом случае подынтегральные функции ограничены и интегрирование выполняется по квадратурным формулам Гаусса — Лежандра с учетом сгущения точек интегрирования в направлении точки коллокации. При $p \in e$ фундаментальное решение для перемещений $G_{ij}(q,p)$ в двумерной задаче содержит слабую логарифмическую особенность, и интегралы в дискретном представлении ГИУ, содержащие эту функцию, вычисляются с использованием квадратурной формулы с логарифмической весовой функцией. Фундаментальное решение для поверхностных усилий $F_{ij}(q,p)$ содержит сильную особенность, и вычисление суммы соответствующих интегралов и параметров $c_{ij}(p)$ выполняется косвенным путем, исходя из рассмотрения смещения тела как жесткого целого, см. описание алгоритма численного интегрирования в [10].

Обходя последовательно узловые точки границ всех подобластей, получаем дискретное представление ГИУ. В каждой узловой точке границы подобласти, не контактирующей с другими подобластями, имеется $2m$ переменных — $m$ перемещений и $m$ поверхностных усилий $(m = 2, 3)$. В корректно поставленной задаче $m$ переменных определяется из граничных условий задачи и решение ГИУ (1) позволяет найти остальные $m$ неизвестных задачи. В каждой узловой точке на участках соединения двух подобластей имеем $4m$ переменных, из которых

$2m$ неизвестных определяются из решения ГИУ, а остальные $2m$ неизвестных исключаются с использованием условий непрерывности и равновесия (2) при идеальном контакте подобластей или с использованием закона деформирования связей (3) и условия равновесия — для участков со связями между подобластями. В последнем случае, для трещин со связями, расположенных на границе подобластей и участков неидеального соединения материалов, в качестве неизвестных, определяемых из решения ГИУ, выбираем перемещения узловых точек контактирующих подобластей. Учет граничных условий на внешних частях подобластей и дополнительных условий (2)–(3) позволяет получить из системы дискретных ГИУ для всех подобластей конструкции, систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых неизвестных задачи.

Алгоритм численного решения ГИУ с учетом трещин со связями в концевой области и неидеального соединения материалов реализован в программном комплексе для решения двумерных и пространственных задач теории упругости [10–12].

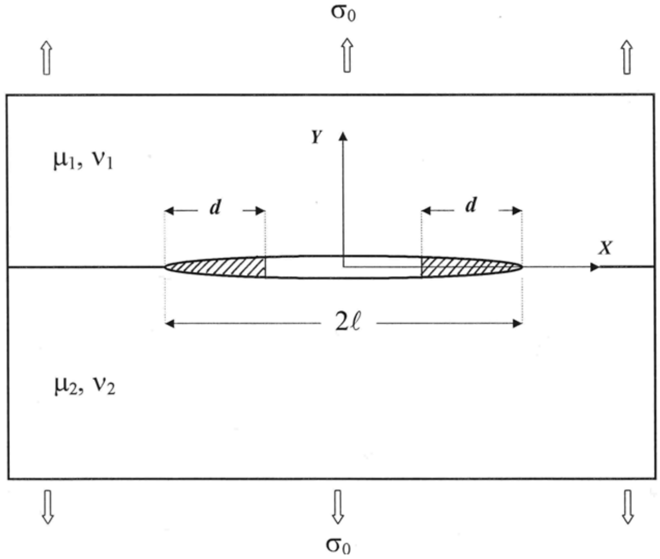



*Рис. 1. Трещина со связями между берегами на границе соединения пластины из различных материалов*

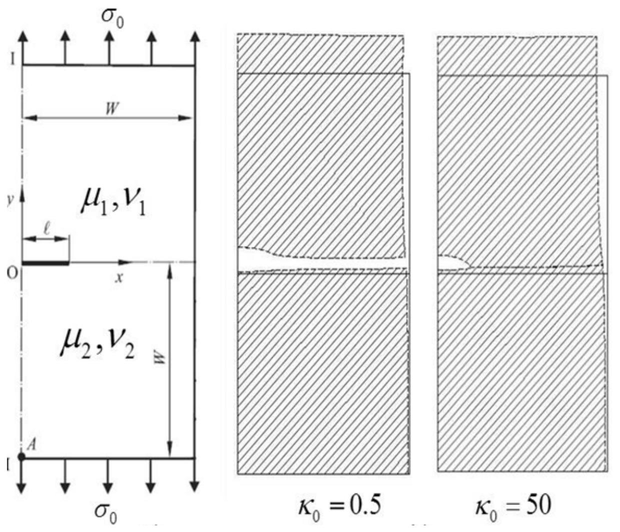



*Рис. 2. a) составная пластина с трещиной между подобластями: учет симметрии задачи и граничные условия, $W / \ell = 5$; b) деформированное состояние пластины*

## 2. Численные результаты

Ниже приведены результаты решения задачи о взаимодействии трещины и участка неидеального соединения материалов и задачи о взаимодействии трещины со связями в концевой области с границами раздела сред, полученные численно методом ГИУ.

Закон деформации связей принимался в форме (3) в предположении, что жесткости связей по направлениям осей координат одинаковы. Относительная жесткость связей $\kappa_0$ определялась как

$$\kappa_0 = \kappa_{1,2}(q,\sigma)\left(\frac{E_2}{\ell}\right)^{-1} = \frac{E_b\,\ell}{E_2 H}, \quad \kappa_{1,2}(q,\sigma) = \gamma_{1,2}(q,\sigma)\frac{E_b}{H}, \;\; \gamma_{1,2}(q,\sigma) = 1. \tag{4}$$

Здесь $\kappa_{1,2}(q,\sigma)$ — жесткость связей в концевой области трещины, одинаковая в нормальном и касательном направлениях и постоянная вдоль концевой области.

При выполнении вычислений полагалось, что модуль упругости связей в концевой области трещины на границе соединения материалов равен модулю упругости материала второй подобласти $(E_b = E_2)$. Изменение относительной жесткости связей осуществлялось (при заданной длине трещины) посредством изменения параметра $H$, см. (3)–(4).

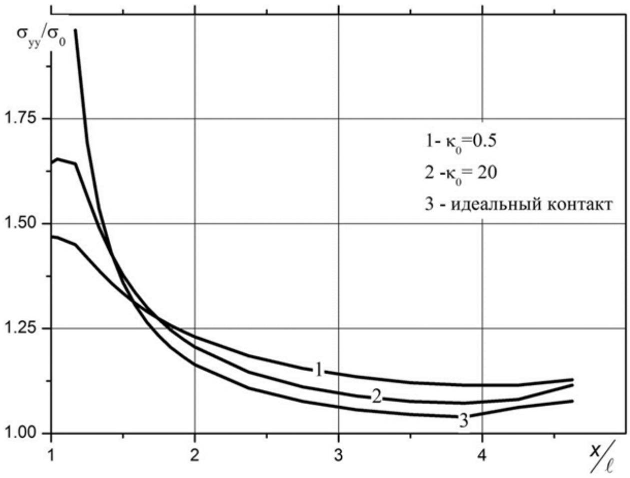



*Рис. 3. Распределение напряжений $\sigma_{yy}$ вдоль границы соединения подобластей*

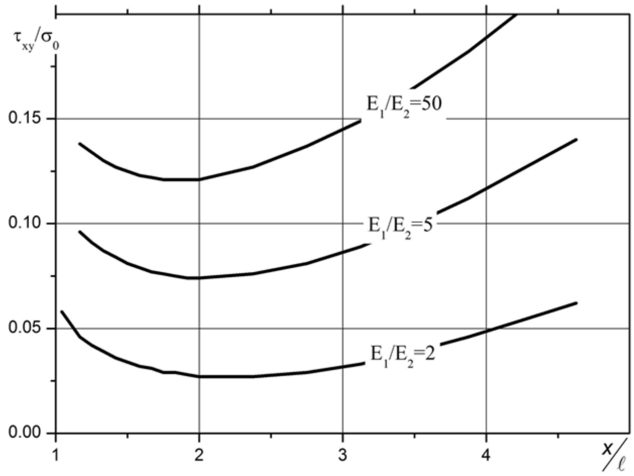
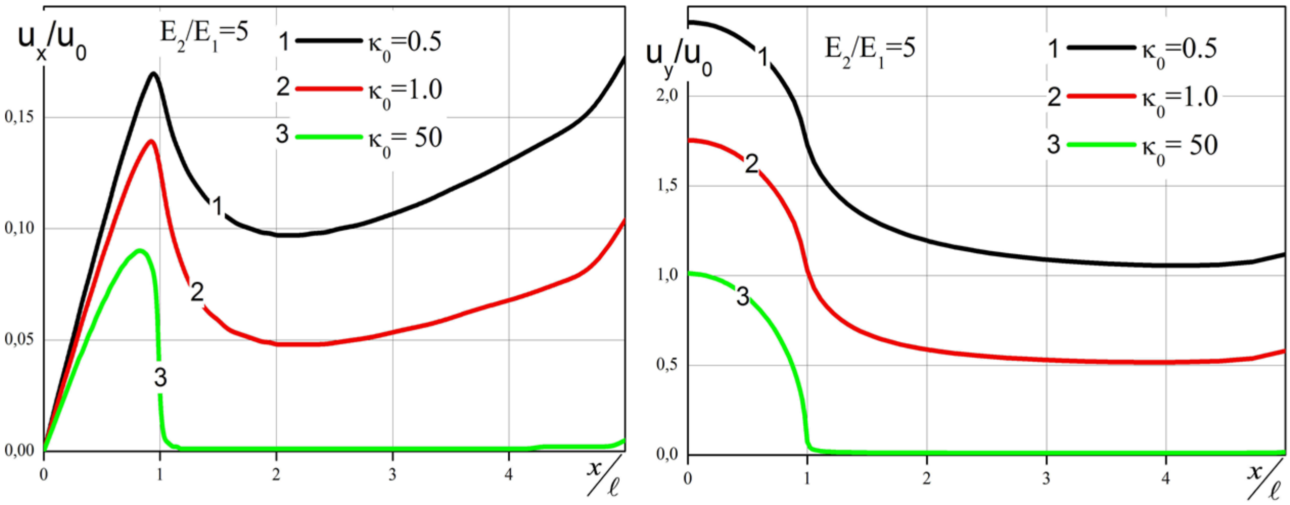



*Рис. 4. Распределение напряжений $\tau_{xy}$ вдоль границы соединения подобластей,* $\kappa_0 = 1.0$

Задача об одноосном растяжении пластины с центральной прямолинейной трещиной, расположенной на границе соединения различных материалов (см. рис. 1), рассмотрена для $W/\ell = 5$, где $W$ — половина ширины составной пластины, $\ell$ — половина длины трещины. Ввиду симметрии задачи моделировалась только 1/2 часть пластины (см. рис. 2). Внешняя растягивающая нагрузка $\sigma_0 = \sigma_{0y}$ в направлении оси $OY$ прикладывалась на участке $0 \le x \le W$, $y = \pm W$. На линии симметрии I-I (см. рис. 2а) полагались равными нулю нормальная составляющая перемещений и касательная составляющая усилий.

Расчеты выполнены для случая трещины свободной от связей при условии неидеального контакта (см. выражения (3)) вдоль линии соединения подобластей, $x \ge \ell$, $y = 0$. На рис. 3 показана зависимость компоненты напряжений $\sigma_{yy}$ вдоль линии соединения подобластей для различных значений относительной жесткости связей на участке неидеального контакта между материалами. При увеличении жесткости связей распределении напряжений стремится к соответствующему распределению при идеальном контакте между подобластями. Это результат качественно согласуется с асимптотической оценкой, полученной в работе [4]. При снижении жесткости связей распределение напряжений становится более однородным. Деформированное состояние области при относительной жесткости связей $\kappa_0 = 0.5$ (мягкие связи) и $\kappa_0 = 50$ (жесткие связи) показано на рис. 2b (заштрихованная зона), где видно относительное смещение подобластей при малой $(\kappa_0 = 0.5)$ жесткости связей. При соединении различных материалов на участке контакта подобластей возникают сдвиговые напряжения, величина которых зависит от соотношения модулей упругости материалов $E_1 / E_2$, см. рис. 4. Относительные смещения вдоль трещины (раскрытие трещины) и вдоль неидеального соединения материалов показаны на рис. 5а, б, где $u_0$ — нормальное смещение в центре трещины без связей, расположенной на границе с идеальным соединением материалов. Для относительно мягких связей виден скачок смещений между подобластями вдоль линии их неидеального соединения, тогда как для жестких связей относительные смещения очень близки к случаю идеального соединения подобластей.

Следующая серия расчётов выполнена для модели пластины с двумя краевыми трещинами и внутренним подкрепляющим слоем материала с другими механическими свойствами, плоское напряжённое состояние, коэффициенты Пуассона материалов полагались одинаковыми, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, одноосное растяжение по нормали к плоскости трещин (см. рис. 6). Расчётная




*а) б)*

*Рис. 5. Пластина с центральной трещиной без связей. Относительные перемещения вдоль трещины и участка неидеального соединения подобластей: а) касательные; б) нормальные*

модель пластины с краевой трещиной, учитывающая симметрию задачи, приведена на рис. 7 (область ABCD, см. рис. 6), однородная растягивающая нагрузка $\sigma_0$ прикладывалась к верхнему краю пластины. Трещина рассматривалась как свободная от связей, так и заполненная связями. Закон деформации связей принимался в форме (3)–(4) в предположении, что $\gamma_2 = 0$ (жёсткость связей в направлении вдоль трещины равна нулю).

Зависимости КИН в вершине трещины, заполненной связями $(\kappa_0 = 1)$, от относительной жесткости подкрепляющего слоя $E_2 / E_1$ приведены на рис. 8. Увеличение жесткости слоя приводит к значительному снижению КИН. При $E_2 / E_1 \sim 10$ экранирующий эффект слоя стабилизируется. Отметим также, что экранирующий эффект слоя усиливается с приближением вершины трещины к поверхности слоя.

Влияние жесткости связей в концевой области трещины (трещина заполнена связями) на величину КИН иллюстрирует рис. 9, где представлены зависимости КИН от относительной жесткости связей при $E_2 / E_1 = 10$. Заполнение трещины связями с относительной жесткостью $\kappa_0 = 1$ приводит к почти трехкратному снижению КИН. При дальнейшем увеличении жесткости связей этот эффект стабилизируется. Таким образом, заполнение трещины связями соответствующей жесткости приводит к существенному повышению эффективности упрочнения.

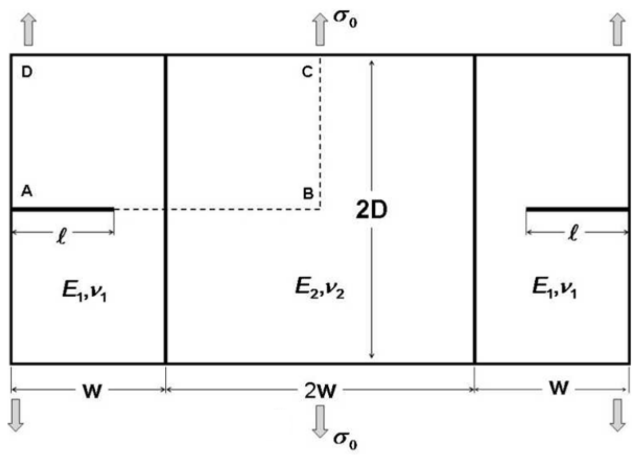



*Рис. 6. Модель пластины с двумя краевыми трещинами и подкрепляющим слоем*

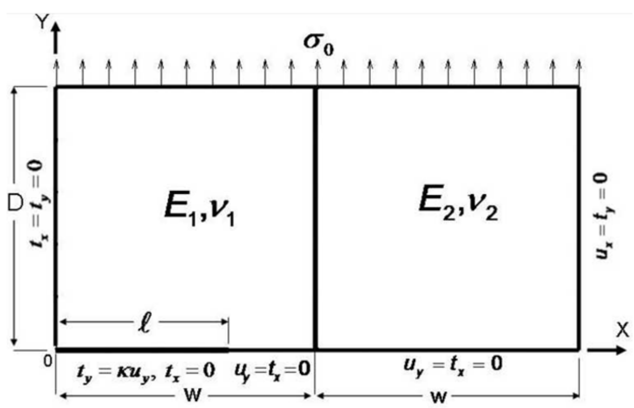



*Рис. 7. Расчетная область: учёт симметрии задачи и граничные условия,* $W / \ell = 1.5$, $D / W = 1$

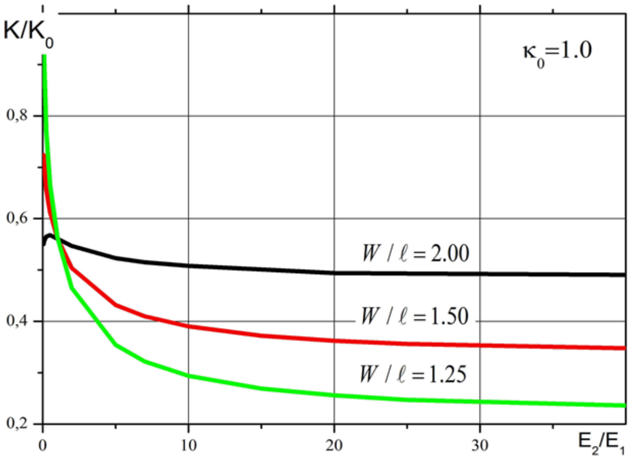



*Рис. 8. Зависимость КИН от относительной жесткости подкрепляющего слоя,* $K_0 = \sigma_0\sqrt{\pi\ell}$

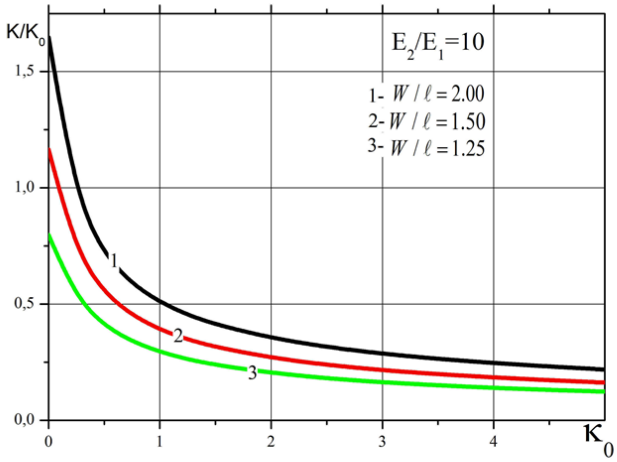



*Рис. 9. Зависимость КИН от относительной жесткости связей, заполняющих трещину*

Рассмотрим распределения нормальной составляющей усилий в связях вдоль трещины, заполненной связями, при $\kappa_0 = 1,\ W/\ell = 1.25$ в зависимости от относительной жесткости подкрепляющего слоя (см. рис. 10). Форма распределения усилий и их величина существенно зависят от относительной жесткости слоя. При малой жесткости подкрепляющего слоя усилия в связях вдоль трещины снижаются, уменьшается вклад связей в экранирующий эффект и, соответственно, КИН в вершине трещины возрастает.

Эпюра нормальных напряжений вдоль контура расчетной области при $\kappa_0 = 1$ и $E_2 / E_1 = 10$ представлена на рис. 11. Максимальные напряжения в подкрепляющем слое $(\sigma_{yy} / \sigma_0 = 2.93)$ заметно выше, чем напряжения в области с трещиной, где нормальные напряжения близки к номинальным $(\sigma_{yy} / \sigma_0 \sim 1.0)$, за исключением окрестности вблизи вершины трещины.

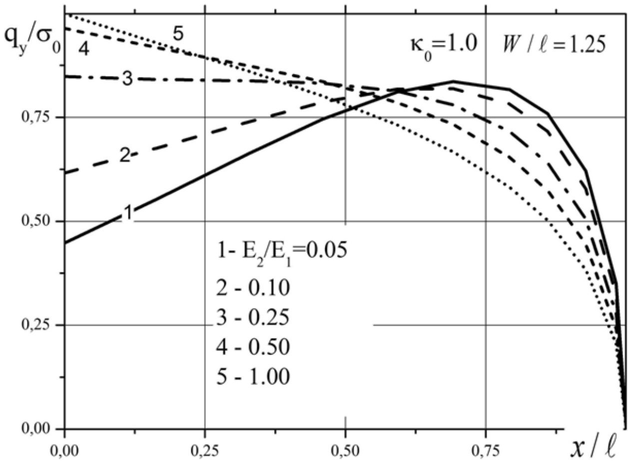



*Рис. 10. Нормальные усилия в связях вдоль трещины, заполненной связями, влияние жесткости подкрепляющего слоя,* $\kappa_0 = 1$, $W/\ell = 1.25$

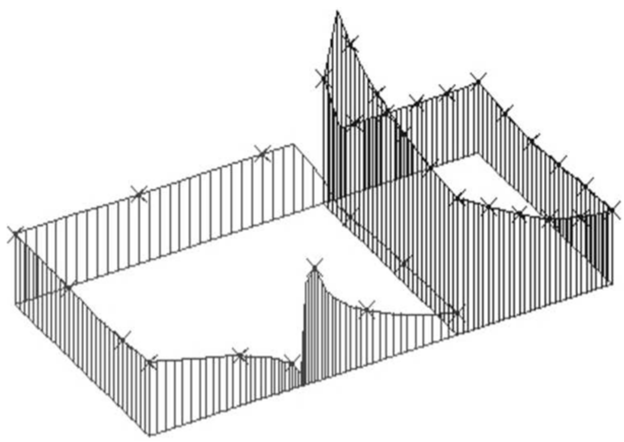


*Рис. 11. Эпюра нормальных напряжений вдоль контуров расчетной области*

**Заключение**

Анализ распределений напряжений и КИН является первым этапом моделирования роста трещин в рамках модели трещины со связями в концевой области с учетом эффекта слабых интерфейсных зон. Метод граничных интегральных уравнений является эффективным методом решения указанного класса задач и может быть использован для конструкций конечного размера с криволинейными трещинами со связями в концевой области и участками слабых интерфейсных зон при механических и термических нагрузках. Анализ развития трещин может быть выполнен на основе нелокального критерия разрушения для трещин со связями в концевой области [13, 14].

## Благодарности

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310386-3).

## Литература

1. *Goldstein, R. V.* Modeling of bonding at an interface crack / R. V. Goldstein, M. N. Perelmuter // International J. of Fracture. – 1999. – V. 99, N 1–2. – P. 53–79.

2. *Гольдштейн, Р. В.* Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами. / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Изв. РАН. МТТ. – 2001.– № 1. – С. 94–112.

3. *Гольдштейн, Р. В.* Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22–39.

4. *Balanford, G.* Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method / G. Balanford, A. Ingraffea, J. Liggett // Int. J for Numer. Meth in Eng. – 1981.– V 17. – P. 387–404.

5. *Araujo, F. C.* Boundary-element parallel-computing algorithm for the microstructural analysis of general composites / F. C. Araujo, E. F. d'Azevedo, L. J. Gray // Computers and Structures. –2010. – V. 88. – P. 773–784.

6. *Wang, Y.* Boundary element parallel computation for 3D elastostatics using CUDA / Y. Wang, Q. Wang, G. Wang, Y. Huang, Y. Wei // Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences, August 29–31.– 2011. – Washington, DC, USA. – P. 1–9.

7. *Wang, B.* Iterative coupling algorithms for large multidomain problems with the boundary element method / B. Wang, Y. Fen, S. Pieraccini, S. Scialo, C. Fidelibus // Int. J Num. Methods Eng. – 2018. – P. 1–14.

8. *Ентов, В. М.* К модели хрупкого разрушения Прандтля / В. М. Ентов, Р. Л. Салганик // Изв. АН. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 87–99.

9. *Бенерджи, П.* Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд – М.: МИР, 1984.– 494 с.

10. *Перельмутер, М. Н.* Применение метода граничных элементов при исследовании пространственного напряженного состояния составных конструкций / М. Н. Перельмутер // Сб. «Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении». Вып. 4. – Тр. ЦИАМ № 1237. –1989. – С. 74–99.

11. *Перельмутер, М. Н.* Анализ напряженного состояния в концевой области трещины на границе раздела материалов методом граничных элементов / М. Н. Перельмутер // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 415–42.

12. *Perelmuter, M.* Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks / M. Perelmuter // Computational Mechanics. – 2013. – V. 51, № 4. – P. 523–534.

13. *Перельмутер, М. Н.* Критерий роста трещин со связями в концевой области / М. Н. Перельмутер // ПММ. – 2007. – Т. 71, вып.1. – С. 152–171.

14. *Perelmuter, M.* Nonlocal criterion of bridged cracks growth: analytical analysis / M. Perelmuter // Acta Mechanica. – 2015. – V. 226, No 2. – P. 397–418.

УДК 539.375

# О РАСТЯЖЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ В ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

**Н. И. Петров**

*Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова*

**Аннотация.** В работе рассматривается решение линеаризированных уравнений теории малых упругопластических деформаций [1–7] в случае осесимметричной задачи. Предполагается, что в начальном состоянии имеет место простое растяжение. В первом приближении получены соотношения для компонент перемещений, деформаций и напряжений. Решения выражаются через функции Бесселя нулевого и первого порядка. В работе рассматривается растяжение бесконечно длинного цилиндрического стержня переменного сечения.
**Ключевые слова:** линеаризация, растяжение, напряжение, деформация, функция Бесселя, граничные условия.

В случае осесимметричной деформации соотношения теории малых упругопластических деформаций имеют вид [1–2]

$$\sigma_r-\sigma=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}e_r\ ,\qquad \sigma_z-\sigma=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}e_z\ ,$$

$$\sigma_\theta-\sigma=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}e_\theta\ ,\qquad \tau_{rz}=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}e_{rz}\ ,$$

$$\sigma_i=\Phi\left(e_i\right),\qquad e_r+e_\theta+e_z=0\ , \tag{1}$$

$$\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)^2+\left(\sigma_\theta-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_r\right)^2+6\tau_{rz}^2\right]^{\frac{1}{2}}\ ,$$

$$e_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\left(e_r-e_\theta\right)^2+\left(e_\theta-e_z\right)^2+\left(e_z-e_r\right)^2+6e_{rz}^2\right]^{\frac{1}{2}}\ .$$

Обозначим $\Phi\left(e_i\right)=3\Psi\left(e_i\right)e_i$. Соотношения (1) примут вид

$$\sigma_r-\sigma=2\Psi\left(e_i\right)e_r\ ,\quad \sigma_z-\sigma=2\Psi\left(e_i\right)e_z\ ,$$

$$\sigma_\theta-\sigma=2\Psi\left(e_i\right)e_\theta\ ,\quad \tau_{rz}=2\Psi\left(e_i\right)e_{rz}. \tag{2}$$

Решение будем искать в виде рядов по степеням параметра $\delta$

$$\sigma_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n\sigma_{ij}^n\ ,\quad e_i=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n e_i^n\ .$$

Предположим, что в начальном состоянии имеет место простое растяжение

$$\sigma_z^0=\mathrm{const},\ \ \sigma_r^0=\sigma_\theta^0=\tau_{rz}^0=0\ ,$$

$$e_r^0=e_\theta^0=-\frac{1}{2}e_z^0\ ,\ \ e_{r\theta}^0=0.$$

Для функции $\Psi\left(e_i\right)$ имеет место разложение

$$\Psi\left(e_i\right)=\Psi^{(0)}\left(e_i^0\right)+\delta\frac{d\Psi^{(0)}}{de_i}e_i'+\delta^2\left[\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi^{(0)}}{de_i^2}\left(e_i'\right)^2+\frac{d\Psi^{(0)}}{de_i}e_i''\right]+\ldots$$

где значения функции $\Psi$ и ее производных взяты в исходном состоянии при $e_i=e_i^0$.

Линеаризированные соотношения (2) в первом приближении имеют вид

$$\sigma_r'=\sigma'+2Be_r'+\left(B+A\right)e_z'\ ,$$

$$\sigma'_\theta = \sigma' + 2Be'_\theta + \left(B + A\right)e'_z \ , \tag{3}$$
$$\sigma'_z = \sigma' + 2Ae'_z \ ,$$
$$\tau'_{rz} = 2Be'_{rz},$$

где $e_i^0 = e_z^0, \ e'_i = e'_z, \ B = \Psi(e_i^0), \ A - B = \dfrac{d\Psi(e_i^0)}{de_i} e_z^0.$

Уравнению неразрывности удовлетворим, полагая
$$u'_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi'}{\partial r}, \quad u'_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}, \tag{4}$$

Для компонент тензора деформаций получаем выражения
$$e'_r = \frac{\partial u'_r}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r} \ , \ e'_\theta = \frac{u'_r}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial z},$$
$$e'_z = \frac{\partial u'_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r} \ ,$$
$$e'_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_r}{\partial z} + \frac{\partial u'_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2}\right). \tag{5}$$

Соотношения (3) примут вид
$$\sigma'_r = \sigma' + 2B\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r}\right) + \left(B - A\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r} \ ,$$
$$\sigma'_\theta = \sigma' + 2B\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right) + \left(B - A\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r},$$
$$\sigma'_z = \sigma' + 2A\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial r} \ ,$$
$$\tau'_{rz} = 2B\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2}\right). \tag{6}$$

Уравнения равновесия имеют вид
$$\frac{\partial \sigma'_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} = 0, \tag{7}$$
$$\frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\tau'_{rz}}{r} = 0.$$

Используя соотношения (6) и уравнения равновесия (7) получим уравнение для определения функции $\varphi'$
$$\frac{\partial^4 \varphi'}{\partial r^4} - \frac{2}{r}\frac{\partial^3 \varphi'}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial \varphi'}{\partial r} + \frac{\left(3A - B\right)}{B}\frac{\partial^4 \varphi'}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{\left(3A - B\right)}{B}\frac{1}{r}\frac{\partial^3 \varphi'}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\partial^4 \varphi'}{\partial z^4} = 0. \tag{8}$$

В работах [5, 6] решение уравнения (8) рассмотрено в полиномах. В данной работе рассмотрим решение уравнения (8) в виде
$$\varphi'\left(r,z\right) = \varphi\left(r\right) \cdot \sin \nu z \ . \tag{9}$$

Тогда из (8) и (9), получим
$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} - \frac{2}{r}\frac{d^3 \varphi}{dr^3} + \left(\frac{3}{r^2} - \frac{3A - B}{B}\nu^2\right)\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3A - B}{B}\frac{\nu^2}{r}\right)\frac{d\varphi}{dr} + \nu^4 \varphi = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) можно записать следующим образом

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\mu^2\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}+\bar{\mu}^2\varphi\right)=0 \qquad (11)$$

где

$$\mu^2=\frac{\nu^2}{2B}\left[(B-3A)+i\sqrt{3(B-A)(B+3A)}\right],$$

$$\bar{\mu}^2=\frac{\nu^2}{2B}\left[(B-3A)-i\sqrt{3(B-A)(B+3A)}\right]. \qquad (12)$$

Общим решением уравнения (11) является сумма решений уравнений

$$\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi_1}{dr}+\mu^2\varphi_1=0, \qquad \frac{d^2\varphi_2}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi_2}{dr}+\bar{\mu}^2\varphi_2=0. \qquad (13)$$

Подстановками

$$\varphi_1(r)=rQ_1(\mu r), \qquad \varphi_2=rQ_2(\bar{\mu}r) \qquad (14)$$

из (11) получаем уравнения

$$\mu^2r^2Q_1''+\mu rQ_1'+\left(\mu^2r^2-1\right)Q_1=0,$$

$$\bar{\mu}^2r^2Q_2''+\bar{\mu}rQ_2'+\left(\bar{\mu}^2r^2-1\right)Q_2=0, \qquad (15)$$

Общие интегралы уравнений (15) являются линейными комбинациями функций Бесселя и Неймана первого порядка. Функции Неймана обращаются в бесконечность при $r=0$ и в решении они должны отсутствовать. Для того, чтобы $\varphi'(r,z)$ не содержала мнимых членов возьмем в ее выражении произвольные постоянные сопряженными, то есть полагаем

$$\varphi'(r,z)=r\left[\bar{C}\mu I_1(\mu r)+C\bar{\mu}I_1(\bar{\mu}r)\right]\sin\nu z, \qquad (16)$$

где $I_1(\mu r)$ — функция Бесселя первого порядка.

Согласно (4), (5), (6) и (9) получим

$$u_r'=-\frac{\nu}{r}\varphi\cdot\cos\nu z, \qquad u_z'=\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\sin\nu z,$$

$$e_r'=\frac{\nu}{r}\left[\frac{1}{r}\varphi-\frac{d\varphi}{dr}\right]\cos\nu z, \qquad e_\theta'=-\frac{\nu}{r^2}\varphi\cos\nu z,$$

$$e_z'=\frac{\nu}{r}\frac{d\varphi}{dr}\cos\nu z, \qquad e_{rz}'=\frac{1}{2r}\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}+\nu^2\varphi\right]\sin\nu z,$$

$$\sigma_r'=\left[B\frac{1}{\nu r}\frac{d^3\varphi}{dr^3}-B\frac{1}{\nu r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\left(B\frac{1}{\nu r^3}-3A\frac{\nu}{r}\right)\frac{d\varphi}{dr}+2B\frac{\nu}{r^2}\varphi\right]\cos\nu z\ ,$$

$$\sigma_\theta'=\left\{B\frac{1}{\nu r}\frac{d^3\varphi}{dr^3}-B\frac{1}{\nu r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\left[(2B-3A)\frac{\nu}{r}+B\frac{1}{\nu r^3}\right]\frac{d\varphi}{dr}-2B\frac{\nu}{r^2}\varphi\right\}\cos\nu z\ ,$$

$$\sigma_z'=\left[B\frac{1}{\nu r}\frac{d^3\varphi}{dr^3}-B\frac{1}{\nu r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+B\left(\frac{\nu}{r}+\frac{1}{\nu r^3}\right)\frac{d\varphi}{dr}\right]\cos\nu z\ ,$$

$$\tau_{rz}'=B\frac{1}{r}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}+\nu^2\varphi\right)\sin\nu z. \qquad (17)$$

Сложим уравнения (13)

$$\left(\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}+\frac{d^2\varphi_2}{dr^2}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi_1}{dr}+\frac{d\varphi_2}{dr}\right)=-\mu^2\varphi_1-\bar{\mu}^2\varphi_2\,,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}=-\frac{\nu^2}{2B}\Big[(B-3A)\varphi_1+i\sqrt{3(B-A)(B+3A)}\varphi_1+$$
$$+(B-3A)\varphi_2-i\sqrt{3(B-A)(B+3A)\varphi_2}\;\Big], \tag{18}$$

где $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$.

Уравнение (18) запишем в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}=-\nu^2\left(e^{i\alpha}\cdot\varphi_1+e^{-i\alpha}\cdot\varphi_2\right), \tag{19}$$

где

$$\alpha=arctg\frac{\sqrt{3(B-A)(B+3A)}}{(B-3A)}.$$

Продифференцировав равенства (13) и сложив, получаем

$$\frac{d^3\varphi}{dr^3}-\frac{1}{r}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d\varphi}{dr}=-\nu^2\left(e^{i\alpha}\frac{d\varphi_1}{dr}+e^{-i\alpha}\frac{d\varphi_2}{dr}\right). \tag{20}$$

С учетом (19), (20) соотношения (16) принимают вид

$$u_r'=-\frac{\nu}{r}(\varphi_1+\varphi_2)\cos\nu z,\qquad u_z'=\frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi_1}{dr}+\frac{d\varphi_2}{dr}\right)\sin\nu z,$$
$$e_r'=\frac{\nu}{r}\left[\frac{1}{r}(\varphi_1+\varphi_2)-\left(\frac{d\varphi_1}{dr}+\frac{d\varphi_2}{dr}\right)\right]\cos\nu z,\qquad e_\theta'=-\nu(\varphi_1+\varphi_2)\cos\nu z,$$
$$e_z'=\frac{\nu}{r}\left(\frac{d\varphi_1}{dr}+\frac{d\varphi_2}{dr}\right)\cos\nu z,$$
$$e_{rz}'=\frac{\nu^2}{2r}\Big[\left(1-e^{i\alpha}\right)\varphi_1+\left(1-e^{-i\alpha}\right)\varphi_2\Big]\sin\nu z,$$
$$\sigma_r'=\frac{\nu}{r}\left[2B\frac{1}{r}(\varphi_1+\varphi_2)-\left(3A+Be^{i\alpha}\right)\frac{d\varphi_1}{dr}-\left(3A+Be^{-i\alpha}\right)\frac{d\varphi_2}{dr}\right]\cos\nu z\;,$$
$$\sigma_\theta'=\frac{\nu}{r}\left\{\left[(2B-3A)-Be^{i\alpha}\right]\frac{d\varphi_1}{dr}+\left[(2B-3B)-Be^{-i\alpha}\right]\frac{d\varphi_2}{dr}-2B\frac{1}{r}(\varphi_1+\varphi_2)\right\}\cos\nu z,$$
$$\sigma_z'=B\frac{\nu}{r}\left[\left(1-e^{i\alpha}\right)\frac{d\varphi_1}{dr}+\left(1-e^{-i\alpha}\right)\frac{d\varphi_2}{dr}\right]\cos\nu z,$$
$$\tau_{rz}'=B\frac{\nu^2}{r}\left(\left(1-e^{i\alpha}\right)\varphi_1+\left(1-e^{i\alpha}\right)\varphi_2\right)\sin\nu z, \tag{21}$$

где $\varphi_1=\bar{C}\mu rI_1(\mu r)$, $\varphi_2=C\bar{\mu}rI_1(\bar{\mu}r)$.

$$\frac{d\varphi_1}{dr}=\bar{C}\mu^2rI_0(\mu r),\ \frac{d\varphi_2}{dr}=C\bar{\mu}^2rI_0(\bar{\mu}r)$$

Таким образом компоненты перемещения, тензора деформаций и тенора напряжений в первом приближении выражаются через функции Бесселя нулевого порядка и первого порядка

$$u_r'=-\nu\left[\bar{C}I_1(\mu r)+CI_1(\bar{\mu}r)\right]\cos\nu z,$$
$$u_z'=\left[\bar{C}\mu I_0(\mu r)+C\bar{\mu}I_0(\bar{\mu}r)\right]\sin\nu z,$$
$$e_r'=\frac{\nu}{r}\left\{\left[\bar{C}I_1(\mu r)+CI_1(\bar{\mu}r)-r\left[\bar{C}\mu I_0(\mu r)+C\bar{\mu}I_0(\bar{\mu}r)\right]\right]\right\}\cos\nu z,$$
$$e_\theta'=-\nu r\left[\bar{C}I_1(\mu r)+CI_1(\bar{\mu}r)\right]\cos\nu z,$$

$$e'_z = \nu\left[\bar{C}\mu I_0(\mu r) + C\bar{\mu} I_0(\bar{\mu} r)\right]\cos\nu z,$$

$$e'_{rz} = \frac{\nu^2}{2}\left[\left(1-e^{i\alpha}\right)\bar{C}\mu I_1(\mu r) + \left(1-e^{-i\alpha}\right)C I_1(\bar{\mu} r)\right]\sin\nu z,$$

$$\sigma'_r = \frac{\nu}{r}\left[2B\left[\bar{C}I_1(\mu r) + C I_1(\bar{\mu} r)\right] - r\left(3A + Be^{i\alpha}\right)\bar{C}\mu I_0(\mu r) + \left(3A + Be^{-i\alpha}\right)C\bar{\mu} I_0(\bar{\mu} r)\right]\cos\nu z,$$

$$\sigma'_\theta = \frac{\nu}{r}\left[-2B\left[\bar{C}I_1(\mu r) + C I_1(\bar{\mu} r)\right] + \left[(2B-3A) - Be^{i\alpha}\right]\bar{C}\mu I_0(\mu r) + \right.$$
$$\left. + \left[(2B-3A) - Be^{-i\alpha}\right]C\bar{\mu} I_0(\bar{\mu} r)\right]\cos\nu z,$$

$$\sigma'_z = \nu B\left[\left(1-e^{i\alpha}\right)\bar{C}\mu I_0(\mu r) + \left(1-e^{i\alpha}\right)C\bar{\mu} I_0(\bar{\mu} r)\right]\cos\nu z\ ,$$

$$\tau'_{rz} = \nu^2 B\left(\left(1-e^{i\alpha}\right)\bar{C}I_1(\mu r) + \left(1-e^{-i\alpha}\right)C I_1(\bar{\mu} r)\right)\sin\nu z\ , \qquad (22)$$

Рассмотрим растяжение бесконечно длинного цилиндрического стержня переменного сечения. Уравнение поверхности стержня представим в виде

$$r = \alpha + \delta f(z), \qquad (23)$$

где $\alpha = const,\ \delta$ — малый параметр $(\delta \ll 1)$

Цилиндр растягивается вдоль оси $z$, боковая поверхность свободна от напряжений. Граничные условия на поверхности запишем в виде

$$\sigma_r \cos(nr) + \tau_{rz}\cos(nz) = 0\ ,$$

$$\tau_{rz}\cos(nr) + \sigma_z\cos(nz) = 0\ , \qquad (24)$$

где $n$ — нормаль к поверхности $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$ — компоненты напряжений в цилиндрической системе координат $r\theta z$.

Смещение точек цилиндра происходит в меридиальных плоскостях, положим

$$u_r = u_r(r,z),\ \ u_\theta = 0,\ \ u_z = u_z(r,z), \qquad (25)$$

где $u_r, u_\theta, u_z$ компоненты перемещения вдоль осей $r\theta z$

Линеаризированные граничные условия (24) имеют вид

$$\sigma'_z = 0, \qquad \tau'_{rz} - \sigma_z^0\frac{df}{dz} = 0, \qquad r = \alpha. \qquad (26)$$

Удовлетворим выражения (22) условиями (26)

$$2B\left[\bar{C}I_1(\mu\alpha) + C I_1(\bar{\mu}\alpha)\right] - \alpha\left[\left(3A + Be^{i\alpha}\right)\bar{C}\mu I_0(\mu\alpha) + \left(3A + Be^{-i\alpha}\right)C\bar{\mu} I_0(\bar{\mu}\alpha)\right] = 0,$$

$$2B\bar{C}I_1(\mu\alpha) + 2BC I_1(\bar{\mu}\alpha) - \left(3A + Be^{i\alpha}\right)\bar{C}\mu\alpha I_0(\mu\alpha) + \left(3A + Be^{-i\alpha}\right)C\bar{\mu}\alpha I_0(\bar{\mu}\alpha) = 0.$$

Из первого условия найдем

$$\bar{C} = \frac{\left(3A + Be^{-i\alpha}\right)\bar{\mu}\alpha I_0(\bar{\mu}\alpha) - 2BI_1(\bar{\mu}\alpha)}{2BI_1(\mu\alpha) - \left(3A + Be^{i\alpha}\right)\mu\alpha I_0(\mu\alpha)}C. \qquad (27)$$

Тогда из второго условия находим

$$f = \frac{CB\nu cos\nu z}{\sigma_z^0}\left\{\frac{\left(1-e^{i\alpha}\right)\left[\left(3A + Be^{-ia}\right)\bar{\mu}\alpha\, I_0(\bar{\mu}\alpha) - 2BI_1\left(\overline{\mu\alpha}\right)\right]I_1(\mu\alpha) + \left(1-e^{-i\alpha}\right)\left[2BI_1(\mu\alpha) - \left(3A + Be^{ia}\right)\mu\alpha\, I_0(\mu\alpha)\right]I_1(\bar{\mu}\alpha)}{2BI_1(\mu\alpha) - \left(3A + Be^{ia}\right)\mu\alpha I_0(\mu\alpha)}\right\} \qquad (28)$$

Положив $f = A\cos z, \quad A = \mathrm{const}$, искомое решение определим из выражений (22), где значение коэффициента $C$ находится из соотношения (28), а коэффициента $\bar{C}$ из соотношения (27).

**Литература**


1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

2. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

3. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

4. *Ивлев Д. Д., Михайлова М. В., Петров Н. И.* О полиномиальных решениях линеаризированных уравнений теории малых упругопластических деформаций в полярных координатах. // Известия ИТА ЧР. – 1996–1997. – N 3(4)-2(7). – С. 64–69.

5. *Петров Н. И.* Полиноминальное решение линеаризированных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций. //Известия ИТА ЧР. – 1996–1997. – N 3(4)-2(7). – С. 70–71.

6. *Петров Н. И.* Решение линеаризированных задач осесимметричного состояния в теории малых упругопластических деформаций в полиномах // В сб. научных трудов международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования в области естественных и технических наук», Белгород. – 2018. – С. 28–30.

УДК 539.3:534.26

# РАССЕЯНИЕ ЗВУКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦИЛИНДРОМ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

**Н. Ю. Пешков**

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Осуществлено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом цилиндре, на боковую поверхность которого нанесен кусочно-непрерывный неоднородный слой. Покрытие состоит из участков с одинаковыми геометрическими, но разными материальными характеристиками. Цилиндр находится в пространстве, заполненном идеальной жидкостью. Решение выполнено на основе линейной теории упругости и модели распространения малых возмущений в идеальной жидкости с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Приведены результаты расчета диаграмм рассеяния звуковой волны, которые показывают влияние геометрических и материальных параметров цилиндра на дифракцию звука.

**Ключевые слова:** акустическое пространство, плоская звуковая волна, однородный упругий цилиндр, кусочно-непрерывный неоднородный слой, рассеянное поле, потенциал смещений, излучающая граница, метод конечных элементов, датчик, диаграмма рассеяния.

## Введение

Решение задачи дифракции акустических волн на упругом теле существенно зависит от формы тела и свойств его материала. Полученное решение задачи дифракции может быть применено для идентификации параметров упругого тела. Такие решения могут быть использованы при разработке методов исследования в ультразвуковой диагностике, дефектоскопии и гидроакустике.

Рассеяние звуковых волн на однородных упругих телах цилиндрической формы исследовалось в работах [1, 2]. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью покрытий в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя. Дифракция акустических волн на цилиндрических упругих однородных телах с непрерывно-неоднородными покрытиями рассматривалась в [3–6].

Широкие возможности для исследования задач дифракции дает использование метода конечных элементов [7–9], который уже много лет с успехом применяется в решении различных практических задач гидродинамики и теории упругости. В монографии [9] подробно изложены различные аспекты использования МКЭ при решении задач о рассеянии звука объектами различного типа: жесткими, мягкими, упругими.

В данной работе представлено решение задачи дифракции плоской звуковой волны упругим цилиндром, боковая поверхность которого покрыта кусочно-непрерывным неоднородным слоем, в акустическом пространстве с использованием метода конечных элементов.

## 1. Постановка задачи

Предполагается, что в пространстве $E$, заполненном идеальной жидкостью с плотностью $\rho_0$ и скоростью звука $c_0$, находится упругий объект $T$, внутренняя (основная) часть которого — упругий однородный цилиндр радиуса $r_1$ с центром $O$ и осью вращения $L$, имеющий высоту $H$. На боковую поверхность цилиндра нанесен неоднородный упругий слой толщины $h$. Покрытие разделено на $N$ равных частей полуплоскостями, проходящими через ось $L$, так, что угол между каждой соседней парой полуплоскостей равен $\upsilon = 2\pi/N$. Считаются заданными физические характеристики (плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона) для однородной части тела — $\rho_1$, $E_1$, $\nu_1$ и для участков внешнего слоя — $\rho_{2_j}(\mathbf{r})$, $E_{2_j}(\mathbf{r})$, $\nu_{2_j}(\mathbf{r})$ $(j=\overline{1,N})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки пространства.

Из акустического пространства на тело $T$ падает плоская монохроматическая звуковая волна. Полагается, что потенциал смещений $\Psi_p$ частиц жидкости в ней имеет вид

$$\Psi_p = e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-\omega t)},$$

где $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор падающей волны ($|\mathbf{k}_0| = k_0 = \omega/c_0$); $\omega$ — круговая частота; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки пространства; $t$ — время. Без ограничения общности принимается $|\Psi_p| = 1$. Поскольку падающая волна является гармонической, то для функций, зависящих и от координат и от времени, зависимость от времени $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ будем опускать.

В результате взаимодействия с препятствием падающая волна искажается и образуется рассеянная волна, потенциал смещений $\Psi_s$ частиц жидкой среды которой требует определения в задаче.

Геометрическая схема задачи представлена на рис. 1.а.

Введем глобальную ортогональную декартову систему координат $Oxyz$. Также введем локальную систему координат $Ox_1y_1z_1$ так, чтобы одна из полуплоскостей-сепараторов неоднородного слоя совпала с полуплоскостью $\Pi:\begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$. Тогда уравнение боковой поверхности $\Gamma_1$ однородной части рассеивателя $T$ будет иметь каноническую форму

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2,\ -\frac{H}{2} \leq z_1 \leq \frac{H}{2}.$$

Каждой точке $M(x_1, y_1, z_1)$ внутренней поверхности $\Gamma_1$ будет соответствовать точка внешней боковой поверхности $\Gamma_2$ тела с локальными координатами

$$x_2 = r_2\cos\phi_1,\ y_2 = r_2\sin\phi_1,\ -\frac{H}{2} \leq z_2 \leq \frac{H}{2}, \tag{1}$$

где $r_2 = r_1 + h$; $\phi_1 = \arg(x_1 + iy_1)$ — угол между проекцией радиус вектора точки $M$ на плоскость $Ox_1y_1$ и положительным направлением оси $Ox_1$.

Введем параметр $q$ — расстояние от поверхности $\Gamma_1$ внутренних точек неоднородного упругого слоя тела $T$. Тогда любую точку $(x_2, y_2, z_2)$ внутри этого кусочно-непрерывного слоя по аналогии с (1) можно представить в следующем виде

$$x_2 = (r_1+q)\cos\phi_1,\ y_2 = (r_1+q)\sin\phi_1,\ -\frac{H}{2} \leq z_2 \leq \frac{H}{2}, \tag{2}$$

где $0 \leq q \leq h$.

Ориентацию осей локальной системы координат $Ox_1y_1z_1$ по отношению к глобальной $Oxyz$ будем задавать углами Эйлера $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ так, что координаты связаны выражением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_\alpha \cdot M_\beta \cdot M_\gamma \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

где $M_\alpha$, $M_\beta$ и $M_\gamma$ — матрицы поворота. Эти углы Эйлера (у. Э.) будем трактовать как углы поворота тела $T$ при задании его ориентации по отношению к системе координат $Oxyz$.

Схематично, геометрия задачи после введения систем координат представлена на рис. 1.б. Упругое тело на нем представлено сечениями поверхности $T$ координатными плоскостями системы координат $Ox_1y_1z_1$. На осях $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ указаны точки $r_{2_x}$, $r_{2_y}$ и $H_z$ с локальными координатами $(r_2, 0, 0)$, $(0, r_2, 0)$ и $(0, 0, H/2)$.

Обозначим области, занимаемые различными средами так: $\Omega_0$ — область пространства $E$, занятая идеальной жидкостью; $\Omega_1$ — область цилиндра, занятая однородной упругой средой

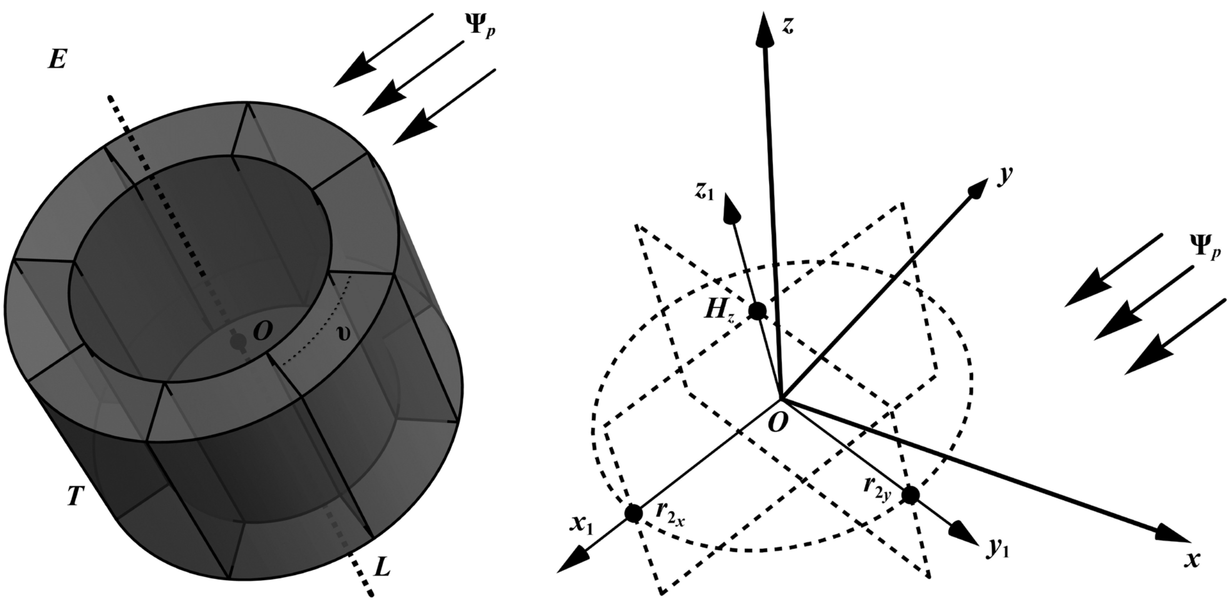



*Рис. 1. Постановка задачи*

$(x_1^2 + y_1^2 \le r_1^2,\ -H/2 \le z_1 \le H/2)$; $\Omega_{2_j}$ — $j$-й участок неоднородного слоя упругого препятствия $(x_1 = (r_1+q)\cos\phi_1,\ y_1 = (r_1+q)\sin\phi_1,\ -H/2 \le z_1 \le H/2;\ 0 \le q \le h,\ (j-1)\cdot\upsilon \le \phi_1 \le j\upsilon)$.

В области $\Omega_0$ движение частиц идеальной жидкости определяется потенциалами смещений в падающей $\Psi_p$ и рассеянной $\Psi_s$ волнах. Смещение $\mathbf{u}_0$ и давление $p_0$ в области $\Omega_0$ определяются через эти потенциалы так [10]

$$\mathbf{u}_0 = \operatorname{grad}(\Psi_0),\ \ p_0 = \rho_0\omega^2\Psi_0, \tag{3}$$

где $\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s$ — потенциал смещений в суммарном акустическом поле в области $\Omega_0$. При этом потенциал $\Psi_s$ должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [10]

$$\Delta\Psi_s + k_0^2\Psi_s = 0 \tag{4}$$

и условиям излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\Psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right),\ \lim_{r\to\infty}\left[\left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial r} - ik_0\Psi_s\right)\right] = o\left(\frac{1}{r}\right), \tag{5}$$

где $r = |\mathbf{r}|$.

Предполагается, что движение частиц в препятствии подчиняется законам линейной теории упругости [11]. Обозначим вектор смещений и тензор напряжений в области $\Omega_\zeta$ через $\mathbf{u}_\zeta$ и $\sigma_\zeta$ соответственно $(\zeta \in \{2_j, 1\})$. Тогда уравнения движения в $\Omega_\zeta$ будут иметь вид

$$\operatorname{div}(\sigma_\zeta) = -\rho_\zeta\omega^2\mathbf{u}_\zeta, \tag{6}$$

где $\operatorname{div}(\sigma_\zeta)$ — первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений $\sigma_\zeta$.

Тензор напряжений выражается через компоненты вектора смещений посредством закона Гука, так что уравнения (6) можно рассматривать как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент векторов смещений $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_{2_j}$.

На поверхности $\Gamma_{2_k,2_l}$, являющейся границей $k$-го и $l$-го участков внешнего покрытия цилиндра, $(x_1 = (r_1+q)\cos\phi_1,\ y_1 = (r_1+q)\sin\phi_1,\ -H/2 \le z_1 \le H/2;\ 0 \le q \le h,\ \phi_1 = \begin{bmatrix} \min\{k,l\}, & |l-k| = 1 \\ 0, & |k-l| = N-1 \end{bmatrix} \cdot \upsilon)$ и на поверхности $\Gamma_{1,2_m}$ соединения $m$-го участка неоднородного слоя и однородной части тела $T$ $(x_1 = r_1\cos\phi_1,\ \ y_1 = r_1\sin\phi_1,\ -H/2 \le z_1 \le H/2;\ (m-1)\cdot\upsilon \le \phi_1 \le m\upsilon)$ должны быть непрерывными смещения и тензор напряжений:

$$\mathbf{u}_\xi\big|_{\Gamma_{\xi,\varsigma}} = \mathbf{u}_\varsigma,\ \ \sigma_{\xi nn}\big|_{\Gamma_{\xi,\varsigma}} = \sigma_{\varsigma nn},\ \ \sigma_{\xi n\tau}\big|_{\Gamma_{\xi,\varsigma}} = \sigma_{\varsigma n\tau}\ \ (\tau = 1,2), \tag{7}$$

где $(\xi,\varsigma) \in \{(2_k, 2_l), (1, 2_m)\}$; $\sigma_{\chi ng}$ — компоненты скалярных произведений $\mathbf{n}\cdot\sigma_\chi$ $(\chi = \xi,\varsigma$, $g = n,\tau)$; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\Gamma_{\xi,\varsigma}$; $\tau$ — индекс, определяющий два касательных к $\Gamma_{\xi,\varsigma}$ направления.

На внешних поверхностях тела — $\Gamma_{0,2_k}$:

$$\Gamma_{0,2_k} = \Gamma'_{0,2_k} \bigcup \Gamma''_{0,2_k},$$

$$\Gamma'_{0,2_k} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + q)\cos\phi_1 \\ (r_1 + q)\sin\phi_1 \\ \pm\dfrac{H}{2} \end{pmatrix};\ \ 0 \le q \le h,\ \ (k-1)\cdot\upsilon \le \phi_1 \le k\upsilon \right\},$$

$$\Gamma''_{0,2_k} = \left\{ x_1 = r_2\cos\phi_1,\ \ y_1 = r_2\sin\phi_1,\ \ -\frac{H}{2} \le z_1 \le \frac{H}{2};\ \ (k-1)\cdot\upsilon \le \phi_1 \le k\upsilon \right\},$$

и $\Gamma_{0,1} = \{x_1^2 + y_1^2 \le r_1^2,\ \ z_1 = \pm H/2\}$ — поверхностях соприкосновения жидкости с упругими материалами ($k$-м неоднородным и однородным соответственно) должны быть непрерывными нормальная компонента вектора смещений и тензора напряжений

$$u_{\xi n}\big|_{\Gamma_{0,\xi}} = u_{0n},\ \ \sigma_{\xi nn}\big|_{\Gamma_{0,\xi}} = -p_0,\ \ \sigma_{\xi n\tau}\big|_{\Gamma_{0,\xi}} = 0\ \ (\tau = 1,2), \tag{8}$$

где $\xi \in \{2_k, 1\}$; $n$ — индекс, соответствующий проекции на нормаль (индекс $\tau$ на касательные) уже к поверхности $\Gamma_{0,\xi}$. Величины $u_{0n}$ и $p_0$ выражаются через потенциал $\Psi_0$ в соответствии с (3).

Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решений уравнений (4) и (6), удовлетворяющих граничным условиям (7), (8) и условиям излучения (5).

## 2. Решение задачи

Решение задачи будем проводить численно с использованием метода конечных элементов на основе подхода [12, 13], подразумевающего искусственное ограничение бесконечной области акустического пространства с помощью условия, моделирующего излучающую границу. Это условие позволяет моделировать излучение вводимой границей области $\Omega_0$ плоской волны в окружающую среду. Участки границы с таким условием характеризуются минимальным, направленным внутрь области пространства $E$, отражением звукового поля $\Psi_0$. Граничное условие, имитирующее излучающую границу, имеет вид

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mathbf{n}} + ik_0\Psi_s + \frac{i}{2k_0}\Delta_{\parallel}\Psi_s = 0, \tag{9}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе; $\Delta_{\parallel}$ — оператор Лапласа в касательной плоскости для текущей точки границы.

В соответствии с подходом, предложенным в работе [14], усечем бесконечную область $\Omega_0$, введя в рассмотрение излучающую сферическую границу $\Gamma_0$ радиуса $r_0$ с центром в начале системы координат $Oxyz$ так, чтобы внутри поверхности $\Gamma_0$ оказались упругое препятствие и некоторая область жидкости $\underline{\Omega}_0$, содержащая тело $T$. При этом минимальное расстояние от упругого тела до $\Gamma_0$ должно иметь порядок характерного размера препятствия $T$.

Геометрическая схема задачи, модифицированная добавлением излучающей границы, представлена на рис. 2.a.

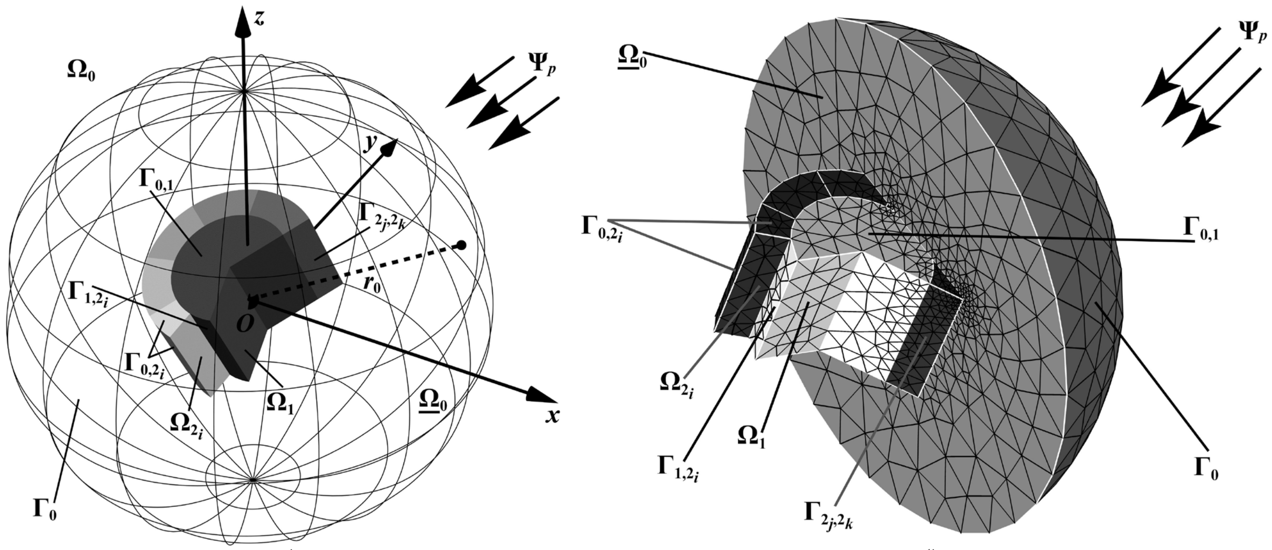
В скорректированной постановке задачи условия излучения (5) заменяются граничным условием (9).

Проведем дискретизацию совокупности областей жидкой и упругих сред $\Omega = \underline{\Omega}_0 \cup \Omega_1 \cup \left( \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_{2_j} \right)$ путем разбиения их на конечные элементы в форме тетраэдров. Иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 2.б.

Все неизвестные функции в $\Omega$ представляются в виде линейных комбинаций координатных функций узлов [9]. В частности для потенциала $\Psi_s$ можно записать

$$\Psi_s(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{M} \psi_{s_m} f_m(\mathbf{r}), \tag{10}$$

где $\psi_{s_m}$ — узловые значения потенциала в области $\Omega$; $f_m(\mathbf{r})$ — координатные функции конечно-элементной модели; $M$ — количество узлов. Будем считать, что множество значений $m = \overline{1, M}$ охватывает узлы всей КЭ-сетки области $\Omega$, а в узлах, не относящихся к $\underline{\Omega}_0$, положим $\psi_{s_m} \equiv 0$.




*а)* *б)*

*Рис. 2. Постановка задачи с учетом границы* $\Gamma_0$

В форме, аналогичной (10), будем искать и смещение в упругом препятствии (в областях $\Omega_1$ и $\Omega_{2_j}$)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{U}_m f_m(\mathbf{r}).$$

Здесь $\mathbf{u}$ рассматривается как общее обозначение для смещений $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_{2_j}$, введенных выше.

В результате граничные условия (7), (8) и (9) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций $\Psi_s$, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_{2_j}$ из ограниченной области $\Omega$. После этого можно решать краевую задачу для уравнений (4), (6) с указанными граничными условиями стандартной технологией МКЭ [9]. В результате решения находим все узловые значения неизвестных функций $\psi_{s_m}$, $\mathbf{U}_m$.

### 3. Численные исследования

Представленная модель решения задачи была использована для численных исследований определения рассеянного поля плоской звуковой волны в математическом пакете MATLAB [15]. При проведении численных исследований анализировались значения потенциала смещений в рассеянной звуковой волне $\Psi_{s_l}$ на окружности $V$ радиуса $r_0$ с центром $O$ в плоскости $Oyz$.

В качестве функциональных зависимостей параметров упругой среды $j$-го участка внешнего неоднородного покрытия однородного цилиндра рассматривались две линейные зависимости от расстояния $q$ от однородной части тела $T$ (см. (2)):

$$w_1^j(q) = \frac{2-(j-1)/(N-1)}{5} + \frac{q}{h},\ \ w_2^j(q) = \frac{6+(j-1)/(N-1)}{5} - \frac{q}{h}.$$

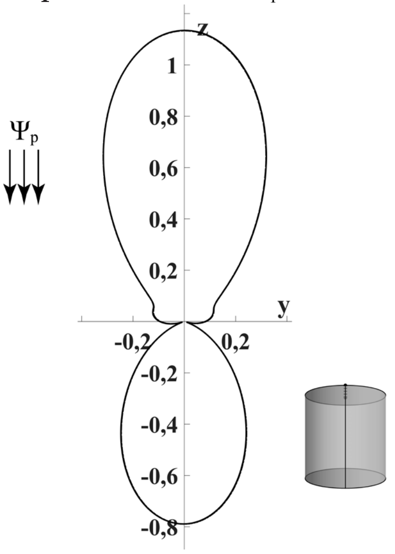
Зависимость параметров материала от координат в области $\Omega_{2_j}$ представлялась в виде $\rho_{2_j}(q) = \rho_1 w_j(q)$, $E_{2_j}(q) = E_1 w_j(q)$, $\nu_{2_j}(q) = \nu_1 w_j(q)$ ($w_j(q)$ — одна из функций $w_1^j(q)$, $w_2^j(q)$).

Предполагалось, что область $\underline{\Omega}_0$ ограничена сферической поверхностью $\Gamma_0$ радиуса $r_0 = (17/8)R$ ($R = \sqrt{r_2^2 + (H/2)^2}$ — характерный размер тела $T$). В качестве идеальной среды, заполняющей область $\underline{\Omega}_0$, использовалась жидкость с плотностью $\rho_0 = 1000$ кг/м$^3$ и скоростью звука $c_0 = 1485$ м/с.

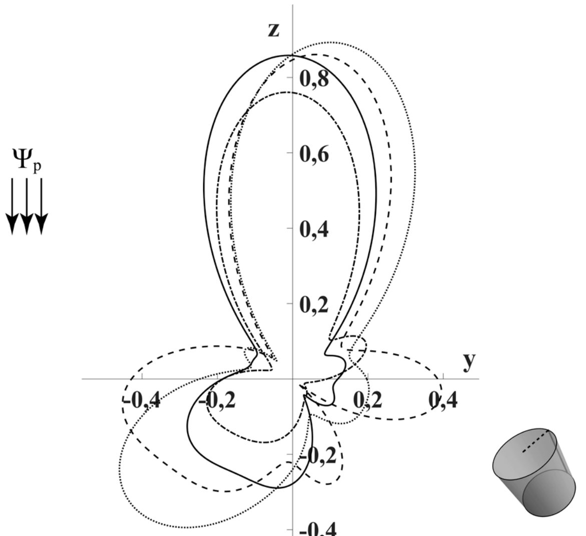
Рассматривалось упругое препятствие, имеющее следующие фиксированные геометрические характеристики: $r_1 = 0,5$ м, $H = 1$ м, $h = 0,25$ м. Подразумевалось, что параметр $N$ принимает значение из интервала $\breve{N} = [2,5]$. Ориентация цилиндра задавалась углами Эйлера $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (0,0,0)$; $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (-\pi/2, \pi/2, \pi/2)$; $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = (\pi/3, 2\pi/7, 8\pi/25)$; $(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4) = (-8\pi/25, 2\pi/5, 3\pi/7)$. Плотность и модули упругости в области $\Omega_1$ задавались так: $\rho_1 = 2700$ кг/м$^3$, $E_1 = 6,9443 \cdot 10^{10}$ Па и $\nu_1 = 53/158$.

Частота падающей волны выбиралась такой, что $k_0 R = 3,8$, а ее волновой орт-вектор $\underline{\mathbf{k}}_0$ имел декартовы координаты $\underline{\mathbf{k}}_0^1 = (0,0,-1)$ и $\underline{\mathbf{k}}_0^2 = (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Рис. 3, 4 иллюстрируют диаграммы рассеяния. Представленные на них кривые $\left|\Psi_s^g(\theta)\right|$ ($g \in \breve{N}$) изображены согласно следующим соответствиям между типами линий и количествами участков $g$ неоднородного упругого слоя: а) сплошная — 2 участка; б) штриховая — 3 участка; в) пунктирная — 4 участка; г) штрихпунктирная — 5 участков. На графиках схематично показаны (при наблюдении со стороны положительного направления оси $Ox$): в левом верхнем углу — направление падения плоской звуковой волны, подобно изображенному на рис. 1, 2; в правом нижнем углу — ориентация упругого препятствия (1. штриховая линия совпадает с линией пересечения полуплоскости $\Pi$ и верхнего основания цилиндра, а сплошная — с его образующей; 2. направление заполнения внешнего слоя участками идентично направлению против часовой стрелки при обходе контура верхнего основания однородной части тела $T$ с точки пересечения штриховой, сплошной линий и наблюдении со стороны положительного направления оси $Oz_1$).

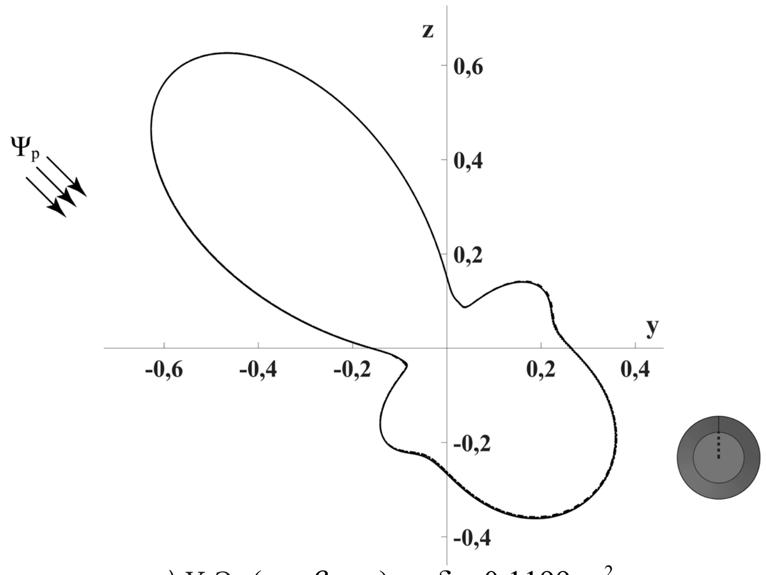



*а) У. Э. $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\delta = 0{,}0512$ м$^2$*

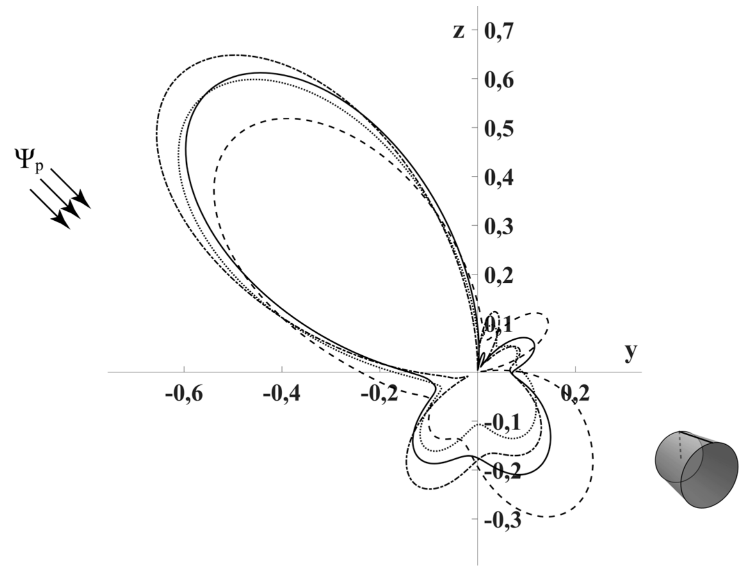



*б) У. Э. $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ и $\delta = 5{,}7088$ м$^2$*

*Рис. 3. $\left|\Psi_s^g(\theta)\right|$ при функциях неоднородности $w_1^j(q)$ и орт-векторе $\underline{\mathbf{k}}_0^1$*




*а) У. Э.* $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ *и* $\delta = 0{,}1199$ м$^2$




*б) У. Э.* $(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4)$ *и* $\delta = 2{,}8038$ м$^2$

*Рис. 4.* $\left|\Psi_s^g(\theta)\right|$ *при функциях неоднородности* $w_2^j(q)$ *и орт-векторе* $\underline{\mathbf{k}}_0^2$

Степень несовпадения диаграмм рассеяния характеризовалась величиной $\delta = \max\limits_{\substack{g_1, g_2 \in \tilde{N} \\ g_1 < g_2}} \sqrt{\sum_{l=1}^{L} \left( \left| \Psi_{s_l}^{g_1} - \Psi_{s_l}^{g_2} \right| \right)^2}$.

## Заключение

Полученные результаты показывают, что при рассмотренной частоте звука параметры внешнего покрытия цилиндра (семейство функций неоднородности его участков и их количество) оказывают весомое влияние на характер рассеянного поля только в случае определенного взаимного расположения упругого препятствия и волнового вектора падающей волны. Следует ожидать, что в этой ситуации повышение частоты набегающей волны приведет к более выраженным изменениям диаграмм рассеяния при варьировании упомянутых свойств.

**Литература**

1. *Ларин, Н. В.* Рассеяние плоской звуковой волны однородным термоупругим сплошным цилиндром / Н. В. Ларин // Известия Тульского Государственного университета. Технические науки. – 2016. – Вып. 7, ч. 2. – С. 191–202.

2. *Лямшев, Л. М.* Рассеяние звука упругими цилиндрами / Л. М. Лямшев // Акустический журнал. – 1959. – Т. 5, вып. 1. – С. 58–63.

3. *Толоконников, Л. А.* Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием / Л. А. Толоконников // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19, вып. 4. – С. 215–226.

4. *Толоконников, Л. А.* Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием / Л. А. Толоконников // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 3. – С. 202–208.

5. *Скобельцын, С. А.* Дифракция звука в полупространстве на конечном упругом цилиндре с неоднородным покрытием / С. А. Скобельцын, Н. Ю. Пешков // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – Вып. 7. – С. 158–174.

6. *Скобельцын, С. А.* Рассеяние звука неоднородным упругим эллиптическим цилиндром в акустическом полупространстве / С. А. Скобельцын, Н. Ю. Пешков // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – Вып. 7. – С. 183–200.

7. *Harari, I.* Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems / I. Harari, T. J. R. Hughes // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. – 1991. – V. 87. – P. 59–96.

8. *Gan, H.* Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain / H. Gan, P. L. Levin, R. Ludwig // J. Acoust. Soc. Am. – 1993. – V. 94, No 3, pt. 1 – P. 1651–1662.

9. *Ihlenburg, F.* Finite element analysis of acoustic scattering / F. Ihlenburg. – New York : Springer Publishing Company Inc., 2013. – 226 p.

10. *Исакович, М. А.* Общая акустика / М. А. Исакович. – М. : Наука, 1973. – 496 с.

11. *Новацкий, В.* Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

12. *Скобельцын, С. А.* Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов / С. А. Скобельцын. – Тула : ТулГУ, 2018. – 224 с.

13. Acoustics Module User's Guide / Stockholm : COMSOL AB, 2018. – 698 p.

14. *Иванов, В. И.* Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ / В. И. Иванов, С. А. Скобельцын // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 132–145.

15. MATLAB Programming Fundamentals / MA. : The MathWorks, Inc., 2018. – 1418 p.

УДК 539.3

# ВАРИАНТ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ БАЛКИ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

**А. А. Поддубный[1], В. А. Гордон[2]**

*[1]Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Республика Беларусь*
*[2]Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева*

**Аннотация.** Построена математическая модель динамического процесса в несущей конструктивно-нелинейной системе «балка-двухпараметрическое основание», возникающего в результате внезапной осадки части основания. Определены сочетания параметров балки и основания, обеспечивающих заданную частоту собственных изгибных колебаний балки, инициируемых образованием повреждения. Решения статической и динамической задач строятся методом начальных параметров с привлечением векторов состояний произвольных сечений балки и матриц влияния начальных параметров на состояние произвольных сечений балки. Решение статической задачи служит начальным условием задачи о вынужденных колебаниях, возникших после внезапного образования повреждения основания.
**Ключевые слова:** балка, основание Пастернака, внезапное повреждение, колебания, собственная частота, вектор состояния сечения, матрица влияния.

## Введение

Балки на упругом основании – широко используемая модель реальных сооружений: ленточных и свайных фундаментов, дорожных и аэродромных покрытий, железнодорожных путей, морских причалов и др. Анализ современного состояния исследований в области взаимодействия стержневых и пластинчатых несущих систем с упругими основаниями, выделение ключевых направлений, обзор аналитических и численных подходов к моделированию состояний и процессов в системах «балка-основание» содержатся в обзорных статьях с обширными списками литературы [1–4].

Одной из важных проблем данного направления строительной механики является разработка теории конструкционной безопасности стержневых и балочных конструкций, взаимодействующих с основаниями, учитывающей воздействия, не предусмотренные условиями нормальной эксплуатации, возникающих, в частности, при чрезвычайных ситуациях, включая террористические действия, в результате износа и накопления повреждений, при непродуманных и некачественных реконструкционных мероприятиях и т. п.

Анализ современной технической литературы показывает, что имеющиеся постановки и методы решения задач прочности и живучести, которые учитывали бы фактор внезапности изменения конструктивной и (или) расчетной схем сооружений и их элементов, пока малочисленны и несовершенны. Применительно к нагруженным балкам, взаимодействующим с упругими основаниями, такого типа задачи поставлены и аналитически решены для случаев внезапного полного или частичного разрушения основания Винклера в работах [5, 6] и для основания Пастернака – в работе [7]. Аналогичные задачи решены для случаев внезапного изменения граничных условий в работах [8–10]. В указанных работах проанализированы специфика и характеристики динамических процессов, инициируемых внезапными повреждениями, определены частоты и формы собственных и вынужденных колебаний, приращения деформаций и внутренних силовых факторов, получены зависимости динамических факторов от обобщенной жесткости системы «балка-основание» и от размеров и локализации дефектов. Во всех работах используется метод начальных параметров в сочетании с векторно-матричным представлением состояния произвольного сечения балки. Применение начальных параметров и специальных функций (Крылова) упрощает решение, снижает порядок матриц и определителей. Кроме того, производные функций выражаются через исходные функции, что приводит к существенным упрощениям решений.

В настоящей работе ставится задача определения сочетания механических и геометрических параметров системы «балка-основание Пастернака», обеспечивающих определенные требования к частоте собственных колебаний балки, инициированных внезапной осадкой части основания.

## 1. Постановка задачи

### *1.1. Статический изгиб балки*

Изгиб балки, защемленной по концам, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q$, взаимодействующей по всей длине $L$ с упругим двухпараметрическим основанием Пастернака, описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^4 w_{cm}}{d\xi^4} - 4\beta^2 \frac{d^2 w_{cm}}{d\xi^2} + 4\alpha^4 w_{cm} = \overline{q}, \tag{1.1}$$

где $\xi = \frac{x}{L}$; $w = \frac{v}{L}$ – прогиб; $\beta^2 = \frac{K_2 L^2}{4EI}$; $\alpha^4 = \frac{K_1 L^4}{4EI}$; $\overline{q} = \frac{qL^3}{EI}$; $K_1 = \overline{K}_1 B$; $K_2 = \overline{K}_2 B$ – коэффициенты постели основания, $B$ – ширина прямоугольного поперечного сечения балки. Далее принято условие $\alpha > \beta$ как наиболее реальное в случае грунтовых оснований [11, 12]. В близких по тематике работах [5–10] показана эффективность применения метода начальных параметров в сочетании с векторно-матричным представлением состояния произвольного сечения для анализа напряженно-деформированного состояния балки при взаимодействии ее с упругим основанием. Аналогичный подход используется ниже. Общее решение уравнения (1.1) в начальных параметрах

$$w_0 = w_{cm}(0);\ w_0' = w_{cm}'(0);\ w_0'' = w_{cm}''(0);\ w_0''' = w_{cm}'''(0),$$

с учетом граничных условий

$$\begin{gathered} w_{cm}(0) = w_{cm}'(0) = 0 \\ w_{cm}(1) = w_{cm}'(1) = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

имеет вид

$$w_{cm} = F_2(\xi) w_0'' + F_1(\xi) w_0''' + \frac{\overline{q}}{4\alpha^4}\left(1 - F_4(\xi)\right). \tag{1.3}$$

где

$$F_2(\xi) = \frac{1}{2ab} sha\xi \sin b\xi;\ \ F_1(\xi) = \frac{1}{2\left(a^2+b^2\right)}\left(\frac{cha\xi \sin b\xi}{b} - \frac{sha\xi \cos b\xi}{a}\right);$$

$$F_3(\xi) = \frac{1}{2\left(a^2+b^2\right)}\left(\frac{3a^2-b^2}{a} sha\xi \cos b\xi - \frac{a^2-3b^2}{b} cha\xi \sin b\xi\right);$$

$$F_4(\xi) = cha\xi \cos b\xi - \frac{a^2-b^2}{2ab} sha\xi \sin b\xi;\ \ a = \sqrt{\alpha^2+\beta^2};\ b = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

Решение статической задачи заканчивается определением начальных параметров из второй пары условий (1.2).

### *1.2. Собственные поперечные колебания балки, частично поддерживаемой основанием Пастернака*

В некоторый момент $t=0$ произошла внезапная осадка части основания длиной $L-L_1$. В результате внезапного нарушения статического равновесия высвобождается упругая энергия, которая приводит балку в движение.

Собственные колебания двух частей балки: опертой на основание $\left(0 \le \xi_1 \le \nu\right)$ и свободной $\left(0 \le \xi_2 \le 1-\nu\right)$, где $\xi_1 = \dfrac{x_i}{L}\left(i=1,2\right)$, $\nu = \dfrac{L_1}{L}$ – относительная длина опертой части балки, рассматриваются отдельно. Постоянные интегрирования дифференциальных уравнений колебаний участков определяются из общих граничных условий и условий сопряжения участков.

### *1.3. Собственные поперечные колебания опертого участка* $\left(0 \le \xi_1 \le \nu\right)$

Уравнение собственных поперечных колебаний этого участка [7, 14]

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi_1^4} - 4\beta^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi_1^2} + 4\alpha^4 \left( w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} \right) = 0. \tag{1.4}$$

Введением трех параметров, имеющих размерность частоты $\left[\dfrac{1}{c}\right]$: «условные» частоты $\omega_{01} = \sqrt{\dfrac{K_1}{\rho A}}$, $\omega_{02} = \dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{K_2}{\rho A}}$ и «эталонная» частота $\omega_э = \dfrac{1}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$, где характеристики балки: $\rho$ – плотность материала, $A$ – площадь поперечного сечения, $E$ – модуль Юнга, $I$ – осевой момент инерции сечения, преобразуем уравнение (1.4) к виду

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi_1^4} - 4\bar{\omega}_{02}^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi_1^2} + \bar{\omega}_{01}^2 \left( w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} \right) = 0, \tag{1.5}$$

где $\bar{\omega}_{0i} = \dfrac{\omega_{0i}}{\omega_э}$ $\left(i=1,2\right)$ – относительные «условные» частоты; $\bar{\omega}_{01} = \dfrac{\omega_{01}}{\omega_э} = 2\alpha^2$, $\bar{\omega}_{02} = \dfrac{\omega_{02}}{\omega_э} = \beta$, $\tau = \omega_{01} t$ – безразмерное время.

Полагая колебания гармоническими, разделяя переменные в уравнении (1.5) представлением

$$w_1\left(\xi_1, \tau\right) = W_1\left(\xi_1\right) \sin \bar{\omega}\tau, \tag{1.6}$$

где $\bar{\omega} = \dfrac{\omega}{\omega_{01}}$ – безразмерная искомая частота, получаем уравнение форм собственных колебаний участка

$$W_1^{IV} - 4\bar{\omega}_{02}^2 W_1'' + \left(\bar{\omega}_{01}^2 - \tilde{\omega}^2\right) W_1 = 0, \tag{1.7}$$

где $\tilde{\omega} = \dfrac{\omega}{\omega_э}$ – другое представление безразмерной искомой частоты.

Структура уравнения (1.7) показывает, что формы собственных колебаний балки будут различными в зависимости от наличия в спектре частот значений меньших, равных или больших значения одного из параметров системы «балка-основание» – «условной» частоты. Ниже рассматривается вариант равенства искомой частоты «условной» частоте т. е. $\tilde{\omega} = \bar{\omega}_{01}$.

### *1.4. Собственные поперечные колебания свободного участка* $(0 \le \xi_2 \le 1-\nu)$

Собственные поперечные колебания свободного участка описываются уравнением [9]

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial \xi_2^4} - 4\alpha^4 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} = 0. \tag{1.8}$$

Разделяя переменные подстановкой

$$w_2(\xi_2, \tau) = W_2(\xi_2)\sin \bar{\omega}\tau,$$

получим уравнение форм колебаний

$$W_2^{IV} - \tilde{\omega}^2 W_2 = 0, \tag{1.9}$$

откуда, полагая

$$W_2(\xi_2) = Ae^{s\xi_2},$$

получим характеристическое уравнение

$$s^4 - \tilde{\omega}^2 = 0, \tag{1.10}$$

корни которого

$$s_{1,2} = \pm\beta_3; \quad s_{3,4} = \pm i\beta_3; \quad \beta_3 = \sqrt{\tilde{\omega}} \tag{1.11}$$

и функцию прогибов

$$W_2(\xi_2) = A_1 ch\beta_3\xi_2 + A_2 sh\beta_3\xi_2 + A_3 \cos\beta_3\xi_2 + A_4 \sin\beta_3\xi_2$$

или, в начальных параметрах этого участка

$$W_{02} = W_2(0),\ W'_{02} = W'_2(0),\ W''_{02} = W''_2(0),\ W'''_{02} = W'''_2(0).$$

$$W_2(\xi_2) = R_4(\xi_2)W_{02} + R_3(\xi_2)W'_{02} + R_2(\xi_2)W''_{02} + R_1(\xi_2)W'''_{02}, \tag{1.12}$$

где $R_i = (\xi_2)$ $(i = 1 \div 4)$ – функции Крылова вида

$$R_1(\xi_2) = \frac{sh\beta_3\,\xi_2 - \sin\beta_3\,\xi_2}{2\beta_3^3}; \quad R_2(\xi_2) = \frac{ch\beta_3\,\xi_2 - \cos\beta_3\,\xi_2}{2\beta_3^2};$$

$$R_3(\xi_2) = \frac{sh\beta_3\,\xi_2 + \sin\beta_3\,\xi_2}{2\beta_3}; \quad R_4(\xi_2) = \frac{ch\beta_3\,\xi_2 + \cos\beta_3\,\xi_2}{2}.$$

Состояние произвольного сечения $\xi_2$ свободного участка можно представить матричным уравнением

$$\bar{W}_2(\xi_2) = V_2(\xi_2)\bar{W}_{02}, \tag{1.13}$$

где $\bar{W}_{02} = \{W_{02},\ W'_{02},\ W''_{02},\ W'''_{02}\}$ – вектор начальных параметров свободного участка

$\bar{W}_2(\xi_2) = \{W_2(\xi_2),\ W'_2(\xi_2),\ W''_2(\xi_2),\ W'''_2(\xi_2)\}$ – вектор состояния произвольного сечения $\xi_2$;

$$V_2(\xi_2) = \begin{pmatrix} R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) & R_2(\xi_2) & R_1(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) & R_2(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_2(\xi_2) & \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_3(\xi_2) & \beta_3^4 R_2(\xi_2) & \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) \end{pmatrix}$$

– функциональная матрица влияния начальных параметров свободного участка на состояние произвольного сечения $\xi_2$ этого участка.

Из условия сопряжения участков следует

$$\bar{W}_1(\nu) = \bar{W}_2(0)$$

или

$$\bar{W}_{02} = \bar{W}_2(0) = \bar{W}_1(\nu) = V_{11}(\nu)\bar{W}_{01},$$

так как матрица $V_2(0)$ – единичная.

Теперь состояние произвольного сечения $\xi_2$ свободного участка можно выразить через начальные параметры опертого участка

$$\bar{W}_2(\xi_2) = V_2(\xi_2)V_{11}(\nu)\bar{W}_{01}.$$

### *1.5. Собственные поперечные колебания участков при условии* $\tilde{\omega} = \bar{\omega}_{01}$

Методика построения матричных уравнений состояния произвольных сечений участков для всех возможных соотношений между частотами $\tilde{\omega}$ и $\bar{\omega}_{01}$ приводятся в работе [7]. Собственные поперечные колебания опертого участка при условии $\tilde{\omega} = \bar{\omega}_{01}$.

Предположив возможность $\tilde{\omega} = \bar{\omega}_{01}$, приведём уравнение (1.7) к виду

$$W_1^{IV} - 4\bar{\omega}_{02}^2 W_1'' = 0. \tag{1.14}$$

Интегрируя уравнение (1.14) с помощью подстановки Эйлера, получим функцию прогибов

$$W_1(\xi) = A_1 + A_2\xi_1 + A_3 ch2\beta\xi_1 + A_4 sh2\beta\xi_1 \tag{1.15}$$

или, заменяя константы $A_i (i = 1 \div 4)$ начальными параметрами

$$W_{01} = W_1(0),\ W'_{01} = W'_1(0),\ W''_{01} = W''_1(0),\ W'''_{01} = W'''_1(0),$$

получим функцию

$$W_1 = g_2(\xi_1)W''_{01} + g_1(\xi_1)W'''_{01}, \tag{1.16}$$

где $g_1(\xi_1) = \dfrac{sh2\beta\xi_1 - 2\beta\xi_1}{8\beta^3}$; $\quad g_2(\xi_1) = \dfrac{ch2\beta\xi_1 - 1}{4\beta^2}$.

Дифференцируя функцию (1.16) трижды по $\xi_1$, получим последовательно угол поворота поперечного сечения $\xi_1$, изгибающий момент и поперечную силу в данном сечении. Теперь состояние произвольных сечений участков можно представить матричными уравнениями

$$\bar{W}_1(\xi_1) = V_{11}(\xi_1)\bar{W}_{01}, \tag{1.17}$$

$$\bar{W}_2(\xi_2) = V_2(\xi_2)V_{11}(\nu)\bar{W}_{01}, \tag{1.18}$$

где $\bar{W}_{01} = \{0,\ 0,\ W''_{01},\ W'''_{01}\}$ – вектор начальных параметров опертого участка;

$\bar{W}_i(\xi_i) = \{W_i(\xi_i),\ W'_i(\xi_i),\ W''_i(\xi_i),\ W'''_i(\xi_i)\}$ – вектор состояния произвольного сечения $\xi_i$;

$$V_{11}(\xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & g_2 & g_1 \\ 0 & 1 & g_3 & g_2 \\ 0 & 0 & g_4 & g_3 \\ 0 & 0 & g_5 & g_4 \end{pmatrix} \quad V_2(\xi_2) = \begin{pmatrix} R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) & R_2(\xi_2) & R_1(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) & R_2(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_2(\xi_2) & \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) & R_3(\xi_2) \\ \beta_3^4 R_3(\xi_2) & \beta_3^4 R_2(\xi_2) & \beta_3^4 R_1(\xi_2) & R_4(\xi_2) \end{pmatrix}$$

– функциональная матрица влияния начальных параметров на состояние произвольных сечений соответствующих участков;

где $g_3 = g'_2 = \dfrac{sh2\beta\xi_1}{2\beta}$; $\quad g_4 = g'_3 = ch2\beta\xi_1$; $\quad g_5 = g'_4 = 2\beta sh2\beta\xi_1$.

### *1.6. Определение частот и форм собственных колебаний балки, частично опертой на основание*

Граничные условия в динамической задаче для всей балки имеют вид

$$\begin{gathered} W_{01} = W'_{01} = 0 \\ W_2(1-\nu) = W'_2(1-\nu) = 0. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Удовлетворяя второй паре условий (1.19), получим частотное уравнение

$$A_2B_1 - A_1B_2 = 0. \tag{1.20}$$

где

$$A_1 = \beta_3^4 R_1(1-\nu)g_2(\nu) + R_4(1-\nu)g_3(\nu) + R_3(1-\nu)g_4(\nu) + R_2(1-\nu)g_5(\nu);$$
$$B_1 = \beta_3^4 R_1(1-\nu)g_1(\nu) + R_4(1-\nu)g_2(\nu) + R_3(1-\nu)g_3(\nu) + R_2(1-\nu)g_4(\nu);$$
$$A_2 = R_4(1-\nu)g_2(\nu) + R_3(1-\nu)g_3(\nu) + R_2(1-\nu)g_4(\nu) + R_1(1-\nu)g_5(\nu);$$
$$B_2 = R_4(1-\nu)g_1(\nu) + R_3(1-\nu)g_2(\nu) + R_2(1-\nu)g_3(\nu) + R_1(1-\nu)g_4(\nu).$$

## 2. Численные результаты

В табл. 1 приведены значения искомой частоты $\tilde{\omega}$, полученные из решения частотного уравнения (1.20) при различных сочетаниях длины $\nu$ опертой части балки и обобщенного параметра Пастернака $\beta$.

Расчеты показывают, что с уменьшением длины поврежденной части балки частоты монотонно возрастают при всех значениях параметра $\beta$. Область значений параметра $\nu$ ограничена величиной $\nu \le 0,78$, так как при $\nu > 0,78$ решения уравнения частот либо отсутствуют, либо имеют комплексный вид, что означает нереализуемость в этом диапазоне условия $\tilde{\omega} = \overline{\omega}_{01}$.

Таблица 1

*Значения собственных частот $\tilde{\omega} = \beta_3^2$*

| $\beta$ \ $\nu$ | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 22,55 | 23,42 | 25,67 | 30,8 | 39,58 | 59,67 |
| 1 | 22,44 | 23,4 | 25,74 | 30,33 | 40,17 | 60,78 |
| 1,5 | 22,46 | 23,34 | 25,86 | 31,02 | 41,08 | 62,44 |
| 2 | 22,33 | 23,28 | 26,01 | 31,55 | 42,19 | 64,46 |
| 2,5 | 22,21 | 23,21 | 26,19 | 32,15 | 43,4 | 66,68 |
| 3 | 22,02 | 23,15 | 26,4 | 32,79 | 44,65 | 68,96 |

Это, в частности, означает, что для балки, полностью опертой на основание ($\nu = 1$), условие $\tilde{\omega} = \overline{\omega}_{01}$ не реализуется. Параметр Пастернака $\beta$ практически не влияет на частоты при коротких опертых участках $\nu < 0,4$ и слабо увеличивает частоту на 4–10 % при $\nu \ge 0,4$. Для наглядности удобно выразить частоту $\omega$ через основную частоту собственных поперечных колебаний аналогичной свободной (без основания) балки $\omega_{1св} = \left(\frac{4,7}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$. Тогда частота $\omega$ принимает вид

$$\omega = \left(\frac{\beta_3}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \left(\frac{\beta_3}{4,7}\right)^2 \left(\frac{4,7}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \left(\frac{\beta_3}{4,7}\right)^2 \omega_{1св}.$$

Например, для балки, опертой наполовину ($\nu = 0,5$) при $\beta = 1,5$, частота возрастает в 1,4 раза по сравнению с частотой такой же, но свободной балки, а при $\nu = 0,75$ и $\beta = 1,5$ – в 3,77 раза.

## Заключение

Таким образом, в работе решена частная обратная задача: определены сочетания механических и геометрических параметров системы «балка – двухпараметрическое основание», включая размеры и локализацию повреждения основания, при которых собственная частота изгибных колебаний балки, инициированных внезапной осадкой части основания будет единственной и равной известной «условной» частоте. Последняя может быть выражена в долях собственной частоты аналогичной свободной либо полностью опертой балки.

**Литература**

1. *Datta S. C.* A critical review on idealization and modeling for interaction among soil – foundation-structure system / S. C. Datta, R. Roy // Computers and structures. – 2002. – 80(2-21). – P. 1579–1594.

2. *Wang Y. H.* Beams and plates on elastic foundations: a review / Y. H. Wang, L. G Tham, Y. K. Cheung // Progress in Structural Engineering and Materials. –2005. – 7(4). – pp. 74–182.

3. *Balabušić M.* Bending the Foundation Beam on Elastic Base by Two Reaction Coefficient of Winkler's Subgrade / M. Balabušić, B.Folic, S.Coric // Open Journal of Civil Engineering. –2019. – 9. – P. 123–134.

4. *Tivari K.* Overview of Methods of Analysis of Beams on Elastic Foundation / K. Tivari, R. Kuppa // IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering. – 2014. – Vol. 11, issue 5. – P. 22–29.

5. *Gordon V.* Vibration of loaded beam initiated by fully or partially destruction // V. Gordon, O. Pilipenko // Proc.22nd International Congress on Sound and Vibration. – 2015. Florence, Italy.

6. *Gordon V.* Beam dynamical stresses increments after partial deconstruction of foundation / V. Gordon, O. Pilipenko, T. Gasimov // Proc. 7th European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering. –2016. – Vol. 3. – P. 5533–5549, Crete, Greece.

7. Dynamic loading of the beam on the Pasternak base initiated by the sudden settlement of part of the base» / V. I. Travush, V. A. Gordon, V. I. Colchunov, E. V. Leontiev // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. – 2020. – 896. – Article 012041.

8. The response of the system «beam-foundation» on sudden changes of boundary conditions / V. I. Travush, V. A. Gordon, V. I. Colchunov, E. V. Leontiev // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. – 2018. – 456(1). – Article 012130.

9. *Gordon V. A.* Dynamic effects atsudden structural rebuilding of the «beam-foundation» system / V. A. Gordon, O. V. Pilipenko, V. A. Trifonov // Proc. of ISMA 2018 International Conference on Noise and Vibration Engineering and USD. International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics. – 2018. – P. 1645–1654, Leuven, Belgium.

10. *Gordon V. A.* The reactions of the «beam-foundation» system to the sudden change of the boundary conditions / V. A. Gordon, O. V. Pilipenko, V. A. Trifonov // MATEC Web of conferences. – 2018. – Vol. 188. – Article 03008. 5th International Conference of Engineering Against Failure, Chios, Greece.

11. *Fwa T. F.* Use of Pasternak Foundation Model in Concrete Pavement Analysis / T. F. Fwa, X. P. Shi, S.A. Tan // Journal of Transportation Engineering. – 1996. – 122(4). – P. 323–328.

12. *Teodoru I. B.* A Finite Element Study of the Bending Behavior of Beams Resting on Two-Parameter Elastic Foundation / I. B. Teodoru, V. Musat, M. Vrabie // Bulletin of the Polytechnic Institute of Iasi. – 2006. – 65. – P. 7–20.

13. *Valsangkar A. J.* Vibrations of beam-columns on two-parameter elastic foundations / A. J. Valsangkar, R. Pradhanang // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. –1988. – 16(2). – P. 217–225.

14. *Гордон В. А.* Собственные изгибные колебания балки, частично опертой на основание Пастернака / В. А. Гордон, Г. А. Семенова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2020. – №1(339). – С. 34–42.

УДК 539.3

# МЕХАНИЧЕСКАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ ТИПА СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ В МЕТОДЕ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

**М. В. Поликарпов, В. Б. Пеньков**

*Липецкий государственный технический университет*

**Аннотация.** Предложена эффективная методика построения численно-аналитического решения при наличие конечного множества механических сингулярностей. В качестве инструмента использован современный энергетический метод анализа напряженно-деформированного состояния упругих тел — метод граничных состояний. Построено решение для неограниченной однородной эластостатической среды, осложненной встречно-направленными сосредоточенными силами в двух вариантах.
**Ключевые слова:** коэффициенты Фурье, метод граничных состояний, напряженно-деформированное состояние, сингулярность, сосредоточенная сила трехмерные задачи, эластостатика.

## Введение

Особое внимание в теории упругости уделяется задачам, решения которых отвечают всем определяющим соотношениям, но в сингулярных точках приводят значения перемещений или напряжений к бесконечно большим величинам. Сосредоточенная сила является одной из таких особенностей, требующими специальных исследований.

Понятие сосредоточенной силы представляет собой идеализацию силы, приложенной к точке пространства, поскольку точка является безразмерной и бесконечно малой единицей пространства. Это понятие часто применяется при решении различных задач механики сплошных сред. Особую точку на границе, на которую действует сила $P$, можно представить в виде малой ограниченной поверхности, на которой распределена поверхностная сила (рис. 1). Её равнодействующая соответствует сосредоточенной силе.

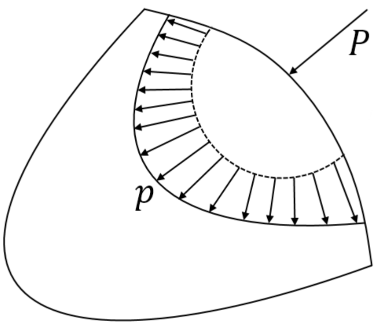



*Рис. 1. Сосредоточенаня сила и распределенная нагрузка на границе*

В классической теории упругости классу плоских задач механики твердого деформируемого тела, осложненных наличием сосредоточенных усилий, посвящен ряд работ [2, 10]. При организации метода граничных состояний (МГС) задачи о напряженно-деформированном состоянии при наличии сосредоточенных сил рассматривались в работах [8, 9].

В трехмерном случае в работе [1] решена задача о воздействиях на тело сферической формы сосредоточенных воздействий. В рамках МГС в статьях [6, 7] сосредоточенные силы учитывались классическим (регулярным) способом. На основе предложенной ниже методике появляется возможность не прибегать к искусственным осложнениям при описании формы тел и строить решение в классе сингулярных функций. Данная методика основана на методе граничных состояний [3, 4].

## 1. Постановка задач для тел с механической сингулярностью

Пусть $L \subset V$ — множества точек области $V$, определяющих пространственное положение механической сингулярности (локализация механической сингулярности). Для удобства введем функционал $F(\xi, L^j)$, возвращающий значение величины, отвечающей выбранному контекстно параметру для состояния $\xi$ в локализации $L^j$.

Пусть в области $V \in R^3$ с границей $\partial V$ локализовано конечное множество механических сингулярностей $\{L^j\}$ (рис. 2).

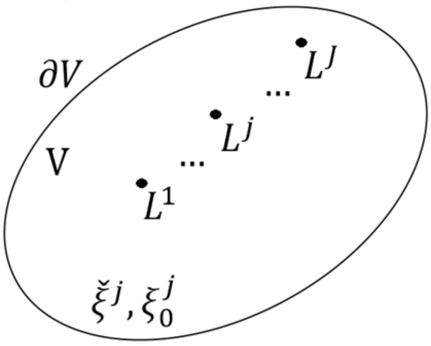


*Рис. 2. Локализация механических сингулярностей*

На рис. 2 обозначено:

$\breve{\xi}^j$ — сингулярное состояние от воздействия механической сингулярности;

$\xi_0^j$ — регулярное состояние, компенсирующее возмущение ГУ механической сингулярностью;

$L^j$ — область определения механической сингулярности $j$.

Вектор перемещения «точки наблюдения» $M$ в неограниченной упругой среде под воздействием в «точке истока» $Q$ сосредоточенной силы $\mathbf{P}$ формируется в соответствии с тензором Кельвина — Сомильяна [1]

$$\boldsymbol{u}(M,Q) = \hat{U}(M,Q)\mathbf{P},$$

$$\hat{U} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R}\left[(3-4\nu)\hat{E} + \frac{\mathbf{RR}}{R^2}\right], \ \mathbf{R} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_Q, \ R = \left|\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_Q\right|.$$

Соответствующие компоненты тензора напряжений и деформаций определяются при помощи определяющих соотношений МГС [4].

Область определения $L^j$ механической сингулярности $j$ будем называть локализацией

$$L = \bigcup_{j=1}^{J} L^j, \ J = \left|\{L^j\}\right|,$$

где $|\cdots|$ определяет мощность конечного множества $\{L^j\}$.

В общем случае каждая механическая сингулярность $j$ характеризуется своим скалярным параметром $p_j$, имеющим значение именно для неё. В области V ему отвечает в общем случае сингулярное внутреннее состояние $\breve{\xi}^j = p_j\breve{\xi}_0^j$, где $\breve{\xi}_0^j$ есть «эталонное» состояние, отвечающее единичному значению параметра: $p_j = 1$.

Состоянию $\breve{\xi}^j$ соответствует изоморфное граничное состояние

$$\breve{\gamma}^j = p_j\breve{\gamma}_0^j,$$

где $\breve{\gamma}^j, \breve{\gamma}_0^j$ отвечают соответствующим значениям $p_j$. Граничное состояние $\breve{\gamma}_0^j$ позволяет восстановить соответствующее $(-\breve{\gamma}_0^j)$ регулярное состояние $\xi_0^j$. Сумма $\breve{\xi}^j + \xi_0^j$ компенсирует воздействие на границе $\partial V$ до тривиального уровня.

Обозначим через $F(\xi, L^j)$ значение функционала, возвращающее величину некоторого скалярного параметра $p$, соответствующего состоянию $\xi$ над локализацией $L^j$. В частности, примем обозначения

$$\breve{l}_{kj} = F\left(\breve{\xi}_0^k, L^j\right).$$

Отсюда в силу «эталонности» воздействия для состояния $\breve{\xi}_0^k$ получим

$$\breve{l}_{kk} = F\left(\breve{\xi}_0^k, L^k\right) = 1.$$

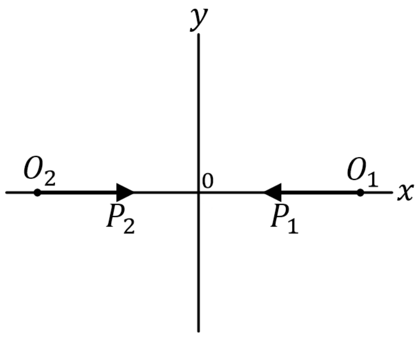
Справедливы также соотношения

$$F\left(\breve{\xi}^k, L^j\right) = p_k\breve{l}_{kj}, \ F\left(\breve{\xi}^k, L^k\right) = p_k.$$

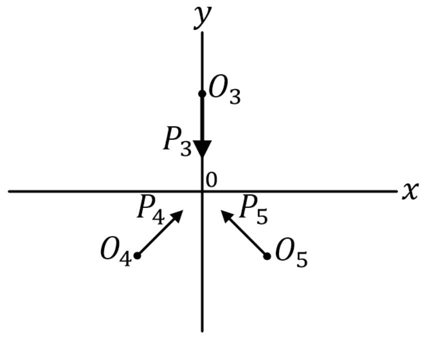
Введенные обозначения позволяют решать вопрос о назначении в специальные решения, отвечающие за механические сингулярности, значений параметров $p_{j0}$, обеспечивающих, требуемый уровень $p_j$ при всевозможных комбинациях полей механических сингулярностей и компенсирующих реакций на них.

## 2. Задачи о взаимодействии сосредоточенных сил в неограниченной среде

Средствами МГС в безразмерной постановке решены две первые основные задачи (по классификации Н. И. Мусхелишвили [2]) теории упругости для однородной эластостатической среды, заключенной внутри параллелепипеда, находящегося в равновесии, в рамках: $x \in [-2;3]$, $y \in [-2;2]$, $z \in [-2;3]$. Внутрь этой среды по условиям первой задачи помещены две встречно-направленные сосредоточенные силы с координатами «точек истока»: $O_1(3/2,0\ ,2)$ и $O_2(-1/2,0\ ,2)$. В точке $O_1$ и $O_2$ приложена сосредоточенная сила с интенсивностью $P_1 = \{-\mu,0,0\}$ и $P_2 = \{\mu,0,0\}$ соответственно (рис. 3а).



*а)*



*б)*

*Рис. 3. Условия: а) первой задачи; б) второй задачи*

По условиям второй задачи внутри среды располагаются три сосредоточенные силы с координатами «точек истока»: $O_3(0,1,1/2)$, $O_4(-1/2,-\sqrt{3}/4,1/2)$ и $O_5(1/2,-\sqrt{3}/4,1/2)$. В этих точках интенсивность задана соответственно: $P_3 = \{0,-\mu,0\}$, $P_4 = \{\mu\sqrt{3}/2,\mu/2,0\}$ и $P_5 = \{-\mu\sqrt{3}/2,\mu/2,0\}$ (рис. 3б).

Все грани параллелепипеда считаются свободными от нагрузок. Геометрическая и физическая сторона задачи рассматриваются в обезразмеренном варианте. Значение коэффициента Пуассона $\nu$ принимается равным $0.25$. Параметр сосредоточенной силы принимался $\mu = 1$ (результирующие поля напряжений и усилий при любом другом значении меняются пропорционально). Параллелепипед имеет значительные размеры, что позволяет моделировать неограниченную среду.

Наличие ортонормированного базиса $\{\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(k)},\cdots\} \in \Xi$ в случае первой основной задачи позволяет разложить искомое состояние пространства внутренних состояний $\Xi$ и вычислить коэффициенты Фурье в соответствии с определением скалярного произведения по границе тела [6]

$$c_k = \left(\gamma,\gamma^{(l)}\right) = \int_{\partial V} p_i u_i^{(l)} dS,$$

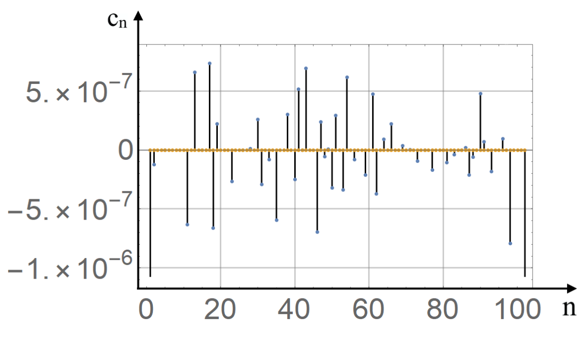
где $p_i$ — компоненты поверхностных усилий, $u_i^{(l)}$ — перемещение вдоль оси $x_i$ из ортонормированного базиса пространства граничных состояний $\Gamma$.

Система коэффициентов Фурье подчинена неравенству Бесселя (левая часть неравенства Бесселя, которая соотносит коэффициенты Фурье с евклидовой нормой раскладываемого элемента)

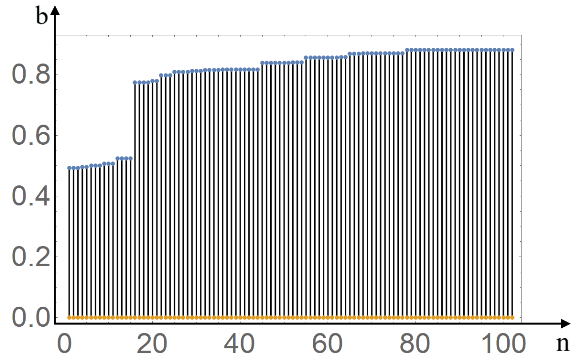
$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \le \xi_{\hat{\text{I}}}^2 = \gamma_{\tilde{\text{A}}}^2,$$

где $n$ — размерность усеченного базиса.

На рис. 4а графически представлены коэффициенты Фурье. Достоверность полученных результатов можно характеризовать квадратичной невязкой граничных условий с результатами решения по поверхности, которая при $n = 102$ составила значение $0.636$, а также фактом насыщение суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя (1)), представленной на рис. 4б.




*а)*



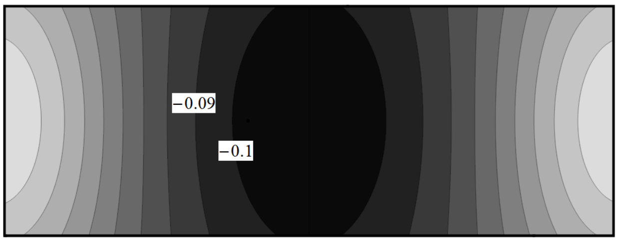

*б)*

*Рис. 4. а) коэффициенты Фурье; б) насыщение суммы Бесселя*

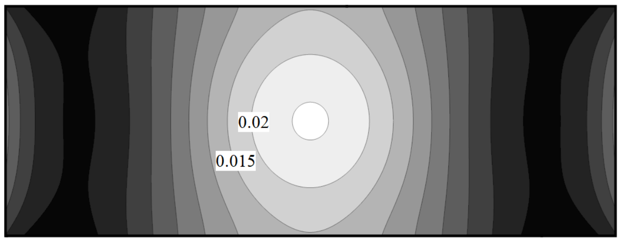
Результаты свидетельствуют о явном насыщении суммы Бесселя, что говорит о практически наблюдаемой устойчивости решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Данный факт является одним из косвенных показателей, характеризующих качество решения.

## 3. Результаты решения в графической форме

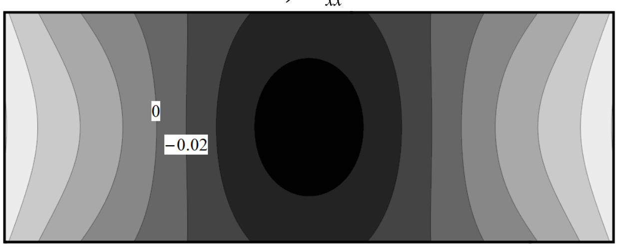
Полученное решение, которое отвечает за напряженно-деформированное состояние, имеет численно-аналитический вид, но из-за визуальной необозримости компонент внутреннего состояния оно здесь не приведено. Для краткости на рис. 5 представлено отображение насыщения полей напряжений в виде изолиний для первой задачи, построенных в сечении $z=2$, а на рис. 6 для второй задачи — в сечении $z=1/2$.



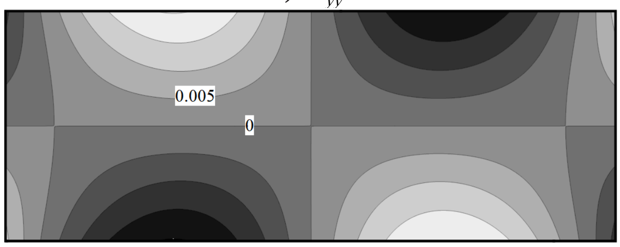

*а) $\sigma_{xx}$*



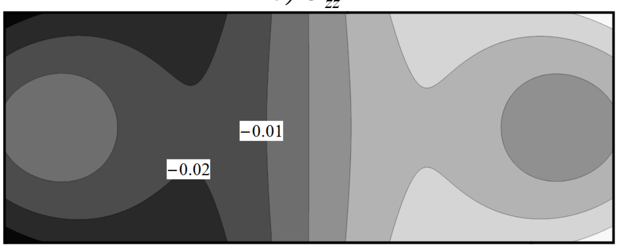

*б) $\sigma_{yy}$*



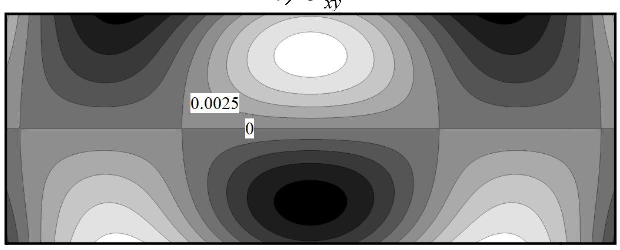

*в) $\sigma_{zz}$*




*г) $\sigma_{xy}$*

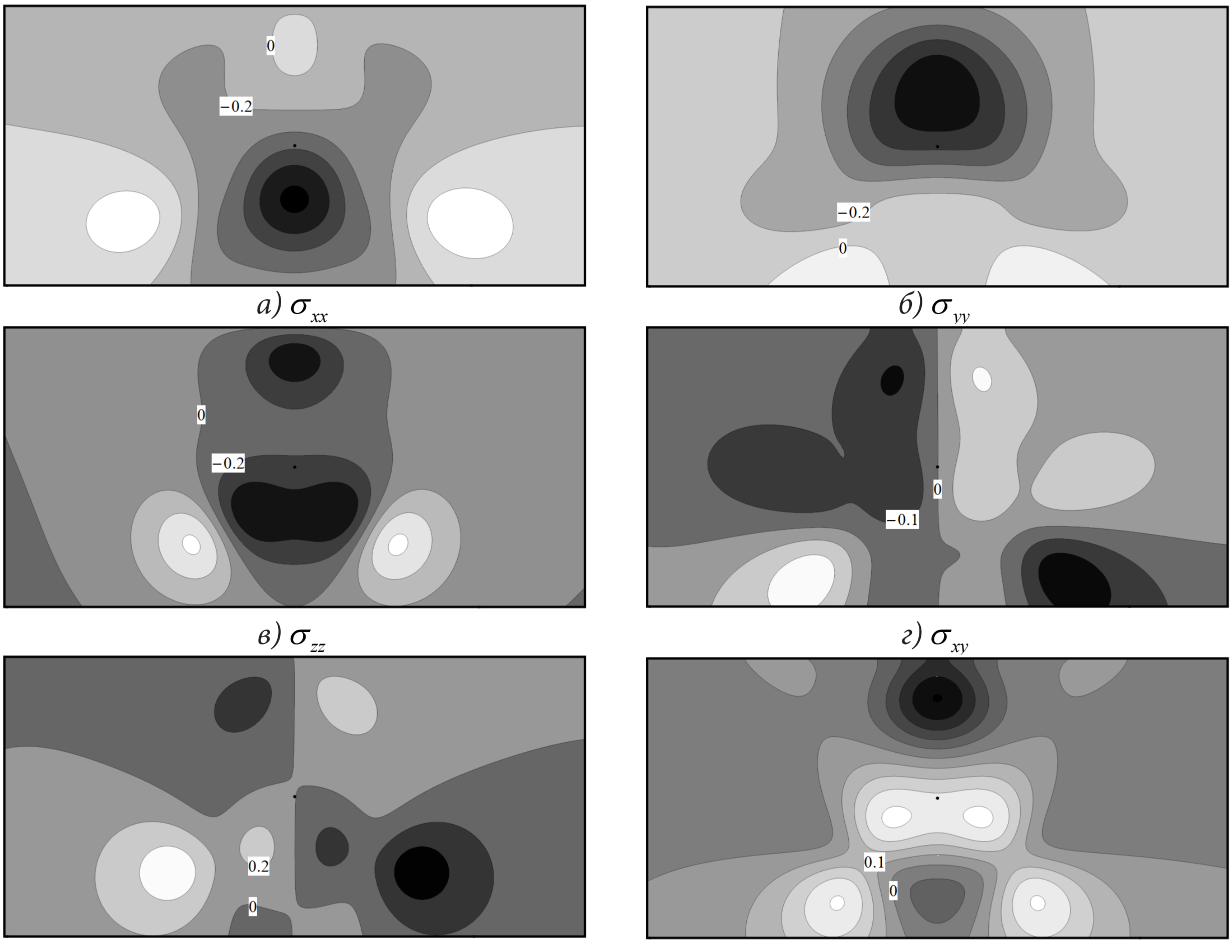



*д) $\sigma_{xz}$*




*е) $\sigma_{yz}$*

*Рис. 5. Изолинии напряжений в сечении $z=2$ для первой задачи*
*а) $\sigma_{xx}$, б) $\sigma_{yy}$, в) $\sigma_{zz}$, г) $\sigma_{xy}$, д) $\sigma_{xz}$, е) $\sigma_{yz}$*




а) $\sigma_{xx}$ б) $\sigma_{yy}$

в) $\sigma_{zz}$ г) $\sigma_{xy}$

д) $\sigma_{xz}$ е) $\sigma_{yz}$

*Рис. 6. Изолинии напряжений в сечении* $z = 1/2$ *для второй задачи*
*а)* $\sigma_{xx}$, *б)* $\sigma_{yy}$, *в)* $\sigma_{zz}$, *г)* $\sigma_{xy}$, *д)* $\sigma_{xz}$, *е)* $\sigma_{yz}$

На рис. 5, 6 более темные слои отвечают большему сжатию, значения двух соседствующих слоев представлены, остальные значения легко высчитываются в соответствии с этим шагом. Компоненты тензоров напряжений внутри области имеют конечные значения, а по мере приближения к координатами «точек истока» увеличивают свои значения и выделяют зону концентрации напряжений; по мере удаления от них напряжения убывают.

Таким образом, метод граничных состояний успешно применен для решения пространственных задач теории упругости для тела, осложнённых физическими сингулярностями типа сосредоточенная сила.

**Благодарности**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-31-90065 и № 19-41-480003 р_а.

**Литература**

1. *Лурье А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.

2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

3. *Пеньков В. Б., Пеньков В. В.* Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2, № 2. – С. 115–137.

4. *Пеньков В. Б.* Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., Germany, 2012. – 108 с.

5. *Пеньков В. В.* Метод граничных состояний в задачах линейной механики. В.В. Пеньков: дис. … канд. физ.-мат. наук. Тула: ТулГУ, 2002. – 83 с.

6. *Поликарпов М. В., Пеньков В. Б.* Сосредоточенные силовые воздействия в методе граничных состояний // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2020. – № 1 (43). – С. 34–44.

7. *Поликарпов. М. В.* Применение метода граничных состояний для расчета напряжённо-деформированного состояния пространственного тела, подверженного сингулярным воздействиям. Материалы областного профильного семинара «Школа молодых ученых» по проблемам технических наук, 15 ноября 2019 г. – Липецк : Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2019. – С. 138–141.

8. *Рязанцева Е. А., Пеньков В. Б., Саталкина Л. В.* Метода граничных состояний: сосредоточенные силы // доклады Межрегиональной конференции памяти А. Н. Кабелькова. Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет, 2011. – С. 126–130.

9. *Рязанцева Е. А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера: дис. … канд. физ.-мат. наук. Тула: ТулГУ, 2015. – 101 с.

10. *Boussinesq M. J.* Application eles Potentiels a l‘Etude l‘Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Paris: Gauthier – Villars, 1885. – 721 p.

УДК 539.3

# СИНГУЛЯРНОСТЬ ТИПА ЦЕНТРА РАСШИРЕНИЯ В МЕТОДЕ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

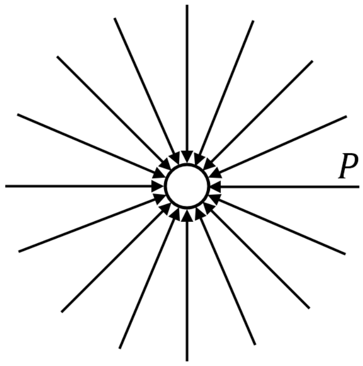
**М. В. Поликарпов, В. Б. Пеньков, Л. В. Левина**

*Липецкий государственный технический университет*

**Аннотация.** Представлена эффективная методика решения пространственных задач теории упругости, включающих конечное множества физических сингулярностей типа центр расширения. Методика предполагает развитие современного энергетического метода — метода граничных состояний (МГС) на класс решений, имеющих особенности. Решена и проанализирована тестовая задача с единственной сингулярностью, типа центра расширения отвечающая на вопрос достоверности расчетов, проводимых по предложенной методике. Средствами МГС продемонстрирована эффективность использования методики на задаче с тремя центрами расширения, расположенными в неограниченной среде. Результаты решения представлены в удобной графической форме.
**Ключевые слова:** коэффициенты Фурье, метод граничных состояний, напряженно-деформированное состояние, сингулярность, трехмерные задачи, центр расширения, эластостатика.

## Введение

В классической теории упругости существует понятие, характеризующие комбинацию трех двойных сил с нулевыми моментами, действующих по осям координат, и характеризующихся величиной $P$. Данную особенность принято называть центром сжатия (рис. 1а), а в случае противоположного по знаку значения $P$ — центром расширения (рис. 1б). Соответствующая точка может располагаться в полости внутри тела [3, 10].



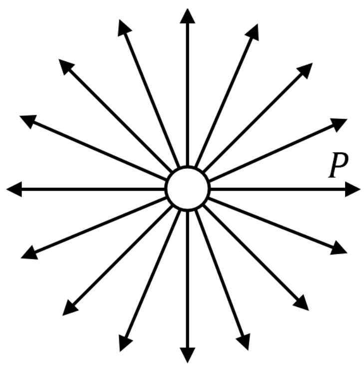




*Рис. 1. Определение центра а) сжатия, б) расширения*

Решения специальных задач пространственной теории упругости в неограниченной упругой среде для силовых точечных особенностей, включая центр расширения, рассматриваются в работах [1, 2, 4].

При организации метода граничных состояний (МГС) задачи с сосредоточенными силовыми воздействиями [8, 9], в том числе о взаимодействии двух центров расширения, рассматривались авторами ранее [11]. Особенности учитывались классическим (регулярным) способом, при помощи специальных решений, непосредственно включенных в исходный базис внутренних и граничных состояний, но из упругого тела исключались малые окрестности сингулярных воздействий. Предложенный ниже подход позволяет избежать искусственных осложнений в описании формы тела и искать решения не в классе регулярных функций, но в классе сингулярных.

## 1. Краткое описание метода граничных состояний

Основополагающим понятием в МГС является состояние среды, которое представляет собой частное решение определяющих уравнений среды независимо от условий, определенных на границе тела [5]. Определяющие соотношения в математической модели однородного эластостатического тела представлены в тензорно-индексной форме записи (запятая в индексе означает дифференцирование, повторение индексов — суммирование) и заключены в соотношениях Коши

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{1}$$

обобщенном законе Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

уравнениях равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i^0 = 0, \tag{3}$$

где $u_i$ — компоненты векторов перемещений, $\varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров деформаций $\sigma_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений, $\theta = \varepsilon_{kk}$ — объемная деформация $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, $\lambda,\ \mu$ — параметры Ламе, $X_i^0$ — объемные силы. При фиксированных значениях $\lambda,\ \mu$ совокупность соотношений (1)–(3) сводится к системе уравнений Ламе

$$\mu u_{i,jj} + \left(\lambda + \mu\right)u_{j,ji} + X_i^0 = 0\,.$$

Их общее решение построено Папковичем и Нейбером и представляется в форме Аржаных — Слободянского (случай отсутствия объемных сил) для ограниченного односвязного тела

$$u_i = 4\left(1 - \nu\right)B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,i}, \tag{4}$$

где $\nu$ — коэффициент Пуассона, $B_i$ — компонента произвольного гармонического вектора. Общие решения (4) являются эффективным инструментом построения базиса пространства состояний для тела, в котором отсутствуют сингулярные факторы [5].

Понятие состояния среды трансформируется в понятия внутреннего $\xi$ и граничного $\gamma$ состояний, если речь заходит о конкретном теле $V$, имеющем границу $\partial V$

$$\xi = \left\{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\right\}, \quad \gamma = \left\{u_i\,|_{\partial V}, p_i\right\},$$

где $p_i = \sigma_{ij}\,|_{\partial V}\, n_j$, $n_j$ — компонента единичного вектора внешней нормали к границе.

Совокупность всех пар возможных состояний $\xi \leftrightarrow \gamma$ образует изоморфные гильбертовы пространства внутренних $\Xi$ и граничных $\Gamma$ состояний со скалярными произведениями

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\hat{I}} = \int_V \sigma_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \partial V, \qquad (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_\Gamma = \int_{\partial V} p_i^{(k)} u_i^{(m)} \partial S,$$

которые равны между собой в силу принципа возможных перемещений

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_\Xi = (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_\Gamma.$$

После ортогонализации атрибуты результирующих внутреннего и граничного состояний представляются рядами Фурье по элементам ортонормированных базисов

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)},$$

$$u_i\,|_{\partial V} = \sum_k c_k u_i^{(k)}\,|_{\partial V}, \quad p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)}.$$

Таким образом, решение основных задач для любых линейных сред и тел произвольных очертаний сводится к элементарному вычислению квадратур через скалярные произведения [7].

## 2. Постановка задач о центре расширения

Пусть в области $\mathrm{V}$ локализован единственный центр расширения $L \subset \mathrm{V}$ (рис. 2).

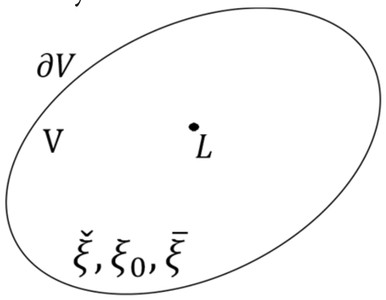



*Рис. 2. Локализация центра расширения*

На рис. 2 обозначено:

$\breve{\xi}$ — сингулярное внутреннее состояние от центра расширения;

$\xi_0$ — регулярное состояние, компенсирующее возмущение граничных условий (ГУ) центром расширения;

$\bar{\xi}$ — регулярное состояние, вызванное только ГУ на $\partial V$ без учета воздействия центра расширения.

Перемещение точки «наблюдения» $M$ в неограниченной упругой среде от центра расширения в точке $Q$ с интенсивностью $q$ определяется формулой (5) с помощью тензора Кельвина — Сомильяна [2]

$$\boldsymbol{u}(M,Q) = \frac{q}{4\pi\mu(1-\nu)} \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \;\; \mathbf{R} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_Q, \;\; R = \left|\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_Q\right|. \tag{5}$$

Формирование искомых компонент тензоров напряжений и деформаций выполняется в соответствии с соотношениями (1)–(3).

В силу линейных свойств состояний $\breve{\xi}, \xi_0, \bar{\xi}$ справедливо утверждать о том, что реальное состояние $\xi$ (результирующее состояние) является суперпозицией всех упомянутых факторов:

$$\xi = \breve{\xi} + \xi_0 + \bar{\xi},$$

а в силу однородности этих состояний получим

$$\xi = p_0\breve{\xi}_0 + p_0\xi_0^0 + \bar{\xi},$$

где $p_0$ — задаваемое значение параметра центра расширения, $\breve{\xi}_0$ — сингулярное поле от эталонного воздействия, $\xi_0^0$ — регулярное поле, компенсирующее эталонное (единичное) воздействие центра расширения в части возмущения граничных условий сингулярным воздействием.

Для случая с конечным множеством центров расширения $L^1, \cdots, L^j$ в локалазации $L^j \subset \mathrm{V}$ и характеризующиеся в $L^j$ значениями параметров $p_j$.

Суперпозиция полей вызывает искажение требуемого значения параметра $p$ сингулярности в локализации $L$. Для обеспечения требуемого значения в качестве параметра сингулярности следует использовать такое $p_0$, чтобы в результирующем состоянии наблюдалось именно $p$.

Пусть за оценку значения параметра $p$ в локализации $L$ отвечает линейный функционал

$$p = F(\xi, L).$$

Тогда его применение к результирующему полю (5) дает

$$F(\xi, L) = F\left(p_0\breve{\xi}_0 + p_0\xi_0^0 + \bar{\xi}\right) = p_0\left[1 + F\left(\xi_0^0, L\right)\right] + F\left(\bar{\xi}, L\right).$$

При заданных граничных условиях и эталонном воздействии в локализации сингулярности значения функционалов в правой части уравнения вычислено, а в левой части оно должно быть равно $p$. Тогда из уравнения следует, что

$$p_0 = \frac{p - F\left(\bar{\xi}, L\right)}{1 + F\left(\xi_0^0, L\right)}.$$

Задавая в специальном решении $\breve{\xi}$ значение параметра $p_0$, обеспечиваем в результирующем состоянии требуемое значение $p$.

**Замечание 1.** В случае центра расширения в $L$ можно полагать $F(\xi, L) = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,|_L$ .

## 3. Тестовая задача для центра расширения

Тестирование подхода МГС для решения задач, осложнённых наличием физической сингулярности типа центра расширений, проводилось на первой основной задаче (по классификации Н. И. Мусхелишвили [4]) для однородной эластостатической среды, заключенной внутри полусферы радиуса $T$ и высотой $T$, располагающейся по оси $z$ в рамках $z \in [-T/2; T/2]$. Центр расширения помещен в начале координат. При расчетах выполнялось обезразмеривание посредством масштабов $\mu$, $T$; после обезразмеривания принималось значение $T = 1$.

О характере сходимости решения можно сделать вывод по результатам расчетов, представленных на рис. 3. На рис. 3а графически отображены коэффициенты Фурье, где по горизонтальной оси указан номер коэффициента, а по вертикальной оси значение этого коэффициента. О сходимости ряда Фурье к решению косвенно можно судить по факту насыщения суммы Бесселя $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}$, представленной на рис. 3б, где по горизонтальной оси указано количество просуммированных коэффициентов, а по вертикальной оси сумма квадратных корней значений этих коэффициентов. Характер насыщения является одним из ключевых показателей при принятии решения о размере величины $n$.

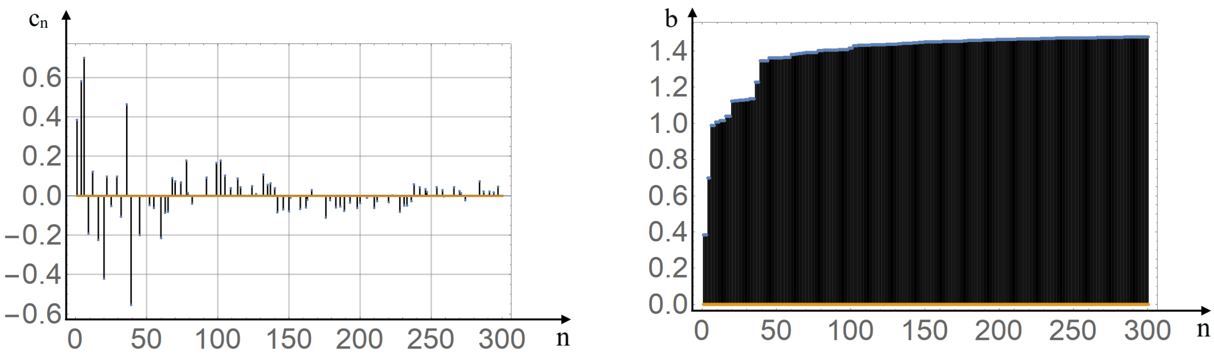
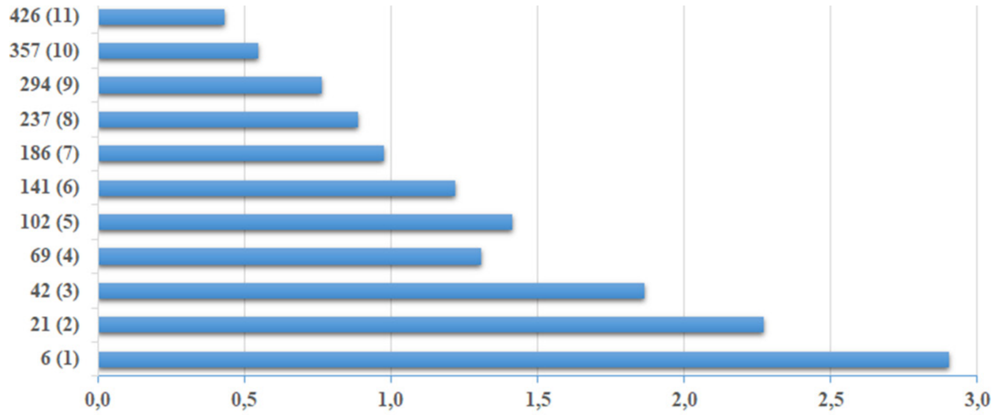



*Рис. 3. а) коэффициенты Фурье, б) насыщение суммы Бесселя*

Главным критерием достоверности полученного решения является квадратичная невязка граничных условий с результатами решения по поверхности. Подробный анализ зависимости среднеквадратической невязки (горизонтальная ось) от количества используемых элементов базиса (вертикальная ось) представлен в форме линейчатой диаграммы с группировкой на рис. 4, где в скобках указана максимальная степень используемых линейно независимых гармонических многочленов.




| 6 (1) | 21 (2) | 42 (3) | 69 (4) | 102 (5) | 141 (6) | 186 (7) | 237 (8) | 294 (9) | 357 (10) | 426 (11) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,906 | 2,271 | 1,864 | 1,307 | 1,414 | 1,219 | 0,976 | 0,886 | 0,762 | 0,548 | 0,431 |

*Рис. 4. Анализ сходимости*

Для достижения заключения об эффективности подхода было использовано по 426 ортонормированных элемента в изоморфных пространствах внутренних $\Xi$ и граничных $\Gamma$ состояний (одиннадцатый порядок многочленов).

### 4. Задача о взаимодействии трех центров расширения

Средствами МГС в безразмерной постановке решена первая основная задача теории упругости для однородной эластостатической среды, заключенной внутри параллелепипеда, находящегося в равновесии, в рамках: $x \in [-2;3]$, $y \in [-1;1]$, $z \in [-2;3]$. Внутрь этой среды помещены три центра расширения с координатами $O_1(1/2,0,2)$, $O_2(3/2,1/4,2)$, $O_3(-1/2,-1/4,2)$. Все грани параллелепипеда считаются свободными от нагрузок. Геометрическая и физическая сторона задачи рассматриваются в обезразмеренном варианте. Значение коэффициента Пуассона $\nu$ принимается равным $0.25$. Параметр интенсивности напряжений для центра расширений равен $\mu$ (результирующие поля напряжений и усилий при любом другом значении меняются пропорционально). Параллелепипед имеет значительные размеры, что позволяет моделировать неограниченную среду.

Наличие ортонормированного базиса $\{\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(k)},\cdots\} \in \Xi$ в случае первой основной задачи позволяет разложить искомое состояние пространства внутренних состояний $\Xi$ и вычислить коэффициенты Фурье в соответствии с определением скалярного произведения по границе тела [6]

$$c_k = \left(\gamma, \gamma^{(l)}\right) = \int_{\partial V} p_i u_i^{(l)} dS,$$

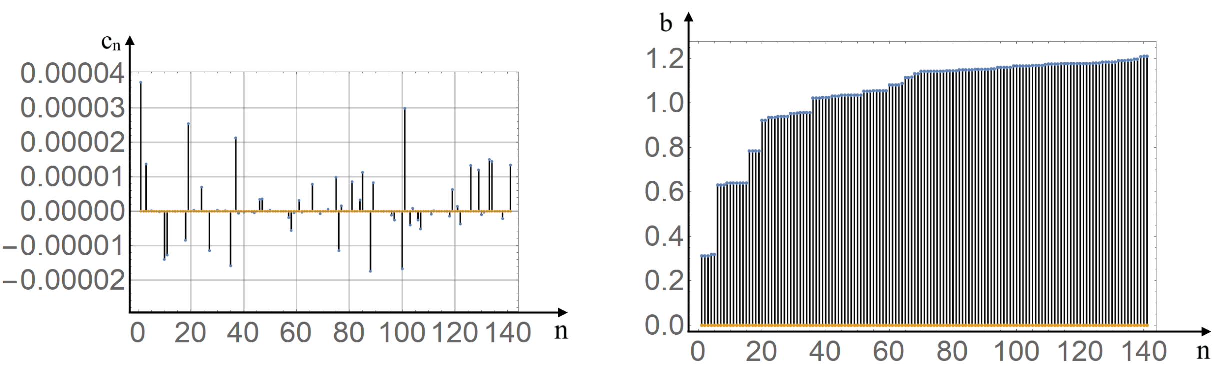
где $p_i$ — компоненты поверхностных усилий, $u_i^{(l)}$ — перемещение вдоль оси $x_i$ из ортонормированного базиса пространства граничных состояний $\Gamma$.

Система коэффициентов Фурье подчинена неравенству Бесселя (левая часть неравенства Бесселя, которая соотносит коэффициенты Фурье с евклидовой нормой раскладываемого элемента)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \le \xi_{\Xi}^2 = \gamma_{\hat{A}}^2, \tag{6}$$

где $n$ — размерность усеченного базиса.

На рис. 5а графически представлены коэффициенты Фурье. Достоверность полученных результатов можно характеризовать квадратичной невязкой граничных условий с результатами решения по поверхности, которая составила значение порядка $1.27$, а также фактом насыщение суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя (6)), представленной на рис. 5б.



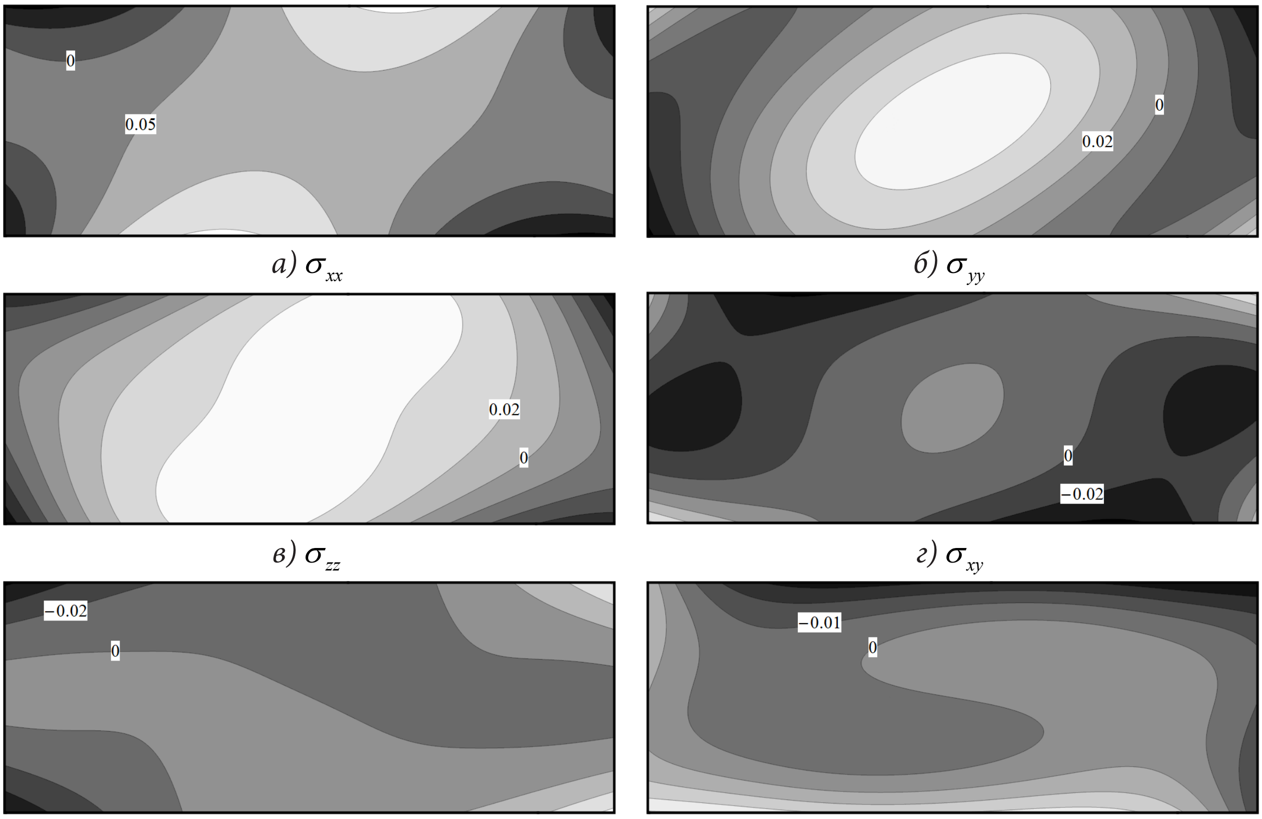

*а)* *б)*

*Рис. 5. а) коэффициенты Фурье, б) насыщение суммы Бесселя*

Результаты свидетельствуют о явном насыщении суммы Бесселя, что говорит о практически наблюдаемой устойчивости решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Данный факт является одним из косвенных показателей, характеризующих качество решения.

## 5. Результаты решения в графической форме

Полученное решение, которое отвечает за напряженно-деформированное состояние, имеет численно-аналитический вид, но из-за визуальной необозримости компонент внутреннего состояния, оно здесь не приведено. Для краткости на рис. 6 представлено отображение насыщения полей напряжений в виде изолиний, построенных в сечении $z = 2$.




*а)* $\sigma_{xx}$ *б)* $\sigma_{yy}$

*в)* $\sigma_{zz}$ *г)* $\sigma_{xy}$

*д)* $\sigma_{xz}$ *е)* $\sigma_{yz}$

*Рис. 6. Изолинии напряжений в сечении* $z = 2$ *а)* $\sigma_{xx}$, *б)* $\sigma_{yy}$, *в)* $\sigma_{zz}$, *г)* $\sigma_{xy}$, *д)* $\sigma_{xz}$, *е)* $\sigma_{yz}$

На рис. 6 более темные слои отвечают большему сжатию, цветовой фон, соответствующий нулевому уровню напряжений, представлен на каждом поле вместе с соседствующим слоем, остальные значения легко высчитываются в соответствии с этим шагом. Компоненты тензоров напряжений внутри области имеют конечные значения, а по мере приближения к центрам расширения, увеличивают свои значения и выделяют зону концентрации напряжений; по мере удаления вдоль оси $X$ напряжения убывают.

Таким образом, метод граничных состояний успешно применен для решения пространственных задач теории упругости для тела, осложнённых физическими сингулярностями типа центров расширения.

**Благодарности**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-31-90065 и № 19-41-480003 р_а.

**Литература**

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М. : Гостехиздат, 1955. – 492 с.

2. *Лурье А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.

3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. / А. Ляв. – М. : ОНТИ, 1935. – 674 с.

4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

5. *Пеньков В. Б., Пеньков В. В.* Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т.2, №2. – С. 115-137.

6. *Пеньков В. Б.* Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co., Germany, 2012. – 108 с.

7. Пеньков В. В. Метод граничных состояний в задачах линейной механики. В.В. Пеньков: дис. … канд. физ.-мат. наук. Тула: ТулГУ, 2002. – 83 с.

8. *Поликарпов М. В., Пеньков В. Б.* Сосредоточенные силовые воздействия в методе граничных состояний // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2020. № 1 (43). – С. 34–44

9. *Поликарпов М. В.* Применение метода граничных состояний для расчета напряжённо-деформированного состояния пространственного тела, подверженного сингулярным воздействиям. Материалы областного профильного семинара «Школа молодых ученых» по проблемам технических наук, 15 ноября 2019 г. – Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2019. – С. 138–141.

10. *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : ЛЕНАНД, 2019. – 712 с.

11. *Polikarpov M. V., Penkov V. B.* Method of boundary states in problems of interactions of two cavities // International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. – 2020. – 11(12), 11A12S, 1–10.

УДК 539.3

# ВИНТОВЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ГАРМОНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОСТИ

**Ю. Н. Радаев**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

**Аннотация.** Выполнено исследование связанной системы векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории изотропного упругого тела в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени. Предложена схема расщепления связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для потенциалов на несвязанные винтовые уравнения. Найдено представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов, обеспечивающее выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости. Получено также представление векторов перемещений и микровращений с помощью двух, несвязанных между собой метагармонических векторов. Оно имеет весьма компактную аналитическую структуру, обеспечивая тем самым наиболее простую формулировку граничных условий в целом ряде важных прикладных задач.

**Ключевые слова:** микрополярная упругость, вектор перемещения, вектор микровращения, векторный потенциал, вихревая часть, уравнение Гельмгольца, метагармоническое уравнение, винтовое уравнение, гармоническая волна.

## 1. Связанные дифференциальные уравнения теории микрополярной упругости

С точки зрения кинематики микрополярный континуум характеризуется двумя векторными полями: полем перемещений и полем микровращений (микроповоротов). Вектор перемещений является абсолютным тензором, т. е. преобразуется по обычному тензорному закону. Вектор микровращений вводится в теорию микрополярной упругости как относительный тензор веса +1. Поэтому, например, его компоненты не меняют знак при полной инверсии трехмерного пространства или простой перенумерации осей координатной системы, преобразующей ее из левоориентированной в правоориентированную. Переход от относительного вектора микровращений к абсолютному без труда осуществляется с помощью ориентирующего псевдоскаляра. Последнее обстоятельство позволяет сразу же вести все дальнейшее изложение в терминах абсолютных векторов.

Уравнения линейной микрополярной теории упругости достаточно хорошо известны [1–4] (см. также более ранние первоисточники [5–7]). Их вывод, основанный на принципе виртуальных перемещений, имеется в статье [8]. Не вдаваясь в детали, сразу отметим, что система связанных векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории упругости имеет вид (см. [8]):

$$\begin{cases} G[(1+c_1)\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+(1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+2c_1\nabla\times\phi]=\rho\partial_{.}\partial_{.}\mathbf{u}, \\ GL^2[(1+c_2)\nabla\cdot\nabla\phi+(1-c_2+2c_3)\nabla\nabla\cdot\phi]-2Gc_1(2\phi-\nabla\times\mathbf{u})=\Im\partial_{.}\partial_{.}\phi. \end{cases} \tag{1}$$

где $\rho$ — плотность; $\Im$ — коэффициент микроинерции; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; $\phi$ — вектор микровращения; $G$ — модуль сдвига; $\nu$ — коэффициент Пуассона; $L$ — характерная длина микрополярной теории упругости; $c_1$, $c_2$, $c_3$ — физически безразмерные определяющие постоянные; $\nabla$ — трехмерный оператор Гамильтона; $\partial_{.}$ — частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных.

В монографиях [2, 3] и множестве других публикаций, посвященных линейной микрополярной теории упругости изотропного тела, обычно используются другие определяющие постоянные и соответственно иная форма дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+2\alpha\nabla\times\phi=\rho\partial_{.}\partial_{.}\mathbf{u}, \\ (\beta+2\gamma)\nabla\nabla\cdot\phi-(\gamma+\varepsilon)\nabla\times(\nabla\times\phi)-2\alpha(2\phi-\nabla\times\mathbf{u})=\Im\partial_{.}\partial_{.}\phi. \end{cases} \tag{2}$$

В дальнейшем изложении мы будем пользоваться уравнениями линейной микрополярной теории упругости в форме (2) с тем, чтобы максимально приблизить форму основных уравнений к наиболее распространенным образцам.

## 2. Потенциалы перемещений и микровращенией

На основании разложений Гельмгольца для векторов перемещений и микровращений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}&=\nabla\Phi+\nabla\times\mathbf{\Psi}, \\ \phi&=\nabla\Sigma+\nabla\times\mathbf{H}, \end{aligned} \tag{3}$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных потенциалов $\Phi$, $\Sigma$ и векторных потенциалов $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{H}$, из системы дифференциальных уравнений (2) получаются уравнения для скалярных и векторных потенциалов.

Дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов $\Phi, \Sigma$ не связанны между собой:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi-\frac{1}{c_{\parallel}^2}(\partial_{.})^2\Phi=0, \\ &\Delta\Sigma-\frac{1}{{}_{\mu}c_{\parallel}^2}(\partial_{.})^2\Sigma-\frac{\Omega^2}{{}_{\mu}c_{\parallel}^2}\Sigma=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь постоянные $c_{\parallel}^2$, ${}_{\mu}c_{\parallel}^2$ и $\Omega^2$ выражаются в терминах определяющих постоянных согласно

$$c_{\parallel}^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \qquad {}_{\mu}c_{\parallel}^2=\frac{\beta+2\gamma}{\Im}, \qquad \Omega^2=\frac{4\alpha}{\Im}.$$

Для векторных потенциалов $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{H}$ получаются два связанных между собой векторных дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} A_{\perp}\mathbf{\Psi}+2d_{\perp}^2\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{0}, \\ B_{\perp}\mathbf{H}+\dfrac{\Omega^2}{2\,{}_{\mu}^{``}c_{\perp}^2}\nabla\times\mathbf{\Psi}=\mathbf{0}, \end{cases} \tag{5}$$

где были введены постоянные

$$d_{\perp}^2=\frac{{}^{`}c_{\perp}^2}{{}^{``}c_{\perp}^2}, \quad {}^{`}c_{\perp}^2=\frac{\alpha}{\rho}, \quad {}^{``}c_{\perp}^2=\frac{\mu+\alpha}{\rho}, \quad {}_{\mu}^{``}c_{\perp}^2=\frac{\gamma+\epsilon}{\Im}; \tag{6}$$

и, кроме того, — два дифференциальных оператора второго порядка

$$A_{\perp}=\Delta-\frac{1}{{}^{``}c_{\perp}^2}(\partial_{.})^2, \qquad B_{\perp}=\Delta-\frac{1}{{}_{\mu}^{``}c_{\perp}^2}(\partial_{.})^2-\frac{\Omega^2}{{}_{\mu}^{``}c_{\perp}^2}. \tag{7}$$

Система (5) сохраняет свой вид независимо от использования того или иного условия калибровки.

В рамках настоящего исследования, когда зависимость физических полей от времени будет гармонической, удобно ввести следующие две постоянные

$$\alpha_{\perp}^2=\frac{\omega^2}{{}^{``}c_{\perp}^2}, \quad \beta_{\perp}^2=\mathrm{Abs}\frac{\omega^2-\Omega^2}{{}_{\mu}^{``}c_{\perp}^2}$$

и привести операторы $A_\perp$ и $B_\perp$ к виду:

$$A_\perp = \Delta + \alpha_\perp^2, \qquad B_\perp = \Delta \pm \beta_\perp^2, \tag{8}$$

где выбор того или иного знака в выражении для $B_\perp$ зависит от величины циклической частоты. Ограничимся исследованием высокочастотных гармонических волн, когда циклическая частота $\omega$ оказывается выше порогового значения, определяемого постоянной $\Omega$. Тогда последняя система уравнений приводится к

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\mathbf{\Psi} + 2d_\perp^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \nabla \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$g_\perp^2 = \frac{\Omega^2}{{}^{``}_{\mu}c_\perp^2} d_\perp^2.$$

Для скалярных потенциалов $\Phi$, $\Sigma$ в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени на основании (4) приходим к уравнениям

$$\begin{gathered} (\nabla \cdot \nabla)\Phi + \alpha_\parallel^2 \Phi = 0, \\ (\nabla \cdot \nabla)\Sigma + \beta_\parallel^2 \Sigma = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\alpha_\parallel^2 = \frac{\omega^2}{c_\parallel^2}, \quad \beta_\parallel^2 = \mathrm{Abs}\frac{\omega^2 - \Omega^2}{{}^{``}_{\mu}c_\parallel^2}.$$

### 3. Представления с помощью винтовых векторов

Чрезвычайно плодотворным оказывается рассмотрение вихревых составляющих перемещений и микровращений как одного и того же вихревого векторного поля $\mathbf{\Upsilon}$, но с различными масштабными факторами:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{\Psi} = a\mathbf{\Upsilon}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = b\mathbf{\Upsilon}; \end{cases} \tag{11}$$

при этом буде выполнено *естественное* калибровочное условие

$$\nabla \cdot \mathbf{\Upsilon} = 0.$$

Подстановка (11) в систему векторных дифференциальных уравнений (9) позволяет получить следующую систему уравнений относительно поля $\mathbf{\Upsilon}$:

$$\begin{cases} -a\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Upsilon}) + \alpha_\perp^2 a\mathbf{\Upsilon} + 2d_\perp^2 b \nabla \times \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -b\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Upsilon}) + \beta_\perp^2 b\mathbf{\Upsilon} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} a \nabla \times \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

В левой части первого из уравнений приведенной выше системы добавим и отнимем одно и то же слагаемое ($c$ — некоторая постоянная)

$$c\nabla \times \mathbf{\Upsilon};$$

то же самое выполним и со вторым уравнением и слагаемым ($d$ — некоторая постоянная)

$$d\nabla \times \mathbf{\Upsilon}.$$

После ряда преобразований убеждаемся в том, что, если положить

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2d_\perp^2 b}{a\alpha_\perp^2}, \qquad \frac{b}{d} = \frac{d + (2d_\perp^2)^{-1} g_\perp^2 a}{b\beta_\perp^2},$$

то связанные уравнения для потенциалов будут удовлетворяться, когда

$$\begin{cases} -c\nabla\times\boldsymbol{\Upsilon}+a\alpha_\perp^2\boldsymbol{\Upsilon}=\mathbf{0}, \\ -d\nabla\times\boldsymbol{\Upsilon}+b\beta_\perp^2\boldsymbol{\Upsilon}=\mathbf{0}. \end{cases}$$

Получить одно независимое уравнение для определения векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$ удается, если принять, что

$$\frac{c}{d}=\frac{\alpha_\perp^2}{\beta_\perp^2}\frac{a}{b};$$

тогда оказывается достаточной выполнимость следующего *винтового* уравнения[1]

$$-\nabla\times\boldsymbol{\Upsilon}+p\alpha_\perp^2\boldsymbol{\Upsilon}=\mathbf{0}, \tag{12}$$

где $p$ представляет собой отношение

$$p=\frac{a}{c}.$$

Обратимся далее к нахождению постоянных. Всего их четыре: $a$, $b$, $c$, $d$. Из них можно образовать три независимых отношения:

$$p=\frac{a}{c},\quad q=\frac{b}{c},\quad s=\frac{d}{c}.$$

Для постоянных $q$ и $p^2$ получается два различных вещественных значения

$$4d_\perp^2\alpha_\perp^2 q=\beta_\perp^2+g_\perp^2-\alpha_\perp^2\pm\sqrt{(\beta_\perp^2+g_\perp^2-\alpha_\perp^2)^2+4g_\perp^2\alpha_\perp^2},$$

$$2\alpha_\perp^4 p^2=\beta_\perp^2+g_\perp^2+\alpha_\perp^2\pm\sqrt{(\beta_\perp^2+g_\perp^2+\alpha_\perp^2)^2-4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}.$$

Начиная с этого момента, введем два значения $p_1$, $p_2$, которые соответствуют положительному и отрицательному знакам в приведенной только что формуле. Введем также два *положительных* значения $K_1$, $K_2$ согласно

$$\begin{aligned} \sqrt{2}K_2&=\sqrt{\beta_\perp^2+g_\perp^2+\alpha_\perp^2+\sqrt{(\beta_\perp^2+g_\perp^2+\alpha_\perp^2)^2-4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}}, \\ \sqrt{2}K_1&=\sqrt{\beta_\perp^2+g_\perp^2+\alpha_\perp^2-\sqrt{(\beta_\perp^2+g_\perp^2+\alpha_\perp^2)^2-4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ясно, что векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ должно удовлетворять одному из четырех винтовых уравнений

$$-\nabla\times\boldsymbol{\Upsilon}\mp K_{2,1}\boldsymbol{\Upsilon}=\mathbf{0}, \tag{14}$$

где знаки $\mp$ и индексы 1, 2 между собой никак не согласованы.

В итоге приходим к следующей формуле для вихревых частей перемещений и микровращений:

$$\nabla\times\begin{pmatrix}\mathbf{Ø}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -g_2\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_{2-}+\begin{pmatrix}1\\ g_2\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_{2+}+\begin{pmatrix}1\\ -g_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_{1-}+\begin{pmatrix}1\\ g_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_{1+}, \tag{15}$$

где

$$g_{2,1}=\frac{\beta_\perp^2+g_\perp^2-\alpha_\perp^2\pm\sqrt{(\beta_\perp^2+g_\perp^2-\alpha_\perp^2)^2+4\alpha_\perp^2 g_\perp^2}}{4d_\perp^2 K_{2,1}}. \tag{16}$$

Заметим, что здесь знаки $\pm$ согласованы с индексами 2, 1; т. е. последняя формула на самом деле определяет ровно два вещественных значения параметра $g$.

[1]Теорию винтового уравнения заинтересованный читатель может найти в ряде руководств по математической физике, а также в монографиях, посвященных механике сплошных сред.

## 4. Представление перемещений и микровращений в терминах двух метагармонических векторов

Следуя [9], винтовые уравнения (14) будем решать, вводя два новых вихревых векторных потенциала $\underset{1}{\mathbf{\Pi}}$ и $\underset{2}{\mathbf{\Pi}}$ в соответствии с

$$\begin{aligned} \underset{1\mp}{\boldsymbol{\Upsilon}} &= \nabla \times \underset{1}{\mathbf{\Pi}} \mp K_1 \underset{1}{\mathbf{\Pi}}, \\ \underset{2\mp}{\boldsymbol{\Upsilon}} &= \nabla \times \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \mp K_2 \underset{2}{\mathbf{\Pi}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Эти два потенциала предполагаются вихревыми, т. е.

$$\nabla \cdot \underset{1}{\mathbf{\Pi}} = 0, \qquad \nabla \cdot \underset{2}{\mathbf{\Pi}} = 0.$$

Для того, чтобы векторные поля $\underset{2-}{\boldsymbol{\Upsilon}}, \underset{2+}{\boldsymbol{\Upsilon}}, \underset{1-}{\boldsymbol{\Upsilon}}, \underset{1+}{\boldsymbol{\Upsilon}}$ удовлетворяли винтовым уравнениям (14) потенциалы $\underset{1}{\mathbf{\Pi}}$ и $\underset{2}{\mathbf{\Pi}}$, в свою очередь, должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца[2]

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \nabla)\underset{1}{\mathbf{\Pi}} + K_1^2 \underset{1}{\mathbf{\Pi}} &= \mathbf{0}, \\ (\nabla \cdot \nabla)\underset{2}{\mathbf{\Pi}} + K_2^2 \underset{2}{\mathbf{\Pi}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя в формулу (15) представления (17) для векторных полей $\underset{2-}{\boldsymbol{\Upsilon}}, \underset{2+}{\boldsymbol{\Upsilon}}, \underset{1-}{\boldsymbol{\Upsilon}}, \underset{1+}{\boldsymbol{\Upsilon}}$, пренебрегая затем несущественным множителем 2, после ряда преобразований получаем

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \times \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + \nabla \times \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \\ g_1 K_1 \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + g_2 K_2 \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$g_{2,1} K_{2,1} = \frac{\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2)^2 + 4\alpha_\perp^2 g_\perp^2}}{4 d_\perp^2}.$$

Принимая также во внимание (3), приходим к следующему представлению перемещений и микровращений в терминах двух метагармонических потенциалов:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \nabla \begin{pmatrix} \Phi \\ \Sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \times \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + \nabla \times \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \\ g_1 K_1 \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + g_2 K_2 \underset{2}{\mathbf{\Pi}} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь скалярные и векторные потенциалы должны удовлетворять метагармоническим уравнениям (см. (10) и (18)) с волновыми числами $\alpha_\parallel$, $\beta_\parallel$, $K_1$, $K_2$:

$$\begin{aligned} &((\nabla \cdot \nabla) + \alpha_\parallel^2)\Phi = 0, \\ &((\nabla \cdot \nabla) + \beta_\parallel^2)\Sigma = 0; \\ &((\nabla \cdot \nabla) + K_1^2)\underset{1}{\mathbf{Đ}} = \mathbf{0}, \\ &((\nabla \cdot \nabla) + K_2^2)\underset{2}{\mathbf{Đ}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{20}$$

На основании представлений (19) могут быть получены также выражения для тензоров деформаций, силовых и моментных напряжений в терминах метагармонических потенциалов.

В рамках представляемого подхода существенную роль играют следующие весьма простые по форме выражения для расходимости и вихря перемещений и микровращений:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\alpha_\parallel^2 \Phi, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} &= -\beta_\parallel^2 \Sigma; \end{aligned}$$

[2]В современной научной литературе уравнения Гельмгольца часто называют метагармоническими уравнениями (metaharmonic equations), а их регулярные решения — метагармоническими функциями (в данном случае — метагармоническими векторными полями).

$$\nabla \times \mathbf{u} = -(\nabla \cdot \nabla)\underset{1}{\mathbf{\Pi}} - (\nabla \cdot \nabla)\underset{2}{\mathbf{\Pi}} = K_1^2 \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + K_2^2 \underset{2}{\mathbf{\Pi}},$$
$$\nabla \times \boldsymbol{\phi} = g_1 K_1 \nabla \times \underset{1}{\mathbf{\Pi}} + g_2 K_2 \nabla \times \underset{2}{\mathbf{\Pi}}.$$

Поскольку фундаментальное представление (19) имеет весьма компактную аналитическую структуру, то тем самым оно обеспечивает наиболее простую формулировку граничных условий в целом ряде важных прикладных задач, связанных с распространением гармонических волн в упругих (см., например, [10, 11]) и микрополярных упругих средах. В частности, представление (19) для гармонических волн перемещений и микровращений оказывается пригодным для изучения распространяющихся гармонических волн вдоль оси длинного цилиндрического волновод кругового поперечного сечения.


**Благодарности**

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00844 «Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности»).


**Литература**


1. *Cosserat, E.* Theorie des corps deformables / E. Cosserat, F. Cosserat. – Paris: Herman et Fils, 1909. – vi+226 pp.
2. *Nowacki, W.* Theory of Asymmetric Elasticity / W. Nowacki. – Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. – viii+383 pp.
3. *Новацкий, В.* Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
4. *Dyszlewicz, J.* Micropolar Theory of Elasticity. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) / J. Dyszlewicz. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. – xv+345 pp.
5. *Gunther, W.* Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums / W. Gunther //
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. – 1958. – Band 10. – S. 195–213.
6. *Palmov, V. A.* Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity / V. A. Palmov // Prikl. Math. Mech. – 1964. – V. 28, No. 3. – P. 401–408.
7. *Neuber, H.* Uber Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Korper / H. Neuber // Acta Mechanica. – 1966. – V. 2. – P. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729
8. *Радаев, Ю. Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума / Ю. Н. Радаев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.
9. *Радаев, Ю. Н.* Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов / Ю. Н. Радаев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2020. – № 6. – (в печати)
10. *Achenbach, J. D.* Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach // In: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics / Eds. H. A. Lauwerier, W. T. Koiter. Vol. 16. – Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. -- xiv+425 pp.
11. *Ковалев В. А.* Волновые задачи теории поля и термомеханика / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – 328 с.

УДК 539.3

# К ПСЕВДОТЕНЗОРНЫМ ФОРМУЛИРОВКАМ МЕХАНИКИ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА

**Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

**Аннотация.** В работе рассматривается формулировка уравнений механики микрополярного конитуума в терминах псевдотензоров. Обсуждаются вопросы алгебры псевдотензоров. Проводится анализ фундаментальных псевдотензорных величин. Вводится понятие ориентирующего псевдоскаляра и  Указаны формулы преобразования псевдотензоров к абсолютным тензорам. Приводятся формы ковариантного дифференцирования для часто используемых в задачах механики псевдотензоров. Вычисляются веса кинематических и динамических характеристик микрополярного континуума. Выводится конечная форма уравнений динамики микрополярного континуума справедливая в произвольной криволинейной системе координат.

**Ключевые слова:** относительный тензор, псевдотензор, ориентирующий псевдоскаляр, силовое напряжение, моментное напряжение, микроповорот, перемещение, микрополярный континуум.

## Введение

Векторный анализ Гиббса [1] и тензорный анализ Риччи [2] признаны стандартными инструментами в большинстве физических теорий: теории относительности, континуальной механике, гидродинамике и электродинамике. Их систематическое использование не только существенно упрощает, но и оптимизирует математические представления уравнений. Более того, тензорный анализ предоставляет также простой алгоритмический метод построения систем алгебраических инвариантов. Инвариантность формы тензорного уравнения в различных системах координат диктует необходимость изложения физических законов или геометрических свойств в тензорной форме.

Подавляющее большинство исследований в механике деформируемого твердого тела, использующих тензорные представления, оперирует, как правило, с абсолютными тензорами. Тем не менее не все механические и физические поля являются абсолютными тензорами. Это относится, в частности, к уравнениям микрополярной теории упругости в основе которой лежат микроповороты и моментные напряжения, которые, к сожалению, не являются абсолютными (истинными) тензорами. Зачастую, запись уравнений микрополярной теории упругости в терминах относительных тензоров (relative tensors) или псевдотензоров (pseudotensors) позволяет более точно понять физическую и геометрическую природу тех или иных физических полей, тем более, что для оперирования с относительными тензорами имеется достаточно разработанный формальный аппарат [3–9], который включает как алгебраические так и дифференциальные операции.

## 1. Относительные тензоры (псевдотензоры) в трехмерном пространстве

Выберем в трехмерном пространстве систему координат $x^k$ $(k=1,2,3)$. Метрика пространства задается квадратом линейного элемента длины согласно

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{1}$$

где $g_{ij}$ — компоненты метрического тензора. Компоненты фундаментального тензора связаны с метрическим тензором соотношением

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k. \tag{2}$$

И метрический и фундаментальный тензоры являются абсолютными (истинными) тензорами. То же самое относится к символу Кронекера.

При этом квадратичная форма (1) является положительно определенной откуда следует неравенство

$$g = \det(g_{ij}) > 0. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: $\underset{s}{\boldsymbol{\iota}}$ $(s = 1, 2, 3)$ — локальный ковариантный базис; $\overset{s}{\boldsymbol{\iota}}$ — локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\underset{s}{\boldsymbol{\iota}} \cdot \overset{k}{\boldsymbol{\iota}} = \overset{k}{\underset{s}{\delta}} \quad (k = 1, 2, 3; \; s = 1, 2, 3).$$

Будем считать правоориентированными следующие тройки базисных векторов (рис. 1),

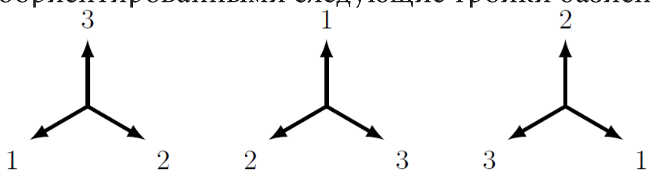



*Рис. 1. Правоориентированные тройки направлений в трехмерном пространстве*

а левоориентированными — тройки векторов, изображенных на рис. 2.

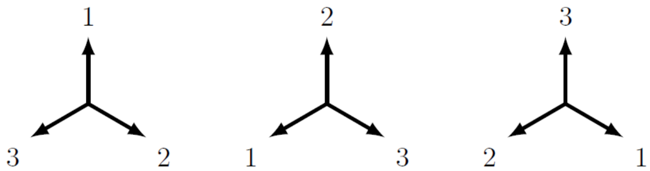



*Рис 2. Левоориентированные тройки направлений в трехмерном пространстве*

Базисные направления и различные способы их нумерации являются фундаментальными понятиями в теории относительных тензоров.

С ориентацией локальных базисов связан фундаментальный объект тензорной алгебры и многомерной геометрии — символы перестановок Леви —Чивиты [2, 3], которые не являются абсолютным тензорами и определяются согласно соотношениям:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2); \\ -1, & \text{для троек } (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3); \\ \;\;0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

Символы перестановок $\epsilon_{ijk}$ и $\epsilon^{ijk}$ являются относительными ковариантными тензорами (псевдотензорами) веса –1 (w.g.t. = –1) и одновременно — относительными контравариантными тензорами веса +1 (w.g.t. = +1), поэтому удобно ввести для них следующие обозначения:

$$\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{ijk}, \quad \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ijk}.$$

Далее сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях.

Введем в рассмотрение ориентирующий трехмерное пространство псевдоскаляр (относительный скаляр веса +1 (w.g.t. = +1)), образованный последовательным применением операций скалярного и векторного произведения (тройного произведения) к базисным векторам:

$$e=\overset{[+1]}{e}=\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}\cdot(\underset{2}{\boldsymbol{\imath}}\times\underset{3}{\boldsymbol{\imath}}) \tag{5}$$

и относительный скаляр отрицательного веса –1 (w.g.t. = –1):

$$\frac{1}{e}=\overset{[-1]^{-1}}{e}=\overset{1}{\boldsymbol{\imath}}\cdot(\overset{2}{\boldsymbol{\imath}}\times\overset{3}{\boldsymbol{\imath}}). \tag{6}$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (5) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда построенного на векторах $\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}$. Подчеркнем, что $e>0$ для правоориентированной координатной системы (рис. 1), $e<0$ для левоориентированной координатной системы (рис. 2). Ориентирующий пространство псевдоскаляр позволяет без труда осуществить переход от относительных тензоров к абсолютным. Нетрудно видеть, что

$$e^2=g,$$

откуда видно, что $g$ является псевдоскаляром веса +2, т. е.

$$g=\overset{[+2]}{g}.$$

В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как $e$ и $g$, указание на их вес будем опускать.

Истинные (абсолютные) $e$-тензоры (тензоры перестановок, тензоры Леви — Чивита, дискриминантные тензоры) $e^{ijk}$, $e_{ijk}$ можно вычислить согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} e_{ijk} &= \overset{[+1]}{e}\,\overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk}, \\ e^{ijk} &= \overset{[-1]^{-1}}{e}\,\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ijk}, \end{aligned} \tag{7}$$

т. е.

$$e_{skl}=\begin{cases} +|e|\,\overset{[-1]}{\epsilon}_{skl}, & \text{если } e>0; \\ -|e|\,\overset{[-1]}{\epsilon}_{skl}, & \text{если } e<0; \end{cases}$$

$$e^{skl}=\begin{cases} +\dfrac{1}{|e|}\,\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{skl}, & \text{если } e>0; \\ -\dfrac{1}{|e|}\,\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{skl}, & \text{если } e<0. \end{cases}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\begin{aligned} &\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}\times\underset{k}{\boldsymbol{\imath}}=e_{skl}\overset{l}{\boldsymbol{\imath}}, \\ &\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}\times\overset{k}{\boldsymbol{\imath}}=e^{skl}\underset{l}{\boldsymbol{\imath}}, \\ &e_{skl}=\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}\cdot(\underset{k}{\boldsymbol{\imath}}\times\underset{l}{\boldsymbol{\imath}}), \\ &e^{skl}=\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}\cdot(\overset{k}{\boldsymbol{\imath}}\times\overset{l}{\boldsymbol{\imath}}). \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая изложенное выше, для $e$-тензора

$$\boldsymbol{e}=e_{skl}\,\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}\otimes\overset{k}{\boldsymbol{\imath}}\otimes\overset{l}{\boldsymbol{\imath}}$$

нетрудно получить формулу

$$\boldsymbol{e}=-\mathbf{I}\times\mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

В самом деле, справедливы следующие равенства

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}=(\overset{k}{\boldsymbol{\imath}}\otimes\underset{k}{\boldsymbol{\imath}})\times(\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}\otimes\overset{s}{\boldsymbol{\imath}})=\overset{k}{\boldsymbol{\imath}}\otimes(\underset{k}{\boldsymbol{\imath}}\times\underset{s}{\boldsymbol{\imath}})\otimes\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}. \tag{9}$$

Воспользовавшись соотношениями (8), преобразуем выражение (10) к виду

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}=\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}\otimes(e_{slk}\overset{k}{\boldsymbol{\imath}})\otimes\overset{l}{\boldsymbol{\imath}}=-e_{skl}\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}\otimes\overset{k}{\boldsymbol{\imath}}\otimes\overset{l}{\boldsymbol{\imath}}=-\boldsymbol{e}. \tag{10}$$

## 2. Определение псевдотензора и формула ковариантного дифференцирования относительного тензора

Сведения, касающиеся символов перестановок и псевдотензоров, имеются во многих руководствах по многомерной геометрии и тензорному анализу (см., например, [3–5, 8, 9]. В общем случае определение относительного тензора веса $W$ гласит

$$\overline{T}^{lm..n}_{ij..k}=\Delta^W T^{pq..s}_{ab..c}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^p}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^q}\cdots\frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial x^a}{\partial\overline{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial\overline{x}^j}\cdots\frac{\partial x^c}{\partial\overline{x}^k}, \tag{11}$$

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^j}\right).$$

Здесь черта сверху указывает на значение величины в новой системе координат $\overline{x}^k$ $(k=1,2,3)$, $\Delta$ — якобиан преобразования.

Ковариантное производная относительного тензора $T^{lm..n}_{ij..k}$ веса $W$ вычисляется по аналогии с соответствующей операцией для обычных тензоров [8]:

$$\begin{aligned}\nabla_p \overset{[W]}{T}{}^{lm..n}_{ij..k} &= \partial_p \overset{[W]}{T}{}^{lm..n}_{ij..k} + \overset{[W]}{T}{}^{sm..n}_{ij..k}\Gamma^l_{sp}+\dots+\overset{[W]}{T}{}^{lm..s}_{ij..k}\Gamma^s_{ip}-\\ &-\Gamma^l_{sp}\overset{[W]}{T}{}^{lm..n}_{sj..k}-\dots-\Gamma^l_{sp}\overset{[W]}{T}{}^{lm..n}_{ij..s}-W\overset{[W]}{T}{}^{lm..n}_{ij..k}\Gamma^s_{sp},\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\partial_p=\frac{\partial}{\partial x^p}.$$

Выпишем формулу (12) для ряда конкретных случаев:

1. Ковариантная производная относительного скаляра веса $W$:

$$\nabla_p\overset{[W]}{T}=\partial_p\overset{[W]}{T}-W\overset{[W]}{T}\Gamma^s_{sp}; \tag{13}$$

2. Ковариантная производная относительного контрвариантного вектора веса $W$:

$$\nabla_p\overset{[W]}{T}{}^k=\partial_p\overset{[W]}{T}{}^k+\overset{[W]}{T}{}^s\Gamma^k_{sp}-W\overset{[W]}{T}{}^k\Gamma^s_{sp}; \tag{14}$$

3. Ковариантная производная относительного тензора контрвариантной валентности 2 веса $W$:

$$\nabla_p\overset{[W]}{T}{}^{ji}=\partial_p\overset{[W]}{T}{}^{ji}+\overset{[W]}{T}{}^{si}\Gamma^j_{sp}+\overset{[W]}{T}{}^{js}\Gamma^i_{sp}-W\overset{[W]}{T}{}^{ji}\Gamma^s_{sp}; \tag{15}$$

4. Ковариантная производная относительного тензора контрвариантной валентности 1 ковариантной валентности 1 веса $W$:

$$\nabla_p\overset{[W]}{T}{}^{\cdot j}_{i\cdot}=\partial_p\overset{[W]}{T}{}^{\cdot j}_{i\cdot}-\overset{[W]}{T}{}^{\cdot j}_{s\cdot}\Gamma^s_{ip}+\overset{[W]}{T}{}^{\cdot s}_{i\cdot}\Gamma^j_{sp}-W\overset{[W]}{T}{}^{\cdot j}_{i\cdot}\Gamma^s_{sp}. \tag{16}$$

## 3. Микрополярная теория упругости

Кинематика микрополярных континуумов определяется микроповоротами и трансляционными перемещениями элементарного объема. Хорошо известно, что малый поворот в трехмерном пространстве представляется абсолютным антисимметричным тензором второго ранга — тензором микроповорота (microrotation tensor) $\Omega_{ik}$ (w.g.t. = 0):

$$\Omega_{ik} = \Omega_{[ik]}. \tag{17}$$

Здесь квадратные скобки обозначают операцию альтернирования по заключенным в них индексам. С антисимметричным тензором $\Omega_{ik}$ связывается относительный вектор (micropolar microrotation vector) $\overset{[+1]}{\phi}{}^{i}$ (w.g.t. = +1):

$$\overset{[+1]}{\phi}{}^{i} = \frac{1}{2}\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ikl}\Omega_{kl}. \tag{18}$$

Тензор $\Omega_{ik}$ может быть выражен через вектор $\overset{[+1]}{\phi}{}^{i}$ согласно

$$\Omega_{kl} = \overset{[-1]}{\epsilon}{}_{klj}\overset{[+1]}{\phi}{}^{j}. \tag{19}$$

Таким образом, основными кинематическими переменными микрополярной теории являются абсолютный вектор $u^k$ и относительный вектор $\overset{[+1]}{\phi}{}^{i}$. Картина деформации микрополярного континуума лучше всего описывается вектором относительного микровращения (relative microrotation vector) $\varphi^i$ (w.g.t. = +1):

$$\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} = \overset{[+1]}{\phi}{}^{i} - \frac{1}{2}\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ikl}\nabla_k u_l. \tag{20}$$

«Чистая» деформация при этом характеризуется абсолютным симметричным тензором малых деформаций

$$\epsilon_{(ij)} = \nabla_{(i}u_{j)} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \tag{21}$$

где круглые скобки обозначают симметризацию по заключенным в них индексам. Тензор $\epsilon_{(ij)}$ — тензор малых деформаций, известный из классических теорий механики деформируемых тел.

Наконец, поле микроповоротов $\overset{[+1]}{\phi}{}^{i}$ порождает еще один тензор (тензор изгиба–кручения, wryness tensor), характеризующий деформацию изгиба–кручения:

$$\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s} = \nabla_i \overset{[+1]}{\phi}{}^{s}. \tag{22}$$

Определим также вектор $\kappa_i$ (w.g.t. = 0), сопутствующий антисимметричной части тензора изгиба–кручения $\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}$ (w.g.t. = +1):

$$\kappa_i = \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{ijs}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{[js]}. \tag{23}$$

В подавляющем большинстве исследований по теории асимметричной упругости вводится «полный» асимметричный тензор деформации $\epsilon_{ij}$ (w.g.t. = 0). Он конструируется из симметричного тензора деформации (21) и антисимметричного тензора

$$\epsilon_{[ij]} = -\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{ijk}\overset{[+1]}{\varphi}{}^{k} \tag{24}$$

простым сложением тензоров (21) и (24):

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{(ij)} + \epsilon_{[ij]}. \tag{25}$$

Можно показать, что «полный» асимметричный тензор деформации вычисляется по формуле

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \overset{[-1]}{\epsilon}{}_{ijk}\overset{[+1]}{\phi}{}^{k}. \tag{26}$$

Не трудно заключить, что тензор силовых напряжений $\sigma^{ik}$ является абсолютным тензором второго ранга, а тензор моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}_{\cdot k}^{i\cdot}$ — относительным тензором веса –1.

С учетом указанного выше обстоятельства дифференциальные уравнения движения микрополярного континуума в терминах относительных тензоров можно выписать в форме [10–13]:

$$\nabla_i \sigma^{ik} = -X^k + \rho \partial_{.} v^k, \tag{27}$$

$$\nabla_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\overset{[-1]}{\tau}_k = -\overset{[-1]}{Y}_k + \overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\,\partial_{..}\overset{[+1]}{\phi}{}^k, \tag{28}$$

где $\rho$ — массовая плотность, $\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}$ — микроинерция, $v^k$ — компоненты вектора скорости, $X^k$ — объемные силы, $Y_k$ (w.g.t. = –1) — объемные моменты, $\overset{[-1]}{\tau}_k$ (w.g.t. = –1) — вектор, связанный с антисимметричной частью тензора напряжений $\sigma^{[ik]}$ соотношением

$$\sigma^{[ik]} = -\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ikj}\overset{[-1]}{\tau}_j.$$

Запишем ковариантные производные в (27) и (28), следуя (15), (16)

$$\partial_i \sigma^{ik} + \sigma^{sk}\Gamma^i_{si} + \sigma^{is}\Gamma^k_{si} = -X^k + \rho \partial_{.} v^k, \tag{30}$$

$$\partial_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{\cdot i}_{k\cdot} - \overset{[-1]}{\mu}{}^{\cdot i}_{k\cdot}\Gamma^s_{si} + \overset{[-1]}{\mu}{}^{\cdot s}_{k\cdot}\Gamma^i_{si} - \overset{[-1]}{\mu}{}^{\cdot i}_{s\cdot}\Gamma^s_{ki} - 2\overset{[-1]}{\tau}_k = -\overset{[-1]}{Y}_k + \overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\,\partial_{..}\overset{[+1]}{\phi}{}^k. \tag{31}$$

### 4. Заключительные замечания

Таким образом, линейная микрополярная теория упругости успешно развивается в терминах относительных тензоров, можно также сказать, что такой подход является в некотором смысле более фундаментальным, поскольку с его помощью можно всегда перейти к формулировкам в терминах абсолютных тензоров. Например, рассмотрим формулу (26) для асимметричного тензора малых деформаций. Учитывая (7) находим

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - e\,\overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk}\, e^{-1}\overset{[+1]}{\phi}{}^k = \nabla_i u_j - e_{ijk}\phi^k, \tag{32}$$

где $e_{ijk}$ и $\phi^k$ есть абсолютные тензоры, так же как и $\epsilon_{ij}$, $\nabla_i$, $u_j$.


### Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты (№ 18-01-00844, № 20-01-00666).


### Литература


1. *Gibbs, J. W.* Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs / J. W. Gibbs. – Yale University Press, 1901. – 460 p.

2. *Ricci-Curbastro, G.* Levi-Civita's Tensor Analysis Paper: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci, and T. Levi-Civita. – Math Science Press. 1975. – 261 p.

3. *Levi-Civita, T.* The absolute differential calculus (calculus of tensors) / T. Levi-Civita. – London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. – 450 p.

4. *Гуревич, Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов / Г. Б. Гуревич. – М., Л. : ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 p.]

5. *Схоутен, Я. А.* Тензорный анализ для физиков / Я. А. Схоутен; – М. : Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. J. A. Schouten, Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]

6. *Розенфельд, Б. А.* Многомерные пространства / Б. А. Розенфельд. – М. : Наука, 1966. – 648 с.

7. *Рашевский, П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1964. – 664 с.

8. *Сокольников, И. С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред / И. С. Сокольников. – М. : Наука, 1971. – 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]

9. *Truesdell, C.* The Classical Field Theories / C. Truesdell, R. Toupin // In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flugge. – Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer, 1960. – 226–902 p.

10. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity / W. Nowacki. – Oxford : Pergamon Press, 1986. – 383 p.

11. *Радаев, Ю. Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума / Ю. Н. Радаев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 504–517.

12. *Radayev, Yu. N.* On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua / Yu. N. Radayev, V. A. Kovalev // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 464–474.

13. *Ковалев, В. А.* Волновые задачи теории поля и термомеханика / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. – 328 с.

УДК 539.3: 620.17.254

# РАСЧЕТНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ИЗМЕНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ УДАРНИКА ПРИ ПРОНИКАНИИ В ГРУНТОВЫЕ СРЕДЫ

**С. В. Сопин[1], Е. С. Качурина[1], И. А. Дяченко[2]**

[1]*Национальный исследовательский нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского*
[2]*ООО Газпром Проектирование*

**Аннотация.** Рассматривается задача о проникании под углом жесткого тела конечной массы в полупространство, занимаемое упругопластической грунтовой средой. Для среды проникания принимается модель линейно сжимаемой упругопластической среды Григоряна при линейной зависимости предела текучести от давления [1]. Задача решается численно в трехмерной постановке.

Исследуется влияние параметров задачи проникания (положение центра масс ударника, форма тела, угол подлета тела в свободной поверхности среды) на траекторию проникания твердого тела. Расчетные исследования проведены итерационно, путем варьирования параметров задачи проникания.
**Ключевые слова:** упругопластическая среда, грунтовая среда, твердое тело, угол подлета, положение центра масс, траектория проникания, итерации, изменение траектории, коэффициент преломления, форма твердого тела.

## Введение

Вопрос о движении пространственного твердого тела (ударника) в среде после входа в нее под углом исследован мало. Вполне вероятно, что вдали от поверхности раздела сред граничные условия не будут оказывать влияния на движение ударника, и после удаления от границы сред он будет двигаться прямолинейно [2].

В настоящей работе проведены исследования влияния некоторых параметров задачи на траекторию проникания: положение центра масс ударника, форма ударника, угол подлета ударника к свободной поверхности грунтовой среды. Необходимо установить взаимосвязь угла подлета ударника к свободной границе среды и угла удаления (в среде). Определялось отношение синуса угла вектора подлета к свободной поверхности среды и угла удаления (в среде) [2–4]. Данное отношение, по аналогии с оптикой, названо коэффициентом преломления.

## 1. Параметры задачи

1) Положение центра масс ударника.

В расчетах взяты 16 вариаций положения центра масс ударника, которые схематично показаны на рис. 1а. Положение центра масс задано в относительных координатах, в долях (процентах) от линейного размера ударника:

$$\overline{X}_C = \frac{X_C}{D}, \quad \overline{Y}_C = \frac{Y_C}{H}, \tag{1}$$

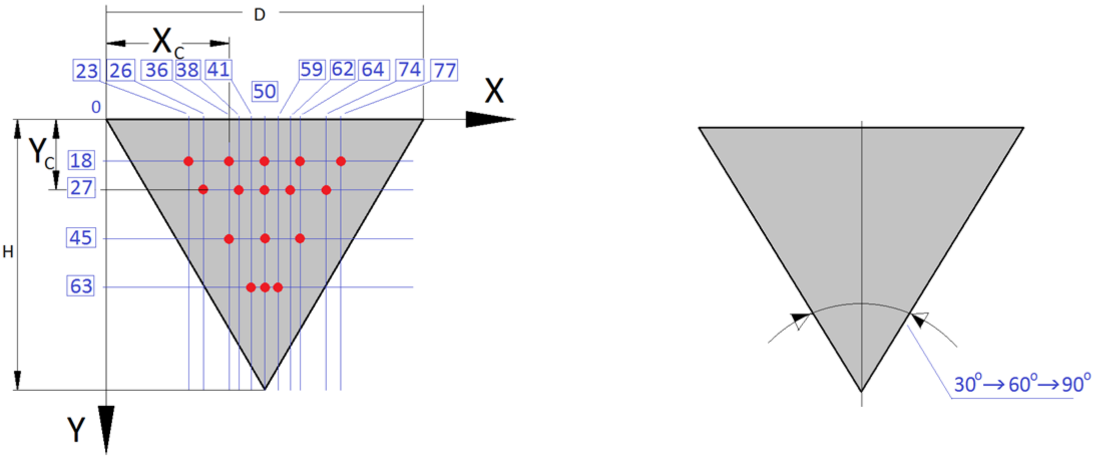
где $X_C$, $Y_C$ — координаты положения центра масс в абсолютных величинах, $D$ и $H$ — максимальный линейный размер ударника в поперечной и продольной плоскости, соответственно (в данном случае –– диаметр и высота конуса).

2) Форма ударника.

Для вариации формой ударника в расчетах взяты три величины угла раствора $\theta$ конического ударника: 30°, 60°, 90° (рис.1б).

3) Угол подлета ударника в свободной поверхности грунтовой среды.

Рассмотрены две вариации угла подлета ударника к свободной поверхности грунта: под углом 60° и по нормали.




*а)* *б)*

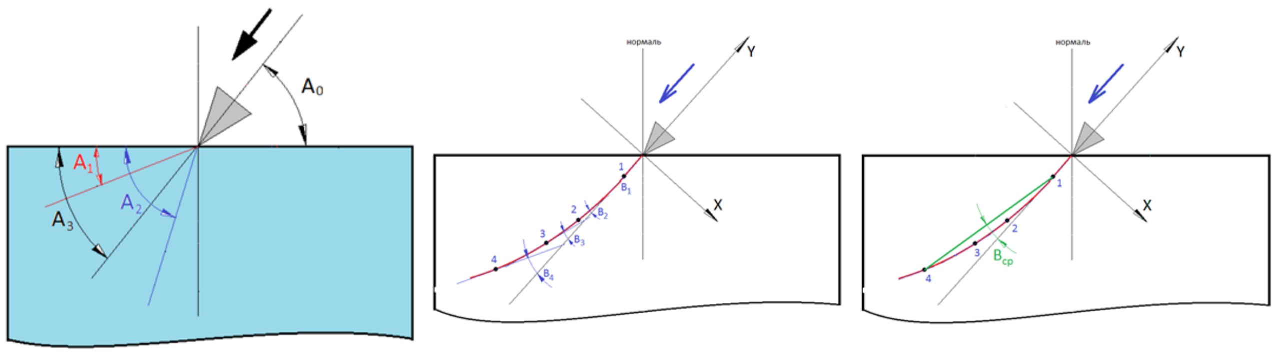
*Рис. 1. Параметры ударника, а) вариации положения центра масс, б) вариации формы ударника*

## 2. Параметры отклонения траектории проникания ударника

Для оценки отклонения траектории проникания ударника в грунте определялось отношение угла подлета к свободной поверхности $A_0$ и угла удаления $A_i$, по аналогии с оптикой, названное коэффициентом преломления $n_i$ (рис. 2):

$$n_i = \frac{\sin(A_0)}{\sin(A_i)}, \tag{2}$$

где $A_0$ — угол подлета ударника к свободной поверхности грунтовой среды (начальная траектория), $A_i$ — угол удаления (измененная траектория в среде).




*а)* *б)* *в)*

*Рис. 2. Схематичное представление отклонения траектории проникания ударника в грунтовой среде, а) угол подлета в свободной поверхности и угол удаления, б) изменение угла удаления, в) осредненная величина угла удаления*

Коэффициент преломления $n_i$ характеризует степень отклонения траектории проникания ударника: при $A_i < A_0$ $n_i > 0$, при $A_i > A_0$ $n_i < 0$, при $A_i = A_0$ $n_i = 1$.

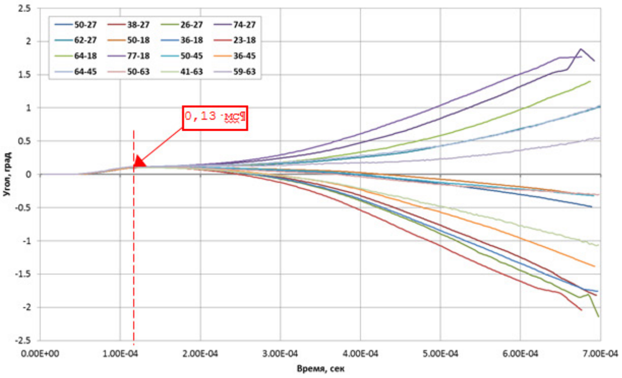
Для расчета величины коэффициента преломления траектории проникания ударника $n_i$ использовались значения угла удаления, рассчитываемые по формуле:

$$B_i = arctg\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{X_i - X_{i-1}}\right), \tag{3}$$

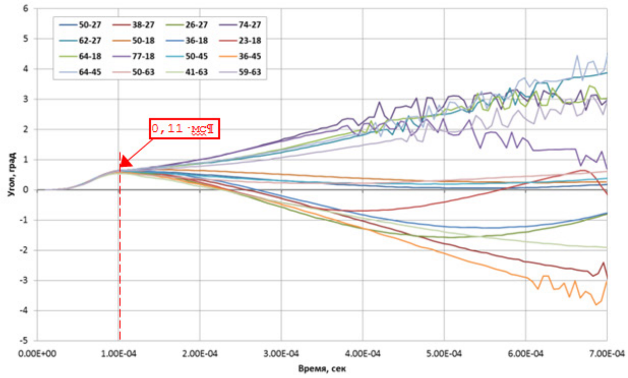
где $Y_i$ — компонента перемещения ударника по оси $Y$, $X_i$ — компонента перемещения ударника по оси $X$.

### 3. Результаты расчетов

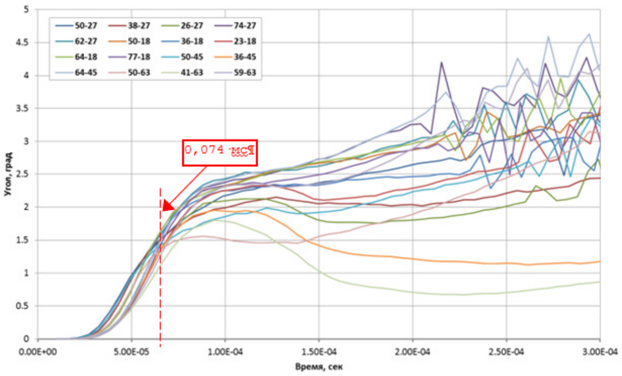
Результаты расчетов в виде зависимости угла удаления ударника, показаны на рис. 3. Расчеты сделаны при вариации положения центра масс ударника (рис. 1а). Угол подлета ударника к поверхности грунта 60°.




*а)*




*б)*




*в)*

*Рис. 3. Временные зависимости угла удаления (отклонения траектории) проникания ударника (угол наклона подлета ударника в свободной поверхности грунта 60°), а) конический ударник с углом раствора 30°, б) конический ударник с углом раствора 60°, в) конический ударник с углом раствора 90°*

Временные зависимости угла удаления ударника при проникании в грунт по нормали приведены на рис. 4. Расчеты проведены для нескольких положений центра масс ударника 50-18, 50-63, 23-18, 41-63 и с углом раствора $\theta = 60°$.

### Заключение

Полученные результаты расчетов показали следующее:

1) Зависимость угла удаления, представляющая изменение траектории проникания ударника в грунтовую среду, нелинейная.

2) Угол удаления $B_i$ зависит в неравной степени от трех рассматриваемых факторов: угла наклона подлета ударника $A_0$, формы ударника, положения центра масс ударника.

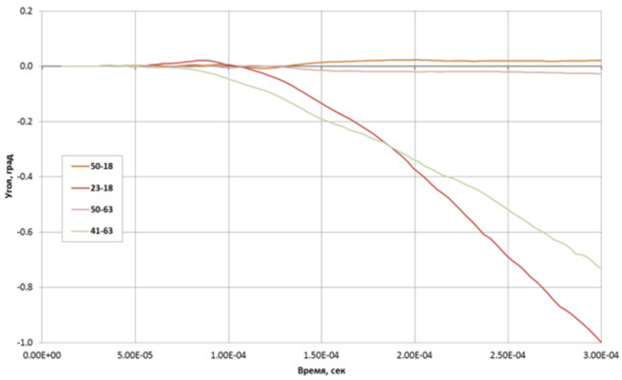



*Рис. 4. Временная зависимость угла удаления ударника при проникании в грунт по нормали*

3) Временную зависимость угла удаления можно разделить на два участка: на первом участке основное влияние вносит величина угла подлета ударника к свободной поверхности грунта $A_0$, на втором — положение центра масс ударника.

4) Траектория проникания ударника в грунтовую среду может быть представлена, согласно схеме на рис. 5.

5) При проникании ударника по нормали 1-й участок траектории (преломление $n_1$) проявляет себя слабо (либо вообще не проявляет себя), что говорит о существенном влиянии угла подлета ударника к свободной поверхности грунта. В целом, на 1-м участке существенное влияние оказывают начальные условия (система факторов, таких как угол наклона подлета ударника к свободной поверхности грунта, форма ударника и т. д.).

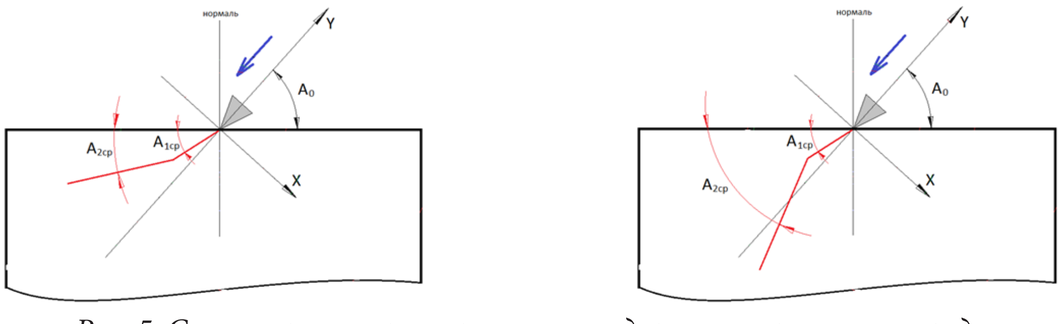



*Рис. 5. Схема траектории проникания ударника в грунтовую среду*

Согласно схемам на рис. 5, траектория проникания ударника в грунт состоит из двух участков, каждый из которых имеет свой коэффициент преломления:

$$n_1 = \frac{\sin(A_0)}{\sin(A_0 - A_{1cp})} \qquad n_2 = \frac{\sin(A_0)}{\sin(A_0 - A_{1cp} \pm A_{2cp})}, \tag{4}$$

где $A_{1cp}$ и $A_{2cp}$ — осредненные величины угла удаления ударника на 1-м и 2-м участках, соответственно.

## Литература

1. *Сагомонян А. Я.* Проникание. – М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1974.

2. *Бивин Ю. К.* Косой удар твердого тела о грунт или воду // Изв. АН СССР. МТТ. – 1989. – № 6. – С. 185–189.

3. *Бивин Ю. К.* Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – № 4. – С. 105–109.

4. *Колесников В. А.* Об изменении траектории метеорита при входе в грунт // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981 – № 4. – С. 99–104.

УДК 539.3

# ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

**О. В. Старожилова**

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики*

**Аннотация.** Исследуется математическая модель деформирования многослойных оболочек при сложном нагружении. Модель единообразно представляет напряженно-деформированное состояние оболочек на основе деформационной теории А. А. Ильюшина, учитывает реальный вид диаграммы, исследовать деформирование многослойных оболочек переменной жесткости. Разработан метод решения больших систем нелинейных уравнений, основанный на процедуре общей итерации.
**Ключевые слова:** математическое моделирование, упруго-пластическое деформирование оболочек, вторично пластические деформации, напряженно-деформированное состояние многослойных оболочек.

## Введение

В современной технике и строительстве широко используются тонкостенные элементы конструкций в виде пластин и оболочек, обеспечивающие высокие прочностные показатели при достаточной технологичности. Тонкостенные конструкции оболочечного типа весьма чувствительны к локальным нагрузкам. Исследования несущей способности таких конструкций при локальных силовых воздействиях имеют большое практическое значение. Условия эксплуатации при этом характеризуются внешними воздействиями, которые часто приводят к тому, что материал начинает работать за пределами упругости. Учет нелинейных факторов позволяет адекватно смоделировать процессы деформирования конструкций.

Класс задач решен в упруго-пластической постановке, позволяющей определить истинный запас прочности для снижения материалоемкости конструкций.

## Постановка задачи

Математическая модель решения дважды нелинейных задач деформирования многослойных оболочек использует пятимерное девиаторное пространство с последующим итерационным процессом. Рассматриваются неоднородные многослойные оболочки переменной толщины и кривизны, удовлетворяющие условиям текучести Мизеса в каждом из слоев модели.

Процесс нагружения реализован компонентами в девиаторных пространствах А. А. Ильюшина: пространства напряжений, деформаций, деформаций срединной поверхности, изменений кривизн срединной поверхности. Напряженно-деформированное состояние определяется симметричными тензорами напряжений.

Связь между векторами напряжений и деформаций для применяемой теории пластичности имеет вид $\overline{\sigma} = N\overline{Э} + \overline{q}$, где или $N = 2G_s$, $\overline{q} = 0$ — соотношения теории малых упруго-пластических деформаций, $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль сдвига, $E$ — модуль упругости, $G_s$ — секущий модуль к диаграмме деформирования.

Напряжения, действующие в нормальном сечении, заменяются статически эквивалентной системой усилий и моментов, приложенной к срединной поверхности.

Расчет упруго-пластических деформаций в оболочках выполняется последовательными приближениями по вычисляемым в сечениях перемещениям и усилиям. Силовые факторы определяются интегрированием напряжений по толщине.

С учетом принятой схемы дискретизации по пространственным переменным система разностных уравнений представима в виде:

$$L_h u_h = f_h,$$

где $L_h = L_{1h} + L_{2h}$, $L_{1h}$, $L_{2h}$ — матрицы, разностный аналог линейных и нелинейных членов уравнения равновесия, $u_h = \{u_i, x_i \in \Omega_h\}$ — вектор размерности $3N_h$, $N_h$ — число узлов сеточной области $\Omega_h$, $f_h$ — известный вектор.

Процесс нахождения решения сводится к двухступенчатому итерационному методу, разработанному автором:

$$B_h = (u_h^{n+1} - u_h^n) = -\gamma_n (L_h u_h^n - f_h)$$

$$B_h u = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

где $B_1 = \Lambda_1 (E - T_{m_1})^{-1}$, $B_2 = \Lambda_2 (E - T_{m_2})^{-1}$, $B_3 = \Lambda_3 (E - T_{m_3})^{-1}$, $E$ — тождественный оператор, $T_{m_k}$ — оператор сокращения погрешности за $m_k$ итераций в методе переменных направлений про решении уравнения

$$\Lambda_{k,h} z_k = q_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

В двухступенчатом методе используется оптимизация итерационного процесса, основанная на спектральных свойствах одномерных разностных операторов. Границы спектра находятся по специальному алгоритму [1].

В каждом узле пространственной трехмерной сетки проводится анализ на принадлежность его упругой или упруго-пластической области деформирования, по найденным деформациям срединной поверхности находятся усилия и моменты. Итерации выполняются до достижения необходимой степени установления процесса, когда характерные значения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки перестают меняться в пределах заданной точности. На каждом шаге по параметру нагружения используется метод экстраполяции для получения нулевых приближений.

На рис. 1 показано взаимное расположения слоев для многослойной оболочки при различных вариантах нагружения. Интенсивность нагрузки выбиралась таким образом, чтобы главный вектор нагрузки был постоянен для всех схем нагружения и соответствовал равномерно распределенному по всей поверхности давлению интенсивности.

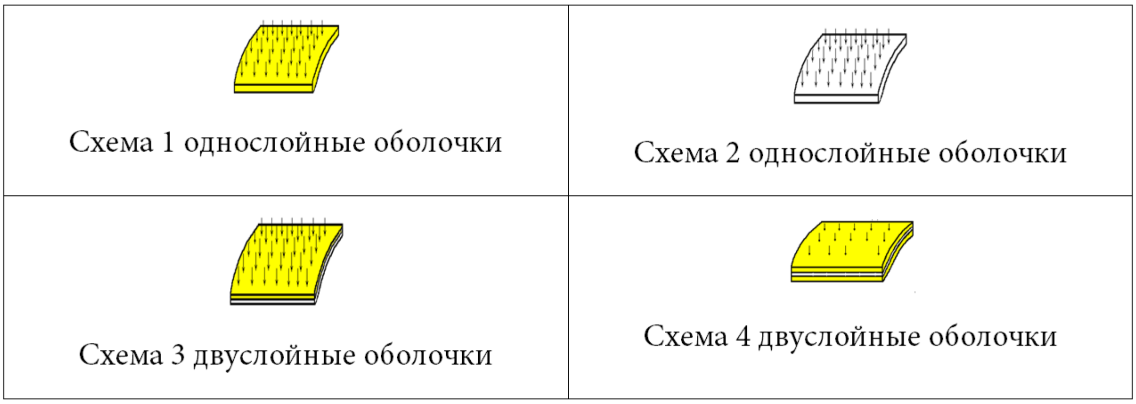



*Рис. 1. Взаимное расположение слоев в многослойных оболочках*

Расчет гибких упруго-пластических слоистых оболочек и пластин основан на гипотезе недеформируемой нормали для всего пакета в целом [1]. Слои обладают соизмеримой жесткостью на сдвиг и деформируются совместно, без проскальзывания.

Численные результаты представлены для однослойных, двухслойных и трехслойных пластин и оболочек, состоящих из стальных и дюралюминиевых слоев. В качестве материала слоев принималась сталь 30ХГСА с характеристиками: $E = 194{,}2$ гн/м², $G = 74{,}5$ гн/м², $\mu = 0{,}3$, $G_k = 14{,}5$ гн/м², $\sigma_{\text{то}} = 0{,}95$ гн/м², $e_{\text{то}} = 4{,}28 \cdot 10^{-3}$ гн/м² и алюминиевый сплав Д16 с характеристиками $E = 74{,}5$ гн/м², $G = 28{,}6$ гн/м², $\mu = 0{,}3$, $G_k = 1{,}55$ гн/м², $\sigma_{\text{т}} = 0{,}314$ гн/м², $e_{\text{т}} = 3{,}65 \cdot 10^{-3}$ гн/м².

## Заключение

Разработанный пакет программ позволяет единообразно проводить расчет гибких однослойных и слоистых пластин и оболочек с учетом упруго-пластических деформаций, прослеживать развитие зон пластичности, разгрузки, вторичных пластических деформаций. Многослойные оболочки могут иметь симметричную и несимметричную структуру относительно срединной поверхности. В геометрически нелинейной и линейной постановках проведен сравнительный анализ упруго-пластического поведения однослойных и слоистых пластин и оболочек в зависимости от граничных условий, характера нагружения. Локальное нагружение приводит к существенному изменению характера деформирования оболочек.

Проведенный анализ совместного влияния несимметрии в нагрузке и граничных условиях позволяет сделать вывод, что оболочки, находящиеся под действием равномерно распределенной нагрузки, более чувствительны к изменению граничных условий, чем локально нагруженные оболочки.

Переменность толщины, кривизны, неоднородность материала, нагружение оболочек по малой площадке приводит к появлению областей с большими градиентами напряжений и деформаций. В этом случае необходимо использовать густые сетки, что, в свою очередь, приводит к значительному увеличению размерности систем разностных уравнений.

Выявлены особенности упруго-пластического поведения оболочек, связанные с несимметрией нагрузки, граничных условий, распределением толщин. Построенная математическая модель учитывает сжимаемость материала и реальный вид диаграммы деформирования. Дано решение широкого класса несимметричных задач упруго-пластического изгиба неоднородных оболочек переменной жесткости.

Моделирование задач деформирования нелинейных оболочек показали хорошую сходимость двухступенчатого итерационного метода, разработанного автором, при расчете упруго-пластического деформирования гибких неоднородных оболочек. Установлено, что неоднородность свойств материала по толщине оболочки может приводить к качественному изменению распределения напряжений.

## Литература

1. *Старожилова О. В.* Математические модели для нелинейных задач деформирования тонких оболочек // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2016. – Т. 23, № 1. – С. 78–79.

УДК 539.3

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

**А. И. Сумин, А. А. Богер, В. А. Сумин, С. В. Рябов**

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»*

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы потери устойчивости нелинейных сред дифференциального типа по отношению к конечным возмущениям в применении к задачам, возникающим в гидрометеорологии.
**Ключевые слова:** устойчивость, нелинейная вязкоупругая среда, конечные возмущения, принцип усреднения, странный аттрактор, корреляционная размерность.

Рассмотрим нелинейно-вязкоупругую среду дифференциального типа сложности 1, иллюстрацией которой может служить среда, рассматриваемая в гидрометеорологии [1]. Для такого тела напряжения и тепловой поток определяются через функцию свободной энергии $\Psi$ и диссипативный потенциал $\Phi$ по формулам:

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{E}},\ \eta = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}},\ \frac{1}{\rho_R \theta} h_R = -\frac{\partial \Phi}{\partial g_R}, \tag{1}$$

где

$$\Psi = \Psi\left(E_{ij}, \theta\right),\ \Phi = \Phi\left(E_{ij}, \theta, g_{Ri}\right). \tag{2}$$

Возьмем эти функции [2] в виде:

$$\Psi = \frac{1}{2} C^{(E)}_{klmn} E_{kl} E_{mn} + \frac{1}{2} C^{(\theta)} \theta^2 + C^{(E\theta)}_{kl} E_{kl} \theta,$$

$$\Phi = \frac{1}{2} D^{(E)}_{klmn} \dot{E}_{kl} \dot{E}_{mn} + \frac{1}{2} D^{(\theta)} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} D^{(q)}_{kl} g_R g_l + D^{(E\theta)}_{kl} \dot{E}_{kl} \dot{\theta} + D^{(Eq)}_{klm} \dot{E}_{kl} g_m + D^{(q\theta)}_{k} g_k \dot{\theta}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) получаем линейные определяющие соотношения для материала типа Кельвина — Фойхта

$$\begin{gathered} S_{kl} = C^{(E)}_{klmn} E_{mn} + C^{(E\theta)}_{kl} \theta + D^{(E\theta)}_{klmn} \dot{E}_{mn} + D^{(E\theta)}_{kl} \dot{\theta} + D^{(Eq)}_{klm} \dot{g}_m, \\ -\eta = C^{(E\theta)}_{kl} E_{kl} + C^{(\theta)} \theta + D^{(E\theta)}_{kl} \dot{E}_{kl} + D^{(q\theta)}_{k} g_k + D^{(\theta)} \dot{\theta}, \\ \frac{1}{\rho_R \theta} = h_{Rm} = D^{(Eq)}_{klm} \dot{E}_{kl} + D^{(q)}_{mn} g_n + D^{(q\theta)}_{m} \dot{\theta}. \end{gathered} \tag{4}$$

Для нелинейных соотношений перед скобками появляется скалярный множитель $\lambda \neq 1$.

Рассмотрим возмущенное состояние, для которого компоненты тензора скоростей деформаций

$$2\dot{E}_{kl} = \dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}. \tag{5}$$

Для возмущений компонент тензора деформаций получим

$$\begin{gathered} S_{kl} = C^{(E)}_{klmn} \left(E_{mn}(1) + E_{mn}(2)\right) + C^{(E\theta)}_{kl} \theta + D^{(E\theta)}_{klmn} \dot{E}_{mn} + D^{(E\theta)}_{kl} \dot{\theta} + D^{(Eq)}_{klm} \dot{g}_m, \\ -\eta = C^{(E\theta)}_{kl} \left[E_{kl}(1) + E_{kl}(2)\right] + C^{(\theta)} \theta + D^{(E\theta)}_{kl} \dot{E}_{kl} + D^{(q\theta)}_{k} g_k + D^{(\theta)} \dot{\theta}, \\ \frac{1}{\rho_R \theta} = h_{Rm} = D^{(Eq)}_{klm} \dot{E}_{kl} + D^{(q)}_{mn} g_n + D^{(q\theta)}_{m} \dot{\theta}. \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$S_{kl} = S_{kl}(1) + S_{kl}(2),$$
$$S_{kl}(1) = C^{(E)}_{klmn} E_{mn}(1) + C^{(E\theta)}_{kl}\theta + D^{(E)}_{klmn}\dot{E}_{mn} + D^{(E\theta)}_{kl}\dot{\theta} + D^{(Eq)}_{klm}\dot{g}_m, \quad S_{kl}(2) = C^{(E)}_{klmn}(2). \tag{7}$$

Используя принцип возможных перемещений [3], получим

$$\int_V \left[\left(\delta_{ik} + \overset{0}{u}_{i,k}\right) S_{kj} + \overset{0}{S}_{kj}\, u_{i,k} + S_{kj} u_{i,k}\right]\varphi_{inm,j}\, dV + \int_V \ddot{u}_i \varphi_{inm}\, dV = 0 \tag{8}$$

или

$$\int_V \left[\left(\delta_{ik} + \overset{0}{u}_{i,k}\right)\left[S_{kj}(1) + S_{kj}(2)\right] + \overset{0}{S}_{kj}\, u_{i,k} + \left[S_{kj}(1) + S_{kj}(2)\right] u_{i,k}\right]\varphi_{inm,j}\, dV + \int_V \ddot{u}_i \varphi_{inm}\, dV = 0. \tag{9}$$

Зависимость (6) перепишем с учетом следующих обозначений

$$C^{(E)}_{klmn} = C_1, \quad C^{(E\theta)}_{kl} = C_2, \quad D^{(E)}_{klmn} = D_1, \quad D^{(E\theta)}_{kl} = D_2, \quad D^{(Eq)}_{klm} = D_3,$$
$$E_{mn}(1) = f^{(1)} E^{(1)}, \quad E_{mn}(2) = f^{(1)} f^{(2)} E^{(12)}, \quad g_m = g^{(1)} Q(X_k);$$
$$2E^{(1)} = \varphi_{mij,n} + \varphi_{nij,m} + \overset{0}{u}_{k,m}\,\varphi_{kij,n} + \varphi_{kij,m}\,\overset{0}{u}_{k,n}, \quad 2E^{(2)} = \varphi_{rij,m}\varphi_{rkl,n};$$
$$S(1) = C_1 E^{(1)} f^{(1)} + C_2 \theta^{(1)} \Psi^{(1)} + D_1 \theta^{(1)} E^{(0)} + D_2 \theta^{(1)} \Psi^{(1)} + D_3 \dot{g}^{(1)} Q, \quad S(2) = C_1 f^{(1)} f^{(2)} E^{(12)}.$$

Систему уравнений (8) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\int_V \left\{\left(I + \overset{0}{H} + f^{(1)} H^{(1)}\right)\left(C_1 E^{(1)} f^{(1)} + C_2 \theta^{(1)} \Psi^{(1)} + D_1 f^{(1)} E^{(01)} + D_2 \dot{\theta}^{(1)} \Psi^{(1)} + \right.\right.\\ \left.\left. + D_3 \dot{g}^{(1)} Q + C_1 f^{(1)} f^{(2)} f^{(12)}\right) + \overset{0}{S} f^{(1)} H^{(1)}\right\} H^{(1)} dV + \int_V H^{(1)} H^{(1)T} dV = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Введем обозначения

$$A = \int_V H^{(1)} H^{(1)T} dV, \quad B = \int_V \left(I + \overset{0}{H}\right) D_1 E^{(0)} H^{(1)} dV, \quad C = \int_V \left(I + \overset{0}{H}\right) D_2 \Psi^{(1)} H^{(1)} dV,$$
$$D = \int_V \left(I + \overset{0}{H}\right) D_3 Q H^{(1)} dV, \quad E = \int_V \left(I + \overset{0}{H}\right) C_2 \Psi^{(1)} H^{(1)} dV, \quad K = \int_V C_1\left(H^{(1)} E^{(1)} + E^{(12)}\right) H^{(1)} dV,$$
$$K_1 = \int_V \left[\left(I + \overset{0}{H}\right) C_1 E^{(1)} + \overset{0}{S} H^{(1)}\right] H^{(1)} dV, \quad K_2 = \int_V H^{(1)} C_2 \Psi^{(1)} H^{(1)} dV,$$
$$K_3 = \int_V H^{(1)} D_1 E^{(0)} H^{(1)} dV, \quad K_4 = \int_V H^{(1)} D_2 \Psi^{(1)} H^{(1)} dV, \quad K_5 = \int_V H^{(1)} D_3 Q H^{(1)} dV.$$

С учетом этих обозначений система (10) запишется в виде

$$\begin{gathered}A\ddot{f}^{(1)} + B\dot{f}^{(1)} + C\dot{\theta}^{(1)} + D\dot{g}^{(1)} + E\theta^{(1)} + Kf^{(1)} + K_1 f^{(1)} f^{(1)} + \\ + K_2 f^{(1)} \theta^{(1)} + K_3 f^{(1)} \dot{f}^{(1)} + K_4 f^{(1)} \dot{\theta}^{(1)} + K_5 f^{(1)} g^{(1)} = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

В общем случае коэффициенты системы (11) являются переменными величинами. Если принять допущение, что в начальном деформированном состоянии прошли все релаксационные процессы, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Аналогичную систему можно получить, если предположить, что в основном состоянии тело подвергается моно и полигармоническому нагружению. Применяя принцип усреднения за период, получим постоянные коэффициенты, причем для типичных вязкоупругих материалов погрешности такого представления не превосходят нескольких процентов [2].

Умножая систему (11) справа на $\dot{f}^{(1)}$, получим выражение

$$A\ddot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+Kf^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_1f^{(1)}f^{(1)}\dot{f}^{(1)}+$$
$$+K_2f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_3f^{(1)}\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_4f^{(1)}\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_5f^{(1)}g^{(1)}\dot{f}^{(1)}=0. \quad (12)$$

Перепишем (12) в виде

$$A\ddot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+Kf^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_1f^{(1)}f^{(1)}\dot{f}^{(1)}=-\Big[B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+$$
$$+K_2f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_3f^{(1)}\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_4f^{(1)}\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_5f^{(1)}g^{(1)}\dot{f}^{(1)}\Big]. \quad (13)$$

Введем функции

$$P=\frac{1}{2}A\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+\frac{1}{2}Kf^{(1)}f^{(1)}+\frac{1}{3}K_1f^{(1)}f^{(1)}f^{(1)}, \quad (14)$$

$$W=B\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+C\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+D\dot{g}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+E\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+$$
$$+K_2f^{(1)}\theta^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_3f^{(1)}\dot{f}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_4f^{(1)}\dot{\theta}^{(1)}\dot{f}^{(1)}+K_5f^{(1)}g^{(1)}\dot{f}^{(1)}. \quad (15)$$

Если функции $P$ и $W$ будут являться положительно определенными в некоторой области фазового пространства фазовых переменных $f^{(1)}$, $\dot{f}^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $\dot{\theta}^{(1)}$, $g^{(1)}$, $\dot{g}^{(1)}$, то производная от положительно определенной функции P в силу системы (13) будет отрицательно определенной функцией, и согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение этой системы будет асимптотически устойчиво в некоторой области начальных возмущений амплитуд наложенных перемещений, температур, градиентов температур и их скоростей.

Таким образом, решение задачи об устойчивости невозмущенного состояния нелинейно-вязкоупругого тела Кельвина — Фойхта сводится к задаче устойчивости нулевого решения системы (13), которая решается при условии нахождения областей начальных возмущений и их скоростей.

Значения начальных возмущений и их скоростей [4] находятся из соотношений:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial\dot{f}^{(1)}}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial P}{\partial f^{(1)}}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial W}{\partial\dot{\theta}^{(1)}}\right)_0=0,$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{g}^{(1)}}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial W}{\partial g^{(1)}}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial W}{\partial\dot{f}^{(1)}}\right)_0=0. \quad (16)$$

С учетом (14), (15) условия (16) перепишутся в виде

$$\left(\frac{\partial P}{\partial\dot{f}^{(1)}}\right)_0=A\dot{f}^{(1)}(0)=0,\quad \left(\frac{\partial P}{\partial f^{(1)}}\right)_0=Kf^{(1)}(0)+K_1f^{(1)}(0)f^{(1)}(0)=0,$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{\theta}^{(1)}}\right)_0=C\dot{f}^{(1)}(0)+K_4f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0)=0,\quad \left(\frac{\partial W}{\partial\theta^{(1)}}\right)_0=E\dot{f}^{(1)}(0)+K_2f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0)=0,$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{g}^{(1)}}\right)_0=D\dot{f}^{(1)}(0)=0,\quad \left(\frac{\partial W}{\partial g^{(1)}}\right)_0=K_5f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0)=0, \quad (17)$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{f}^{(1)}}\right)_0=2B\dot{f}^{(1)}(0)+C\dot{\theta}^{(1)}(0)+D\dot{g}^{(1)}(0)+E\dot{\theta}^{(1)}(0)+K_2f^{(1)}(0)\dot{\theta}^{(1)}(0)+$$
$$+2K_3f^{(1)}(0)\dot{f}^{(1)}(0)+K_4f^{(1)}(0)\dot{\theta}^{(1)}(0)+K_5\dot{f}^{(1)}(0)g^{(1)}(0)=0.$$

Соотношения (17) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно величин начальных возмущений и их скоростей. Из решения системы (17) находится область начальных возмущений и их скоростей, в которых нулевое решение системы (13) будет устойчиво. Отметим, что решение системы (17) дает счетное количество критических возмущений, которые образуют некоторую последовательность. Выбирая из этих значений минимальное, можно провести гиперсферу в фазовом пространстве переменных, внутри которой основной процесс деформирования, соответствующий нулевому решению системы (13) будет устойчив. Последовательность значений фазовых переменных в начальный момент времени, полученных из системы (17) образует конечную цепочку значений бифуркационных точек, из которых реализуется вначале минимальное. Отличие представленного подхода от линеаризированной теории в том, что нелинейно-вязкоупругое тело может потерять устойчивость при любой отличной от нуля величине начальных деформаций, если возмущения превысят определенный предел.

Таким образом, получен критерий устойчивости нелинейно-вязкоупругих сред дифференциального типа по отношению к конечным возмущениям применительно к задачам, возникающим при исследовании процессов, протекающих в атмосфере.

В последнее время, с развитием нелинейной динамики, были обнаружены новые явления, по-видимому главное из них хаотические колебания в детерминированных системах. Стало ясно, что нелинейные разностные и дифференциальные уравнения могут иметь ограниченные непериодические решения, которые ведут себя случайным образом, хотя в этих уравнениях нет случайных параметров. Динамическому хаосу посвящен ряд монографий.

В диссипативных нелинейных системах обнаружены сложным образом устроенные притягивающие множества для которых фазовые траектории представляются в виде бесконечной нигде не пересекающейся линии и, которые неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону. Впервые подобные свойства обнаружил Лоренц в 1963 году при численном исследовании трехмерной модели тепловой конвенции. Позже притягивающая область в фазовом пространстве динамической системы, характеризующейся режимом установившихся колебаний, была названа странным аттрактором.

Отличительной особенностью странных аттракторов является свойство повторяемости их структуры на все более мелких масштабах. Поэтому важным становится вопрос об определении размерности странного аттрактора, как количества информации, необходимой для задания координат точки, принадлежащей аттрактору.

Условия возникновения странного аттрактора — сочетание глобального сжатия с локальной неустойчивостью. Режим странного аттрактора реализуется только в диссипативных системах и характеризуется наличием в спектре характеристических показателей Ляпунова положительных показателей. В этом случае аттрактор находится в некоторой области фазового пространства и включает канторово множество гиперповерхностей. Предельное множество траекторий, которое соответствует странному аттрактору, многообразием не является. Множество траекторий, соответствующее странному аттрактору, характеризуется неустойчивостью по Ляпунову, но устойчивостью по Пуассону.

Фрактальная размерность $D_F$ произвольного предельного множества $G$ в $N$ — мерном пространстве [5] вычисляется по формуле

$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \ln M(\varepsilon) \Big/ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right], \tag{18}$$

где $M(\varepsilon)$ — минимальное число $N$ — мерных кубиков со стороной $\varepsilon$, необходимых для покрытия всех элементов множества.

Если известен спектр ляпуновских показателей $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > \lambda_N$, то вводится понятие ляпуновской размерности

$$D_L = j + \sum_{i=1}^{j} \lambda_1 \Big/ \left|\lambda_{j+1}\right|,$$

где $j$ — наибольшее число, удовлетворяющее условию

$$L = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_j > 0. \tag{19}$$

Из работ Такенса [5] следует, что знание размерности странного аттрактора позволяет количественно оценить число задействованных в движении фазовых переменных. Если размерность конечна и относительно мала, то в распределенных системах моделирование процессов возможно и при помощи конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений, число которых соответствует размерности фазового пространства, в которое вложен странный аттрактор.

Если известна последовательность экспериментальных значений исследуемых переменных, то на базе этой последовательности строят пространства размерности $m = 2, 3, \ldots$, для которых вычисляется корреляционная размерность [6]

$$\gamma_m = d_k^m = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln C_m(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

где

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \Theta\left(\varepsilon - \left|\xi(t_1) - \xi(t_2)\right|\right),$$

где $\Theta$ — функция Хевисайда.

В случае, когда $\varepsilon \to 0$, $m \to \infty$ отсюда имеем

$$C_m(\varepsilon) \approx \varepsilon^{d_k} e^{-m\tau L}. \tag{20}$$

Откуда размерность странного аттрактора определяется так

$$L = \frac{1}{\tau} \ln \frac{C_m}{C_{m+1}}, \tag{21}$$

где $\tau$ — интервал времени между измерениями соседних точек бифуркации на траектории динамической системы.

Процесс вычисления корреляционной размерности продолжается пока при некотором $m = m^*$ значение $d_k^{*(m=m*)}$ не стабилизируется.

Согласно [5], динамическая стохастичность может развиться после конечной последовательности бифуркаций, которые обеспечивают достижение хаотического режима. Для нелинейно-упругого и вязкоупругого тела, рассмотренного в [3, 7–10], как было обнаружено, может быть получено множество точек бифуркации, которые можно принять за следы решения попавшего в область притяжения странного аттрактора. Поэтому вместо последовательности экспериментальных значений $T_j$, предлагается взять последовательность бифуркационных значений $\{f_{nm}\}$, для которой можно провести процесс вычисления корреляционной размерности странного аттрактора. Тем самым будет вычисляться размерность фазового пространства динамической системы, которое моделирует процессы, происходящие в первоначальной системе. Зная размерность странного аттрактора можно ограничиться в рядах разложения перемещений по координатным функциям количеством слагаемых равным размерности пространства, в которое вложен странный аттрактор. Из формулы (21) можно получить величину интервала предсказуемости $T = \dfrac{1}{L}$.

Этот интервал соответствует времени необходимому, чтобы решение системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс потери устойчивости нелинейно-упругих и нелинейно-вязкоупругих сред через ограниченную последовательность бифуркаций, вошло в режим странного аттрактора. Все вышеназванные результаты нашли применение при решении конкретных задач устойчивости механики сложных сред в работах [3, 7–9].

## Литература


1. *Trusdell C., Noll W.* In Handbuch der Physic, (ed. Flügge S.). – V. 3, No 3, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1965.

2. *Карнаухов В. Г.* Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В. Г. Карнаухов, Б. П. Гуменюк. – Киев : Наук. думка, 1990. – 304 с.

3. *Спорыхин А. Н.* О новых явлениях в теории устойчивости нелинейных сред при конечных возмущениях / А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин // ДАН УССР, 1982. – Сер. А, 8. – С. 46–49.

4. *Сумин А. И.* Возникновение стохастической неустойчивости в нелинейных колебаниях упругих тел. Вестник ЧПГУ им И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. – 2(8). – С. 501–505.

5. *Takens, F.* Detecting strange attractor in turbulence / F. Takens Dynamical Systems and Turbulence. – Springer-Verlag, 1981. – P. 366–381.

6. *Синай Я. Г.* Стохастичность динамических систем. Нелинейные волны. – М. : Наука, 1979. – С. 192–211.

7. *Sumin A. I.* Nonlinear dynamics in problems of stability of complex media. / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. A. Sumin // Journal of Physics: Conf. Series. – 2018. – V. 973. 012019. – P. 1–10.

8. *Sumin A. I.* Stability of nonlinear elastic plate under uniaxial loading with respect to finite perturbations. / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. A. Sumin, S. V. Ryabov // Journal of Physics: Conf. Series. – 2019. – V. 1203. 012025. – P. 1–10.

9. *Sumin A. I.* Torsion stability of a cylinder with circular and elliptical section under finite perturbations. / A. I. Sumin, A. A. Boger, V. A. Sumin, S. V. Ryabov // Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – V. 1479. 012138. – P. 1–9.

10. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях / А. Н. Гузь. – Киев : Наукова Думка, 1973. – 270 с.

УДК 536.21+517.95

# НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

**А. Д. Чернышов[1], В. В. Горяйнов[2] , С. Ф. Кузнецов[1], О. Ю. Никифорова[1]**

[1]*Воронежский государственный университет инженерных технологий*
[2]*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** С помощью быстрых разложений получено в общем виде аналитическое решение краевой задачи для уравнения Пуассона в параллелепипеде. Показано построение точных решений уравнения теплопроводности для случаев внутреннего источника, зависящего от координат. Проведено исследование влияния переменности внутреннего источника на распространение тепла в теле при одинаковых начальных температурах в вершинах параллелепипеда. В этом случае тепло в теле будет переноситься только в тех направлениях, в которых внутренний источник переменен.
**Ключевые слова:** точное решение, краевая задача, уравнение Пуассона, уравнение теплопроводности, метод быстрых разложений, тепловые потоки.

## Введение

Для решения пространственных задач теплопроводности применяются различные численные методы. Возможность применения метода фиктивных канонических областей для решения задач стационарной теплопроводности в сложных трехмерных областях показана в [1]. В работе [2] приведен пример численного решения краевой задачи для трехмерного уравнения теплопроводности с подвижной границей в сплошной среде с разрывными теплофизическими параметрами с помощью адаптивных пространственных гексаэдральных сеток. В [3] получены точные аналитические решения нестационарного трехмерного уравнения теплопроводности для среды с постоянными физическими свойствами и экспоненциально затухающим источником тепла, сосредоточенным на плоскости, прямой и в точке. В работе [4] развивается метод наименьших квадратов с Т-элементами для решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона. Авторы используют разрывные базисные функции высокого порядка аппроксимации из специальных функциональных пространств. В [5] предложен алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности и с минимальным 27-точечным шаблоном. Также среди численных методов следует отметить метод коллокаций [6], метод квадратурных элементов [7], модифицированный кубический В-сплайн дифференциально-квадратурный метод [8] и метод, основанный на использовании вейвлетов Хаара [9]. Обобщенный метод конечных разностей [10, 11]. Дифференциальный метод расширения элементов [12].

Наряду с численными решениями уравнения Пуассона встречаются и его аналитические решения. Так, в статье [13] предложен подход к получению некоторых точных решений уравнения Пуассона, основанный на введении в уравнение Пуассона членов, содержащих первые производные искомой функции. Для сведения полученного таким способом уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается связанная с ним система двух уравнений в частных производных. Однако в [13] точные решения краевых задач не рассматриваются. В работе [14] методом преобразования Фурье решается краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями в $R^n$. Решение представлено в виде суммы интегралов, ядра которых найдены в конечном виде. Общий подход к решению задач теплопроводности с внутренними источниками тепла с использованием понятий сопротивления и квадруполя показан в [15]. В [16] с использованием интегрального метода теплового баланса на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий рассматривается методика получения аналитических решений краевых задач теплопроводности с переменными во времени внутренними источниками теплоты, позволяющая получать решения удовлетворительной точности во всем диапазоне изменения числа Фурье.

В данной работе будет использован метод быстрых разложений [17], с помощью которого можно получать не только новые приближенные аналитические решения задач [18–20], но и новые точные [21, 22]. С помощью быстрых разложений [17] будет получено в общем виде решение задачи о теплопроводности в параллелепипеде с переменным внутренним источником, точно удовлетворяющее дифференциальному уравнению и граничным условиям, а также будут показаны построения точных решений для случаев внутреннего источника, зависящего от одной, двух и трех координат

## 1. Постановка задачи и метод ее решения

Рассмотрим задачу стационарной теплопроводности для параллелепипеда $\Omega = \{ (x,y,z) \in R,$ $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c \}$. Запишем уравнение теплопроводности в форме Пуассона, как дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных по переменным $x, y, z$ с заданным внутренним источником $F(x,y,z)$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + F(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in \Omega,\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c. \tag{1}$$

Граничные условия на каждой грани параллелепипеда запишем в виде

$$\begin{gathered} T\big|_{x=0} = f_1(y,z),\ \ T\big|_{y=0} = f_2(x,z),\ \ T\big|_{z=0} = f_3(x,y), \\ T\big|_{x=a} = f_4(y,z),\ \ T\big|_{y=b} = f_5(x,z),\ \ T\big|_{z=c} = f_6(x,y). \end{gathered} \tag{2}$$

Функции $f_1 \div f_6$ в (2) должны удовлетворять условиям совместности, так как температура $T(x,y,z)$, например, при подходе к ребру $(x=0,\ z=0)$ по двум смежным граням должна принимать одинаковые значения. Выполняя подобные условия на всех ребрах параллелепипеда, будем иметь следующие функциональные равенства

$$\begin{gathered} f_1(0,z) = f_2(0,z),\ \ f_1(b,z) = f_5(0,z),\ \ f_2(a,z) = f_4(0,z),\ \ f_4(b,z) = f_5(a,z), \\ f_2(x,0) = f_3(x,0)\ \ \ f_2(x,c) = f_6(x,0),\ \ f_5(x,0) = f_3(x,b),\ \ f_5(x,c) = f_6(x,b), \\ f_1(y,0) = f_3(0,y),\ \ f_1(y,c) = f_6(0,y),\ \ f_4(y,0) = f_3(a,y),\ \ f_4(y,c) = f_6(a,y). \end{gathered} \tag{3}$$

К равенствам (3) добавим условия согласований в вершинах параллелепипеда

$$\begin{gathered} f_1(0,0) = f_2(0,0) = f_3(0,0),\ \ f_1(b,0) = f_3(0,b) = f_5(0,0), \\ f_1(0,c) = f_2(0,c) = f_6(0,0),\ \ f_2(a,0) = f_3(a,0) = f_4(0,0), \\ f_2(a,c) = f_4(0,c) = f_6(a,0),\ \ f_1(b,c) = f_5(0,c) = f_6(0,b), \\ f_3(a,b) = f_4(b,0) = f_5(a,0),\ \ f_4(b,c) = f_5(a,c) = f_6(a,b). \end{gathered} \tag{4}$$

Равенства (4) следуют из независимости температуры $T(x,y,z)$, от направления подхода к вершинам параллелограмма.

Кроме условий (3) и (4) запишем условия выполнения дифференциального уравнения (1) в 8 вершинах параллелепипеда:

$$\begin{gathered} T_{xx}(0,0,0) + T_{yy}(0,0,0) + T_{zz}(0,0,0) + F(0,0,0) = 0, \\ T_{xx}(a,0,0) + T_{yy}(a,0,0) + T_{zz}(a,0,0) + F(a,0,0) = 0, \\ T_{xx}(0,b,0) + T_{yy}(0,b,0) + T_{zz}(0,b,0) + F(0,b,0) = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&T_{xx}(0,0,c)+T_{yy}(0,0,c)+T_{zz}(0,0,c)+F(0,0,c)=0,\\
&T_{xx}(a,b,0)+T_{yy}(a,b,0)+T_{zz}(a,b,0)+F(a,b,0)=0,\\
&T_{xx}(a,0,c)+T_{yy}(a,0,c)+T_{zz}(a,0,c)+F(a,0,c)=0,\\
&T_{xx}(0,b,c)+T_{yy}(0,b,c)+T_{zz}(0,b,c)+F(0,b,c)=0,\\
&T_{xx}(a,b,c)+T_{yy}(a,b,c)+T_{zz}(a,b,c)+F(a,b,c)=0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Требования непрерывности температуры в окрестности ребер и вершин приводит к необходимости выполнения условий (3)–(5). Если же условия (3)–(5) не выполнять, то температура будет терпеть разрыв, что физически противоречиво.

Предполагаемое выражение для точного решения $T(x,y,z)$ представим конечным выражением в виде суммы граничной функции нулевого порядка и ряда Фурье по синусам, в котором учтены два коэффициента Фурье [17]

$$\begin{aligned}
&T(x,y,z)=A_1(y,z)\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2(y,z)\frac{x}{a}+A_3(y,z)\sin\pi\frac{x}{a}+A_4(y,z)\sin 2\pi\frac{x}{a},\ 0\le x\le a,\\
&A_i(y,z)=A_{i,1}(z)\left(1-\frac{y}{b}\right)+A_{i,2}(z)\frac{y}{b}+A_{i,3}(z)\sin\pi\frac{y}{b}+A_{i,4}(z)\sin 2\pi\frac{y}{b},\ i=1\div 4,\ 0\le y\le b,\\
&A_{i,j}(z)=A_{i,j,1}\left(1-\frac{z}{c}\right)+A_{i,j,2}\frac{z}{c}+A_{i,j,3}\sin\pi\frac{z}{c}+A_{i,j,4}\sin 2\pi\frac{z}{c},\ \ j=1\div 4,\ 0\le z\le c.
\end{aligned} \tag{6}$$

При помощи зависимости (6) можно описать достаточно широкий класс практически важных зависимостей. Введем обозначения

$$\begin{gathered}
P_1(x)=1-\frac{x}{a},\ P_2(x)=\frac{x}{a},\ P_1(y)=1-\frac{y}{b},\ P_2(y)=\frac{y}{b},\ P_1(z)=1-\frac{z}{c},\ P_2(z)=\frac{z}{c},\\
P_3(x)=\sin\pi\frac{x}{a},\ P_4(x)=\sin 2\pi\frac{x}{a},\ P_3(y)=\sin\pi\frac{y}{b},\\
P_4(y)=\sin 2\pi\frac{y}{b},\ P_3(z)=\sin\pi\frac{z}{c},\ P_4(z)=\sin 2\pi\frac{z}{c}.
\end{gathered} \tag{7}$$

С учетом (7) зависимость (6) запишем более кратко

$$T(x,y,z)=\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4}A_{i,j,k}P_k(z)\right)P_j(y)\right)P_i(x),\ \ 0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c. \tag{8}$$

Таким образом, искомая функция $T(x,y,z)$ представлена в виде конечной тройной суммы, содержащей 64 неизвестных коэффициента

$$A_{i,j,k},\ i=1\div 4,\ \ j=1\div 4,\ k=1\div 4. \tag{9}$$

Внутренний источник $F(x,y,z)$ представим конечной суммой по аналогии с зависимостью (8):

$$F(x,y,z)=\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4}F_{i,j,k}P_k(z)\right)P_j(y)\right)P_i(x),\ 0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c. \tag{10}$$

Все коэффициенты $F_{i,j,k}$ в (10) для источника считаем известными.

Зададим функции $f_1(y,z)$, $f_2(x,z)$, $f_3(x,y)$, $f_4(y,z)$, $f_5(x,z)$, $f_6(x,y)$, входящие в граничные условия (2), следующим образом

$$\begin{aligned}
&f_1(y,z)=\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4}f_{1,j,k}P_k(z)\right)P_j(y),\quad f_2(x,z)=\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4}f_{2,j,k}P_k(z)\right)P_j(x),\\
&f_3(x,y)=\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4}f_{3,j,k}P_k(y)\right)P_j(x),\quad f_4(y,z)=\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4}f_{4,j,k}P_k(z)\right)P_j(y),
\end{aligned} \tag{11}$$

$$f_5(x,z)=\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4} f_{5,j,k}P_k(z)\right)P_j(x), \quad f_6(x,y)=\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4} f_{6,j,k}P_k(y)\right)P_j(x).$$

Здесь $f_{i,j,k}$ считаем известными постоянными.

Таким образом, требуется найти такое решение уравнения (1) с заданным внутренним источником в виде (10), которое точно удовлетворяет граничным условиям (2) и условиям согласований (3)–(5).

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_{i,j,k}$ из (9) применим метод быстрых разложений, согласно которому подставим тройное быстрое разложение функции $T(x,y,z)$ в граничные условия (2), условия согласований (3)–(5) и дифференциальное уравнение (1). Далее составим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных (9). Полученная система имеет аналитическое решение

$$\begin{gathered}
A_{1,j,k}=f_{1,j,k},\ \ j=1\div 4,\ \ k=1\div 4; \quad A_{2,1,k}=f_{2,2,k},\quad k=1\div 4;\\
A_{2,j,k}=f_{4,j,k},\ \ j=2,3,4,\ \ k=1\div 4; \quad A_{3,1,k}=f_{2,3,k},\quad k=1\div 4;\\
A_{3,2,k}=f_{5,3,k},\quad k=1\div 4; \quad A_{3,3,1}=f_{3,3,3},\quad A_{3,3,2}=f_{6,3,3},\\
A_{3,3,3}=F_{3,3,3}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\ \ A_{3,3,4}=F_{3,3,4}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),\\
A_{3,4,1}=f_{3,3,4},\quad A_{3,4,2}=f_{6,3,4},\\
A_{3,4,3}=F_{3,4,3}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\quad A_{3,4,4}=F_{3,4,4}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),\\
A_{4,1,k}=f_{2,4,k},\quad k=1\div 4; \quad A_{4,2,k}=f_{5,4,k},\quad k=1\div 4;\\
A_{4,3,1}=f_{3,4,3},\quad A_{4,3,2}=f_{6,4,3},\\
A_{4,3,3}=F_{4,3,3}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\ \ A_{4,3,4}=F_{4,3,4}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),\\
A_{4,4,1}=f_{3,4,4},\ \ A_{4,4,2}=f_{6,4,4},\\
A_{4,4,3}=F_{4,4,3}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\ \ A_{4,4,4}=F_{4,4,4}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right).
\end{gathered}\tag{12}$$

Подставив коэффициенты (12) в выражение (8), будем иметь точное решение задачи.

При задании граничных условий и внутреннего источника должны выполняться следующие условия:

$$\begin{gathered}
f_{1,1,1}=f_{2,1,1}=f_{3,1,1},\quad f_{1,1,2}=f_{2,1,2}=f_{6,1,1},\ \ f_{1,1,3}=f_{2,1,3},\quad f_{1,1,4}=f_{2,1,4},\\
f_{1,2,1}=f_{5,1,1}=f_{3,1,2},\ \ f_{1,2,2}=f_{5,1,2}=f_{6,1,2},\ \ f_{1,2,3}=f_{5,1,3},\ \ f_{1,2,4}=f_{5,1,4},\\
f_{1,3,1}=f_{3,1,3},\quad f_{1,3,2}=f_{6,1,3},\quad f_{1,4,1}=f_{3,1,4},\quad f_{1,4,2}=f_{6,1,4},\\
f_{2,2,1}=f_{4,1,1}=f_{3,2,1},\ \ f_{2,2,2}=f_{4,1,2}=f_{6,2,1},\ \ f_{2,2,3}=f_{4,1,3},\ \ f_{2,2,4}=f_{4,1,4},\\
f_{4,2,1}=f_{5,2,1}=f_{3,2,2},\ \ f_{4,2,2}=f_{5,2,2}=f_{6,2,2},\ \ f_{4,2,3}=f_{5,2,3},\ \ f_{4,2,4}=f_{5,2,4},\\
f_{4,3,1}=f_{3,2,3},\quad f_{4,3,2}=f_{6,2,3},\quad f_{4,4,1}=f_{3,2,4},\quad f_{4,4,2}=f_{6,2,4},\\
f_{2,3,1}=f_{3,3,1},\quad f_{2,3,2}=f_{6,3,1},\quad f_{5,3,1}=f_{3,3,2},\quad f_{5,3,2}=f_{6,3,2},\\
f_{2,4,1}=f_{3,4,1},\quad f_{2,4,2}=f_{6,4,1},\quad f_{5,4,1}=f_{3,4,2},\quad f_{5,4,2}=f_{6,4,2}.
\end{gathered}\tag{13}$$

$$F_{1,1,1}=F_{1,1,2}=F_{1,2,1}=F_{1,2,2}=F_{2,1,1}=F_{2,1,2}=F_{2,2,1}=F_{2,2,2}=0.\tag{14}$$

$$f_{1,j,3}=\frac{c^2}{\pi^2}F_{1,j,3},\ j=1,2;\quad f_{1,j,4}=\frac{c^2}{4\pi^2}F_{1,j,4},\ j=1,2;\quad f_{1,3,k}=\frac{b^2}{\pi^2}F_{1,3,k},\ k=1,2;$$

$$f_{1,3,3}=F_{1,3,3}\Big/\left(\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\quad f_{1,3,4}=F_{1,3,4}\Big/\left(\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),\ f_{1,4,k}=\frac{b^2}{4\pi^2}F_{1,4,k},\ k=1,2;$$

$$f_{1,4,3}=F_{1,4,3}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\quad f_{1,4,4}=F_{1,4,4}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{b^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),$$

$$f_{2,2,3}=\frac{c^2}{\pi^2}F_{2,1,3},\quad f_{2,2,4}=\frac{c^2}{4\pi^2}F_{2,1,4},\quad f_{4,2,3}=\frac{c^2}{\pi^2}F_{2,2,3},\quad f_{4,2,4}=\frac{c^2}{4\pi^2}F_{2,2,4},$$

$$f_{4,3,k}=\frac{b^2}{\pi^2}F_{2,3,k},\ k=1,2;\quad f_{4,3,3}=F_{2,3,3}\Big/\left(\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\quad f_{4,3,4}=F_{2,3,4}\Big/\left(\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),$$

$$f_{4,4,k}=\frac{b^2}{4\pi^2}F_{2,4,k},\ k=1,2;\quad f_{4,4,3}=F_{2,4,3}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right), \tag{15}$$

$$f_{4,4,4}=F_{2,4,4}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{b^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),\quad f_{2,3,k}=\frac{a^2}{\pi^2}F_{3,1,k},\ k=1,2;\ f_{2,3,3}=F_{3,1,3}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),$$

$$f_{2,3,4}=F_{3,1,4}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),\quad f_{5,3,k}=\frac{a^2}{\pi^2}F_{3,2,k},\ k=1,2;\quad f_{5,3,3}=F_{3,2,3}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),$$

$$f_{5,3,4}=F_{3,2,4}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),\quad f_{3,3,3}=F_{3,3,1}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right),\quad f_{6,3,3}=F_{3,3,2}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right),$$

$$f_{3,3,4}=F_{3,4,1}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right),\quad f_{6,3,4}=F_{3,4,2}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right),\ f_{2,4,k}=\frac{a^2}{4\pi^2}F_{4,1,k},\ k=1,2;$$

$$f_{2,4,3}=F_{4,1,3}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\ f_{2,4,4}=F_{4,1,4}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),\ f_{5,4,k}=\frac{a^2}{4\pi^2}F_{4,2,k},\ k=1,2;$$

$$f_{5,4,3}=F_{4,2,3}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{c^2}\right),\quad f_{5,4,4}=F_{4,2,4}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{c^2}\right),$$

$$f_{3,4,3}=F_{4,3,1}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right),\quad f_{6,4,3}=F_{4,3,2}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right),$$

$$f_{3,4,4}=F_{4,4,1}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right),\quad f_{6,4,4}=F_{4,4,2}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right).$$

## 2. Пример построения точного решения и его анализ

Зададим внутренний источник, действующий в параллелепипеде, следующим образом. Примем в (10) $F_3(y,z)=F_4(y,z)=0,$ тогда источник будет иметь вид

$$F(x,y,z)=F_1(y,z)P_1(x)+F_2(y,z)P_2(x). \tag{16}$$

В функциях $F_1(y,z)$ и $F_2(y,z)$ из (16) положим $F_{1,3}(z)=F_{1,4}(z)=F_{2,3}(z)=F_{2,4}(z)=0.$ В результате получим

$$F_1(y,z)=F_{1,1}(z)P_1(y)+F_{1,2}(z)P_2(y),\quad F_2(y,z)=F_{2,1}(z)P_1(y)+F_{2,2}(z)P_2(y).$$

В представлении функций $F_{1,1}(z),\ F_{1,2}(z), F_{2,1}(z), F_{2,2}(z)$ зададим $F_{1,1,4}=F_{1,2,4}=F_{2,1,4}=F_{2,2,4}=0$ и, учитывая равенства (14), указанные функции примут вид

$$F_{1,1}(z)=F_{1,1,3}\sin\pi\frac{z}{c},\ F_{1,2}(z)=F_{1,2,3}\sin\pi\frac{z}{c},\ F_{2,1}(z)=F_{2,1,3}\sin\pi\frac{z}{c},\ F_{2,2}(z)=F_{2,2,3}\sin\pi\frac{z}{c}.$$

Используя равенства (7), и вводя обозначения

$$F_{1,1,3}=Q_1,\ F_{1,2,3}=Q_2,\ F_{2,1,3}=Q_3,\ F_{2,2,3}=Q_4,$$

окончательно запишем

$$F(x,y,z)=\left[Q_1\left(1-\frac{y}{b}\right)\sin\pi\frac{z}{c}+Q_2\frac{y}{b}\sin\pi\frac{z}{c}\right]\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left[Q_3\left(1-\frac{y}{b}\right)\sin\pi\frac{z}{c}+Q_4\frac{y}{b}\sin\pi\frac{z}{c}\right]\frac{x}{a}. \quad (17)$$

Переменный внутренний источник широко используется в моделировании процессов тепломассообмена [3, 16, 18, 22, 23].

Запишем граничные условия, которые будут выполняться для источника (17). Пусть в равенствах (11) некоторые функции равны нулю

$$f_{1,j}(z)=f_{2,j}(z)=f_{3,j}(y)=f_{4,j}(z)=f_{5,j}(z)=f_{6,j}(y)=0,\quad j=3;4$$

а также равны нулю коэффициенты

$$f_{1,1,4}=f_{1,2,4}=f_{2,1,4}=f_{2,2,4}=f_{3,1,4}=f_{3,2,4}=f_{4,1,4}=f_{4,2,4}=f_{5,1,4}=f_{5,2,4}=f_{6,1,4}=f_{6,2,4}=0.$$

В этом случае граничные условия (2) с учетом равенств (13) примут вид

$$\begin{gathered}
T\big|_{x=0}=f_1(y,z)=\left[f_{1,1,1}P_1(z)+f_{1,1,2}P_2(z)+f_{1,1,3}P_3(z)\right]P_1(y)+\\
+\left[f_{1,2,1}P_1(z)+f_{1,2,2}P_2(z)+f_{1,2,3}P_3(z)\right]P_2(y),\\
T\big|_{y=0}=f_2(x,z)=\left[f_{2,1,1}P_1(z)+f_{2,1,2}P_2(z)+f_{2,1,3}P_3(z)\right]P_1(x)+\\
+\left[f_{2,2,1}P_1(z)+f_{2,2,2}P_2(z)+f_{2,2,3}P_3(z)\right]P_2(x),\\
T\big|_{z=0}=f_3(x,y)=\left[f_{3,1,1}P_1(y)+f_{3,1,2}P_2(y)\right]P_1(x)+\left[f_{3,2,1}P_1(y)+f_{3,2,2}P_2(y)\right]P_2(x),\\
T\big|_{x=a}=f_4(y,z)=\left[f_{4,1,1}P_1(z)+f_{4,1,2}P_2(z)+f_{4,1,3}P_3(z)\right]P_1(y)+\\
+\left[f_{4,2,1}P_1(z)+f_{4,2,2}P_2(z)+f_{4,2,3}P_3(z)\right]P_2(y),\\
T\big|_{y=b}=f_5(x,z)=\left[f_{5,1,1}P_1(z)+f_{5,1,2}P_2(z)+f_{5,1,3}P_3(z)\right]P_1(x)+\\
+\left[f_{5,2,1}P_1(z)+f_{5,2,2}P_2(z)+f_{5,2,3}P_3(z)\right]P_2(x),\\
T\big|_{z=c}=f_6(x,y)=\left[f_{6,1,1}P_1(y)+f_{6,1,2}P_2(y)\right]P_1(x)+\left[f_{6,2,1}P_1(y)+f_{6,2,2}P_2(y)\right]P_2(x).
\end{gathered} \quad (18)$$

Подбор значений коэффициентов, входящих в (18), проведен с учетом (13) и (15). Отсюда, применяя равенства (7), и вводя следующие обозначения

$$\begin{gathered}
f_{1,1,1}=f_{2,1,1}=f_{3,1,1}=T_1,\ \ f_{1,1,2}=f_{2,1,2}=f_{6,1,1}=T_2,\ \ f_{1,1,3}=f_{2,1,3}=\frac{c^2}{\pi^2}Q_1,\\
f_{1,2,1}=f_{5,1,1}=f_{3,1,2}=T_3,\ \ f_{1,2,2}=f_{5,1,2}=f_{6,1,2}=T_4,\ \ f_{1,2,3}=f_{5,1,3}=\frac{c^2}{\pi^2}Q_2,\\
f_{2,2,1}=f_{4,1,1}=f_{3,2,1}=T_5,\ \ f_{2,2,2}=f_{4,1,2}=f_{6,2,1}=T_6,\ \ f_{2,2,3}=f_{4,1,3}=\frac{c^2}{\pi^2}Q_3,\\
f_{4,2,1}=f_{5,2,1}=f_{3,2,2}=T_7,\ \ f_{4,2,2}=f_{5,2,2}=f_{6,2,2}=T_8,\ \ f_{4,2,3}=f_{5,2,3}=\frac{c^2}{\pi^2}Q_4,
\end{gathered} \quad (19)$$

будем иметь граничные условия для температуры

$$T\big|_{x=0}=\left(T_1\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_2\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_1\sin\pi\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left(T_3\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_4\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_2\sin\pi\frac{z}{c}\right)\frac{y}{b},$$

$$T\big|_{y=0}=\left(T_1\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_2\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_1\sin\pi\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left(T_5\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_6\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_3\sin\pi\frac{z}{c}\right)\frac{x}{a},$$

$$T\big|_{z=0}=\left(T_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+T_3\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left(T_5\left(1-\frac{y}{b}\right)+T_7\frac{y}{b}\right)\frac{x}{a},$$

$$T\big|_{x=a}=\left(T_5\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_6\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_3\sin\pi\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left(T_7\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_8\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_4\sin\pi\frac{z}{c}\right)\frac{y}{b}, \quad (20)$$

$$T\big|_{y=b}=\left(T_3\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_4\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_2\sin\pi\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left(T_7\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_8\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_4\sin\pi\frac{z}{c}\right)\frac{x}{a},$$

$$T\big|_{z=c}=\left(T_2\left(1-\frac{y}{b}\right)+T_4\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left(T_6\left(1-\frac{y}{b}\right)+T_8\frac{y}{b}\right)\frac{x}{a}.$$

Подставляя в (12) коэффициенты из (19) и, учитывая принятые равными нулю коэффициенты из граничных условий и внутреннего источника, получим

$$A_{1,1,1}=T_1,\ A_{1,1,2}=T_2,\ A_{1,1,3}=\frac{c^2}{\pi^2}Q_1,\ A_{1,2,1}=T_3,\ A_{1,2,2}=T_4,\ A_{1,2,3}=\frac{c^2}{\pi^2}Q_2,$$

$$A_{2,1,1}=T_5,\ A_{2,1,2}=T_6,\ A_{2,1,3}=\frac{c^2}{\pi^2}Q_3,\ A_{2,2,1}=T_7,\ A_{2,2,2}=T_8,\ A_{2,2,3}=\frac{c^2}{\pi^2}Q_4.$$

Точное решение уравнения (1), соответствующее условиям (2), с внутренним источником (17) принимает вид

$$\begin{aligned}T(x,y,z)=\Bigg(\left(T_1\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_2\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_1\sin\pi\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)+\\+\left(T_3\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_4\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_2\sin\pi\frac{z}{c}\right)\frac{y}{b}\Bigg)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\\+\Bigg(\left(T_5\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_6\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_3\sin\pi\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)+\left(T_7\left(1-\frac{z}{c}\right)+T_8\frac{z}{c}+\frac{c^2}{\pi^2}Q_4\sin\pi\frac{z}{c}\right)\frac{y}{b}\Bigg)\frac{x}{a}.\end{aligned} \quad (21)$$

По формуле (21) можно вычислить температуру $T(x,y,z)$ в любой точке параллелепипеда. Например, подставляя в (21) $x=a/2$, $y=b/2$ и $z=c/2$, вычислим значение температуры в центре тела

$$T\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)=\frac{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8}{8}+\frac{c^2}{\pi^2}\frac{Q_1+Q_2+Q_3+Q_4}{4}. \quad (22)$$

Из (22) следует, что температура в центре параллелепипеда равна сумме среднеарифметического значения температур в его вершинах (рис. 1) и среднеарифметического значения коэффициентов внутреннего источника умноженного на величину $c^2/\pi^2$.

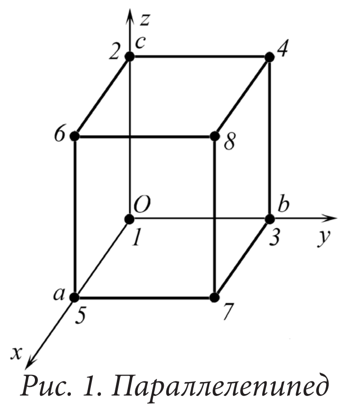



*Рис. 1. Параллелепипед*

Вычислим тепловые потоки по формулам

$$q_x(x,y,z) = -\lambda \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x},\ q_y(x,y,z) = -\lambda \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y},\ q_z(x,y,z) = -\lambda \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}. \quad (23)$$

где $\lambda$ — коэффициент теплопроводности материала.

Подставляя в (23) точное решение (21), после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} q_x(x,y,z) = &-\frac{\lambda}{a}\Bigg(-(T_1-T_5)+\frac{z}{c}\big((T_1-T_5)-(T_2-T_6)\big)+\frac{y}{b}\big((T_1-T_5)-(T_3-T_7)\big)+ \\ &+\frac{z}{c}\frac{y}{b}\big((T_2-T_6)-(T_1-T_5)+(T_3-T_7)-(T_4-T_8)\big)\Bigg)- \\ &-\frac{\lambda}{a}\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}\left((Q_3-Q_1)+\big((Q_4-Q_3)-(Q_2-Q_1)\big)\frac{y}{b}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} q_y(x,y,z) = &-\frac{\lambda}{b}\Bigg(-(T_1-T_3)+\frac{z}{c}\big((T_1-T_3)-(T_2-T_4)\big)+\frac{x}{a}\big((T_1-T_3)-(T_5-T_7)\big)+ \\ &+\frac{z}{c}\frac{x}{a}\big((T_2-T_4)-(T_1-T_3)+(T_5-T_7)-(T_6-T_8)\big)\Bigg)- \\ &-\frac{\lambda}{b}\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}\left((Q_2-Q_1)+\big((Q_4-Q_3)-(Q_2-Q_1)\big)\frac{x}{a}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} q_z(x,y,z) = &-\frac{\lambda}{c}\Bigg(-(T_1-T_2)+\frac{y}{b}\big((T_1-T_2)-(T_3-T_4)\big)+\frac{x}{a}\big((T_1-T_2)-(T_5-T_6)\big)+ \\ &+\frac{y}{b}\frac{x}{a}\big(-(T_1-T_2)+(T_3-T_4)+(T_5-T_6)-(T_7-T_8)\big)\Bigg)- \\ &-\lambda\frac{c}{\pi}\cos\pi\frac{z}{c}\left(Q_1+(Q_2-Q_1)\frac{y}{b}+\left((Q_3-Q_1)+\big((Q_4-Q_3)-(Q_2-Q_1)\big)\frac{y}{b}\right)\frac{x}{a}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

В формулах (24)–(26) температуры $T_i,\ i=1...8$ в вершинах параллелепипеда сгруппированы так, чтобы выделить разность температур вдоль ребер параллелепипеда (рис. 1). Таким образом, из (24)–(26) видно, что в описании потока $q_x(x,y,z)$ присутствуют разности температур вдоль ребер коллинеарных только оси *OX* (формула (24)). Для описания $q_y(x,y,z)$ учитываются разности температур вдоль ребер коллинеарных только оси *OY* (формула (25)), а в формуле (26) в записи $q_z(x,y,z)$ присутствуют разности температур вдоль ребер коллинеарных только оси $OZ$.

Рассмотрим распределения температурных полей и тепловых потоков соответствующие случаю, когда различны значения температуры $T_i,\ i=1...8$ во всех вершинах параллелепипеда и значения коэффициентов $Q_i,\ i=1...4$ внутреннего источника. В качестве материала параллелепипеда выберем коррозионно-стойкую жаропрочную сталь 08Х17Т, применяемую для изделий, работающих в окислительных средах и в атмосферных условиях [24]. Пусть

$$\begin{gathered} T_1=1°C,\ T_2=5°C,\ T_3=3°C,\ T_4=7°C,\ T_5=10°C,\ T_6=20°C,\ T_7=30°C,\ T_8=50°C, \\ Q_1=12\,°C/м^2,\ Q_2=40\,°C/м^2,\ Q_3=16\,°C/м^2,\ Q_4=30\,°C/м^2, \\ a=0.1\ м,\ b=0.2\ м,\ c=0.3\ м,\ \lambda=25\,Вт/(м\cdot°C). \end{gathered} \quad (27)$$

Для данных (27) температурные поля в параллелепипеде, рассчитанные по формуле (21) в сечениях плоскостями $x=a/2$, $y=b/2$ и $z=c/2$, показаны на рис. 2а, рис. 2б и рис. 2в соответственно. Тепловые потоки, вычисленные по формулам (24)–(26) для значений (27), изображены на рис 3. На рис. 3а и рис. 3б представлены распределения $q_x(x,y,z)$ и $q_y(x,y,z)$, а на рис. 3в — $q_z(x,y,z)$ в сечении $z=c/2$. Из рис. 2 и рис. 3 видно, что при задании различных значений температур в вершинах параллелепипеда данные профили температур и тепловых потоков плоскостей симметрии не имеют.

Если же в (21) принять одинаковыми все температуры в вершинах параллелепипеда

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = T_8 = T \tag{28}$$

и коэффициенты внутреннего источника

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q, \tag{29}$$

то в этом случае получим распределения температур и тепловых потоков, имеющие плоскости симметрии, проходящие через центр параллелепипеда.

Исследуем влияние переменности внутреннего источника $F(x,y,z)$ на распространение тепла в теле при одинаковых начальных температурах в вершинах параллелепипеда, (выполнение условий (28)). Из формул (24)–(26) следует, что представляет интерес анализ случаев, когда все $Q_i$, $i=1...4$ принимают одинаковые значения (условие (29)), все $Q_i$, $i=1...4$ принимают различные значения и значения $Q_i$, $i=1...4$ будут попарно одинаковые, например, $Q_1 = Q_2 \neq Q_3 = Q_4$ или $Q_1 = Q_3 \neq Q_2 = Q_4$.

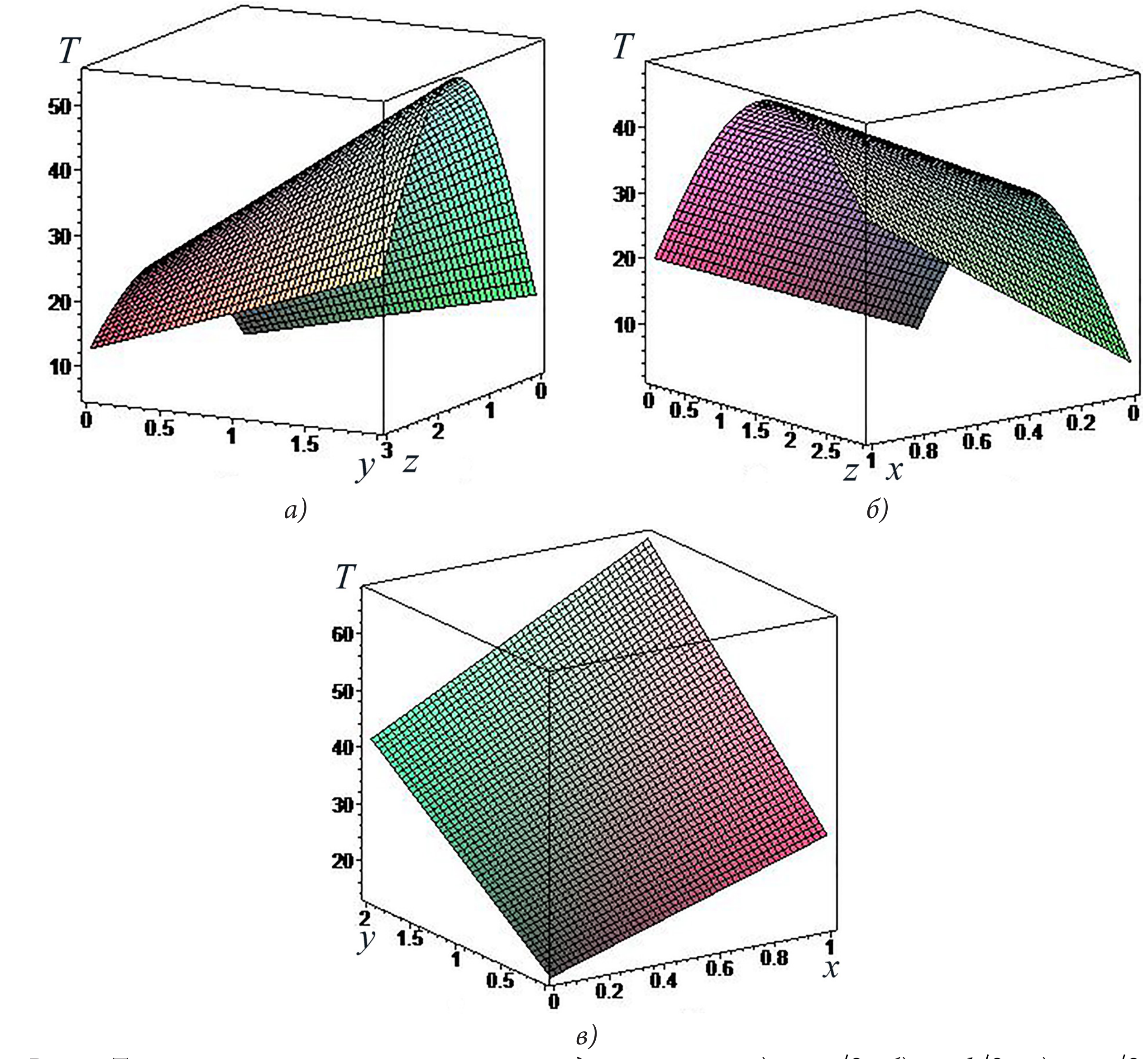



*Рис. 2. Температурные поля в параллелепипеде в сечениях: а) $x=a/2$, б) $y=b/2$, в) $z=c/2$*

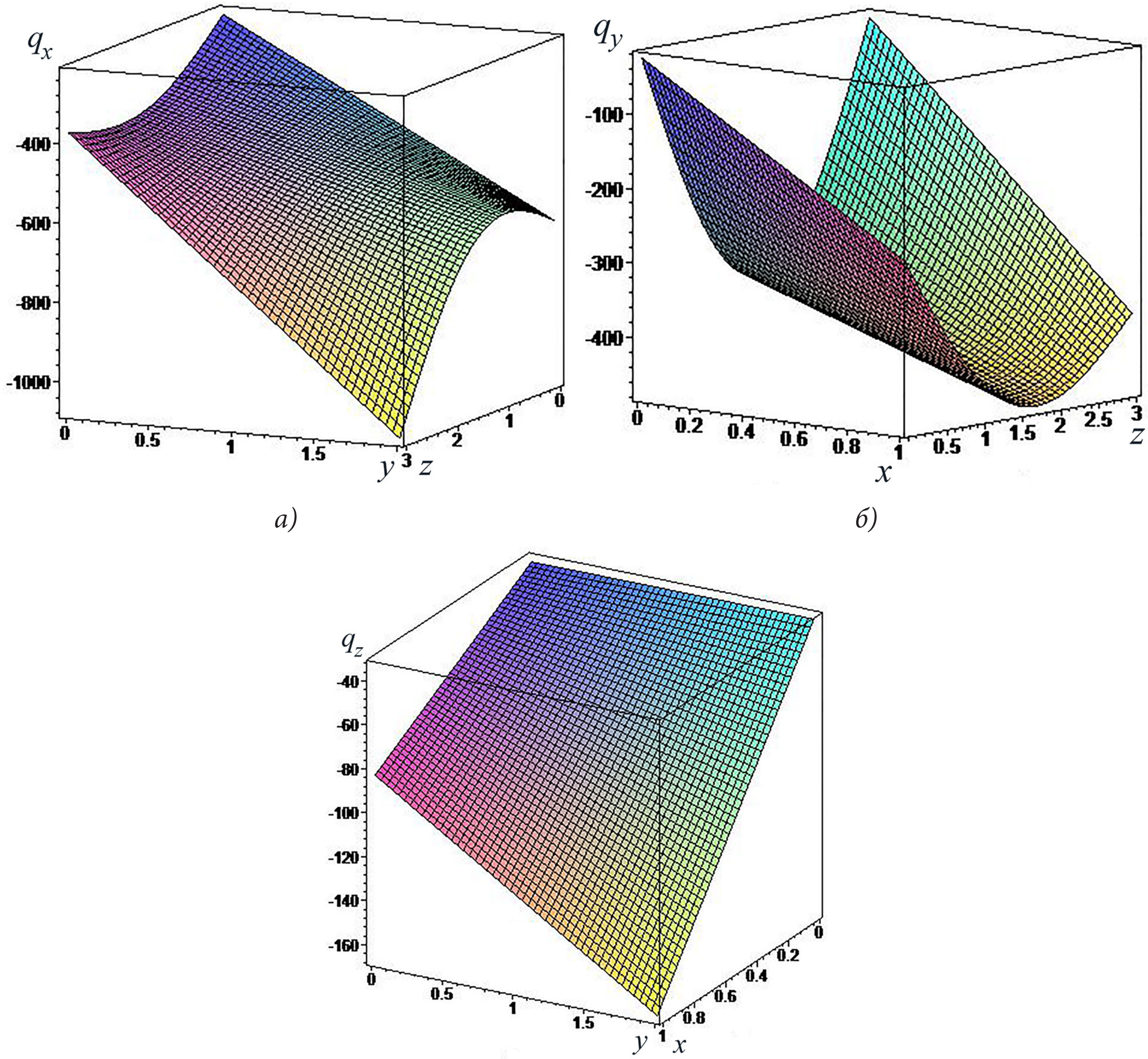
Сначала рассмотрим случай, соответствующий условиям (29). Внутренний источник будет определяться формулой

$$F(x,y,z) = Q\sin\pi\frac{z}{c}. \tag{30}$$

Температура и тепловые потоки в теле для источника (30) при выполнении равенств (28) будут вычисляться по формулам

$$T(x,y,z) = T + \frac{c^2}{\pi^2}Q\sin\pi\frac{z}{c},\ \ q_x(x,y,z)=0,\ \ q_y(x,y,z)=0,\ \ q_z(x,y,z) = -\lambda Q\frac{c}{\pi}\cos\pi\frac{z}{c}. \tag{31}$$

Теперь рассмотрим случай, когда все $Q_i$, $i=1...4$ принимают различные значения (внутренний источник будет описываться формулой (17)). Для этого варианта температура и тепловые потоки в теле описываются следующими формулами




*а)* *б)*

*в)*

*Рис. 3. Тепловые потоки в параллелепипеде:*
*а)* $q_x(x,y,z)$, *б)* $q_y(x,y,z)$, *в)* $q_z(x,y,z)$ *в сечении* $z=c/2$

$$T(x,y,z)=T+\left(\left(Q_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+Q_2\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left(Q_3\left(1-\frac{y}{b}\right)+Q_4\frac{y}{b}\right)\frac{x}{a}\right)\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}. \qquad (32)$$

$$q_x(x,y,z)=-\frac{\lambda}{a}\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}\left((Q_3-Q_1)+((Q_4-Q_3)-(Q_2-Q_1))\frac{y}{b}\right). \qquad (33)$$

$$q_y(x,y,z)=-\frac{\lambda}{b}\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}\left((Q_2-Q_1)+((Q_4-Q_3)-(Q_2-Q_1))\frac{x}{a}\right). \qquad (34)$$

$$q_z(x,y,z)=-\lambda\frac{c}{\pi}\cos\pi\frac{z}{c}\left(Q_1+(Q_2-Q_1)\frac{y}{b}+\left((Q_3-Q_1)+((Q_4-Q_3)-(Q_2-Q_1))\frac{y}{b}\right)\frac{x}{a}\right). \qquad (35)$$

Если же значения $Q_i$, $i=1...4$ таковы, что $Q_1=Q_2\neq Q_3=Q_4$, тогда внутренний источник не будет зависеть от координаты $y$

$$F(x,y,z)=\left(Q_1+(Q_3-Q_1)\frac{x}{a}\right)\sin\pi\frac{z}{c},$$

а для температурных полей и тепловых потоков получим следующие равенства

$$T(x,y,z)=T+\left(Q_1\left(1-\frac{x}{a}\right)+Q_3\frac{x}{a}\right)\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}. \qquad (36)$$

$$q_x(x,y,z)=-\frac{\lambda}{a}\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}(Q_3-Q_1). \qquad (37)$$

$$q_y(x,y,z)=0. \qquad (38)$$

$$q_z(x,y,z)=-\lambda\frac{c}{\pi}\cos\pi\frac{z}{c}\left(Q_1+(Q_3-Q_1)\frac{x}{a}\right). \qquad (39)$$

При значениях $Q_1=Q_3\neq Q_2=Q_4$ внутренний источник не будет зависеть от координаты $x$

$$F(x,y,z)=\left(Q_1+(Q_2-Q_1)\frac{y}{b}\right)\sin\pi\frac{z}{c}.$$

В этом случае температурные поля и тепловые потоки задаются равенствами

$$T(x,y,z)=T+\left(Q_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+Q_2\frac{y}{b}\right)\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}. \qquad (40)$$

$$q_x(x,y,z)=0. \qquad (41)$$

$$q_y(x,y,z)=-\frac{\lambda}{b}\frac{c^2}{\pi^2}\sin\pi\frac{z}{c}(Q_2-Q_1). \qquad (42)$$

$$q_z(x,y,z)=-\lambda\frac{c}{\pi}\cos\pi\frac{z}{c}\left(Q_1+(Q_2-Q_1)\frac{y}{b}\right). \qquad (43)$$

Анализируя формулы (31)–(43), можно сделать вывод, что при задании одинаковой начальной температуры $T_i$, $i=1...8$ в вершинах параллелепипеда (условие (28)) тепло в теле будет переноситься только в тех направлениях, в которых внутренний источник переменен. Например, при задании внутреннего источника формулой (30) из (31) видно, что потоки $q_x(x,y,z)$ и $q_y(x,y,z)$ равны нулю, и только тепловой поток $q_z(x,y,z)$ отличен от нуля и зависит только от координаты $z$.

## Заключение

Для получения новых трехмерных точных решений уравнения теплопроводности подбор численных значений коэффициентов функций, входящих в граничные условия и источник

$F(x,y,z)$, следует вести с учетом равенств (13)–(15). В статье представлены формулы для вычисления температуры и тепловых потоков в любой точке тела.

Для случая различных значений температуры $T_i$, $i=1...8$ во всех вершинах параллелепипеда показано, что в описании потока $q_x(x,y,z)$ присутствуют разности температур вдоль ребер коллинеарных только оси $OX$. Для описания $q_y(x,y,z)$ учитывается разности температур вдоль ребер коллинеарных только оси $OY$, а в записи $q_z(x,y,z)$ присутствуют разности температур вдоль ребер коллинеарных только оси $OZ$.

Проведено исследование влияния переменности внутреннего источника $F(x,y,z)$ на распространение тепла в теле при одинаковых начальных температурах $T_i$, $i=1...8$ в вершинах параллелепипеда, в ходе которого установлено, что тепло в теле будет переноситься только в тех направлениях, в которых внутренний источник переменен.

**Литература**


1. *Гладкий, С. Л.* Решение трехмерных задач теплопроводности методом фиктивных канонических областей / С. Л. Гладкий, Л. Н. Ясницкий // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 1(5). – С. 41–45.

2. *Кофанов, А. В.* Применение шарового метрического тензора для адаптации сеток и решения прикладных задач / А. В. Кофанов, В. Д. Лисейкин, А. Д. Рычков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, №4. – С. 653–662.

3. Аналитические решения нестационарных задач теплопроводности и их роль в верификации моделей теплогидромеханических процессов в пунктах глубинного захоронения РАО / Ю. Н. Токарев, Е. В. Моисеенко, Н. И. Дробышевский, Р. А. Бутов // Радиоактивные отходы. – 2018. – № 4(5). – С. 90–98.

4. *Юлдашев, О. И.* Граничный метод взвешенных невязок с разрывными базисными функциями для высокоточного решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона / О. И. Юлдашев, М. Б. Юлдашева // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2013. – № 4. – С. 143–153.

5. *Пастухов, Д. Ф.* Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности / Д. Ф. Пастухов, Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4 – С.154–173.

6. *Исаев, В. И.* Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона / В.И. Исаев, В.П. Шапеев, С.В. Идимешев // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 1. – С. 85–93.

7. *Zhong, H.* Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element/ H. Zhong, Y. He //International Journal of Solids and Structures. – 1998. – V. 35, Iss. 21. – P. 2805–2819.

8. *Ghasemi, M.* Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D / M. Ghasemi //Computers & Mathematics with Applications. – 2017. – V. 73, Iss. 7. – P. 1576–1592.

9. *Shi, Z.* Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method / Z. Shi, Y.-y. Cao, Q.-j.Chen //Applied Mathematical Modelling. – 2012. – V. 36, Iss. 11. – P. 5143–5161.

10. *Qu, W.* Analysis of three-dimensional heat conduction in functionally graded materials by using a hybrid numerical method / W. Qu, Ch.-M. Fan, Y. Zhang//International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2019. – V. 145. – 118771.

11. The generalized finite difference method for an inverse time-dependent source problem associated with three-dimensional heat equation/ Y. Gu, J. Lei, Ch.-M. Fan, X.-Q. He //Engineering Analysis with Boundary Elements – 2018. – V. 91. – P. 73–81.

12. Numerical solution of multi-dimensional transient nonlinear heat conduction problems with heat sources by an extended element differential method /M. Cui, B.-B. Xu, J. Lv, X.-W. Gao, Y. Zhang // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2018. – V. 126, Part A. – P. 1111–1119.

13. *Рубина, Л. И.* Об одном подходе к решению неоднородных уравнений в частных производных/ Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов // Вестник удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2017. – Т. 27, Вып. 3. – С 355–364.

14. *Алгазин, О. Д.* Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое / О. Д. Алгазин, А. В. Копаев // Математика и Математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2015. – № 4. – С. 41–53.

15. *Maakoul, A. E.* A general approach to solve heat conduction problems with internal heat sources using resistance and quadrupole concepts/ A. E. Maakoul, Ch. Moyne, A. Degiovanni //International Journal of Heat and Mass Transfer – 2019. – V. 129. – P. 793–800.

16. *Стефанюк, Е. В.* Аналитические решения задач теплопроводности при переменных во времени источниках теплоты / Е. В. Стефанюк // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2009. – № 1 (23). – С. 204–213.

17. *Чернышов, А. Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений / А.Д. Чернышов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 13–24.

18. *Чернышов, А. Д.* Исследование температурных полей в прямоугольной пластине с внутренним источником, зависящим от температуры, при помощи быстрых разложений / А. Д. Чернышов, В. В. Горяйнов, А. Н. Марченко // Теплофизика и аэромеханика. – 2016. – Т. 23, № 2. – С. 247–256.

19. Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий / А. Д. Чернышов, В. М. Попов, В. В. Горяйнов, О. В. Лешонков // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 5. – С. 1288–1297.

20. *Chernyshov, A. D.* Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients / A. D. Chernyshov, V. V. Goryainov, A. A. Danshin // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2018. – 973. – 012002.

21. Using of fast expansions in the construction of twodimensional exact solutions of the Poisson equation / A. D. Chernyshov, V. V. Goryainov, M. I. Popov, O. Yu. Nikiforova // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – 1479. – 012146.

22. Точные решения задачи о диффузии в прямоугольной емкости с внутренним источником, полученные методом быстрых разложений / А. Д. Чернышов, Д. С. Сайко, В. В. Горяйнов, С. Ф. Кузнецов, О. Ю. Никифорова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2020. – Т. 13, № 3. – С. 42–55.

23. Convection in a porous medium with variable internal heat source and variable gravity / U. S. Mahabaleshwar, D. Basavaraja, Sh. Wang, G. Lorenzini, E. Lorenzini //International Journal of Heat and Mass Transfer – 2017. – V. 111. – P. 651–656.

24. URL: https://metal.place/ru/wiki/08kh17t/ (дата обращения: 12.09.2020).

УДК 536

# ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ОСНОВАННЫЙ НА ВВЕДЕНИИ ПОНЯТИЯ ТЕПЛОВОГО ФРОНТА И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

**М. В. Юмашев, Т. А. Картвелишвили, Е. С. Зизганова**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Данная работа продолжает цикл исследований, опубликованных в работе «Моделирование процесса нагрева тела при интенсивном тепловом воздействии на поверхность». Исследуются хрупкие материалы, подверженные быстрому локальному нагреву, способному приводить к большим градиентам температур, что, в свою очередь, является причиной больших механических напряжений, вызывающих растрескивание образца и существенное ухудшение его прочностных и износостойких характеристик. Этот вопрос является крайне актуальным на данный момент. Основной задачей современного машиностроения является создание конкурентоспособной продукции, постановка на производство новых поколений высокопроизводительной техники с широким использованием новых материалов и технологий, обеспечивающих заданные свойства. Важным является поиск путей повышения эксплуатационных характеристик деталей за счет разработки и оптимизации новых процессов неразрушающей термообработки. Одним из наиболее перспективных процессов является лазерная обработка.

Из анализа известных исследований, можно сделать вывод, что недостаточно изучены процессы, протекающие в зоне лазерного воздействия, особенности формирования структуры и возможного разрушения. Практически отсутствуют научно-обоснованные указания по выбору параметров лазерной обработки для получения требуемых свойств поверхностных слоев. Не изучены закономерности возникновения разрушения поверхностных слоев, имеющие чередующиеся структурно- неоднородные участки, образование которых связано с наложением лазерных треков.

Таким образом, несмотря на имеющийся научный задел и опыт применения прогрессивных ресурсосберегающих лазерных технологий, для повышения эффективности их использования и решения многих научных и практических задач требуется выполнить вполне определенный комплекс теоретических и экспериментальных исследований процессов, происходящих в зонах лазерного воздействия, и факторов, влияющих на условия формирования заданных свойств при лазерной обработке деталей.

Использование результатов данных исследований позволит более целенаправленно воздействовать лазером на обрабатываемую поверхность и получать заданные свойства, снижая риск возникновения трещин.

В данной задаче рассматривается приближенный метод расчета температурных полей, когда имеет место быстрый и интенсивный прогрев однослойной пластины.

На данный момент известен широкий класс приближенных аналитических методов, среди которых можно упомянуть вариационный метод Био, метод Баренблатта.

Метод приближенного решения линейного уравнения теплопроводности, используемый в данной задаче, основан на идее теплового фронта и на введении дополнительных граничных условий.

Необходимость вводить дополнительные граничные условия связана с тем, что при рассмотрении полиномиальных функций температуры более высокого порядка, которые используются с целью повышения точности приближённого решения, основных граничных условий становится недостаточно для определения коэффициентов. Для получения дополнительных граничных условий достаточно продифференцировать исходное дифференциальное уравнение и основные условия в граничных точках по координате и времени, что и сделано в данной работе.

Заметим, что дополнительные условия не являются частью исходной постановки, поэтому не меняют ее. Они являются дополнительным средством, помогающим найти решение задачи в заданном виде. Физический смысл таких условий может быть объяснён тем, что удовлетворение ими полученного нами решения означает в свою очередь выполнение исходного дифференциального уравнения теплопроводности и производных от него на тепловом фронте и в граничных точках. Увеличение количества выполняемых дополнительных условий приводит к тому, что уравнение лучше выполняется и внутри нашей области в течение всего интересующего нас времени.

В работе получены аналитические формулы, определяющие зависимость температуры от координаты в двух приближениях в случае двумерной стационарной задачи. Показаны существенные преимущества данного метода по отношению к классическому точному аналитическому решению — получение простых по форме решений, позволяющих существенно облегчить дальнейший процесс анализа возможных разрушений в материале.

## 1. Постановка задачи

Продемонстрируем, что метод использования теплового фронта и дополнительных граничных условий позволяет получать аналитические решения двумерных задач стационарной теплопроводности с источниками теплоты. Рассмотрим следующую краевую задачу.

### *1.1. Физическая постановка*

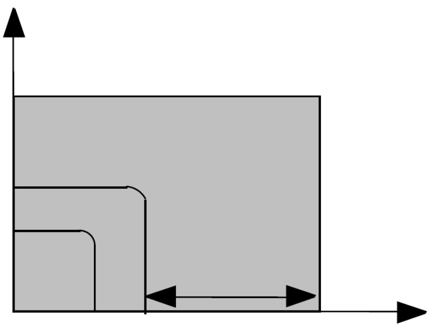


*Рис. 1. Графическая интерпретация двумерной задачи*

### *1.2. Математическая постановка*

$$0 \le x \le d;\ \ 0 \le y \le b$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -1, \\ T(x,b) = T(d,y) = 0, \\ \dfrac{\partial T(0,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

## 2. Решение задачи

Потребуем, чтобы решение удовлетворяло усредненному уравнению.

$$\int_0^b \left( \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} + 1 \right) dy = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^b T(x,y)dy\right)+\frac{\partial T(x,b)}{\partial y}+b=0 \quad (2)$$

В качестве дополнительной искомой функции введем температуру по линии симметрии

$$T(x,0)=l(x). \quad (3)$$

Будем искать температуру в виде $T(x,y)=\sum_{k=0}^{n} a_k(l)y^k$ и ограничимся тремя членами ряда.

### 2.1. Первое приближение

Для решения задачи в первом приближении после введения $l(x)$:

$$\begin{cases} T(x,0)=l(x), \\ \dfrac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0, \\ T(x,b)=0 \end{cases}$$

Подставим выражение для температуры в условия и получим

$$T(x,y)=l(x)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \quad (4)$$

$$\frac{d^2 l(x)}{dx^2}-\frac{3}{b^2}l(x)+1.5=0 \quad (5)$$

Из условий $l(d)=0$ и $\dfrac{dl(0)}{dx}=0$ получим, что

$$l(x)=0.5b^2\left(\frac{1-\cosh\sqrt{3}\,\frac{x}{b}}{\cosh\sqrt{3}\,\frac{d}{b}}\right) \quad (6)$$

Тогда

$$T(x,y)=0.5(b^2-y^2)\left(1-\frac{\cosh\sqrt{3}\,\frac{x}{b}}{\cosh\sqrt{3}\,\frac{d}{b}}\right) \quad (7)$$

### 2.2. Дополнительные граничные условия. Решение во втором приближении

Возьмем теперь четыре члена ряда. Пробуя получить дополнительные граничные условия, заметим, что все коэффициенты при нечетных степенях $y$ будут равны 0.

$$T(x,y)=a_0(x)+a_2(x)y^2+a_4(x)y^4+a_6(x)y^6 \quad (8)$$

В качестве дополнительных возьмем следующие условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T(x,0)}{\partial y^2}=-1-\dfrac{\partial^2 l(x)}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 T(x,b)}{\partial y^2}=-1 \end{cases}$$

Решая СЛАУ, получим

$$\begin{cases} a_0 = l(x), \\ a_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2 l}{dx^2}, \\ a_4 = \dfrac{15-30l}{18b^3} + \dfrac{7}{9b}\dfrac{d^2 l}{dx^2}, \\ a_6 = -\dfrac{1}{3b^4} + \dfrac{2}{3b^6} l - \dfrac{5}{18b^4}\dfrac{d^2 l}{dx^2} \end{cases}$$

Подставляя в (2) имеем:

$$\frac{d^4 l}{dx^4} - \frac{95}{4b^2}\frac{d^2 l}{dx^2} + \frac{105}{2b^4} l - \frac{105}{4b^2} = 0 \quad (9)$$

Решая дифференциальное уравнение, получим:

$$l(x) = \alpha \cosh\frac{1.5706x}{b} + \beta \sinh\frac{1.5706x}{b} + \gamma \cosh\frac{4.6134x}{b} + \delta \sinh\frac{4.6134x}{b} + 0.5b^2 \quad (10)$$

Для определения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ воспользуемся следующими условиями:

$$\begin{cases} T(d,y) = 0, \\ \dfrac{\partial T(0,y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{d^2 l(d)}{dx^2} = -1, \\ \dfrac{d^3 l(0)}{dx^3} = 0 \end{cases}$$

Получим следующую зависимость $l(t)$. Подставляя ее в (8) получим итоговое распределение температуры во втором приближении.

$$l(x) = \frac{b^2}{2}\left(1 - 1.0248\frac{\cosh\frac{1.5706x}{b}}{\cosh\frac{1.5706d}{b}} + 0.0248\frac{\cosh\frac{4.6134x}{b}}{\cosh\frac{4.6134d}{b}}\right) \quad (11)$$

## *2.3. Изотермы*

*2.3.1. Квадрат (b = d)*

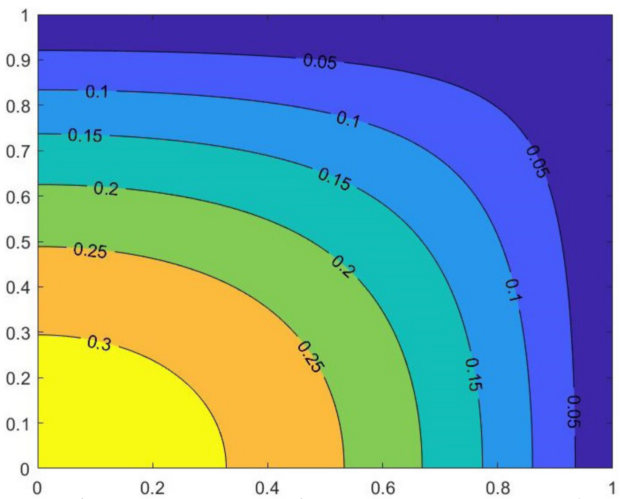



*Рис. 2. График изотерм квадрата в первом приближении*

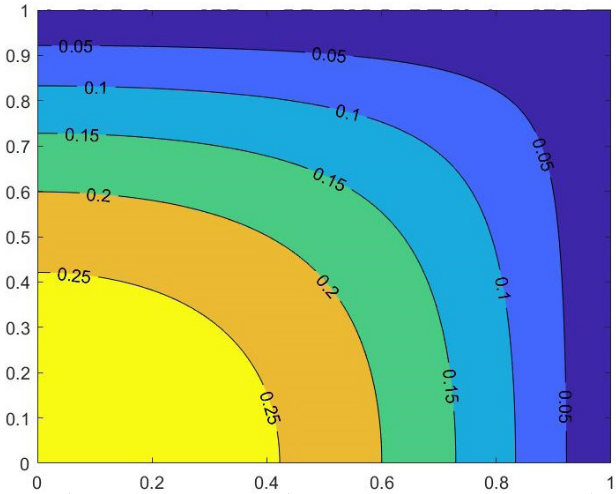



*Рис. 3. График изотерм квадрата во втором приближении*

*2.3.2. Прямоугольник (d = 2b)*

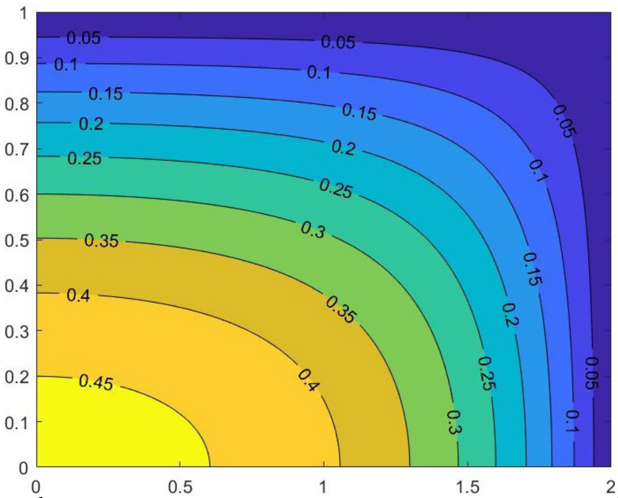



*Рис. 4. График изотерм прямоугольника в первом приближении*

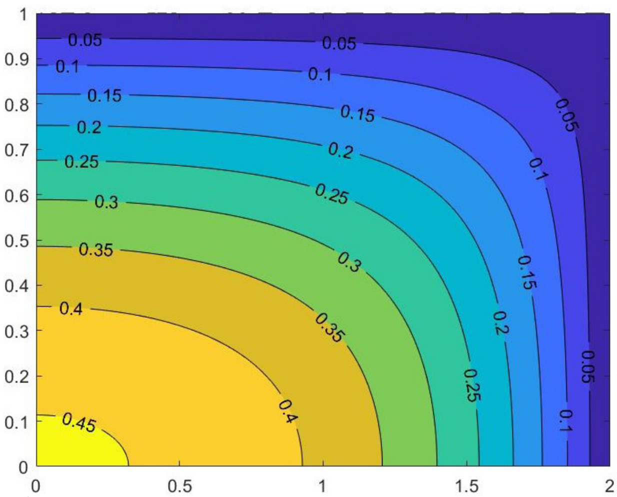



*Рис. 5. График изотерм прямоугольника во втором приближении*

*2.3.3. Сравнение*

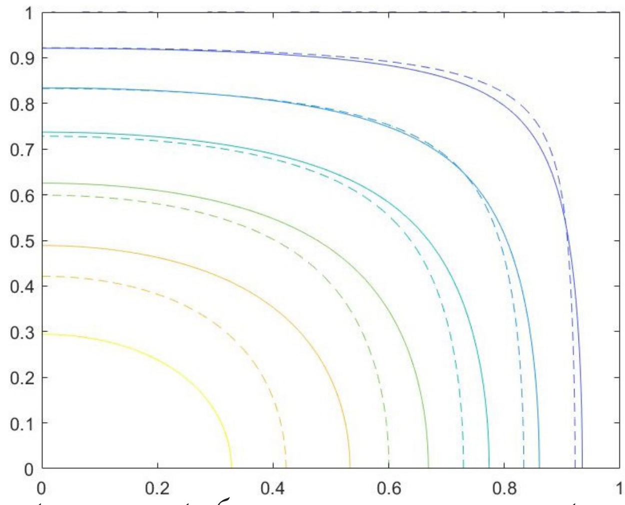



*Рис. 6. График сравнения приближенно аналитических решений в первом и втором приближениях для квадрата*

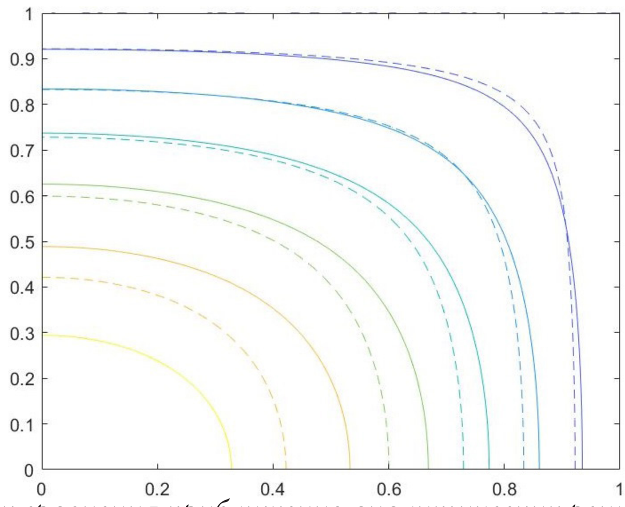



*Рис. 7. График сравнения приближенно аналитических решений в первом и втором приближениях для прямоугольника*

Сравним полученные решения с точными решениями, изложенными в «Приближенные методы высшего анализа». Из анализа результатов можно сделать вывод, что для квадрата $(d = b)$ отклонение приближенного решения от точного не превосходит 9 % в первом приближении и уже 0.4 % во втором приближении, а для прямоугольника $(d = 2b)$ — 1 % в первом приближении и 0.2 % во втором приближении.

Таким образом при повышении порядка аппроксимации значительно повышается точность приближенного решения. Для области прямоугольника точность более значительна, чем в случае квадрата. Но для квадратной области тем не менее мы получаем хорошую симметрию приближенного решения.

## 3. Результаты работы

Решена двумерная стационарная задача теплопроводности, анализ которой показывает хорошую точность данного метода и в этом случае. В работе получены аналитические формулы, определяющие зависимость температуры от координаты в двух приближениях. Показаны существенные преимущества метода теплового фронта и введения дополнительных граничных условий по отношению к классическому точному аналитическому решению. Исходя из результатов мы можем отметить некоторые явные преимущества приближенного метода уже на этом этапе: — возможность избежать трудностей при построении точного решения для столь малого безразмерного времени, заключающихся в необходимости брать порядка 3000 членов ряда, чтобы обеспечить сходимость. Из анализа результатов можно сделать вывод, что для квадрата отклонение приближенного решения от точного не превосходит 9 % в первом приближении и уже 0.4 % во втором приближении, а для прямоугольника — 1 % в первом приближении и 0.2 % во втором приближении. Таким образом при повышении порядка аппроксимации значительно повышается точность приближенного решения. Для области прямоугольника точность более значительна, чем в случае квадрата. Но для квадратной области тем не менее мы получаем хорошую симметрию приближенного решения. Полученная зависимость температуры от координаты, в отличие от точного решения позволила показать решение в виде поля изотерм.

**Литература**

1. *Юмашев М. В, Юмашева М. А, Краснова П. А.* Моделирование процесса нагрева тела при интенсивном тепловом воздействии на поверхность // Вестник Московского Университета, серия 1, Математика. Механика. – 2010. – № 4.

2. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. – Физматгиз, 1963.

3. *Боли Б., Уайнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М. : Мир, 1964.

4. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Температурные напряжения. – Москва : Наука, 1975.

5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М. :Высшая школа, 1966.

6. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.

УДК 539.3

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕЩИНЫ МАЛОГО ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАЗМЕРА В СЛОЕ

**А. О. Ватульян[2], О. В. Явруян[1,2]**

*[1]Южный федеральный университет*
*[2]Южный математический институт ВНЦ РАН*

**Аннотация.** Представлен эффективный подход к решению обратной геометрической задачи об идентификации внутренней криволинейной трещины малого относительного размера в ортотропном упругом слое. Слой находится под действием внешних нагрузок, инициирующих плоские установившиеся колебания. Рассмотрен случай криволинейной трещины. Осуществлен асимптотический анализ задачи при условии малости относительных размеров дефекта и получены упрощенные выражения для функций раскрытия трещины и волновых полей на границе слоя. Задача идентификации решена по заданным значениям полей смещений, измеренным в точках верхней границы слоя. Получены явные формулы для определения параметров дефекта. Проведены вычислительные эксперименты, приведены численные результаты восстановления параметров дефекта.
**Ключевые слова:** идентификация, трещина, упругий, ортотропный слой, установившиеся колебания, асимтотический анализ, волновые поля, амплитуда.

## Введение

Задачи о колебаниях упругих тел с внутренними дефектами давно привлекают внимание многих ученых ввиду широкого спектра проблем, в которых встречаются данные задачи — строительство, неразрушающий контроль, геофизика, сейсмология и т. д.

Стоит отметить, что популярные в промышленности ультразвуковые методы диагностики дефектов позволяют достаточно точно и быстро определить наличие и размеры дефектов в теле, однако они «бессильны» в случае дефектов малых относительных размеров, наличие которых при определенных условиях нагружения может привести к значительной потере устойчивости конструкции и, как следствие, к дальнейшему ее разрушению. При этом упрощенная модель распространения волн в теле с трещиной может оказаться весьма продуктивной при решении как прямых, так и обратных задач. Основу такой упрощенной постановки составляет асимптотический анализ проблемы. В работе проведено исследование обратной задачи идентификации местоположения и размеров внутренней криволинейной трещины в ортотропной полосе. На первом этапе в рамках асимптотического подхода с учетом малости относительного размера дефекта исследована прямая задача о построении полей смещений, в частности, на верхней границе полосы. На втором этапе построена эффективная схема последовательного определения параметров дефекта по информации о 6 амплитудных значениях полей смещений, измеренных на верхней границе полосы.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим установившиеся колебания ортотропного слоя $S$ толщины $h$, нижняя грань которого жестко защемлена, на части верхней границы приложены нагрузки $p_j(x,t) = p_j(x)e^{-i\omega t}$. Рассмотрим частный случай плоских колебаний, когда $p = (p_1, 0, p_3)$ и $u = (u_1, 0, u_3)$, $u_j = u_j(x_1, x_3)e^{-i\omega t}$. Слой ослаблен туннельной трещиной, которая в разрезе представляет собой криволинейную трещину, берега дефекта $l$ не контактируют и свободны от напряжений.

Действие трещины заменяется действием фиктивных массовых сил $f_i$, $i=1,3$, которые выражаются через скачки полей смещений на берегах трещины — функции раскрытия трещины $\chi_i$, $i=1,3$. После отделения временного множителя, задача описывается краевой задачей

$$C_{11}u_1{,}_{11}+C_{55}u_1{,}_{33}+(C_{13}+C_{55})u_3{,}_{13}+\rho\omega^2u_1+f_i=0, \tag{1.1}$$

$$C_{55}u_3{,}_{11}+C_{33}u_3{,}_{33}+(C_{13}+C_{55})u_1{,}_{13}+\rho\omega^2u_3+f_i=0,$$

$$\sigma_{11}=C_{11}u_{1,1}+C_{13}u_{3,3},\ \sigma_{33}=C_{13}u_{1,1}+C_{33}u_{3,3},\ \sigma_{13}=C_{55}(u_{1,3}+u_{3,1}),$$

$$u_i\,|_{x_3=0}=0,\quad \sigma_{i3}\,|_{x_3=h}=p_i\delta(x_1-L),\quad \sigma_{ij}n_j^{\pm}\,|_l=0,$$

$$f_1=-(c_{11}\chi_1\delta(\zeta)),_1-(c_{55}\chi_3\delta(\zeta)),_3,\quad f_3=-(c_{55}\chi_3\delta(\zeta)),_1-(c_{13}\chi_1\delta(\zeta)),_3\ \ i,j=1,3, \tag{1.2}$$

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [1].

Обратная задача состоит в идентификации параметров дефекта, с помощью которых однозначно можно идентифицировать криволинейную трещину по информации о полях смещений, измеренных на верхней границе полосы в режиме позиционного зондирования.

## 2. Решение прямой задачи

Интегральное представление полей смещений в слое имеет вид [2]

$$u_m(\xi)=u_m^s(\xi)+\int_l\sigma_{kl}^{(m)}(x,\xi)\chi_l n_k^+dS_x,\ \xi\in S,\ m,k,l=1,3. \tag{2.1}$$

В представлении (2.1) эталонное поле $u_m^s(\xi)$ характеризует поле смещения в среде без дефекта, а интегральное слагаемое, определяется наличием дефекта и несет в себе всю информацию о трещине, $\sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)$ — сингулярные решения для ортотропной среды.

Для определения компонент функции раскрытия трещины получены граничные интегральные уравнения (ГИУ), ядра которых представляют собой контурные интегралы и имеют гиперсингулярную особенность

$$\int_l K_{ji}(x,y)\chi_i(x)dl_x=F_j(y),\qquad y\in l,\ j,i=1,3. \tag{2.2}$$

В случае трещины, допускающей параметризацию конечным числом безразмерных параметров $\theta_m$, $m=1..N$, $x_j=q_j(t,\theta_m)$, $y_j=q_j(\tau,\theta_m)$, $t,\tau\in[-1,1]$, $q_1(t),q_3(t)\in C^1[-1,1]$, одним из которых является параметр $\varepsilon_1$, характеризующий относительный размер дефекта, удается выделить гиперсингулярную особенность в явном виде [3]

$$\int_{-1}^{1}\left[\varepsilon_1^{-1}\frac{G_{ji}(t,\tau)}{(t-\tau)^2}+\varepsilon_1^2K_{ji}^{(1)}(t,\tau)\right]\chi_j(t)dt=F_i(\tau),\quad \tau\in[-1,1],\ \ i,j=1,3. \tag{2.3}$$

Асимптотический анализ системы ИУ (2.3) для трещины малого относительного размера $(\varepsilon_1\to 0)$ приводит к системе ИУ с постоянными ядром и правой частью, которое имеет решения в классе ограниченных функций вида

$$\chi_j(t)=\varepsilon_1\sqrt{1-t^2}W_{0j}(\omega,\theta_m),\ \ j=1,3. \tag{2.4}$$

Функция $W_{0j}(\omega,\theta_2)$ определяется геометрическими параметрами трещины и материальными константами исследуемой среды и не приводятся в силу громоздкости соответствующих выражений.

В рамках асимптотического анализа задачи компоненты полей смещений (2.1) на верхней границе в дальней зоне представимы в форме

$$u_j(x_1,h)=u_j^s(x_1,h)+\varepsilon_1^2\sum_{n=1}^{N}A_{jn}(\omega,\theta_m)e^{-i\alpha_n x_1}+O(e^{-\varepsilon x_1}),\ \ j=1,3,\ m=1,2 \tag{2.5}$$

$\alpha_n$ — набор чисел, имеющие конечное число $N$ вещественных и счетное множество чисто мнимых значений, $N$ — количество бегущих волн в слое. Именно эти моды колебаний несут основную информацию о дефекте и их исследование представляет особый интерес.

Отметим, что амплитуды бегущих волн $A_{jn}(\theta_m)$ в (2.5) пропорциональны квадрату параметра $\varepsilon_1$, характеризующего относительный размер трещины.

### 3. Решение обратной задачи идентификации

Рассмотрим теперь схему восстановления параметров дефекта. Для определенности рассмотрим случай дефекта, который параметризуется дугой окружности

$$x_1 = R\cos(\theta_1 t + \theta_2) + x_{1c},$$
$$x_3 = R\sin(\theta_1 t + \theta_2) + x_{3c}, \quad t \in [-1,1] \tag{3.1}$$

где $R, x_c = (x_{1c}, x_{3c})$ — радиус окружности и координаты ее центра, определяющие местоположение дефекта относительно точки приложения нагрузки (глубина залегания дефекта и его удаленность); $\theta_1 = (t_2 - t_1)/2$, $\theta_2 = (t_2 + t_1)/2$, $t_1, t_2$ — углы, определяющие сектор окружности. Согласно (3.1) в качестве «асимптотического» параметра задачи можно выбрать $\varepsilon_1 = R\theta_1 / h$. В дальнейших выкладках удобнее перейти от параметров $x_c = (x_{1c}, x_{3c})$ к $\xi_c = (\xi_{1c}, \xi_{3c})$, характеризующим координаты середины трещины.

Допустим, что в качестве дополнительной информации заданы поля смещений, измеренные в двух точках верхней границы полосы $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}$ на частоте $\omega_1$:

$$\mu_i^{(j)} = u_i\,(\omega_1, x_1^{(j)}, h), \quad i = 1,3, \quad j = 1,2. \tag{3.2}$$

*1 этап восстановления.* На первом этапе удается восстановить параметры $\xi_c = (\xi_{1c}, \xi_{3c}), \theta_2$, которые характеризуют местоположение дефекта. С учетом того, что удается в выражении для амплитуд поля (2.5) выделить параметр $\varepsilon_1$, на основе заданной информации (3.1) удается построить систему несложных трансцендентных уравнений относительно соответствующих параметров, из которой определяются неизвестные значения $\xi_c, \theta_2$ (не приводится в силу громоздкости). Погрешность реконструкции соответствующих параметров во многом определяется расположением точек зондирования, рекомендуется их выбирать в точках, где значения полей смещений больше «реагируют» на изменения параметров дефекта, в расчетах выбирались точки позиционного зондирования на расстоянии $h$ и $2h$ от источника приложения нагрузки. Частоту колебания рекомендуется выбирать такой, при которой в слое имеются две и более бегущие волны.

*2 этап восстановления.* После восстановления трех параметров дефекта, определяющих местоположение дефекта, можно идентифицировать параметр $\varepsilon_1$, характеризующий размер дефекта.

Соответствующую характеристику дефекта можно реконструировать непосредственно из выражения

$$\varepsilon_1^2 = \sum_{j=1,3} \mathrm{Re}(\mu_{j\tilde{\imath}}^{(1)}) / \mathrm{Re}\left( \sum_{n=1}^{N} A_{jn}(\omega_1, \xi\ , \theta_2) e^{-i\alpha_n x_1^{(1)}} \right).$$

Проведен вычислительный эксперимент по восстановлению параметров криволинейной трещины (3.1) в слое из аустенитной стали, $h = 1$, $L = 0$ в случае, когда в полосе четыре распространяющиеся моды, точки съема данных $x_1^{(1)} = 1.05$, $x_1^{(2)} = 2.1$. Результаты приведены для трещин разного размера и местоположения (табл. 1).

### Заключение

Представлена эффективная схема реконструкции параметров криволинейной трещины в орторопном упругом слое. Предлагаемая схема опирается на асимптотический анализ прямой задачи и базируется на предположении о малости относительного размера дефекта. Удалось получить трансцендентные уравнения из которых последовательно определяются параметры дефекта. Методика апробирована для случая туннельной трещины, представляющей собой дугу окружности в разрезе. Численные результаты свидетельствуют о работоспособности предлагаемого подхода и позволяют дать практические рекомендации по месту установки датчиков съема данных и частоты возбуждающего сигнала, а также определить рабочий диапазон предлагаемого асимптотического подхода.

Таблица 1

*Результаты восстановления параметров дефекта*

| $R$ | $2\theta_1$ | $\xi_{1c}$ | | $\xi_{3c}$ | | $\theta_2(10^{-3})$ | | $\varepsilon_1 = R\theta_1(10^2)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ex | ex | ex | $\varepsilon_{\xi_{1c}}$ | ex | $\varepsilon_{\xi_{3c}}$ | ex | $\varepsilon_{\theta_2}$ | ex | $\varepsilon_{\varepsilon_1}$ |
| *заглубленная трещина* | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.015 | 0.5 | <<1 | 0.15 | <<1 | 2.1 | <<1 | 0.075 | 4 |
| *трещина среднего заглубления* | | | | | | | | | |
| 0.15 | 0.015 | 0.5 | <<1 | 0.5 | <<1 | 2.1 | <<1 | 0.09 | <<1 |
| 0.2 | 0.15 | 0.5 | 0.66 | 0.62 | <<1 | 2.2 | 0.5 | 1.5 | <<1 |
| 0.2 | 0.2 | 0.5 | 0.9 | 0.62 | 0.5 | 2.194 | 1.3 | 2 | 10 |
| *приповерхностная трещина* | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.0075 | 0.5 | <<1 | 0.9 | <<1 | 2.102 | <<1 | 0.075 | <<1 |

**ex — точные значения, $\varepsilon_{\theta_m}$ — погрешность реконструкции параметра $\theta_m$ (%)**

**Литература**

1. *Ворович И. И., Бабешко В. В.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М. : Наука, 1989. – 320 с.

2. *Ватульян А. О., Явруян О. В.* Асимптотичекий подход в задачах идентификации трещин // ПММ. – 2006. – № 4. – С. 714–724.

3. *Ватульян А. О., Явруян О. В.* Исследование обратных задач теории трещин с использованием асимптотического метода // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2018. – Т. 15. – № 2. – С. 39–46.

# МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

УДК 532.5

# К ВОПРОСУ О ПОПРАВКАХ К УРАВНЕНИЮ НАВЬЕ — СТОКСА

**С. О. Гладков, Зо Аунг**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** С помощью классического кинетического уравнения Больцмана найдены дополнительные слагаемые к правой части уравнения Навье — Стокса по длине свободного пробега молекул. Приведен подробный алгоритм вычисления поправок любого порядка по числу Кнудсена, и показано, что эти поправки должны быть пропорциональны лишь нечетным степеням числа Кнудсена. Доказано, что все поправки имеют вид $(-1)^n Kn^{2n+1}\Delta^{n+1}$, где целое число $n \geq 0$.
**Ключевые слова:** число Кнудсена, уравнение Навье — Стокса, длина свободного пробега молекул, кинетическое уравнение Больцмана.

В этом сообщении речь будет идти о вычислении дополнительных поправок к правой части уравнения Навье — Стокса в виде аддитивных слагаемых по длине свободного пробега.

Эта задача носит вполне объективный характер, который связан с тем, что в последнее время довольно модными объектами исследования становятся наночастицы, размер которых лежит в диапазоне $10^{-4} - 10^{-6}$ см.

Понятно, что когда речь заходит о размерах такого порядка, то классическое уравнение Навье — Стокса следует несколько модифицировать, поскольку в этом случае длина свободного молекул жидкости (или газа) может быть сравнима с линейным размером наночастицы.

Для решения поставленной задачи мы воспользуемся хорошо проверенным, как теорией, так и практикой, методом кинетического уравнения Больцмана, которое представим в традиционном виде [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = L(f), \tag{1}$$

где $f = f(t, \mathbf{p}, \mathbf{r})$ — искомая функция распределения, $\mathbf{v}$ — скорость молекул, $L(f)$ — интеграл столкновений.

Как это принято в теории кинетических уравнений, решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots, \tag{2}$$

где квазиравновесная функция распределения

$$f_0 = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon(p) - \mathbf{pV}}{T}}, \tag{3}$$

а нормировочный множитель

$$Z = \int \overline{f} d\Gamma = \int e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}} d\Gamma, \tag{4}$$

здесь $d\Gamma = d^3 p dV$ — элемент фазового объема, равновесная функция распределения $\overline{f} = f_0|_{\mathbf{V}=0}$, $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ — кинетическая энергия молекулы, $m$ — ее масса, а интегрирование ведется по всему импульсному пространству, элемент объема которого определяется как $d^3 p = dp_x dp_y dp_z$. $dV = dxdydz$ — элемент объема в декартовых координатах. Постоянную Больцмана $k_B$ здесь и везде далее будем полагать равной единице, вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ представляет собой скорость гидродинамического потока, которым увлекаются молекулы жидкости, функции $f_1, f_2, f_3, \ldots$ представляют собой искомые поправки к квазиравновесной функции распределения, которые нам следует найти.

Для решения поставленной задачи правую часть уравнения (1) удобно представить в виде ряда

$$L(f) \approx -\frac{f_0 + f_1 + f_2 + \ldots}{\tau_p}, \tag{5}$$

где $\tau_p$ — время между столкновениями молекул.

Прежде, чем искать поправки в (2), нам следует записать общий принцип получения уравнений движения для случая, когда температура $T \neq 0$.

Если бы температура была равна нулю, то уравнение движения легко получить из принципа сохранения полной мощности системы, аналогично тому, как это было сделано, например, в работах [2, 3], то есть, исходя из условия

$$\dot{E} + \dot{Q} = 0, \tag{6}$$

где полная энергия потока жидкости имеет вид

$$E = \frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p) + \frac{m\mathrm{V}^2}{2}\right] f d\Gamma.$$

Поэтому изменение энергии в единицу времени будет

$$\dot{E} = \frac{1}{Z}\int \varepsilon(p)\,\dot{f} d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f} d\Gamma. \tag{7}$$

а диссипативная функция

$$\dot{Q} = T\dot{S}, \tag{8}$$

где $S$ — энтропия. То есть при $T = 0$ это слагаемое попросту исчезает.

В случае же, когда $T \neq 0$ уравнение (6) не годится, и мы должны записать вместо него уравнение в виде

$$\dot{F} = \frac{d}{dt}(E - TS) = 0, \tag{9}$$

где $F = E - TS$ — свободная энергия Гиббса.

При $T = \mathrm{const}$ имеем отсюда

$$\dot{E} - \dot{Q} = 0. \tag{10}$$

Согласно, например, [4] энтропию неравновесного классического больцмановского газа можно записать в виде

$$S = -\frac{1}{Z}\int f \ln\left(\frac{f}{e}\right) d\Gamma. \tag{11}$$

Подставляя определение (11) в (8), получаем

$$\dot{Q} = -\frac{T}{Z}\int \dot{f} \ln f d\Gamma. \tag{12}$$

Подставляя теперь (7) и (12) в (10), находим

$$\frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p) + T\ln f\right]\dot{f} d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f} d\Gamma = 0. \tag{13}$$

Следуя (5), имеем

$$\dot{f} = L(f) \approx -\frac{f_0 + f_1 + f_2 + \ldots}{\tau_p}.$$

А поэтому из (13) получаем

$$\frac{1}{Z}\int\left[\varepsilon(p) + T\ln(f_0 + f_1 + f_2 + \ldots)\right]\frac{(f_0 + f_1 + f_2 + \ldots)}{\tau_p} d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\bar{f} d\Gamma = 0. \tag{14}$$

По аналогии с тем, как это было сделано в работе [5] рекуррентную формулу для определения произвольной поправки $n$-го порядка к квазиравновесной функции распределения можно представить в виде

$$f_n = \left(-1\right)^n \tau_p^n \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right]^n f_0. \tag{15}$$

Для разложения логарифма, фигурирующего в (13), можно воспользоваться следующим соотношением

$$\ln\left(1+\lambda\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k+1}\frac{\lambda^k}{k}. \tag{16}$$

Для нашего конкретного случая мы будем интересоваться только решением с точностью до $n = 2$ в формуле (15).

Поэтому имеем

$$f_1 = -\tau_p\left(\dot{f}_0 + \mathbf{v}\cdot\nabla f_0\right), \tag{17}$$

$$f_2 = \tau_p^2\left(\ddot{f}_0 + 2\mathbf{v}\cdot\nabla\dot{f}_0 + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^2 f_0\right), \tag{18}$$

где точки над функцией $f_0$ означают частные производные по времени соответствующего порядка.

Составив относительные величины $\dfrac{f_1}{f_0}$ и $\dfrac{f_2}{f_0}$ с учетом явных выражений (17), (18) и (3), после элементарных действий найдем

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\tau_p}{T}\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right), \tag{19}$$

В рамках нашей задачи выражение (19) должно быть записано с точностью до членов порядка $\mathrm{V}^2$. Поэтому согласно (3) имеем

$$f_0 = \frac{1}{Z}e^{-\frac{\varepsilon(p)-\mathbf{pV}}{T}} \approx \frac{1}{Z}e^{-\frac{\varepsilon(p)}{T}}\left(1+\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}}{T}\right) = \bar{f}\left(1+\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}}{T}\right). \tag{20}$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\tau_p}{T}\bar{f}\left(\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) + \mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\left(1+\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\right) = \\ &= \frac{\tau_p}{T}\bar{f}\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}} + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T} + \frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)^2}{T} + \mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Вполне аналогично находим, что

$$\frac{f_2}{f_0} = \frac{\tau_p^2}{T}\left[\frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2 + 2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) + \left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T} - \mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) - \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right]. \tag{22}$$

И, значит, с учетом (20) имеем

$$\begin{aligned} f_2 \approx \bar{f}\frac{\tau_p^2}{T}\Bigg[ & \frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2 + 2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) + \left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T} - \mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) - \\ & - \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k} - \left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}} + 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T}\Bigg]. \end{aligned} \tag{23}$$

Теперь с помощью (21) и (23) уравнение (14) можно записать как

$$\frac{1}{Z}\int \frac{\tau_p \overline{f}}{T}\left\{ \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}} + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T} + \frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)}{T} + \mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) + \right.$$

$$+\tau_p^2\left[ \frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2 + 2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) + \left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T} - \mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}} - 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) - \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k} - \right. \quad (24)$$

$$\left.\left. -\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}} + 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T} \right]\right\}^2 d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\overline{f}d\Gamma = 0.$$

После возведения в квадрат выражения в фигурных скобках (24), с точностью до членов порядка $\mathrm{V}^2$ получаем

$$\frac{1}{Z}\int \frac{\tau_p \overline{f}}{T}\left\{ \left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T} + \frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)}{T} + \mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) + \right.$$

$$+\tau_p\left[ \frac{\left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{V}}\right)^2 + 2\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) + \left(\mathbf{v}\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2}{T} - \left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right) - 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) - \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k} - \right.$$

$$\left.\left. -\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}} + 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{T} \right]\right\}^2 d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\overline{f}d\Gamma =$$

$$=\frac{1}{Z}\int \frac{\tau_p \overline{f}}{T}\left\{ \left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)^2 + \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\right)^2 + \tau_p^2\left[\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)^2 + 4\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\right)^2 + \left(\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)^2\right] + \right.$$

$$+2\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\left[\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right) - \tau_p\left(\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right) + 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right)\right] -$$

$$-2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)\tau_p\left[\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right) + 2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right] +$$

$$\left. 2\tau_p^2\left(\mathbf{p}\cdot\ddot{\mathbf{V}}\right)\left(2\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right) + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k}\right) + 4\tau_p^2\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{V}}\right)\right)\mathrm{v}_i\mathrm{v}_k\frac{\partial^2\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}\right)}{\partial x_i\partial x_k} \right\} d\Gamma + \frac{m}{Z}\int \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}\overline{f}d\Gamma = 0.$$

Окончательно получаем отсюда искомое уравнение

$$\dot{\mathbf{V}} = \nu\Delta\mathbf{V} - \nu^2\tau^*\Delta^2\mathbf{V}, \tag{25}$$

где кинематическая вязкость $\nu$ и время $\tau^*$ определяются формулами

$$\nu = \frac{\overline{p^4\tau_p}}{15m^3T} = \frac{1}{15m^3TZ_0}\int_0^\infty \tau_p p^6 e^{-\frac{p^2}{2mT}}dp,$$

$$\nu^2\tau^* = \frac{\overline{\tau_p^3 p^6}}{35m^5T} = \frac{1}{35m^5TZ_0}\int_0^\infty \tau_p^3 p^8 e^{-\frac{p^2}{2mT}}dp, \tag{26}$$

где для удобства введен нормировочный множитель

$$Z_0 = \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}}dp. \tag{27}$$

Добавляя в уравнение (25) член с градиентом давления, окончательно приходим к следующему обобщенному уравнению Навье — Стокса

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{V} - \nu^2\tau^*\Delta^2\mathbf{V}. \tag{28}$$

(см. также работы близкой направленности [6–10]).

В заключение работы необходимо отметить следующее.

1. С помощью кинетического уравнения Больцмана приведен подробный алгоритм вывода уравнения Навье — Стокса в виде ряда по числу Кнудсена;

2. Найдено обобщенное уравнение Навье — Стокса, учитывающее следующие поправки по числу Кнудсена, приводящие к бигармоническому оператору Лапласа в правой части основного уравнения гидродинамики;

3. Подчеркивается важная роль этого слагаемого при изучении свойств наночастиц.

## Литература


1. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. Т. 10. – М. : Наука, 1979. – 528 с.

2. *Гладков С. О.* К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // ЖТФ. – 2018. – Т. 59, В. 3. – С. 377–341.

3. *Гладков С. О., Богданова С. Б.* Хаотическая динамика взаимодействующих маятников (решение проблемы синхронизации) // Инженерная физика. – 2019. – В. 1. – С. 49–61.

4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Т. 5. – М. : Наука, 1988.

5. *Гладков С. О., Богданова С. Б.* Об аналитических решениях квазиклассического кинетического уравнения высших порядков теории возмущений по времени релаксации // Известия вузов. Физика. – 2018. – Т. 61, В. 5. – С. 28–35.

6. *Гладков С. О.* О доказательстве единственности гидродинамического решения Стокса // Известия вузов. Физика. – 2018. – Т. 61, В. 6. – С. 103–105.

7. *Gladkov S. O.* The theory of thermal conductivity and hydrodynamics of Maxwell gas, which is under the influence of an external sound wave // Solid State Communications. – 1995. – V. 94, N 9. – P. 789–791.

8. *Гладков С. О.* О конвективном движении газа в цилиндрическом объеме // Письма в ЖТФ. – 2005. – Т. 31, В. 12. – С. 71–75.

9. *Гладков С. О.* Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник МГОУ. – 2019. – В. 1. – С. 16–45.

10. *Гладков С. О.* К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости // Вестник МГОУ. – 2019. – № 3. – С. 42–67.

УДК 532.5

# К ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ БИНАРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

**С. О. Гладков, С. Ю. Побережский**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** Приводится аналитическое описание зависимости коэффициента теплопроводности неоднородных жидкостей в виде функции от концентрации и температуры. Доказано, что основным фактором, играющим главную роль в процессе теплопроводности является взаимодействие объемных молекул с поверхностными.
**Ключевые слова:** термостат, поверхностные молекулы, взаимодействие, концентрация добавочной жидкости.

В работе будут приведены некоторые аналитические и экспериментальные результаты, посвященные выяснению зависимости коэффициента теплопроводности жидких смесевых растворов $\kappa$ в виде функции от температуры $T$ и относительной концентрации $\xi = \dfrac{c}{c_{cr}}$, где $c$ — концентрация смешиваемой с однородным составом инородной добавки, $c_{cr}$ — порог перколяции [1], который часто называют также эффектом протекания.

При добавлении инородной жидкости в основной состав она может произвольным образом растекаться по всему заданному объему, но при этом образовывать некоторые кластерные соединения определенного линейного размера $L$.

Такой кластер, если ему выгодно появиться с энергетической точки зрения (вполне аналогичное явление связано, например, с образованием доменной структуры в теории ферромагнетизма), должен характеризоваться некоторым поверхностным натяжением $\alpha$, удерживающим его от распада. Поэтому становится вполне понятным, что возможны лишь два сценария образования бинарных (и более сложных) смесей, зависящих от чисто физических свойств смешиваемых жидкостей: 1. С образованием кластеров и 2. Полное перемешивание растворов.

Что касается физических свойств подобных неоднородных смесей, то они вполне понятны и легко объяснимы с точки зрения основных законов теории теплопереноса в гетерогенных структурах, подробно изложенных, например, в монографии [2]. И хотя в этой монографии отражены основные принципы теории теплопереноса не для жидкостей, а для неоднородных кристаллов, описанный в ней общий физический принцип легко может быть перенесен и на жидкие смесевые растворы.

Поскольку при описании явлений теплопереноса всегда имеет место постановка граничных условий, то ключевым моментом излагаемой ниже теории будет учет связи объемных молекул с поверхностными, которые при решении уравнения Больцмана мы будем считать равновесными. Это означает, что они должны иметь свою собственную температуру, равную температуре термостата $T_0$ и описываться равновесной функцией распределения, в отличие от объемных, которые считаются квазиравновесными, но с температурой $T \neq T_0$ (подробности ниже).

Отметим, что решение поставленной задачи с учетом феноменологически введенного нами дополнительного интеграла столкновений, связанного со взаимодействием объемных молекул с поверхностными, в известной нам литературе, посвященной классическому кинетическому уравнению Больцмана, мы не нашли.

Воспользуемся принципом аддитивности тепловых потоков для случая бинарных жидкостей, означающим выполнение равенства

$$\mathbf{q} = \sum_{i,k=1}^{2} A_{ik}(\xi)\mathbf{q}_{ki} = -\kappa\nabla T, \qquad (1)$$

где $\kappa$ — искомый коэффициент теплопроводности раствора, $\mathbf{q}_{ik} = -\kappa_{ik}\nabla T$, $A_{ik}(\xi)$ — матричная функция, зависящая от концентрации $\xi$ добавляемой жидкости.

Как было подробно показано в [2] с использованием методов квантовой теории неравновесных процессов, исходя из формулы Кубо, формула (1) позволяет привести общий коэффициент теплопроводности для случая бинарных смесей к виду

$$\kappa = (1-\xi)^2 \kappa_{00} + \xi(1-\xi)(\kappa_{01} + \kappa_{10}) + \xi^2\kappa_{11}, \qquad (2)$$

где $\kappa_{00}$ — теплопроводность основной жидкости, $\kappa_{11}$ — теплопроводность добавляемой жидкости, а коэффициенты $\kappa_{01}$ и $\kappa_{10}$ по размерностям соответствуют теплопроводности, но по своему физическому смыслу отвечают за теплоперенос на границе контакта разноименных фаз.

В том случае, если резкая граница разделения области контакта смешиваемых жидкостей отсутствует, формула (2) сильно упрощается, и ее можно представить в следующем весьма компактном виде

$$\kappa = (1-\xi)^2 \kappa_0 + \xi^2\kappa_1, \qquad (3)$$

где введены сокращенные обозначения $\kappa_0 = \kappa_{00}$ и $\kappa_1 = \kappa_{11}$, которые соответствуют обычным коэффициентам теплопроводности в основной жидкости и в добавочной.

Каждый из этих коэффициентов можно легко оценить исходя из классической теории жидкостей, воспользовавшись изотропным газокинетическим приближением коэффициента теплопроводности, аналогично тому, как это было сделано, например, в работе [4] (ср. также с монографией [6]) для коэффициентов диффузии, то есть

$$\kappa_{0,1} = \frac{\overline{n}}{3Z_{0,1}} \int \mathrm{v}^2\, \tau_{0,1}(p)\varepsilon_{0,1}(p)\frac{\partial \overline{f}_{0,1}(p)}{\partial T} d^3p, \qquad (4)$$

где энергия молекулы $\varepsilon_{0,1}(p) = \dfrac{p^2}{2m_{0,1}}$, $m_{0,1}$ — соответственно массы молекул основной жидкости и добавочной, $\overline{n}$ — средняя концентрация объемных молекул, $\tau_{0,1}(p)$ — время релаксации молекул в основной жидкости и в добавочной соответственно, $\overline{f}_{0,1}(p) = e^{-\frac{\varepsilon_{0,1}(p)}{T}}$ — максвелловская равновесная функция распределения, а $Z_{0,1} = \int \overline{f}_{0,1}(p)d^3p$ — нормировочный множитель. Постоянную Больцмана $k_B$ здесь и везде далее будем считать равной единице.

Пользуясь определением $p = m\mathrm{v}$, после перехода в сферическую систему координат по импульсам, выражение (4) можно переписать в более простом виде

$$\kappa = \frac{\overline{n}\int_0^\infty p^8\tau(p)\overline{f}(p)dp}{12m^4T^2\int_0^\infty p^2\overline{f}(p)dp}, \qquad (5)$$

где под массой $m$ следует понимать массы $m_{0,1}$.

Если воспользоваться теперь теоремой о среднем и провести несложное интегрирование по импульсам, то придем к формуле

$$\kappa = \frac{2\overline{\tau}\,\overline{n}T_0}{3m}\frac{J_2}{J_1},$$

где $J_1 = \int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$, $J_2 = \int_0^\infty x^8e^{-x^2}dx = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{32}$. Подставляя значения этих интегралов, мы приходим к окончательному ответу

$$\kappa_{0,1} = \frac{35\overline{\tau}_{0,1}\overline{n}T_0}{4m_{0,1}}, \tag{6}$$

где среднее время релаксации $\overline{\tau}$ нам предстоит вычислить с помощью несложного алгоритма, предложенного в работе [4].

Однако, в отличие от изложенного в этой работе подхода, когда речь идет не о диффузии, а о теплопроводности, физическая постановка здесь совершенно иная. Действительно, при отсутствии связи с термостатом кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения $f_p$, где $\mathbf{p}$ — классический импульс молекулы, можно представить в виде (см., к примеру [7–10])

$$\dot{f}_p = L_0\left(f_p\right), \tag{7}$$

где стоящий справа интеграл столкновений имеет классический вид [7]

$$L_0\left(f_p\right) = \overline{n}\sum_{\mathbf{p}',\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1'} \sigma\left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1\right|\left(f_{p_1}f_{p_1'} - f_p f_{p'}\right), \tag{8}$$

$\sigma$ — сечение рассеяния объемных молекул друг на друге, $\mathbf{v}$ — их скорость, связанная с импульсом обычным линейным соотношением $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, где $m$ — масса молекулы.

Как видно, уравнение (7) записано в чисто формальном представлении, не учитывающим (если речь идет о теплопроводности) связи с термостатом. Основная идея нашего подхода, как раз и базируется на учете дополнительного взаимодействия, связанного с учетом связи объемных неравновесных молекул с поверхностными молекулами жидкости, которые автоматически могут считаться термостатом. Они характеризуются равновесной функцией распределения

$$\overline{f}_p = e^{-\frac{\varepsilon_s(p)-\mu_s}{T_0}}, \tag{9}$$

где кинетическая энергия одной молекулы жидкости в поверхностном слое может быть представлена а виде

$$\varepsilon_s\left(p\right) = \frac{p^2}{2m} - \frac{z\alpha_s}{n_s\delta}, \tag{10}$$

$\mu_s$ — химический потенциал поверхностных молекул, $T_0$ — температура термостата и, напомним, что постоянная Больцмана $k_B = 1$, $\delta$ — толщина поверхностного слоя, $\alpha_s$ — поверхностное натяжение, роль которого в энергии взаимодействия (10) отводится средней потенциальной энергии взаимодействия между $z$ ближайшими друг к другу поверхностными молекулами, $n_s$ — концентрация поверхностных молекул.

Отметим, что толщина $\delta$ продиктована очевидным условием возможности ввести в рассмотрение поверхностное натяжение $\alpha_s$ [11].

Совершенно ясно, что сравнение обоих слагаемых в (11) можно проводить лишь на языке обратных времен релаксации. Если для первого слагаемого среднее время релаксации $\overline{\tau}$, а для второго — $\overline{\tau}_s$, то следует считать, что должно быть выполнено усиленное неравенство

$$\frac{1}{\overline{\tau}} \gg \frac{1}{\overline{\tau}_s}, \tag{13}$$

которое будет справедливо в рамках выполнения неравенства $\gamma = \dfrac{n_s}{\overline{n}} \ll 1.$

После всех вычислений мы приходим к такому общему результату

$$\kappa = \frac{45\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left[\frac{\left(1-\xi\right)^2}{\sigma_{0s}\sqrt{m_0}}e^{\frac{\alpha_{0s}}{n_{0s}T\delta_0}} + \frac{\xi^2}{\sigma_{1s}\sqrt{m_1}}e^{\frac{\alpha_{1s}}{n_{1s}T\delta_1}}\right]\sqrt{T} + \xi\left(1-\xi\right)\frac{\overline{n}_0 T}{m_0}\tau_{01} + \xi\left(1-\xi\right)\frac{\overline{n}_1 T}{m_1}\tau_{10}, \tag{14}$$

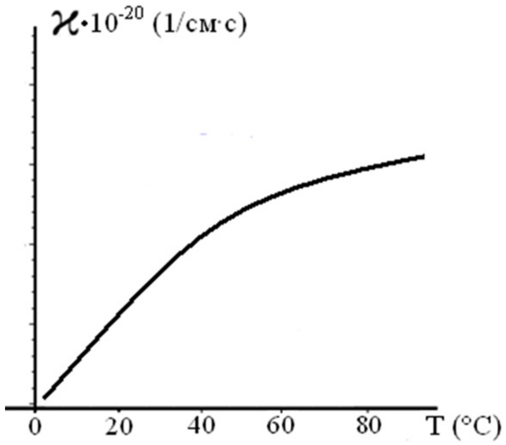



*Рис. 1. Зависимость коэффициента теплопроводности воды от температуры согласно формуле (14)*

где нижние индексы «0» и «1» у всех величин в (14) относятся соответственно к основной жидкости (индекс «0») и к добавляемой (индекс «1»). На рис. 1 показана зависимость коэффициента теплопроводности для чистой воды.

В заключении работы стоит обратить внимание на ряд результатов, которые были получены нами выше.

1. Предложена теория теплопроводности для смесевых растворов жидкостей, и аналитически найдены зависимости коэффициента теплопроводности от концентрации и температуры;

2. Рассмотрен предельный случай общей формулы (14).

**Литература**


1. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to Percolation Theory. Taylor and Fransis. London. – 1994.

2. *Гладков С. О.* Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. – М. : Наука, 1999. – 330 с.

3. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Статистическая физика. Т. 9. – М. : Наука, 2003. – 447 с.

4. *Gladkov S. O.* To the question of analytical Estimate of Evaporation Time of the Drop, Crossing Through the Heat Media. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2020. – V. 13(4). – P. 439–450.

5. *Мамонова М. В., Прудников В. В., Прудникова И. А.* Физика поверхности. Теоретические модели и экспериментальные методы. – М. : Физматлит, 2011. – 392 с.

6. *Резибуа П., Де Лернер М.* Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. – М. : Мир, 1980. – 423 с.

7. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. Т. 10. – М. : Наука, 1979. – 527 с.

8. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей и газов. – Л. : Наука, 1975. – 592 с.

9. *Chihara J.* Kinetic Theory of Collective Modes in Classical Liquids. Progress of Theoretical Physics. – 1969. – V. 41, No 2. – P. 285–295.

10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Т. 6. – М. : Наука, 1988. – 724 с.

11. *Зенгуил Э.* Физика поверхности. – М. : Мир, 1990. – 536 с.

12. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.* Спиновые волны. – М. : Наука, 1967. – 368 с.

13. *Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И.* Электронная теория металлов. – М. : Наука, 1971. – 415 с.

14. *Gladkov S. O.* The kinetics of nuclear magnetically ordered systems. Physics Reports. – 1989. – V. 182, No 4,5. – P. 211–364.

15. *Гладков С. О., Каганов М. И.* К теории релаксации ядерных спинов в ферромагнетиках // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 80, В. 4. – С. 1577–1585.

16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Т. 5. – М. : Наука, 2001. – 520 с.

УДК 532.517.4

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА ЗА СФЕРОЙ

**А. Г. Деменков[1,2], Г. Г. Черных[3,4]**

*[1]Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*
*[2]Новосибирский государственный технический университет*
*[3]Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск*
*[4]Новосибирский государственный университет*

**Аннотация.** С применением математической модели, включающей в себя осредненные уравнения движения, дифференциальные уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации, осуществлено численное моделирование эволюции закрученного турбулентного следа с ненулевыми суммарными избыточным импульсом и моментом количества движения. Вычисления выполнены до весьма больших расстояний от тела. Для небольших удалений от тела рассчитанные профили осредненных скоростей движения и интенсивности турбулентных флуктуаций продольной компоненты скорости хорошо согласуются с известными экспериментальными данными ИГИЛ СО РАН. Построена упрощенная модель течения.
**Ключевые слова:** закрученное турбулентное струйное течение в следе за сферой, полуэмпирическая модель турбулентности, численное моделирование.

## Введение

Изучение закрученных турбулентных струйных течений представляет интерес в связи с разработкой и использованием различного рода энергетических и химико-технологических устройств, при исследовании обтекания тел, в задачах гидродинамики окружающей среды и др. Хорошо известным примером закрученного турбулентного струйного течения является течение в закрученном турбулентном следе за телом вращения. Особо авторы хотели бы отметить выполненные в СО РАН работы [1, 2], в которых проведены уникальные детальные лабораторные измерения в закрученных турбулентных следах с варьируемыми суммарными избыточным импульсом и моментом количества движения. Измерения проведены до расстояний порядка 50 диаметров от тела.

Одним из вариантов течения, рассмотренного в [1], является закрученный турбулентный след за сферой с ненулевыми отрицательными суммарными избыточным импульсом и моментом количества движения. Этому варианту течения соответствует частный случай движения тела с движителем, тяга которого недостаточна для компенсации силы гидродинамического сопротивления и в потоке остается ненулевая интегральная закрутка [1]. В настоящей работе построены математические модели и представлены результаты расчетов этого течения. На относительно небольших расстояниях, на которых выполнены лабораторные измерения ИГиЛ СО РАН, рассчитанные профили продольной и трансверсальной компонент скорости, а также интенсивности турбулентных флуктуаций продольной компоненты скорости хорошо согласуются с результатами измерений. На удалениях от тела порядка 200000 и более диаметров вырождение следа становится близким к автомодельному, соответствующему дальнему незакрученному классическому турбулентному следу за буксируемым телом. Работа написана с использованием результатов авторов, изложенных в [3–7]. В этих статьях можно найти подробную библиографию. Весьма интересное исследование выполнено недавно в [8].

## 1. Постановка задачи

Численный анализ динамики турбулентного следа проводится с применением математической модели, включающей в себя систему осредненных уравнений движения, неразрывности, переноса нормальных рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации энергии турбулентности во вращательно-симметричном течении в приближении тонкого сдвигового слоя в цилиндрической системе координат $(x, r, \varphi)$; ось $x$ противоположна направлению движения тела:

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\langle u'v'\rangle+\frac{\partial}{\partial x}\int_r^\infty\frac{\left[W^2+\langle w'^2\rangle-\langle v'^2\rangle\right]}{r}dr-\frac{\partial\left(\langle u'^2\rangle-\langle v'^2\rangle\right)}{\partial x}, \tag{1}$$

$$U\frac{\partial W}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{VW}{r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\langle v'w'\rangle-\frac{\langle v'w'\rangle}{r}-\frac{\partial\langle u'w'\rangle}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}=0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}U\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial r}=-2(1-C_2)\langle u'v'\rangle\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{2}{3}\varepsilon-C_1\frac{\varepsilon}{e}\left(\langle u'^2\rangle-\frac{2}{3}e\right)+\\+\frac{2}{3}C_2P+\frac{C_s}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{re\langle v'^2\rangle}{\varepsilon}\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial r}\right),\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}U\frac{\partial\langle v'^2\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle v'^2\rangle}{\partial r}-2\frac{W}{r}\langle v'w'\rangle=2(1-C_2)\langle v'w'\rangle\frac{W}{r}-\frac{2}{3}\varepsilon-\\-C_1\frac{\varepsilon}{e}\left(\langle v'^2\rangle-\frac{2}{3}e\right)+\frac{C_s}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{re}{\varepsilon}\left(\langle v'^2\rangle\frac{\partial\langle v'2\rangle}{\partial r}-\frac{2\langle v'w'\rangle^2}{r}\right)\right]-\\-\frac{C_se}{r\varepsilon}\left[\langle v'w'\rangle\frac{\partial\langle v'w'\rangle}{\partial r}+\langle w'^2\rangle\frac{\langle v'^2\rangle-\langle w'^2\rangle}{r}\right]+\frac{2}{3}C_2P,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}U\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial r}+2\frac{W}{r}\langle v'w'\rangle=-2(1-C_2)\langle v'w'\rangle\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{2}{3}\varepsilon-\\-C_1\frac{\varepsilon}{e}\left(\langle w'^2\rangle-\frac{2}{3}e\right)+\frac{C_s}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{re}{\varepsilon}\left(\langle v'^2\rangle\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial r}+\frac{2\langle v'w'\rangle^2}{r}\right)\right]+\\+\frac{2C_se}{r\varepsilon}\left[\langle v'w'\rangle\frac{\partial\langle v'w'\rangle}{\partial r}+\langle w'^2\rangle\frac{\langle v'^2\rangle-\langle w'^2\rangle}{r}\right]+\frac{2}{3}C_2P,\end{gathered} \tag{6}$$

$$U\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+V\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}=\frac{C_\varepsilon}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{re\langle v'^2\rangle}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\right)+\frac{\varepsilon}{e}(C_{\varepsilon1}P-C_{\varepsilon2}\varepsilon). \tag{7}$$

Здесь $U, V, W, u', v', w'$ — продольная, радиальная и тангенциальная компоненты скорости осредненного и пульсационного движения; $\langle u'^2\rangle$, $\langle v'^2\rangle$, $\langle w'^2\rangle$, $\langle u'v'\rangle$, $\langle u'w'\rangle$, $\langle v'w'\rangle$ — рейнольдсовы напряжения; $e=(\langle u'^2\rangle+\langle v'^2\rangle+\langle w'^2\rangle)/2$ — энергия турбулентности; $\langle\ \rangle$ — знак осреднения. В правых частях уравнений (1), (2), (4)–(7) члены с молекулярной вязкостью отброшены в предположении малости.

Для определения касательных турбулентных напряжений применяются неравновесные алгебраические соотношения:

$$\langle u'v'\rangle = \alpha\langle v'^2\rangle\frac{\partial U}{\partial r}, \tag{8}$$

$$\langle u'w'\rangle = \alpha\left(\langle u'v'\rangle\frac{\partial W}{\partial r} + \langle v'w'\rangle\frac{\partial U}{\partial r}\right), \tag{9}$$

$$\langle v'w'\rangle = \alpha\left(\langle v'^2\rangle r\frac{\partial(W/r)}{\partial r} + \frac{W}{r}\left(\langle v'^2\rangle - \langle w'^2\rangle\right)\right), \tag{10}$$

где $\alpha = -\lambda_1 e/\varepsilon, \lambda_1 = (1-C_2)/(C_1 + P/\varepsilon - 1)$. В уравнениях (4)–(7) и соотношениях (8)–(10) величина $P$ — порождение энергии турбулентности за счет осредненного движения:

$$P = -\left(\langle u'v'\rangle\frac{\partial U}{\partial r} + \langle v'w'\rangle r\frac{\partial(W/r)}{\partial r} + \langle u'w'\rangle\frac{\partial W}{\partial x} + \langle u'^2\rangle\frac{\partial U}{\partial x} + \langle v'^2\rangle\frac{\partial V}{\partial r} + \langle w'^2\rangle\frac{V}{r}\right);$$

$C_s$, $C_\varepsilon$, $C_1$, $C_2$, $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ — известные эмпирические постоянные. Их величины полагались равными 0.22, 0.17, 2.2, 0.55, 1.45, 1.92 соответственно.

Начальные поперечные распределения осредненных продольной и тангенциальной компонент скорости, скорости диссипации и нормальных рейнольдсовых напряжений $U, W, \varepsilon, \langle u_i'u_i'\rangle$ $(i = 1,2,3)$ задавались при $x/D = 7$ исходя из лабораторных экспериментов [1]. Опыты проведены при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = U_0 D/\nu = 26000$, где $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости, $U_0$ — скорость невозмущенной жидкости; $D$ — диаметр тела.

При $r \to \infty$ ставились условия невозмущенного потока; при $r = 0$ — условия симметрии для $U$, $\langle u_i'u_i'\rangle, \varepsilon$ и антисимметрии для $V, W$:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial\langle u_i'u_i'\rangle}{\partial r} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial r} = V = W = 0.$$

Следствием уравнений математической модели, начальных и граничных условий в предположении достаточно быстрого убывания искомых функций для рассматриваемого течения являются следующие законы сохранения суммарных избыточного импульса и момента количества движения:

$$J(x) = 2\pi\rho_0\int_0^\infty\left(UU_1 - \int_r^\infty\frac{[W^2 + \langle w'^2\rangle - \langle v'^2\rangle]}{r'}dr' + \langle u'^2\rangle - \langle v'^2\rangle\right)rdr = J_0 \neq 0, \tag{11}$$

$$M(x) = 2\pi\rho_0\int_0^\infty(UW + \langle u'w'\rangle)r^2dr = M_0 \neq 0. \tag{12}$$

Обозначения стандартные; $U_1 = U - U_0$ — дефект продольной компоненты скорости; $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность жидкости. Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением в качестве характерной скорости величины скорости невозмущенного потока $U_0$ и характерной длины $D$ (диаметра тела). Подробности построения и численной реализации математической модели, а также результаты детального её тестирования приведены в [2, 3].

Будем называть математическую модель (1)–(10) математической Моделью 1. Наряду с ней рассматривалась также упрощенная Модель 2, которая отличалась от Модели 1 введением приближения дальнего следа и заменой уравнений переноса нормальных рейнольдсовых напряжений ($\langle u'^2\rangle = \langle v'^2\rangle = \langle w'^2\rangle = \frac{2}{3}e$) одним уравнением баланса энергии турбулентности:

$$U_0\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rK_U\frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x}\int_r^\infty\frac{W^2}{r'}dr', \tag{13}$$

$$U_0\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3K_W\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)\right], \tag{14}$$

$$U_0\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rK_e\frac{\partial e}{\partial r} + P_S - \varepsilon, \tag{15}$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon P_S}{e} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \tag{16}$$

Здесь $K_U = K_W = \frac{2}{3} \frac{1 - C_2}{C_1 + {P_S}/{\varepsilon} - 1} \frac{e^2}{\varepsilon}$, $K_e = 0.147 \frac{e^2}{\varepsilon}$, $K_\varepsilon = 0.113 \frac{e^2}{\varepsilon}$, $P_S = P_U + P_W$, $P_U = K_U \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2$, $P_W = K_U r^2 \left( \frac{\partial \left( {W}/{r} \right)}{\partial r} \right)^2$. Законы сохранения (11)–(12) при этом также упрощаются: сомножитель $U$ заменяется на $U_0$, разности нормальных напряжений полагаются равными нулю.

## 2. Результаты расчетов

Рассчитанные с использованием Модели 1 обезразмеренные распределения осредненных дефекта продольной и вращательной компонент скорости и интенсивностей турбулентных флуктуаций продольной компоненты скорости (сплошные линии) в сопоставлении с экспериментальными данными представлены на рис. 1. Можно видеть хорошее согласие рассчитанных и измеренных величин. Пунктирными линиями отмечены расчеты по упрощенной математической Модели 2. Они также близки к экспериментальным данным. Видно, что с ростом расстояния от тела расчеты по Моделям 1, 2 сближаются.

Рис. 2 показывает изменение в зависимости от расстояния от тела рассчитанных обезразмеренных характерных масшабов турбулентности. На этом рисунке $|U_{10}| = |U_1(0,x)|$ — модуль осевого значения дефекта продольной компоненты скорости; $|W|_{\mathrm{m}}$ — максимальные в данном сечении следа значения модуля окружной компоненты скорости; $e_0$ — величины осевых значений кинетической энергии турбулентных возмущений; $L$ — характерный масштаб ширины следа, определяемый из условия $e(L,x) = 0.5e(0,x)$; $\mathrm{R}_\lambda = \sqrt{(2/3)e_0}\,\lambda / \nu$ — осевое значение турбулентного числа Рейнольдса ($\lambda = \sqrt{10 e_0 \nu / \varepsilon_0}$ —тейлоровский микромасштаб течения). Значками обозначены экспериментальные данные [1]. Вычисления выполнены для весьма больших расстояний от тела. Несмотря на относительно простую постановку задачи, являющейся одномерной нестационарной (переменная $x$ играет роль времени), с целью упрощения процедуры численного моделирования расчеты на относительно небольших расстояниях от тела $\left( x/D \le 3000 \right)$ проводились на основе Модели 1, а далее — с использованием рассчитанных по Модели 1 профилей в качестве начальных условий для Модели 2 при $x/D = 1000$. На интервале $x/D \in (1000, 3000)$ решения по Моделям 1, 2 практически совпали. По-видимому, Модель 2 может использоваться с гораздо меньших расстояний от тела.

Анализ приведенных на рис. 2 результатов расчетов позволяет сделать вывод о близости законов вырождения турбулентного следа на расстояниях порядка 200000 диаметров от тела и более к законам автомодельного вырождения классического незакрученного турбулентного следа за телом вращения. Подобное поведение следа является следствием более быстрого убывания тангенциальной компоненты скорости и, следовательно, величин порождений энергии турбулентности за счет градиентов осредненного движения.

С целью проверки высказанного предположения в ходе расчетов анализировались величины:

$$P_U(x) = -\int_0^\infty \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} r dr, \quad P_W(x) = -\int_0^\infty \langle v'w' \rangle \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) r^2 dr,$$

$$E_U(x) = \int_0^\infty \frac{U_1^2}{2} r dr, \quad E_W(x) = \int_0^\infty \frac{W^2}{2} r dr.$$

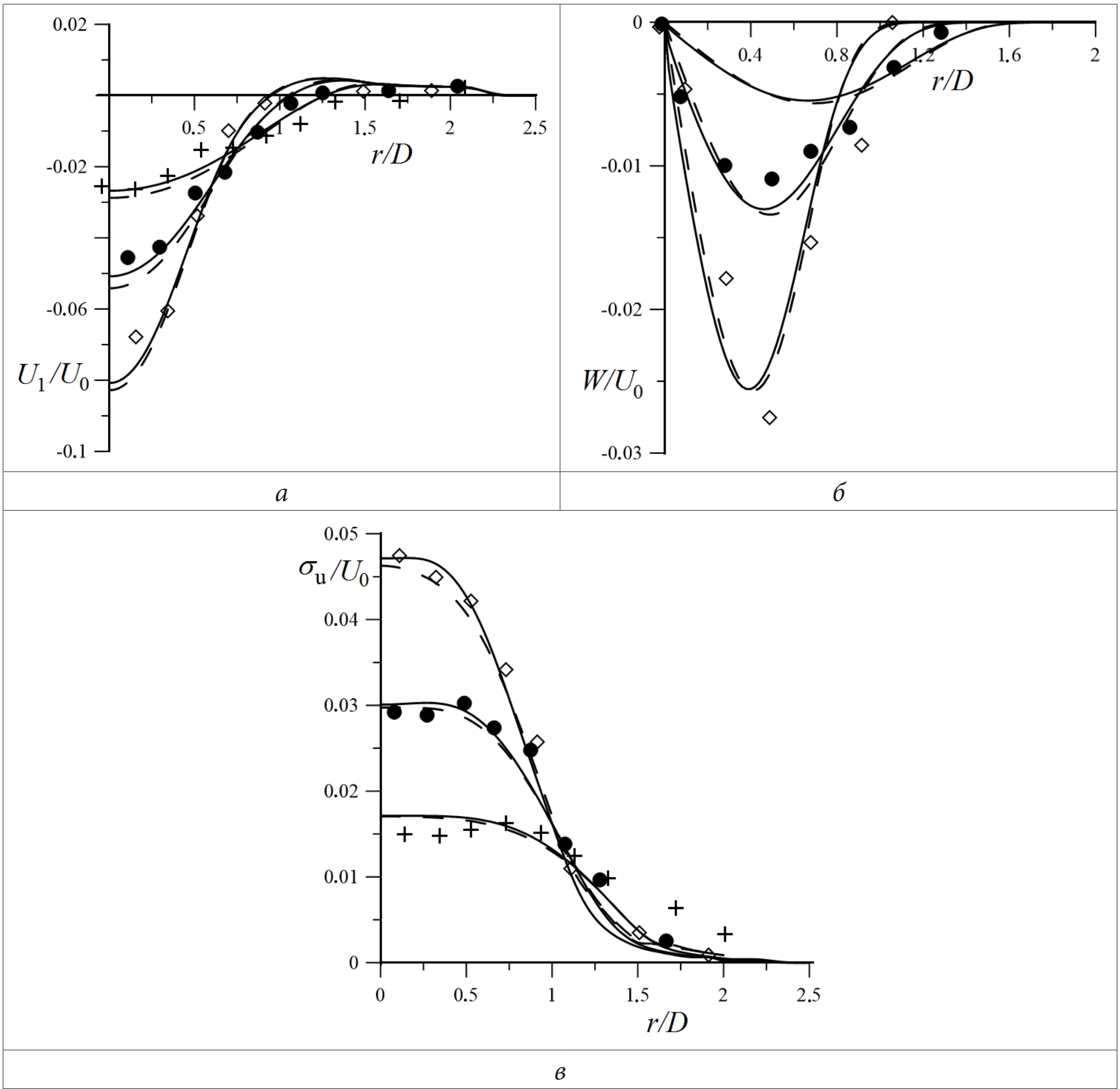



*Рис. 1. Сопоставление рассчитанных профилей дефекта осредненой продольной компоненты скорости $U_1$ (а), тангенциальной компонеты скорости $W$ (б) и интенсивности флуктуации продольной компоненты скорости $\sigma_u = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ (в) с экспериментальными данными [1]. Эксперименты: $x/D = 10; 20; 50$*

Первые две интегральные величины характеризуют порождения за счет градиентов осредненных компонент скорости, две другие величины характеризуют части кинетической энергии осредненного движения, обусловленные дефектом продольной компоненты скорости и окружной компонентой скорости. Для получения размерных интегральных значений порождений и энергий достаточно умножить эти величины на сомножитель $2\pi\rho_0 U_0^2 D^2$. На больших расстояниях величины $P_U$ и $E_U$ оказались существенно большими в сравнении с $P_W$ и $E_W$. Изменение величин $P_U$, $P_W$, $E_U$, $E_W$ объясняет поведение решения на столь больших расстояниях от тела. Вкладом величины $P_W$ в уравнение баланса энергии турбулентности (15) можно пренебречь; роль интегрального слагаемого в уравнении (13) несущественна и система уравнений (13), (15), (16) описывает классический незакрученный турбулентный след за телом вращения.

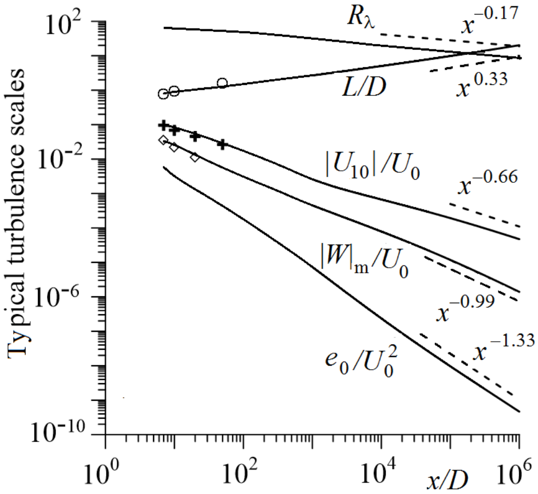



*Рис. 2. Изменение обезразмеренных характерных масштабов турбулентности в зависимости от расстояния от тела*

Обсуждаемое выше поведение рассчитанных характерных масштабов турбулентности в следе на очень больших расстояниях от тела согласуется с оценками [9]. Автомодельного решения в рассмотренном варианте ненулевых суммарного избыточного импульса и момента количества движения нет. Этот вопрос на физическом уровне строгости обсуждался в [9]. Теоретико-групповая интерпретация приведена в [7]. Результаты численных экспериментов согласуются с такими представлениями.

Рассчитанные нормированные профили энергии турбулентности и осредненных компо-

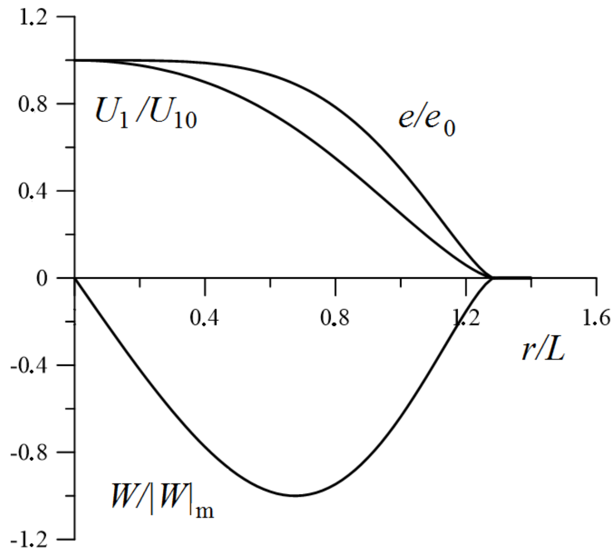



*Рис. 3. Нормированные профили дефекта продольной компоненты скорости, тангенциальной компоненты скорости и энергии турбулентности*

нент скорости, соответствующие большим расстояниям от тела, приведены на рис. 3.

Обращает на себя внимание тот факт, что несмотря на весьма дальние расстояния от тела, течение в следе характеризуется достаточно большими значениями турбулентного числа Рейнольдса $R_\lambda = \sqrt{(2/3)e_0}\,\lambda/\nu$: в расчетах оно варьировалось в пределах от 69 при $x/D = 7$ до 8.8 при $x/D = 5\times10^5$. Отметим, что в [10] при численном моделировании вырождения однородной изотропной турбулентности при условии $R_\lambda \approx 10$ получены законы вырождения, близкие к законам вырождения развитой турбулентности.

## Заключение

Выполнено численное моделирование закрученного турбулентного следа за сферой с ненулевыми суммарными избыточным импульсом и моментом количества движения. На относительно небольших расстояниях профили продольной и трансверсальной компонент скорости, а также интенсивности турбулентных флуктуаций продольной компоненты скорости хорошо согласуются с результатами измерений. На удалениях от тела порядка 200000 и более диаметров вырождение следа становится близким к автомодельному, соответствующему дальнему незакрученному турбулентному следу за буксируемым телом.

## Благодарности

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00332.

## Литература

1. *Kostomakha V. A., Lesnova N. V.* Turbulent swirling wake behind a sphere with complete or partial drag compensation // J. of Appl. Mech. and Tech. Phys. – 1995. – V. 36, No.2. – P. 226–233.

2. *Gavrilov N. V., Demenkov A. G., Kostomakha V. A., Chernykh G. G.* Experimental and numerical modelling of turbulent wake behind self-propelled body // J. of Appl. Mech. and Tech. Phys. – 2000. – V. 41, No. 4. – P. 619–627.

3. *Chernykh G. G., Demenkov A. G., Kostomakha V. A.* Swirling turbulent wake behind a self-propelled body // International Journal of Computational Fluid Dynamics. – 2005. – V. 19, No 5. – P. 399–408.

4. *Деменков А. Г., Черных Г. Г.* Численное моделирование вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом // Теплофизика и аэромеханика. — 2016. — Т. 23, № 5. – С. 693–702.

5. *Деменков А. Г., Черных Г. Г.* Автомодельное вырождение безымпульсного закрученного турбулентного следа // Теплофизика и аэромеханика. – 2017. – Т. 24, № 6. – С. 891–896.

6. *Chernykh G. G., Demenkov A. G.* Dynamics of a swirling turbulent wake past a sphere // Journal of Engineering Thermophysics. – 2018. – V. 27, Iss. 6. – P. 319–326.

7. *Chernykh G. G., Demenkov A. G., Kaptsov O. V., Schmidt A. V.* On mathematical modeling of swirling turbulent wakes with varied total excess momentum and angular momentum // Journal of Engineering Thermophysics. – 2020. – V.29, Iss. 2. – P. 222–233.

8. *Сухоруков А. Л., Чернышев И. А.* Определение характеристик водометного движителя и параметров гидродинамического следа за подводным объектом на основе методов вычислительной гидродинамики // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. –2020. – Т. 13, № 1. – С. 56–72.

9. *Reynolds A. J.* Similarity in swirling wakes and jets //J. Fluid Mech. – 1962. – V. 15, No. 2. – P. 241–243.

10. *Chernykh G. G., Korobitsina Z. L., Kostomakha V. A.* Numerical simulation of isotropic turbulence dynamics // International Journal of Computational Fluid Dynamics. – 1998. – V. 10, No. 2. – P. 173–182.

УДК 532.517.3

# АНАЛИЗ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ФОНОМ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ

**В. Н. Колодежнов**

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»*

**Аннотация.** Ранее была предложена реологическая модель жидкости с пороговым подключением фактора поперечной вязкости. Используя такую модель, с привлечением известных экспериментальных данных были обоснованы условия, накладываемые на соответствующие безразмерные комплексы, при выполнении которых в некоторой точке области течения малая окрестность этой точки начинает выступать в качестве инициатора ламинарно-турбулентного перехода. На основе этого подхода проведен анализ плоского течения Куэтта с начальным периодическим фоном возмущения поля скорости на предмет прогнозирования перехода к турбулентности. Получено значение для критического числа Рейнольдса, которое находится в удовлетворительном согласии с известными экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** течение Куэтта, ламинарно-турбулентный переход, критическое число Рейнольдса.

## Введение

В настоящее время основной подход к прогнозированию начала ламинарно-турбулентного перехода базируется на гидродинамической теории устойчивости и предполагает наложение на изначально ламинарное течение периодического фона возмущений скорости и давления. При этом прогнозирование начала перехода сводится к анализу условий, при выполнении которых амплитуды таких возмущений или кинетическая энергия возмущений будут в дальнейшем неограниченно возрастать с течением времени [1–5]. Что же касается «механизма» происхождения собственно пульсационного фона, то, как правило, этот вопрос не обсуждается.

Следует отметить, что инициированию турбулентности способствует большое число самых различных факторов, к числу которых можно отнести существование начальных пульсаций или возмущений потока на входе в рассматриваемую область течения [6, 7], наличие шероховатости на жестких границах области течения [8], флюктуации плотности жидкости [9], акустические возмущения [10–12].

Одна из особенностей всех зарождающихся турбулентных течений заключается в формировании на начальной стадии составляющих скорости, поперечных к ранее существовавшим линиям тока основного ламинарного течения. При этом, известные экспериментальные данные указывают на то, что турбулентность существует не на всех режимах течения, а возникает «порогово» при превышении каким-либо параметром, характеризующим степень «интенсивности» течения, некоторого критического уровня.

Отметим еще одно обстоятельство, также касающееся «генерирования» поперечных составляющих скорости. Рассмотрение краевых задач об установившемся течении в прямолинейных каналах различного поперечного сечения для жидкостей, реология которых предполагает учет поперечной вязкости, приводит к решениям, демонстрирующим наличие вторичных течений [13]. Эти течения характеризуются поперечными составляющими скорости по отношению к линиям тока, которые могли бы быть получены при решении тех же краевых задач, но без учета поперечной вязкости.

Опираясь на эти результаты, в [14] был предложен подход к описанию инициирования ламинарно-турбулентного перехода, который базируется на гипотезе о пороговом «подключении» фактора поперечной вязкости.

Эта гипотеза была реализована в рамках соответствующей реологической модели, в которой было заложено существование порогового значения модуля второго инварианта тензора скоростей деформаций, выше уровня которого происходит «подключение» фактора поперечной вязкости и, соответственно, «генерирование» поперечных составляющих скорости по отношению к линиям тока основного ламинарного течения. При этом принималась во внимание возможность и их неограниченного возрастания. Такую ситуацию предлагалось интерпретировать, как начало процесса ламинарно-турбулентного перехода. Если же модуль второго инварианта не превышает заложенного в реологической модели порогового уровня, поперечная вязкость не проявляет себя и поведение жидкости описывается классической ньютоновской моделью. При этом предполагается, что «генерирование» поперечных составляющих скорости не происходит.

В рамках такого подхода по результатам обработки известных экспериментальных данных были предложены эмпирическое условие «генерирования» поперечных составляющих скорости (по отношению к исходным ламинарным линиям тока)

$$K_2(\bar{X}) > K_{2G}(\bar{X}) = k_0 + \frac{k_1}{K_3(\bar{X}) - k_2}, \tag{1}$$

а также условие неограниченного возрастания «генерируемых» поперечных составляющих скорости

$$\max_{\bar{X}\in G}\left\{ K_1(\bar{X})\right\} > q_0 \cdot \left[ K_3(\bar{X}) \right]^{q_1}. \tag{2}$$

где $G$ — пространственная зона внутри области течения жидкости, в которой выполняется условие (1) «генерирования» поперечных составляющих скорости; $k_0$, $k_1$, $k_2$, $q_0$, $q_1$ представляют собой определенные на основе обработки известных экспериментальных данных безразмерные эмпирические параметры, числовые значения которых приводятся в [15]; $K_1$, $K_2$, $K_3$ — безразмерные комплексы, представляющие собой функции координат рассматриваемой пространственной точки $\bar{X}$ и определяемые исключительно через инвариантные величины посредством следующих соотношений

$$K_1 = \frac{E_s}{D_s}; \quad K_2 = \frac{\rho^2 \cdot U_s^2 \cdot \left|I_{2s}\right|}{E_s^2}; \quad K_3 = \frac{\rho^2 \cdot U_s^3}{\mu \cdot E_s}; \tag{3}$$

$$\vec{E} = grad\left\{ P + \frac{\rho \cdot U^2}{2} \right\}; \quad \vec{D} = grad\left\{ 2 \cdot \mu \cdot \sqrt{\left|I_2\right|} \right\},$$

В этих соотношениях приняты следующие обозначения: $P$ — давление; $U$ — модуль вектора скорости жидкости; $\rho$, $\mu$ — плотность и динамическая вязкость жидкости, соответственно; $I_2$ — второй инвариант тензора скоростей деформаций; $E$, $D$ — модули векторов $\bar{E}$, $\bar{D}$, соответственно. При этом здесь нижний индекс $s$ указывает на то, что соответствующие функции были вычислены в рассматриваемой точке $\bar{X}$.

Иначе говоря, в рамках предлагаемого подхода предполагается, что в случае одновременного выполнения условий (1), (2) в некоторой точке $\bar{X}$ области течения, сама эта точка и ее малая окрестность начинают выступать в качестве инициатора ламинарно-турбулентного перехода.

Одним из наиболее простых примеров сдвигового течения является течение Куэтта в плоском канале с одной подвижной стенкой. При этом профиль скорости имеет наиболее простой вид и описывается линейной функцией.

Ламинарно-турбулентный переход для течения Куэтта в плоском канале в качестве тестовой задачи неоднократно и подробно исследовался на основе подходов гидродинамической теории устойчивости. Однако анализ такой, казалось бы, весьма простой схемы течения на предмет начала ламинарно-турбулентного перехода оказался далеко не тривиальным. Сложность и особую ситуацию при рассмотрении ламинарно-турбулентного перехода с позиций устойчивости или неустойчивости для течения Куэтта в плоском канале отмечали еще классики гидродинамики Рэлей и Ламб. Библиография и обзор по исследованию устойчивости течения Куэтта приводятся в [2]. В частности, основной вывод, как отмечается в [2] со ссылкой на полученные в [16–20] теоретические результаты, заключается в том, что течение Куэтта является устойчивым по отношению к малым возмущениям. Вместе с тем известные экспериментальные данные наглядно демонстрируют возможность развития турбулентности для течений такого рода [21–24].

Анализ начала ламинарно-турбулентного перехода для плоского одномерного течения Куэтта был также рассмотрен в [25]. Исходя из необходимости выполнения условий (1), (2) было показано, что для такого течения существует пороговое значение числа Рейнольдса, выше уровня которого имеет место формирование ламинарно-турбулентного перехода.

Используя предложенный в [14] подход, в данной статье в развитие результатов, полученных в [25], проводится анализ течения Куэтта в плоском канале с начальным периодическим фоном возмущения поля скорости на предмет прогнозирования начала ламинарно-турбулентного перехода.

## 1. Начальное состояние поля скорости в канале и основные безразмерные комплексы для характеристики начала ламинарно-турбулентного перехода

Рассмотрим плоское течение Куэтта с периодическим фоном возмущения поля скорости, для которого в традиционно выбранной системе координат $O'xy$ (рис. 1) распределение «основной», продольной (без учета фона возмущений) составляющей скорости описывается линейной зависимостью вида

$$V(y) = V_W \cdot y'; \quad y' = \frac{y}{h}, \tag{4}$$

где $y$ — поперечная координата, отсчитываемая от неподвижной стенки канала; $h$ — ширина плоского канала; $V_W$ — скорость подвижной стенки канала.

Выберем в канале некоторую пространственную точку $O(x_0, y_0)$ и свяжем с ней, как с новым началом отсчета еще одну, локальную, систему координат $O x_1 x_2$.

Пусть к некоторому моменту времени, который далее условно принимается в качестве начального, в канале сформировалось плоское течение с наложенным на него периодическим фоном возмущения поля скорости. Предположим, что компоненты $U_1$ и $U_2$ вектора скорости в локальной декартовой системе координат в точке $M$, выбранной в малой окрестности рассматриваемой точки $O$, в размерной форме записи описываются следующими составляющими

$$U_1 = V + u_1 = V + u; \qquad U_2 = u_2 = -\delta \cdot u; \tag{5}$$

$$V = V(x_{2M}) = V_W \cdot \left( \frac{y_0 + x_{2M}}{h} \right);$$

$$u_1 = u = u(x_{1M}, x_{2M}) = U_A \cdot \sin\left(\alpha_1 \cdot x_{1M} + \alpha_2 \cdot x_{2M}\right);$$

$$\alpha_1 = \frac{2\cdot\pi}{\lambda_1}; \quad \alpha_2 = \frac{2\cdot\pi}{\lambda_2}; \quad \delta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

где $V(x_{2M})$ — продольная составляющая скорости потока жидкости, представленная с учетом (4) в виде функции поперечной координаты $x_{2M}$ в локальной системе отсчета; $u_1, u_2$ — составляющие фона возмущения поля скорости; $u(x_{1M}, x_{2M})$ — периодическая функция, определяющая составляющие фона возмущения поля скорости в локальной системе координат; $U_A$ — амплитуда периодического фона возмущений; $\lambda_1$, $\lambda_2$ — длины волн периодических составляющих фона возмущений в продольном и поперечном направлениях, соответственно.

Заметим, что компоненты вектора скорости (5) тождественно удовлетворяют условию неразрывности. При этом особо отметим, что они определяют составляющие скорости в некоторой произвольной пространственной точке $M(x_{1M}, x_{2M})$, расположенной в малой окрестности рассматриваемой точки $O$, всего лишь в начальный момент времени.

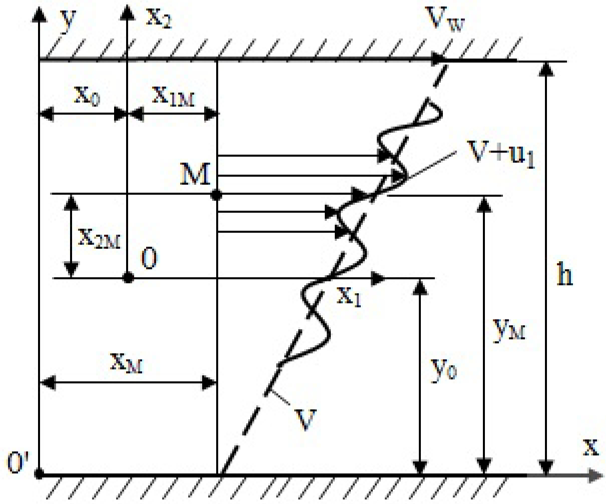



*Рис. 1. Схема задачи о течении Куэтта с периодическим фоном возмущений поля скорости*

Начальная стадия эволюции течения в окрестности точки $O$ из рассматриваемого стартового состояния (5) будет определяться безразмерными комплексами (3). Эти комплексы при вычислении с учетом (5) соответствующих функций в точке $O$ (начале локальной системы координат) при $x_{1M} = 0$ и $x_{2M} = 0$. могут быть в итоге преобразованы к виду

$$K_1 \to \infty; \tag{6}$$

$$K_2 = \frac{4 \cdot \delta^2 \cdot K_{10}^2 + \left[ \left(1+\delta^2\right) + \left(1-\delta^2\right) \cdot K_{10} \right]^2}{4 \cdot (1+\delta^2) \cdot (1+K_{10})^2}; \; K_3 = \frac{\mathrm{Re} \cdot y_0'^2}{(1+K_{10})}. \tag{7}$$

В последних соотношениях для краткости записи введены следующие безразмерные параметры

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot V_W \cdot h}{\mu}; \; K_{10} = \frac{\alpha_2 \cdot h \cdot U_A \cdot (1+\delta^2)}{V_W}; \; \lambda_2' = \frac{\lambda_2}{h}.$$

В (7) безразмерная координата

$$y_0' = \frac{y_0}{h};$$

представляет собой параметр, определяющий выбор в области течения положения точки $O$, рассматриваемой в качестве потенциального инициатора начала ламинарно-турбулентного перехода.

Проведем теперь с учетом (6), (7) анализ возможных вариантов развития гидродинамического процесса в окрестности рассматриваемой точки $O$ области течения из стартового состояния (5) с позиции выполнения условий (1), (2).

## 2. Анализ условий начала ламинарно-турбулентного перехода

Прежде всего, отметим, что результат (6) предполагает заведомое выполнение условия (2) неограниченного возрастания «генерируемых» поперечных составляющих скорости по отношению к линиям тока исходного ламинарного течения. Последнее обстоятельство существенно упрощает анализ для рассматриваемой схемы течения, поскольку условие начала ламинарно-турбулентного перехода фактически сводится к выполнению лишь одного неравенства (1), которое означает возможность «генерирования» поперечных составляющих скорости.

Анализ выполнения условия (1) проведем на примере следующего достаточно простого частного случая, когда $\delta = 1$ и рассматриваемая точка в области течения располагается на подвижной стенке канала $(y_0' = 1)$.

Для такого частного случая основные безразмерные комплексы, которые фигурируют в (1), с учетом (7) принимают вид

$$K_2 = K_2(K_{10}) = \frac{(1+K_{10}^2)}{4\cdot(1+K_{10})^2};\; K_3 = K_3(\mathrm{Re},\, K_{10}) = \frac{\mathrm{Re}}{(1+K_{10})}; \tag{8}$$

$$K_{2G} = K_{2G}(\mathrm{Re}, K_{10}) = k_0 + \frac{k_1}{K_3(\mathrm{Re}, K_{10}) - k_2}; \tag{9}$$

Здесь, естественно, предполагается, что параметры течения $\mathrm{Re}$ и $K_{10}$ должны обеспечивать выполнение условия

$$K_3(\mathrm{Re}, K_{10}) > k_2, \tag{10}$$

которое сводится к следующему ограничению на возможные значения этих параметров

$$K_{10} < K_{10,\lim} = \frac{\mathrm{Re}}{k_2} - 1;$$

где $K_{10,\lim}$ — предельно допустимое (наибольшее) для данного $\mathrm{Re}$ значение параметра $K_{10}$, при котором допустимо исполнение (10), а, следовательно, и корректное использование условия (1).

Пример графической интерпретации выполнения условия (1) дают графики функций (8) и (9), представленные на рис. 2. Анализ их взаиморасположения в принятом на этом рисунке масштабе указывает на то, что условие (1) не выполняется. Это означает, что «генерирование» поперечных составляющих скорости для рассматриваемого начального поля скорости в окрестности подвижной стенки канала $(y_0' = 1)$ не происходит и, соответственно, не выполняется необходимое условие начала ламинарно-турбулентный перехода.

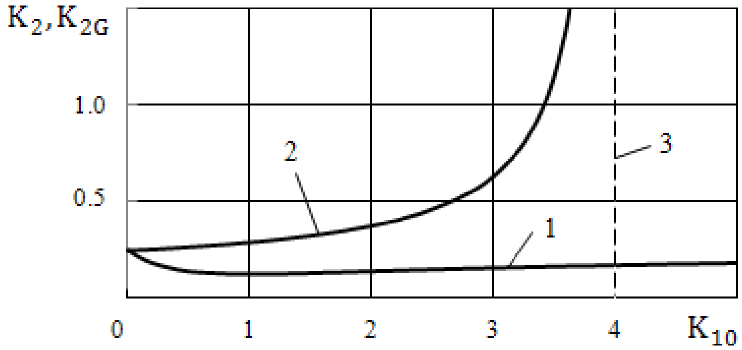



*Рис. 2. Взаиморасположение графиков функций (8) и (9) при следующих значениях основных параметров* $\mathrm{Re} = 420$; $\delta = 1$ *с точки зрения возможности выполнения (1) и, следовательно, «генерирования» поперечных составляющих скорости в окрестности подвижной стенки канала* $(y_0' = 1)$ *для плоского течения Куэтта с фоном возмущения скорости. 1 —* $K_2(K_{10})$; *2 —* $K_{2G}(K_{10})$; *3 — вертикальная асимптота* $K_{10} = K_{10,\lim} = 3.999$

Такой предварительный вывод находится в хорошем согласии с аналитическими результатами исследований из работ [16–20], которые указывают на гидродинамическую устойчивость течения Куэтта. При этом заметим, что известные экспериментальные данные, как об этом говорилось уже выше в обзорной части, наоборот, демонстрируют возможность зарождения турбулентности для такого течения.

Однако более подробное рассмотрение взаиморасположения графиков функций (8) и (9) в малой окрестности точки $K_{10} = 0$ приводит к несколько другим выводам. В качестве примера на рис. 3 в увеличенном масштабе представлены фрагменты графиков этих функций для различных значений числа Рейнольдса.

Анализируя данные, представленные на этом рис. 3, можно проследить характер влияния числа Рейнольдса на зарождение ламинарно-турбулентного перехода.

При достаточно небольших значениях числа Рейнольдса ( рис. 3a) условие (1) не выполняется («генерирование» поперечных составляющих скорости не происходит) и, несмотря на выполнение с учетом (6) условия (2) для безразмерного комплекса $K_1$, течение Куэтта в плоском канале остается ламинарным.

По мере увеличения числа Рейнольдса графики функций (8) и (9) сближаются и примерно при $\mathrm{Re} \approx 380$ они стыкуются в точке $K_{10} = 0$ (рис. 3b).

Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса (рис. 3c) обеспечивает уже выполнение условия (1). При этом «генерируемые» поперечные составляющие скорости в силу выполнения с учетом (6) условия (2) сразу же будут инициировать начало ламинарно-турбулентного перехода.

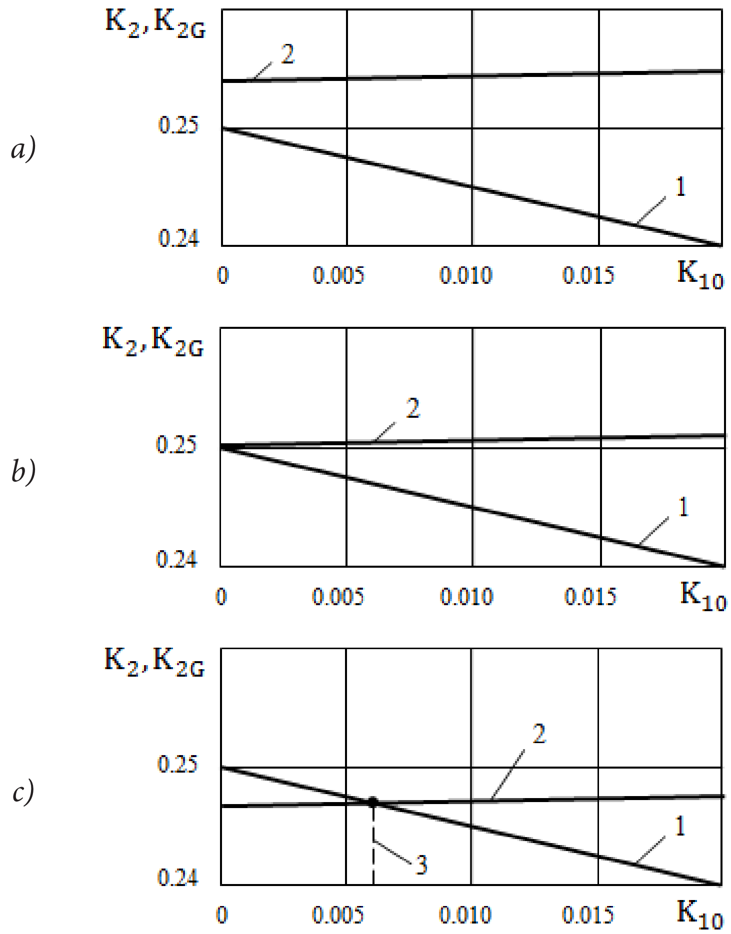



*Рис. 3. Графическая интерпретация выполнения условия (1) «генерирования» поперечной составляющей скорости для достаточно малых значений параметра $K_{10}$ при $\delta = 1$; $y'_{10} = 1$; $\mathrm{Re} = 340$ (a); 380 (b): 420(c). 1 — $K_2(K_{10})$; 2 — $K_{2G}(K_{10})$; 3 — $K_{10} = K_{10,T}$*

Полученное пороговое значение числа Рейнодьдса $\mathrm{Re}_T \approx 380$ для начала перехода находится в удовлетворительном согласии с известными экспериментальными данными. Для сравнения приведем здесь некоторые экспериментальные значения критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{T,\exp} = 280$ [21]; 325 [24]; 360 [23]; 370 [22, 26].

Из рассмотрения взаиморасположения графиков, представленных на рис. 3с, следует, что при превышении числом Рейнольдса некоторого критического уровня $(\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_T \approx 380)$ существует диапазон

$$0 < K_{10} < K_{10,T} < K_{10,\lim}; \tag{11}$$

значений параметра $K_{10}$, для которого выполняется условие (1). Для рассматриваемого течения Куэтта это условие с учетом заведомого выполнения (2) в силу (6) является, одновременно, и условием начала инициирования ламинарно-турбулентного перехода.

Верхняя граница $K_{10,T}$ диапазона (11) при фиксированном значении числа Рейнольдса представляет собой корень следующего, вытекающего из (1) с учетом (8), (9), уравнения

$$K_2(K_{10,T}) = K_{2G}(\mathrm{Re}, K_{10,T}).$$

Корни этого уравнения представляют собой функцию вида $K_{10,T}(\mathrm{Re})$, график которой представлен на рис. 4. Это график определяет собой границу некоторой области (на рисунке заштрихована) значений параметров $\{\mathrm{Re}, K_{10}\}$, для которых имеет место процесс начала инициирования ламинарно-турбулентного перехода.

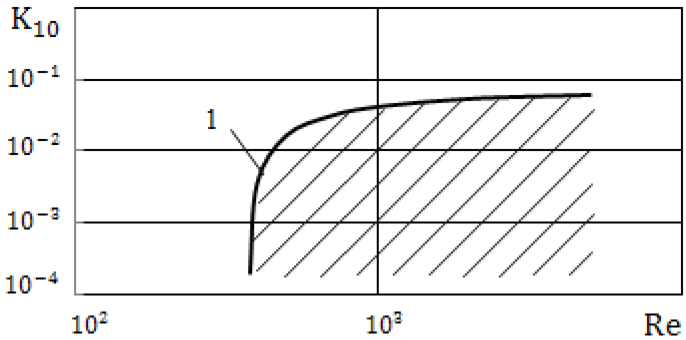



*Рис. 4. Область возможного «генерирования» (заштрихована) поперечных составляющих скорости и, соответственно, инициирования турбулентности для плоского течения Куэтта с фоном возмущения скорости в окрестности подвижной стенки* ($y'_0 = 1$). *1* — $K_{10,T}(\mathrm{Re})$

В завершении этого раздела отметим, что рассмотренная модель перехода построена с учетом целого ряда упрощающих допущений. В частности, рассматриваемый периодический фон возмущения поля скорости относится только лишь к начальному моменту времени. Поэтому прогнозирование начала перехода проводилось с учетом (1), (2), фактически, лишь на основе «стартового» состояния полей скорости и давления. При этом процесс эволюции течения (в смысле его развития во времени) из такого стартового состояния, естественно, не рассматривался. К этому следует также добавить, что продольная составляющая скорости в рассматриваемой точке имела перегиб своего профиля. Кроме того заметим, что в ходе рассмотрения упрощенно предполагалось выполнение условия $\delta = 1$.

Реальная же картина начала ламинарно-турбулентного перехода, как это можно ожидать, конечно же, является существенно более сложной. Вместе с тем, не смотря на принятые во внимание упрощающие допущения, оказалось возможным в первом приближении проследить в рамках предлагаемого подхода некоторые тенденции влияния, в частности, числа Рейнольдса и характеристик начального фона возмущения скорости на начало ламинарно-турбулентного перехода.

## Заключение

Используя подход, предложенный в [14], был проведен анализ условий начала ламинарно-турбулентного перехода для течения Куэтта с начальным периодическим фоном возмущения поля скорости в плоском канале с одной подвижной стенкой. Определено минимальное (критическое) значение числа Рейнольдса, которое находится в удовлетворительном согласии с известным экспериментальным данным.

Полученные результаты указывают на то, что предлагаемые эмпирические условия (1), (2) в первом приближении могут быть использованы при прогнозировании начала ламинарно-турбулентного перехода по результатам анализа «стартового» состояния полей скорости и давления.

## Литература


1. *Линь, Цзя-Цзяо*. Теория гидродинамической устойчивости / Цзя-Цзяо. Линь. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1958. – 194 с.

2. *Гольдштик, М. А.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. – Новосибирск : Наука, 1977. – 367 с.

3. *Джозеф, Д.* Устойчивость движений жидкости / Д. Джозеф. – М. : Мир, 1981. – 638 с.

4. *Жигулев, В. М.* Возникновение турбулентности / В. М. Жигулев, А. Н. Тумин. – Новосибирск: Наука, 1987. – 283 с.

5. *Бойко, А. В.* Возникновение турбулентности в пристенных течениях / А. В. Бойко, Г. Р. Грек, А. В. Довгаль, В. В. Козлов. – Новосибирск : Наука, 1999. – 328 с.

6. *Davies, S. J.* An Experimental Study of the Flow of Water in Pipes of Rectangular Section / S. J. Davies, C. M. White. // Procceedings of Royal Society, 1928. – V. A 119. – P. 92–107.

7. *Karnitz, M. A.* An experimental investigation of transition of a plane Poiseulle flow / M. A. Karnitz, M. C. Potter, M. C. Smith // Trans. ASME. Journal of Fluids Engineering. – 1974. – V. 96, No 4. – P. 384–388.

8. *Nikuradse, J.* Stromungsgesetze in rauhen Rohren / J. Nikuradse // VDI. Forschungsheft. – 1933. – No 361. – S. 1–22.

9. *Абрашкин, А. А.* О возможном механизме возникновения турбулентности / А. А. Абрашкин // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2009. – № 1. – С. 99–103.

10. *Пятницкий, Л. Н.* Акустические возмущения и турбулентные пульсации / Л. Н. Пятницкий // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, Вып. 6. – С. 122–125.

11. *Pyatnitsky, L. N.* Turbulence Nature and the Inverse Problem / L. N. Pyatnitsky // Series: Fluid Mechanics and Its Applications, V. 89. – Springer Science + Business Media B. V. – 2009. – 197 p.

12. *Пятницкий Л. Н.* По следам Рэлея. Ч. 2 / Л. Н. Пятницкий // Инженерная физика. – 2016. – № 6. – С. 14–48.

13. *Литвинов, В. Г.* Движение нелинейно вязкой жидкости / В. Г. Литвинов. – М. : Наука, 1982. – 376 с.

14. *Kolodezhnov, V. N.* An interpretation of the Laminar-Turbulent Transition Startup against the Consideration of the Transverse Viscosity Factor / V. N. Kolodezhnov // Journal of Physics. Conference Series. – 2018. – V. 973 (012009). – P. 1–15.

15. *Kolodezhnov, V. N.* Modeling of the initial stage of secondary flows formation for a fluid, the rheological model of which implies a threshold «addition» of the transverse viscosity factor. / V. N. Kolodezhnov. // Journal of Physics. Conference Series. – 2019. – V. 1203 (012013). – P. 1–10.

16. *Дикий, Л. А.* Об устойчивости плоскопараллельного течения Куэтта // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, №. 2. – С. 389–392.

17. *Пономаренко, Ю. Б.* Об устойчивости плоского течения Куэтта / Ю. Б. Пономаренко // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 4. – С. 606–614.

18. *Штерн, В. Н.* Устойчивость плоского течения Куэтта / В. Н. Штерн // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1969. – № 5. – С. 117–119.

19. *Штерн, В. Н.* Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта / В. Н. Штерн // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1970. – № 1. – С. 189–190.

20. *Романов, В. А.* Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта / В. А. Романов // Функциональный анализ и его приложения. – 1973. – Т. 7, Вып. 2. – С. 62–73.

21. *Aydin, M.* Novel experimental facility for the study of plane Couette flow / M. Aydin, H. J. Leutheusser // Review of Scientific Instruments. – 1979. – V.50, N. 11. – P. 1362–1366.

22. *Daviaud, F.* Subcritical Transition to Turbulence in Plane Flow / F. Daviaud, J. Hegseth, P. Berge // Physical Review Letters. – 1992. – V. 69 (17). – P. 2511–2514.

23. *Tillmark, N.* Experiments on transition in plane Couette flow / N. Tillmark, P. H. Alfredsson // J. Fluid Mech. – 1992. – V. 235. – P. 89–102.

24. *Dauchot, O.* Finite amplitude perturbation and growth mechanism in plane Couette flow / O. Dauchot, F. Daviaud // Physics of Fluids. – 1995. – V. 7, N. 2. – P. 335–343.

25. *Kolodezhnov, V. N.* Turbulence origination initial stage analysis for plane-parallel straight fluid flow, the rheological model of which takes into account the threshold «addition» of the transverse viscosity factor / V. N. Kolodezhnov // Journal of Physics. Conference Series. – 2019. – V. 1203 (012014). – P. 1–9.

26. *Malerud, S.* Measurements of turbulent velocity fluctuations in a planar Couette cell / S. Malerud, K. J. Maloy, W. I. Goldburg // Physics of Fluids. – 1995. – V. 7. – № 8. – P. 1949–1955.

УДК 532.135

# РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СУСПЕНЗИИ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ

**В. Н. Колодежнов**

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»*

**Аннотация.** Предложена реологическая модель суспензии, жидкая компонента которой представляет собой вязкопластическую среду. Модель учитывает последовательное чередование по мере возрастания скорости сдвига трех участков: снижения, возрастания, а затем вновь снижения вязкости. Представлена система ограничений и условий, которым должны удовлетворять параметры модели, Рассмотрен вариант обобщения реологической модели на случай двух- или трехмерного течений.

**Ключевые слова:** суспензия мелкодисперсных частиц, реологическая модель, вязкопластическая жидкость, аномалия вязкого поведения.

## Введение

Традиционные жидкости демонстрируют, как правило, монотонный характер изменения вязкости на достаточно большом диапазоне изменения скорости сдвига. В частности, классическая ньютоновская жидкость характеризуется постоянным значением вязкости. Хорошо известным псевдопластическим жидкостям соответствует монотонное снижение вязкости по мере роста скорости сдвига. Еще одна группа, так называемых дилатантных жидкостей, наоборот, проявляет себя монотонным возрастанием вязкости по мере увеличения скорости сдвига.

В отличие от сплошных сред такого рода, некоторые виды суспензий на основе полимерных жидкостей и мелкодисперсных частиц демонстрируют более сложный характер механического поведения [1–4]. Это проявляется, прежде всего, в особенностях зависимости их вязкости от скорости сдвига, которые заключаются в следующем. На различных диапазонах изменения скорости сдвига суспензия может демонстрировать различный характер изменения вязкости. Например, монотонное убывание вязкости на одном диапазоне изменения скорости сдвига может измениться на монотонное возрастание, но уже на другом диапазоне. А затем на следующем диапазоне изменения скорости сдвига ее характер вновь изменяется на монотонное убывание. При этом на кривой течения — зависимости касательного напряжения от скорости сдвига — возникают точки перегиба, соответствующие границам таких диапазонов.

В основе этих аномалий механического поведения лежат изменения внутренней структуры материала, возникающие при различных режимах деформирования и связанные с формированием мелкодисперсными частицами ассоциаций или кластеров типа «твердых» структур.

Суспензии такого рода при определенном сочетании соответствующих характеристик частиц, учитывая их размеры и концентрацию, а также реологических параметров жидкой компоненты суспензии представляют собой основу для ряда материалов с достаточно специфическими особенностями механического поведения. Эти особенности обусловлены, прежде всего, аномалиями вязкости, которые заключаются в следующем. При приближении скорости сдвига в соответствующих зонах области течения к некоторому критическому значению, вязкость таких суспензий начинает резко увеличиваться. При этом для некоторых видов суспензий это увеличение может быть настолько существенным, что значение вязкости возрастает на несколько порядков. Тогда поведение суспензии в таких зонах области течения становится подобным поведению твердого тела.

Некоторые примеры применения суспензий такого рода в технических приложениях приводятся в [5–7].

Естественно, что для производства из таких материалов изделий «фиксированной» формы они должны демонстрировать проявление пластичности. Это может быть достигнуто использованием в качестве жидкой компоненты вязкопластических жидкостей с достаточно большим значением напряжения сдвига.

Некоторые примеры реологических моделей подобных жидкостей с аномалиями вязкого поведения рассматривались в [8–9].

Поскольку эти модели не в полной мере описывают все особенности механического поведения суспензий, в данной статье предлагается более полная реологическая модель нелинейной вязкопластической жидкости, кривая течения которой имеет две точки перегиба, соответствующие сменам режимов возрастания и убывания вязкости по мере повышения скорости сдвига.

## 1. Реологическая модель

Анализ известных экспериментальных данных, представленных, например, в [1–4], показывает, что суспензии мелкодисперсных частиц при определенных сочетаниях их параметров (размеры, форма, концентрация) и реологических характеристиках вязкой жидкой основы демонстрируют достаточно сложное поведение. Как правило, зависимость касательного напряжения $\tau$ и вязкости $\mu$ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ на качественном уровне описывается следующим образом.

При сравнительно небольших значениях скорости сдвига сплошная среда ведет себя подобно псевдопластической жидкости. При этом ее вязкость монотонно уменьшается по мере увеличения скорости сдвига, начиная с уровня $\mu_0$ при $\dot{\gamma}=0.$ Однако, достигнув при некотором значении скорости сдвига $|\dot{\gamma}|=\dot{\gamma}_{\min}$ минимального уровня $\mu=\mu_{\min}$, далее вязкость начинает возрастать и механическое поведение суспензии начинает соответствовать поведению дилатантной жидкости. На этих двух диапазонах изменения скорости сдвига вязкость, естественно, меняется, но в целом она принимает значения примерно одного порядка из некоторого диапазона $\mu_{\min}<\mu<\mu_s$.

В дальнейшем при превышении скоростью сдвига некоторого порогового уровня $|\dot{\gamma}|=\dot{\gamma}_s$ вязкость, по-прежнему, продолжает увеличиваться, но темп ее нарастания резко возрастает. Как показывают известные экспериментальные данные, например из работы [2], на этом диапазоне вязкость может увеличиться на несколько порядков. В некоторых случаях возрастание вязкости становится настолько существенным, что суспензия начинает вести себя подобно твердому тела. В такой ситуации можно говорить, что жидкость начинает демонстрировать проявление эффекта «упрочнения» или «отвердевания». Достигнув, наконец, некоторого максимального уровня $\mu=\mu_{\max}$ при соответствующем значении скорости сдвига $|\dot{\gamma}|=\dot{\gamma}_{\max}$, дальнейшее ее увеличение приводит уже к снижению вязкости.

Здесь и далее под вязкостью будем понимать следующую величину

$$\mu(\dot{\gamma})=\frac{d\left|\tau(|\dot{\gamma}|)\right|}{d|\dot{\gamma}|}. \tag{1}$$

Заметим, что в случае линейной зависимости касательного напряжения от скорости сдвига, что соответствует ньютоновской жидкости, последнее выражение сразу же приводит к традиционной динамической вязкости.

Предположим, что жидкая компонента суспензии представляет собой вязкопластическую жидкость. Тогда, принимая во внимание также и описанные выше особенности суспензий на основе жидкой компоненты, демонстрирующей лишь вязкое поведение, приходим к следующему представлению для зависимостей касательного напряжения и вязкости от скорости сдвига, которые схематично представлены на рис. 1.

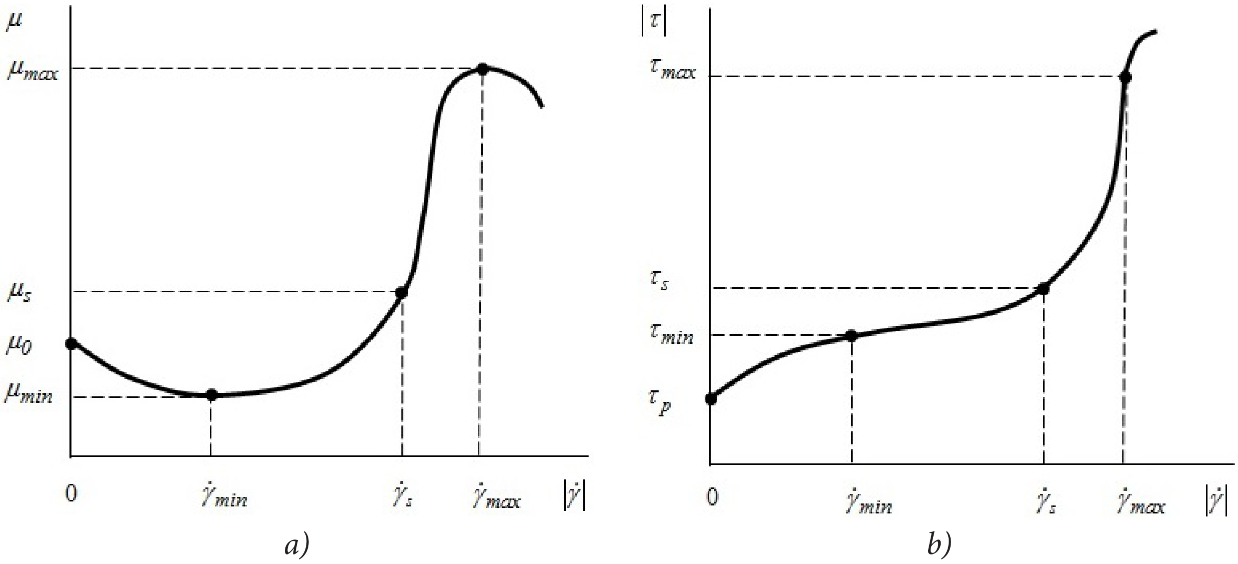



*Рис. 1. Схемы зависимостей касательного напряжения (a) и вязкости (b) от скорости сдвига*

Описывать кривую течения (зависимость касательного напряжения от скорости сдвига) какой либо одной функцией вполне допустимо, однако представляется не совсем рациональным. Это обусловлено тем, что, как это можно ожидать, такая функция будет иметь достаточно сложный вид. В свою очередь, это приведет к затруднениям при получении аналитических решений в явном виде даже для сравнительно простых задач гидродинамики. В этой связи, учитывая наличие на кривой течения характерных участков, вообще говоря, различного реологического поведения, предлагается реологическую модель суспензий такого рода принять в следующей форме

$$\left|\tau(|\dot\gamma|)\right| = \begin{cases} \tau_1 + k_1\cdot\left(|\dot\gamma| + \dot\gamma_1\right)^{n_1}; & 0 \le |\dot\gamma| \le \dot\gamma_{\min}; \\ \tau_2 + k_2\cdot\left(|\dot\gamma| - \dot\gamma_2\right)^{n_2}; & \dot\gamma_{\min} \le |\dot\gamma| \le \dot\gamma_s; \\ \tau_3 - k_3\cdot\left(\dot\gamma_3 - |\dot\gamma|\right)^{n_3}; & \dot\gamma_s \le |\dot\gamma| \le \dot\gamma_{\max}; \\ \tau_4 + k_4\cdot\left(|\dot\gamma| - \dot\gamma_4\right)^{n_4}; & |\dot\gamma| \ge \dot\gamma_{\max}; \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\tau_j, \quad k_j > 0, \quad \dot\gamma_j, \quad n_j, \quad j = 1,2,3,4; \tag{3}$$

представляют собой параметры реологической модели, на некоторые из которых накладываются ограничения

$$\tau_1 < \tau_p; \quad \tau_4 < \tau_{\max} < \tau_3; \quad \dot\gamma_2 < \dot\gamma_{\min}; \quad \dot\gamma_4 < \dot\gamma_{\max} < \dot\gamma_3; \tag{4}$$
$$0 < n_1 < 1; \quad n_2 > 1; \quad 0 < n_3 < 1; \quad 0 < n_4 < 1.$$

В дополнение к этим ограничениям модельное соотношение (2) предполагает, что параметры (3), должны удовлетворять следующим условиям

$$\tau_p = \tau_1 + k_1\cdot\left(\dot\gamma_1\right)^{n_1};$$
$$\tau_{\min} = \tau_1 + k_1\cdot\left(\dot\gamma_{\min} + \dot\gamma_1\right)^{n_1} = \tau_2 + k_2\cdot\left(\dot\gamma_{\min} - \dot\gamma_2\right)^{n_2};$$
$$k_1\cdot n_1\cdot\left(\dot\gamma_{\min} + \dot\gamma_1\right)^{n_1-1} = k_2\cdot n_2\cdot\left(\dot\gamma_{\min} - \dot\gamma_2\right)^{n_2-1};$$

$$\tau_s = \tau_2 + k_2 \cdot \left(\dot{\gamma}_s - \dot{\gamma}_2\right)^{n_2} = \tau_3 - k_3 \cdot \left(\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_s\right)^{n_3};$$
$$k_2 \cdot n_2 \cdot \left(\dot{\gamma}_s - \dot{\gamma}_2\right)^{n_2 - 1} = k_3 \cdot n_3 \cdot \left(\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_s\right)^{n_3 - 1};$$
$$\tau_{\max} = \tau_3 - k_3 \cdot \left(\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_{\max}\right)^{n_3} = \tau_4 + k_4 \cdot \left(\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_4\right)^{n_4};$$
$$k_3 \cdot n_3 \cdot \left(\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_{\max}\right)^{n_3 - 1} = k_4 \cdot n_4 \cdot \left(\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_4\right)^{n_4 - 1}. \tag{5}$$

В представленных выше соотношениях (4), (5) параметры $\tau_p$, $\tau_{\min}$, $\tau_s$, $\tau_{\max}$ представляют собой характерные для данной суспензии значения модуля касательного напряжения.

В частности, $\tau_p$ представляет собой напряжение сдвига, которое определяется пластическими свойствами жидкой компоненты суспензии. Параметрам $\tau_{\min}$ и $\tau_{\max}$ соответствуют касательные напряжения, при которых вязкость достигает, соответственно, минимального и максимального значений. Еще один параметр $\tau_s$ определяет касательное напряжение при некотором значении скорости сдвига $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_s$. Это значение принадлежит диапазону $\dot{\gamma}_{\min} < |\dot{\gamma}| < \dot{\gamma}_{\max}$ монотонного увеличения вязкости суспензии от минимального значения $\mu_{\min}$ до максимального уровня $\mu_{\max}$. По своему смыслу такое значение $\dot{\gamma}_s$ скорости сдвига определяет уровень, при превышении которого наблюдается существенное увеличение вязкости суспензии. Заметим, что в некотором смысле выбор значения $\dot{\gamma}_s$, и соответствующего ему значения $\tau_s$, не является однозначным и носит не совсем четкий характер. В этой связи в качестве $\dot{\gamma}_s$ может быть выбрано такое значение скорости сдвига $\dot{\gamma} \in \left[\dot{\gamma}_{\min}; \dot{\gamma}_{\max}\right]$, при котором вязкость суспензии условно превышает свое начальное значение $\mu_0$ (или же, например, минимальное значение $\mu_{\min}$) на заранее заданную величину.

Отметим, что выполнение условий (4) обеспечивает непрерывную дифференцируемость для зависимости (2) касательного напряжения от скорости сдвига. При этом, для зависимости вязкости от скорости сдвига выполняется лишь условие непрерывности.

Одной из особенностей модели (2) является то, что соответствующая ей кривая течения имеет две точки перегиба при $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\min}$ и $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\max}$.

## 2. Реологическая модель, которая демонстрирует проявление эффекта «отвердевания»

В рамках предложенной выше реологической модели может быть рассмотрен частный случай, который предполагает учет проявления эффекта «отвердевания». Такому эффекту должно соответствовать существенное возрастание вязкости (на несколько порядков) при приближении скорости сдвига к некоторому критическому значению. В качестве такого критического значения скорости сдвига может быть принято значение $\dot{\gamma}_{\max}$, соответствующее максимальному значению вязкости. Тогда с учетом представления вязкости соотношением (1), по крайней мере, на модельном уровне условие проявления эффекта «отвердевания» может быть представлено в форме

$$\lim_{\dot{\gamma} \to \dot{\gamma}_{\max}} \left( \frac{d\left|\tau(|\dot{\gamma}|)\right|}{d|\dot{\gamma}|} \right) = \infty. \tag{6}$$

Этот результат сразу же непосредственно вытекает из рассмотренной выше модели (2), если предположить, что для соответствующих параметров модели выполняются соотношения

$$\tau_3 = \tau_4 = \tau_{\max}; \quad \dot{\gamma}_3 = \dot{\gamma}_4 = \dot{\gamma}_{\max}. \tag{7}$$

Заметим, что соотношения (7) играют, по сути, роль двух последних условий в (5). При этом, опять же, на модельном уровне зависимость вязкости от скорости сдвига с учетом (6) имеет в точке $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\max}$ разрыв второго рода.

## 3. Обобщение реологической модели

Реологические зависимости касательного напряжения от скорости сдвига, в частности, типа (2) могут быть использованы при решении лишь одномерных задач гидродинамики. В этой связи представляет интерес обобщение реологической модели (2) на случай течений более высокой размерности, которая в такой ситуации может быть представлена в форме

$$\tau_{ij} = -P \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \varphi(I_2) \cdot \varepsilon_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3; \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad I_2 = \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \cdot \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2;$$

$$\varphi(I_2) = \begin{cases} 0.5 \cdot |I_2|^{-0.5} \cdot \left\{ \tau_1 + k_1 \cdot \left[ 2 \cdot \left( \sqrt{|I_2|} + \sqrt{I_{2,1}} \right) \right]^{n_1} \right\}; & 0 \le |I_2| \le I_{2,\min}; \\ 0.5 \cdot |I_2|^{-0.5} \cdot \left\{ \tau_2 + k_2 \cdot \left[ 2 \cdot \left( \sqrt{|I_2|} - \sqrt{I_{2,2}} \right) \right]^{n_2} \right\}; & I_{2,\min} \le |I_2| \le I_{2,s}; \\ 0.5 \cdot |I_2|^{-0.5} \cdot \left\{ \tau_3 - k_3 \cdot \left[ 2 \cdot \left( \sqrt{I_{2,3}} - \sqrt{|I_2|} \right) \right]^{n_3} \right\}; & I_{2,s} \le |I_2| \le I_{2,\max}; \\ 0.5 \cdot |I_2|^{-0.5} \cdot \left\{ \tau_4 + k_4 \cdot \left[ 2 \cdot \left( \sqrt{|I_2|} - \sqrt{I_{2,4}} \right) \right]^{n_4} \right\}; & |I_2| \ge I_{2,\max}. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $\tau_{ij}$, $\varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций; $P$ — гидростатическое давление; $u_i$ — компоненты вектора скорости; $\delta_{ij}$ — символ Кронекера; $I_2$ — второй инвариант тензора скоростей деформаций; $\varphi(I_2)$ — функция второго инварианта тензора скоростей деформаций, которая характеризует вязкие свойства суспензии; $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$, $I_{2,4}$, $I_{2,\min}$, $I_{2,s}$, $I_{2,\max}$, — параметры реологической модели, которые по своему смыслу подобны, соответственно, параметрам $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$, $\dot{\gamma}_3$, $\dot{\gamma}_4$, $\dot{\gamma}_{\min}$, $\dot{\gamma}_s$, $\dot{\gamma}_{\max}$ в рамках модели (2).

В частном случае одномерного течения, когда

$$I_2 = -\frac{1}{4} \cdot \dot{\gamma}^2,$$

соотношения (8) с учетом (9) сразу же приводятся к выражению (2) для касательного напряжения.

## Заключение

Предложенная реологическая модель позволяет описывать на широком диапазоне изменения скорости сдвига механическое поведение суспензий мелкодисперсных частиц, жидкая компонента которых представляет собой вязкопластическую среду. Такая модель учитывает последовательное чередование по мере возрастания скорости сдвига трех участков: снижения, возрастания, а затем вновь снижения вязкости. По своей форме эта модель позволяет получать решения одномерных задач гидродинамики в аналитическом виде. При этом модель допускает частный случай проявления эффекта «отвердевания», когда вязкость возрастает настолько существенно (на несколько порядков), что на модельном уровне допустимо полагать $\mu_{\max} \to \infty$. Предложенный вариант обобщения рассмотренной реологической модели может быть использован при рассмотрении задач гидродинамики более высокой размерности.

**Литература**

1. *Young, Sil Lee*. Dynamic properties of shear thickening colloidal suspensions / Young Sil Lee, N. J. Wagner // Rheologica Acta. – 2003. – V.42, Issue 3. – P. 199–208.

2. *Egres, R. G.* The rheology and microstructure of acicular precipated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition / R. G. Egres, N. J. Wagner // J. Rheol. – 2005. – V. 49 (3). – P. 719–746.

3. *Bischoff White, T. T.* Extensional rheology of a shear-thickening cornstarch and water suspension / T. T. Bischoff White, M. Chellamuthu, J. P. Rothstein // Rheologica Acta. – 2010. – V. 49, Issue 2. – P. 119–129

4. *Broun, E.* Shear thickening in concentrated suspension: phenomenology, mechanisms and relations to jamming / E. Broun, H. M. Jaeger // Reports on Progress in Physics. – 2014. – 77. 046602. – 23 p.

5. *Wiśniewski, A.* Nanotechnology for increase of body protection capability / A. Wiśniewski // Problemy Techniki Uzbrojenia. – 2008. – V. R. 37, z. 107. – P. 7–14.

6. *Jie, Ding*. Research and Applications of Shear Thickening Fluids / Jie Ding, Weihua Li, S. Z. Shen // Recent Patents on Materials Science. – 2011. – V. 4, № 1. – P. 43–49.

7. *Yun, Tao Sun*. Analysis of the D3O materials in baseball protective clothing / Yun Tao Sun, Xiao Dong Liu, Guo Peng Tian, Hong Shuang Han // Applied Mechanics and Materials. – 2012. – V. 217–219. – P. 1174–1177.

8. *Колодежнов, В. Н.* Моделирование вращательного течения между коаксиальными цилиндрами для жидкости с эффектом отвердевания / В. Н. Колодежнов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2014. – № 3. – С. 3–14.

9. *Колодежнов, В. Н.* Моделирование течения вязкопластических жидкостей, демонстрирующих проявление эффекта «отвердевания» / В. Н. Колодежнов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докладов. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – С. 1908–1910.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СТРУКТУР

УДК 538.9

# ИЗУЧЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПИРОЛИЗОВАННОГО ПОЛИАКРИЛОНИТРИЛА С АТОМАМИ МЕТАЛЛОВ В МЕЖСЛОЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**И. А. Какорин, А.Н. Панченко**

*Волгоградский государственный университет*

**Аннотация.** В работе изучено внедрение атомов Li и Na в полимерную матрицу пиролизованного полиакрилонитрила. Установлено наиболее стабильное расположения внедренных атомов щелочных металлов в межплоскостном пространстве полимера. Основные расчеты для изучения структуры и свойств ППАН с щелочными металлами проводились с помощью метода DFT с потенциалом B3LYP и PBE, отдельные расчеты проводились с помощью расчетной схемы MNDO [1].
**Ключевые слова:** пиролизованный полиакрилонитрил, полимерная матрица, щелочные металлы, метод DFT, расчетная схема MNDO.

## Введение

Полимеры занимают в нашем обществе большую нишу, и нет людей, которым нужно доказывать, что развитие промышленности и использование полимеров является одним из главных направлений развития. Очень сложно выделить какое-либо направление, в котором бы не использовались полимеры, практически везде они могут заменять почти все натуральные материалы, например: металлы, древесину, а также выступать в качестве исходных материалов для получения новых уникальных веществ с неизученными свойствами. Если изучить темп роста производства полимеров, то можно заметить, что данный рост превосходит рост аналогичных веществ из натуральных материалов. Есть ещё одно преимущество у полимеров, так называемая экономическая выгода, т. е. получить полимеры с новыми свойствами намного дешевле, чем использовать известные материалы.

Актуальность исследования определена тем, что в последнее время интерес ученых привлекает поиск новых материалов для наноэлектроники. В электронных устройствах могут использоваться новые материалы, которые представляют металлоуглеродные нанокомпозиты. Выполненные ранее расчеты показали возможность создания подобных соединений на основе углеродных нанотрубок и графена. Но наряду с данными материалами популярностью в наноматериаловедении в настоящее время начинают пользоваться другие вещества. Для получения нанополимерных металлокомпозитов необходим полимер, который имеет структуру «запутанных» длинных цепей макромолекул, которые могут образовать сшитую пространственную структуру и взаимодействовать с помощью химических реакций с металлами, при этом образуется комплекс, который препятствует диффузии и объединению металлических атомов в кластеры. Данная структура и химическая активность ВМС позволяет проводить процесс образования металлических наночастиц под контролем. Среди полимеров наиболее перспективным является пиролизованный полиакрилонирил, благодаря своим уникальным электронным и физико-химическим свойствам [2–5].

## 1. Внедрение атомов лития и натрия в межслоевое пространство пиролизованного полиакрилонитрила через боковую поверхность

Для проведения расчетов был рассмотрен двухслойный пиролизованный полиакрилонитрил, в структуре которого присутствовало 20 % атомов азота, межплоскостное расстояние составило 3,4 Å. Внедрение атомом проводилось через торцевую часть структуры полимера. Процесс внедрения моделировался пошаговым приближением (шаг 0.1 Å) атома щелочного металла к фиктивному атому, расположенному в центре между слоями. Геометрия системы оптимизировалась в процессе расчета. Пошаговое приближение атома металла к двухслойному ППАН позволило построить профиль поверхности потенциальной энергии системы «двухслойный ППАН — атом Me» (рис. 1).

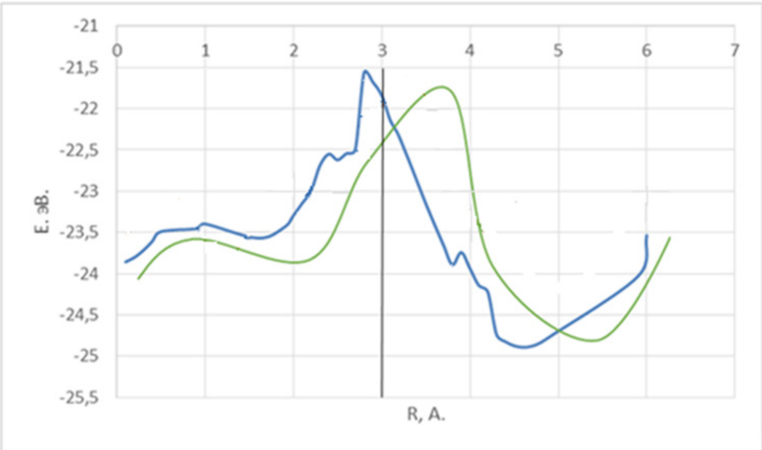



*Рис. 1. Профиль поверхности потенциальной энергии взаимодействия атомов металла с двухслойным ППАН*

Для проникновения в межслоевое пространство атомы металла должны преодолеть энергетический барьер $E_a$, попав в межплоскостное пространство, атомы металла оказываются в стабильном состоянии на расстоянии $R$ от границы кластера. Следует заметит, что пик потенциального барьера, при внедрении атома лития, находится на расстоянии 0,8 Å снаружи слоев полимера, а для атома натрия внутри межслоевого пространства на расстоянии 0,2 Å от края слоя.

Таким образом расчеты установили, что заполнение матрицы полимера атомами металлов возможно, данный факт подтверждается небольшими энергетическими барьерами, которые необходимо преодолеть внедряющимся атомам.

## 2. Множественное заполнение межслоевого пространства пиролизованного полиакрилонитрила

Изучено два способа заполнения: 1) атом металла пошагово двигался через торцевую поверхность по линии соединяющей его с атомом, находящемся в полости полимера; 2) атом металла пошагово приближался через торцевую поверхность вдоль линии, соединяющей его с фиктивным атомом, расположенным от встроенного атома на расстоянии согласно значению кристаллической решетки.

Выполненные расчеты установили, что заполнение полимерной матрицы возможно только во втором случае.

Далее было изучено влияние расположения внедренных атомов лития и натрия на стабильность полученных металлокомпозитов.

Рассматривались следующие структуры: 1) атомы металла располагаются в одной плоскости зигзагообразно; 2) четыре атома Me располагают в одной плоскости друг за другом; 3) четыре атома Me расположены в двух параллельных плоскостях; 4) два атома лития и два атома натрия расположены в одной плоскости зигзагообразно; 5) два атома лития и два атома калия расположены в одной плоскости зигзагообразно; 6) два атома натрия и два атома калия расположены в одной плоскости зигзагообразно.

Выполненные расчеты всех предложенных металлополимерных нанокомпозитов обнаружили, что во всех случаях плоские слои полимерной матрицы, после взаимодействия с металлами изменили свою геометрию. Рассчитанные значения ширины запрещенной зоны новых комплексов сопоставимы со значением для ППАН. Этот факт показывает, что рассматриваемые металлокомпозиты стабильны. Изучение электронно-энергетического строения нанокомпозитов показало, что наличие металлических атомов в матрице полимера приводит к уменьшению ширины запрещенной щели по сравнению с шириной исходного полимера.

## Заключение

Итак, проведенные расчеты внедрения атомов щелочных металлов (лития, натрия) через боковую поверхность установили факт возможности заполнения межслоевого пространста ППАН данными металлами, так как для проникновения в структуру полимера наблюдаются небольшие энергетические барьеры. Обнаружено, что наличие атомов металлов в структуре ППАН вызывает изменение ширины запрещенной зоны, что приводит к изменению проводящих свойств полученного нанокомпозита.

## Благодарности

Исследование выполнено при финасовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-43-340005 р_а.

## Литература

1. *Эварестов, Р. А.* Квантово-химические методы в теории твердого тела / Р. А. Эварестов. – Л. : ЛГУ, 1982. – 280 с.

2. *Помогайло, А. Д.* Наночастицы металлов в полимерах / А. Д. Помогайло, А. С. Розенберг, И. Е. Уфлянд – М. : Химия, 2000. 672 с.

3. *Запороцкова, И. В.* Металлоуглеродные нанокомпозиты на основе пиролизованного полиакрилонитрила/ И. В. Запороцкова [и др.] // Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. – 2014. – Т. 17, № 12. – С. 134–142.

4. *Какорина, О. А.* Металлоуглеродные нанокомпозиты на основе пиролизованного полиакрилонитрила с внедренными в межслоевое пространство атомами щелочноземельных металлов / О. А. Какорина, И. В. Запороцкова, Л. В. Кожитов // В сборнике: Физика и технология наноматериалов и структур Сборник научных статей 3-й Международной научно-практической конференции. В 2-х томах. – 2017. – С. 225–231.

5. *Anikeev, N. A.* Theoretical studies of the structure of the metal – carbon composites on the base of acryle – nitrile nanopolimer / N. A. Anikeev, I. V. Zaporotskova, L. V. Kojitov, O. A. Davletova, A. V. Popkova // Journal of nano and electronic phisics. – 2014. – V. 6, No 3. – P. 03035–03036.

УДК 54-1

# РАЗРАБОТКА РАДИОПОГЛОЩАЮЩЕГО ПОКРЫТИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

**О. А. Какорина, И. В. Запороцкова, И. А. Какорин, А. Н. Панченко**

*Волгоградский государственный университет*

**Аннотация.** В работе представлена возможность получения радиопоглощающего покрытия с использованием широко используемого полимера — пиролизованного полиакрилонитрила (ППАН), модифицированного атомами никеля. С помощью такого экрана можно обеспечить эффективное поглощение электромагнитной энергии.
**Ключевые слова:** пиролизованный полиакрилонитрил, полимерная матрица, радиопоглощающие материалы, ферромагнетики.

## Введение

Сегодня особенно актуальна проблема защиты конфиденциальной информации в выделенных помещениях. Для защиты информации, обрабатываемой техническими средствами, используются пассивные и активные методы и средства, в первую очередь направленные на ослабление побочных электромагнитных излучений. Эффективное поглощение электромагнитной энергии обеспечивают радиопоглощающие материалы. Свойства поглощения основаны на их способности преобразовывать электромагнитные волны в тепло. Данный процесс поглощения сопровождается явлениями поглощения, рассеяния, интерференции и дифракции радиоволн, в конечном итоге сводясь к переходу энергии излучения в тепловую энергию. Несмотря на применяемые в настоящее время экранирующие покрытия (лакокрасочные токопроводящие покрытия, шторы из металлизированной ткани и т. п.), проблема создания нового недорогого и эффективного поглощающего материала по-прежнему актуальна, так как происходит интенсивный процесс развития систем связи, освоения нетрадиционных диапазонов радио- и оптических волн, в том числе СВЧ и ОВЧ, включая миллиметровые волны (ММВ). Поэтому перспективной является разработка научных и технологических основ синтеза новых материалов, способных улучить свойства радиопоглощающих элементов. Для создания нерезонансных широкодиапазонных радиоматериалов используют частицы ферромагнетика, введенные непосредственно в слой изоляционного материала — немагнитного диэлектрика. В качестве дополнений такие материалы могут включать ферромагнетики с примесями-поглотителями — сажей или графитом. В работе предложено радиопоглощающее покрытие в котором в качестве изоляционного материалы выступает полимер-пиролизованный полиакрилонитрил, а в качестве ферромагнетика-никель, который используется для диапазона мили- и сантиметровых волн.

## 1. Внедрение атома никеля в полимерную матрицу пиролизованного полиакрилонитрила через дефект структуры

Для изучения процесса проникновения атома металла рассматривалась двухслойная структура пиролизованного полиакрилонитрила, при этом один из слоев содержал вакансию (так называемый V дефект).

При выполнении расчётов внедрения атома никеля в межслоевое пространство пиролизованного полиакрилонитрила была использована расчетная схема STO. Изучены следующие варианты внедрения атома Ni в полимерную матрицу: 1 — атом никеля внедряется через вакансию, содержащую только атомы углерода; 2 — атом никеля внедряется через вакансию, содержащую два атома азота.

Пошаговое приближение атома никеля к двухслойному ППАН дало возможность для построения профиля поверхности потенциальной энергии системы «двухслойный пиролизованный полиакрилонитрил — атом Ni» (рис. 1.).

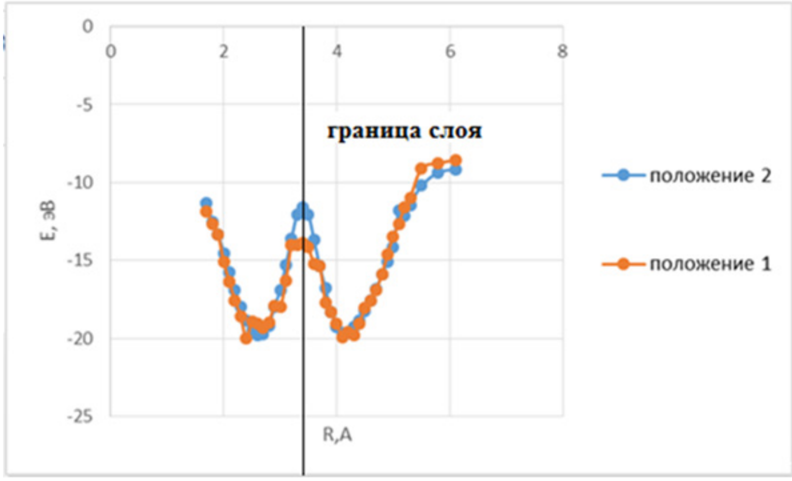



*Рис. 1. Профили поверхности потенциальной энергии интеркалирования атома никеля между слоями ППАН*

Анализируя энергетическую зависимость внедрения атома никеля в межплоскостное пространство полимера видно, что атом никеля безбарьерно подходит к верхнему слою, содержащему вакансию, на расстояние 0,8 Å, далее преодолевая энергетический барьер *Ea*, эквивалентный энергии активации попадает энергетический минимум. Пик барьера, находится на поверхности слоя, никель попадает в устойчивое состояние между слоями на расстоянии 0,4 Å от монослоя с дефектом. Энергия устойчивого состояния рассчитывалась как разность между полной энергией $E(R)$ системы «полимер — атом Ni» на определённом расстоянии $R$ и суммой полных энергий неконтактирующих атома никеля и ППАН (т. е. на расстоянии $R = \infty$).

Сравнение величин энергетических барьеров при прохождении атома Ni через различные типы вакансий поверхности двухслойного ППАН установило, что процесс прохождения атом никеля через монослой с дефектом, который содержал только атомы углерода, с энергетической точки зрения более выгоден (наименьшая величина барьера $E_a = 5,7$ эВ). Это позволяет сделать вывод о том, что атомы азота негативно влияют на процесс проникновения атома никеля между слоями полимера.

Далее была произведена полная оптимизации системы при положении атома никеля в стабильном состоянии. Анализ системы геометрии после оптимизации показал, что межслоевое пространство между слоями увеличилось и составило 4,2 Å, а атом никеля отдалился от цента вакансии на 1,7 Å (рис. 2).

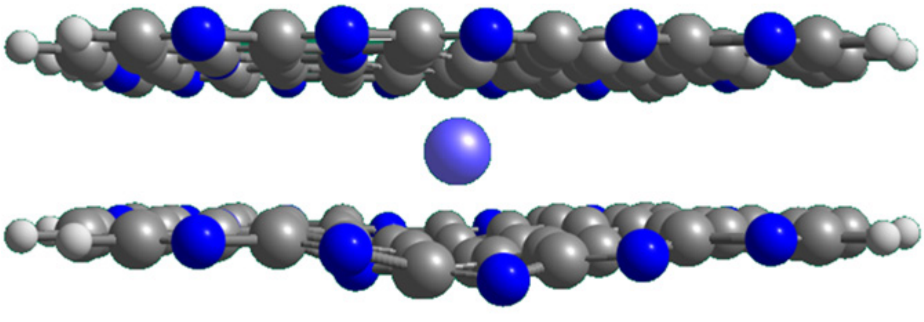


*Рис. 2. Атом никеля в межплоскостном пространстве ППАН*

## 2. Исследование механизма заполнения межслоевого пространства полимера атомами никеля

Далее рассматривалось проникновение атома никеля через вакансию в слое при этом в межплоскостном пространстве находился внедренный ранее атом никеля на расстоянии 1,7 Å. Процесс адсорбции моделировался пошаговым приближением внедряющегося атома к атому, находящемуся в межплоскостном пространстве вдоль перпендикуляра, проведенного через этот атом и нижний слой полимера. Геометрия системы оптимизировалась на каждом шаге. Выполненные расчеты позволили построить профили поверхности потенциальной энергии процессов адсорбции (рис. 3).

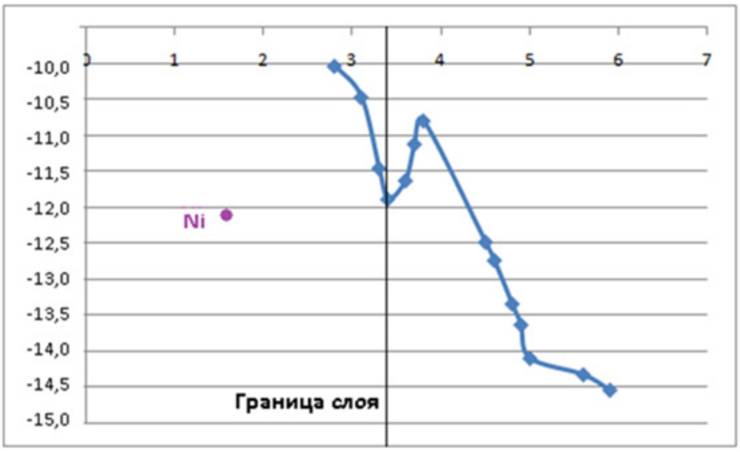



*Рис. 3 Профили поверхности потенциальной энергии внедрение второго атома никеля между слоями ППАН*

Анализ энергетической кривой установил, что атом серебра внедряется в структуру ППАН. Для внедрения никеля в структуру ему необходимо преодолеть энергетический барьер величиной 3,2 эВ. Анализ геометрии обнаружил, что второй атом никеля образовал связь с атомами поверхности слоя, при этом наблюдается искривления слоя полимера. Анализирую зарядовое состояние системы, было обнаружено, что в результате смещения электронной плотности на атоме металла появляется положительный заряд, а атомы ближайшего окружения оказываются отрицательно заряженными. Атом металла, находящийся в межплоскостном пространстве так же несет на себе положительный заряд. Данные расчеты согласуются с представлениями о процессах взаимодействия между металлами и системой сопряженных связей в ППАН с образованием комплексов, вызывающих смещение электронных облаков металла на двойные связи –С=С– с поляризацией области материала, состоящей из ближайших к металлу атомов.

Установлено, что введение атома никеля в монослой ППАН приводит к изменению (уменьшению) ширины запрещенной зоны по сравнению с чистым ППАН.

## Заключение

Итак, выполненные теоретические расчеты позволили установить, что процесс внедрения ферромагнитных частиц никеля в межслоевое пространство полимера через дефект поверхности возможен. Изучение механизма множественного внедрения атомов никеля в структуру пиролизованного полиакрилонитрила приводит к образованию устойчивого металлокомпозитного комплекса. При этом происходит уменьшение ширины запрещенной зоны полученного нанокомпозита. Таким образом, проведенные исследования доказали возможность модификации пиролизованного полиакрилонитрила атомами никеля, что будет способствовать получению на основе ППАН радиопоглощающего материала, который будет использоваться для решения задач в информационной безопасности.

**Благодарности**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-43-340005 р_а.

**Литература**

1. *Эварестов, Р. А.* Квантово-химические методы в теории твердого тела / Р. А. Эварестов. – Л. : ЛГУ, 1982. – 280 с.

2. *Помогайло, А. Д.* Наночастицы металлов в полимерах / А. Д. Помогайло, А. С. Розенберг, И. Е. Уфлянд – М. : Химия, 2000. – 672 с.

3. *Запороцкова, И. В.* Металлоуглеродные нанокомпозиты на основе пиролизованного полиакрилонитрила / И. В. Запороцкова [и др.] // Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. – 2014. – Т. 17, № 12. – С. 134–142.

4. *Kakorina, O. A.* Simulation of pyrolysed polyacrylonitrile based composite with amorphising boron additives / O. A. Kakorina, I. V. Zaporotskova, I. A. Kakorin, L. V. Kozhitov // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. – 2020. – С. 012131.

5. *Какорина, О. А.* Металлоуглеродные нанокомпозиты на основе пиролизованного полиакрилонитрила с внедренными в межслоевое пространство атомами щелочноземельных металлов / О. А. Какорина, И. В. Запороцкова, Л. В. Кожитов // В сборнике: Физика и технология наноматериалов и структур Сборник научных статей 3-й Международной научно-практической конференции. В 2-х томах. – 2017. – С. 225–231.

6. *Anikeev, N. A.* Theoretical studies of the structure of the metal – carbon composites on the base of acryle – nitrile nanopolimer / N. A. Anikeev, I. V. Zaporotskova, L. V. Kojitov, O. A. Davletova, A. V. Popkova // Journal of nano and electronic phisics. – 2014. – Vol. 6, No 3. – P. 03035–03036.

УДК 621.3.015.5

# БИФУРКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОБОЯ ЭМАЛЬ-ЛАКОВЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ

**А. Д. Новосельцев, Ю. П. Вирченко**

*Белгородский государственный университет*

**Аннотация.** На основе общефизических представлений сконструирована статистическая модель многослойного эмаль-лакового полимерного покрытия, содержащего случайным образом распределенные в нем дефекты, которые имеют вид воздушных включений. В рамках этой модели строится феноменологическая теория электрического пробоя покрытий указанного типа.

**Ключевые слова:** воздушные включения, независимые случайные величины, одновершинное распределение, электрическая прочность, эмаль-лаковое покрытие.

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена теоретическому анализу наблюдаемому экспериментально [1] эффекту неодновершинности статистики напряжений электропробоя полимерных эмаль-лаковых покрытий. Анализ основан, на общефизической модели, что выгодно отличает его работы [2], где не выявлена физическая причина проявления этого эффекта. В результате проведенного исследования можно утверждать, что эффект неодновершинности является следствием специфического пространственного расположения дефектов в пленке покрытия.

Опишем феноменологию электрического пробоя эмаль-лакового покрытия. Пробой обусловлен ударной ионизацией атомов полимера под действием электрического поля, сопровождающейся разрывом связей между ними. Наличие дефектов, расположенных случайным образом в материале и обладающих случайными размерами, обуславливает случайность величины напряжения $\tilde{E}$ пробоя. Статистический характер этих напряжений несуществен, если геометрические размеры образца существенно превосходят геометрические размеры дефектов. Наоборот, в случае, когда указанное соотношение не столь велико, можно наблюдать статистический разброс напряжений электропробоя. При этом оказывается, что гистограммы наблюдаемых значений для эмаль-лаковых электроизолирующих покрытий, при определенных условиях, обладают двумя вершинами, что обусловлено какой-то физической причиной, подлежащей теоретическому осмыслению.

Рассмотрим электроизолирующее полимерное эмаль-лаковое покрытие, имеющее вид многослойной пленки. Технология изготовления покрытий состоит из последовательного нанесения нескольких $3 \div 10$ слоев эмаль-лаковой смеси, растворенной в жидком органическом растворителе. Нанесение каждого из слоев сопровождается последующим его высушиванием. В процессе нанесения каждого очередного слоя возникают дефекты однородного распределения вещества полимера со случайным геометрическим размером. Дефекты представляют собой воздушные включения. Они появляются вследствие непредсказуемого прилипания к внешней поверхности предшествующего слоя покрытия малых пузырьков воздуха. Существенно, что при этом в каждом сечении вновь образуемого слоя появляется не более одного воздушного включения. Такие включения имеют форму близкую к полусферической, обусловленную поверхностным натяжением пузырька, и поэтому каждый дефект характеризуется одной положительной случайной величиной — радиусом пузырька. Наличие дефектов описанного типа в полимерном покрытии уменьшает напряжение электропробоя, так как электрическая прочность воздуха значительно меньше, чем электрическая прочность материала покрытия.

Ввиду случайности радиусов дефектов, напряжение электрического пробоя является случайной величиной. На гистограммах проводимого по определенному правилу экспериментального изучения электрической прочности покрытий описанного типа наблюдались два максимума [2]. В настоящей работе мы конструируем модель и в ее рамках даем объяснение этого явления.

## 2. Статистическая модель

Занумеруем $N$ слоев покрытия, имеющих одинаковую толщину $d$, числом $m = 1,...,N$ в порядке их расположения в поперечном сечении пленки. Будем предполагать, что центры дефектов на внешних плоскостях каждого из слоев представляются статистически независимыми при разных значениях $m$ однородными пуассоновскими точечными полями $\{\tilde{x}_{k_m}^{(m)}\}$ с одинаковой плотностью $\sigma$. С каждой точкой поля связана положительная случайная величина $\tilde{r}_{k_m}^{(m)} > 0$, $m = 1 \div N$ — радиус дефекта. Так как дефекты статистически не зависят друг от друга, то все случайные величины $\tilde{r}_{k_m}^{(m)}$, $m = 1 \div N$, $k = 1,2,3,...$ независимы в совокупности и одинаково распределены с общей плотностью распределения.

Пусть $U$ — электрическая прочность полимерного материала и $U_0$ — электрическая прочность воздуха. Движение электронной лавины, реализующей электрический пробой покрытия, будем представлять в виде ломанной линии, состоящей из прямолинейных отрезков, которые соединяют последовательно центры дефектов, расположенные в слоях покрытия (см. рис. 1). Напряжение электрического пробоя, вдоль элемента ломаной складывается из напряжения электрического пробоя воздушного пузырька и напряжения электрического пробоя полимерного материала вдоль этого элемента, то есть равно сумме $U_0\tilde{r}_m + U \cdot (|\,\tilde{x}_{k_m}^{(m)} - \tilde{x}_{k_{m+1}}^{(m+1)}\,| - \tilde{r}_m)$.

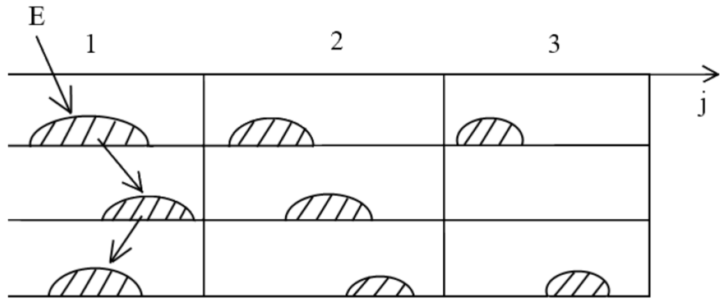



*Рис. 1. На рисунке показаны схематически три канала с вкрапленными в них дефектами. Стрелками показано движение пробойной лавины в канале*

Тогда напряжение пробоя, когда лавина развивается по случайной ломаной траектории минимальной длины, равно

$$\sum_{m=1}^{N}\Big[U_0\tilde{r}_m + U \cdot (|\,\tilde{x}_{k_m}^{(m)} - \tilde{x}_{k_{m+1}}^{(m+1)}\,| - \tilde{r}_m)\Big]. \qquad (1)$$

Здесь номера $k_1,...,k_N$ — номера точек в случайных полях с номерами $m = 1,...,N$. Задача состоит в определении плотности $f(E)$ распределения вероятностей этой случайной величины при заданных: плотности $\sigma$ расположения точек случайных полей $\{\tilde{x}_k^{(m)}\}$, $m = 1 \div N$ и плотности распределения $w(r)$. При этом будем считать, что средний размер дефекта $\langle \tilde{r} \rangle = \int_0^\infty r w(r) dr$ намного меньше чем среднее расстояние $l_0$ между дефектами в каждой плоскости так, что с подавляющей вероятностью дефекты в каждом слое не перекрываются.

Разобьем внешнюю плоскость пленки квадратной сеткой с длиной ребра квадрата $\rho$ такой, что $\langle \tilde{r} \rangle \ll \rho \ll l_0$. Введем координатное описание квадратов сетки посредством пар целых чисел $\langle i, j \rangle \in \mathbb{Z}^2$. Проведем через линии, образующие сетку, плоскости, перпендикулярные плоскости пленки. Эти плоскости разбивают пленку на параллелепипеды, основания которых находятся на противоположных поверхностях пленки. Эти параллелепипеды будем называть *каналами*. Они разрезаются параллельными границами слоев пленки. В результате, каждый канал разбивается на одинаковые параллелепипеды с квадратными основаниями, расположенными на плоскостях, ограничивающих слои пленки. Высота каждого из них равна $d$. Каждый такой параллелепипед будем называть *ячейкой*. Таким образом, каждый канал разбивается на $N$ одинаковых ячеек. Каждая ячейка в пленке однозначно идентифицируется указанием тройки чисел — пары $\langle i, j\rangle$ и номером $m = 1 \div N$ того слоя пленки, которому эта ячейка принадлежит. Пусть размер $\rho$ выбран так, что в каждую из ячеек пленки, может попадать не более одного дефекта с вероятностью $\nu < 1$. Это возможно, ввиду $\langle \mathrm{r}\rangle \ll \rho \ll l_0$. Величина вероятности $\nu$ определяется выбором отношения $\rho / l_0$ и является свободным параметром конструируемой модели.

Обозначим $\tilde{r}_{i,j}^{(m)}$ случайный радиус дефекта, попавшего в ячейку с координатами $\langle i, j\rangle$. Так как случайные точечные поля $\{\tilde{x}_k^{(m)}\}$ пуассоновские, то все случайные события попадания или непопадания центров дефектов в каждую из ячеек являются статически независимыми в совокупности. В результате проведенной дискретизации, мы превратили случайные точечные поля $\{\tilde{x}_k^{(m)}\}$ на границах слоев в случайные точечные поля на дискретном множестве, точки которого описываются наборами $\langle i, j, m\rangle$. При этом случайные размеры $\tilde{r}_{i,j}^{(m)}, \langle i, j\rangle \in \mathbb{Z}^2, m = 1,\dots,N$ независимы в совокупности и одинаково распределены с плотностью $w(\cdot)$.

Будем теперь считать, что величина $\rho$ выбрана таким образом, что пробойная электронная лавина развивается в фиксированном канале и не проникает при своем движении в соседние каналы. Более того, будем считать, что $\rho \ll d$. Это позволяет нам пренебречь разницей между длиной каждого звена ломанной и толщиной $d$ слоя пленки. При таких допущениях сумма (1) в канале, определяемом парой $\langle i, j\rangle$, равна $UNd - (U - U_0)\tilde{r}_{i,j}$, где $\tilde{r}_{i,j} = \sum_{m=1}^{N} \tilde{r}_{i,j}^{(m)}$ — суммарные «размеры» воздушных включений в каждом канале, определяемом парой $\langle i, j\rangle$ и состоящем из $N$ последовательно уложенных ячеек. Тогда формула (1) принимает вид

$$\tilde{E} = E_0 - \nu \max_{\langle i,j\rangle} \tilde{r}_{i,j}, \tag{2}$$

где $E_0 = UNd$ — напряжение электрического пробоя чистого полимерного материала и $\nu = U - U_0 > 0$. При этом случайные величины $\tilde{r}_{i,j}$ также независимы в совокупности и одинаково распределены. Каждая из них представляет собой сумму независимых, одинаково распределенных случайных величин, распределенных с плотностью $w(r)$.

Электронная лавина электрического пробоя реализуется в том канале, в котором разность между суммарными толщинами полимерного материала в канале и воздушными включениями наименьшая. Поэтому существенно, что при определении случайной величины $\tilde{E}$ нужно вычислять $\max$ по всем каналам. Тогда вероятность $\Pr\{\tilde{E} < E\}$ возникновения электрического пробоя, если $\tilde{E}$ превысит некоторое напряжение $E$, сводится к определению распределения вероятностей максимума выборки независимых одинаково распределенных величин

$$\Pr\{\tilde{E} < E\} = \Pr\left\{\max_i \tilde{r}_i > s\right\},$$

где $s = (E_0 - E)/\nu$. Пользуясь свойствами статистической независимости и одинаковой распределенности случайных величин $\tilde{r}_{i,j}$ со случайной величиной $\tilde{r}_{0,0}$, находим при $E > E_0$

$$\Pr\{\tilde{E} < E\} = 1 - (\Pr\{\tilde{r}_{0,0} < s\})^M,$$

где $s \geq 0$ и $M$ — число каналов. Следовательно, плотность распределения случайной величины $\tilde{E}$ равна

$$f(E) = \frac{d}{dE}\Pr\{\tilde{E} < E\} = \nu^{-1} M \cdot [Q_N(s)]^{M-1} \cdot q_N(s)|_{s=(E_0-E)/\nu}, \tag{3}$$

где $ds/dE = -\nu^{-1}$ и $Q_N(s) = \Pr\{\tilde{r}_{0,0} < s\}$, $q_N(s) = dQ_N(s)/ds$.

В работе [3] показано на основе анализа класса модельных одновершинных плотностей распределения для случайной величины $\tilde{r}_{0,0}$, что наличие множителя $[Q_N(s)]^{M-1}$ в формуле (3) не приводит к нарушению одновершинности плотности распределения $f(E)$ для максимума выборки независимых, одинаково распределенных случайных величин в том случае, если $q_N(s)$ является одновершинной плотностью. Поэтому можно думать, что нарушение одновершинности распределения вероятностей напряжений электрического пробоя многослойной пленки следует пытаться объяснить нарушением одновершинности плотности $q_N(s)$. Займемся анализом этой возможности.

Прежде всего, найдем явную формулу для плотности. Вероятность $Q_N(s)$ состоит из суммы по $k$ вероятностей случайных событий $\{\tilde{r}_{0,0} < s,$ и $k$ ячеек канала содержат дефекты$\}$, которые являются произведением независимых при $k > 0$ событий $\{\tilde{r}_{1,1} < s\}$ и $\{k$ ячеек канала содержат дефекты$\}$. Вероятность последнего события, связанная с последовательностью независимых испытаний, равна

$$\Pr\{k \text{ слоев содержат дефекты}\} = \binom{N}{k}(1-v)^{N-k} v^k.$$

При $k = 0$ условная вероятность $\Pr\{\tilde{r}_{0,0} < s \mid k = 0\}$ равна функции Хевисайда $\theta(r) = \{1$ при $r \ge 0;$ $0$ при $r < 0\}$, так как $\tilde{r}_{0,0} = 0$. Тогда по формуле полной вероятности получаем

$$Q_N(s) = \Pr\{\tilde{r}_{0,0} < s\} = (1-v)^N \theta(s) + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} v^k (1-v)^{N-k} \Pr\{\tilde{r}_{0,0} < s \mid k \ne 0\}. \tag{4}$$

Таким образом, искомая вероятность полностью определяется распределением вероятностей типичной случайной величины $\tilde{r}_{0,0}$. Последнея представляет собой распределение вероятностей суммы $k$ независимых, одинаково распределенных в соответствии с плотностью $w(r)$ случайных величин. Поэтому (см., например, [4]) она равна

$$\Pr\{\tilde{r}_{0,0} \le s \mid k \ne 0\} = \int_0^s \underbrace{(w * \ldots * w)}_{k}(r)\,dr, \tag{5}$$

где символом $*$ обозначена операция свертки плотностей распределений вероятностей. В результате, плотность распределения $q_N(s)$ дается следующей формулой

$$q_N(s) = (1-v)^N \delta(s) + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} v^k (1-v)^{N-k} \underbrace{(w * \ldots * w)}_{k}(s), \tag{6}$$

где учено, что $d\theta(s)/ds = \delta(s)$ — функция Дирака.

Наличие $\delta$-функционной особенности в плотности распределения $q_N(s)$ в точке $s = 0$ приводит к наличию $\delta$-функционной особенности в точке $E = E_0$ в плотности распределения $f(E)$, что проявляется в наличии максимума на гистограммах экспериментальных данных. Таким образом, для установления наличия многовершинности распределения вероятностей напряжений электрического пробоя достаточно показать, что плотность распределения $q_N(s)$ имеет, по крайней мере, еще одну вершину в некоторой точке $s \ne 0$.

## 4. Анализ статистической модели

Покажем, что в случае, когда типичные размеры дефектов очень малы по сравнению с $d$, а значения параметра $v$ не очень малы, то плотность $q_N(s)$ имеет вершину при $s \ne 0$.

На практике тип и параметры плотности $w(r)$ и вероятность $v$ неизвестны. Поэтому при теоретическом анализе приходится оперировать какой-либо модельной плотностью и подбирать, посредством обработки экспериментальных данных, значения ее параметров. В связи с этим, найдем такую модельную плотность $w(r)$, которая бы приводила к нарушению одновершинности плотности $q_N(s)$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda d$ — большая величина так, что $\langle \tilde{r} \rangle = \lambda^{-1} \ll d$. Тогда, можно считать, что $w(r)$ — экспоненциальна $w(r) = \lambda \exp(-\lambda r)$, так как дефекты с очень малыми размерами являются наиболее вероятными. Такая плотность часто используется в теории надежности [5]. Для данной $w(r)$, согласно (6), при $s > 0$ имеем

$$q_{_N}(s)=\exp(-\lambda s)R_N(s), \qquad R_N(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\binom{N}{k}(\nu\lambda)^k(1-\nu)^{N-k}.$$

Тогда

$$q_{_N}'(s)=\exp(-\lambda s)\big[R_{N'}(s)-\lambda R_N(s)\big], \qquad R_{N'}(s)=\sum_{k=2}^{N}\frac{s^{k-2}}{(k-2)!}\binom{N}{k}(\nu\lambda)^k(1-\nu)^{N-k}, \tag{7}$$

$$R_{N'}(s)-\lambda R_N(s)=-\frac{\lambda}{N!}(\nu\lambda)^N s^{N-1}+\lambda\sum_{k=0}^{N-2}\frac{s^k}{k!}\frac{(\nu\lambda)^{k+1}(1-\nu)^{N-k-2}}{(k+2)}\binom{N}{k+1}\big[(N-k-1)\nu-(1-\nu)(k+2)\big]. \tag{8}$$

Анализ одновершинности основан на следующем утверждении.

**Теорема.** *Пусть полином* $P_N(s)$ *степени имеет вид* $P_N(s)=s^nP_{1,N-n}(s)-P_{2,n}(s)$, *где полиномы* $P_{1,N-n}(s)=a_0^{(1)}s^{N-n}+\ldots+a_{N-n}^{(1)}$ *и* $P_{2,n}(s)=a_0^{(2)}s^n+\ldots+a_n^{(2)}$ *имеют, соответственно, степени* $N-n$ *и* $n$, *то есть* $a_0^{(1)}>0$, $a_0^{(2)}>0$, *все коэффициенты которых неотрицательны. Тогда полином имеет один корень при* $s>0$.

Так как уравнение $q_N'(s)=0$ для экстремальных точек сводится к уравнению $\lambda R_N(s)-R_{N'}(s)=0$, то если для всех $k=0,1,\ldots,N-2$ выполняется неравенство $(N-k-1)\nu-(1-\nu)(k+2)<0$, все коэффициенты при степенях $s$ отрицательны. Тогда плотность $q_N(s)$ убывает, согласно утверждению теоремы, и поэтому она одновершинна с вершиной в $s=0$. Если же параметры $\nu$ и $N$ таковы, что реализуется обратное неравенство при $k=0\div N-2$, то возможно появление еще одной вершины.

Неравенство эквивалентно $(N+1)\nu<k+2$, т. е. оно имеет место при $\nu<2/(N+1)$ для всех $k$. Тогда при $\nu>2/(N+1)$ существуют такое $k_*$, что $k\le k_*$ коэффициенты полинома $[R_N(s)-\lambda R'(s)]$ отрицательны, а при $k>k_*$ коэффициенты положительны. Наоборот, при $\nu<2/(N+1)$ все коэффициенты отрицательны. Применяя утверждение теоремы, заключаем, что при $\nu<2/(N+1)$ плотность $q_N(s)$ одновершинна, а при $\nu>2/(N+1)$ у нее появляется еще одна дополнительная вершина.

## 5. Заключение

Сконструированная статистическая модель позволила выявить физическую причину экспериментально наблюдаемого явления нарушения одновершинности плотности $f(E)$ распределения напряжений электрического пробоя электроизолирующих эмаль-лаковых покрытий. Показано, что, в условиях малости среднего размера дефекта по сравнению с толщиной $d$ слоя и достаточно большой плотности дефектов, нарушение одновершинности происходит вследствие того, что на толщине одного слоя покрытия может находится не более одного дефекта. При этом одна из вершин плотности $f(E)$ обязательно совпадает с напряжением пробоя $E_0$ бездефектного полимерного материала.

## Литература


1. *Peshkov I. B.* Electrotechnical materials, electric capacitors, wires. – Moscow : Nauka, 1981. – 112 p.

2. *Braginskii R.P., Gnedenko B.V., Zaitseva G.M., Molchanov S.A.* Theoretical and statistical investigation of the defect set in enamel-laquer electrically insulting coatings // Soviet Math. Dokl. – 1989. – 38, No 3. – P. 501–505.

3. *Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D.* Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables // Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – 1479. – 012104. doi:10.1088/1742-6596/1479/1/012104

4. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. – М. : Наука, 1969.

5. *Gnedenko B. V., Belyaev Yu. K., Solov'ev A. D.* Mathematical Methods of Reliability Theory. – N.Y. : Academic Press, 1969.

УДК 538.915

# ЭЛЕКТРОННАЯ СТРУКТУРА И РЕНТГЕНОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОНОСИЛИЦИДА ЖЕЛЕЗА

**Г. П. Потуданский, Я. А. Пешков, С. И. Курганский**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В настоящей работе приведено теоретическое моделирование зонной структуры, полной и парциальных плотностей электронных состояний и спектров ближней тонкой структуры края рентгеновского поглощения вблизи *K*-края железа для структуры моносилицида железа. Проведено сравнение смоделированного спектра с экспериментальным.
**Ключевые слова:** моносилицид железа, электронная структура, метод APW+lo, XANES, *K*-край.

## Введение

В последнее время большой интерес проявляется к исследованию физических свойств полуметаллических ферромагнитных сплавов и многослойных наноструктур [1, 2]. Для исследования таких сплавов необходимы исчерпывающие знания о физических свойствах структур, наиболее схожих по своему составу к исследуемым. Например, для исследования $Co_2FeSi$ или $Co_{45}Fe_{45}Zr_{10}/SiO_2$ необходимы исследования FeSi. Ранее предполагалось, что электронная структура FeSi и других моносилицидов переходных металлов (CoSi, CrSi) хорошо изучена и их электромагнитные свойства могут быть надёжно интерпретированы на основе экспериментальных и теоретических работ об электронном строении этих фаз. Тем не менее, за последние десятилетия появились данные о том, что кроме так называемых клатратных кристаллов [3, 4], являющихся перспективными термоэлектрическими материалами, многие эффективные термоэлектрические материалы принадлежат к классу топологических изоляторов и полуметаллов Вейля [5]. Одним из таких материалов является FeSi. Моносилицид железа является полупроводником с непрямой запрещённой зоной при температурах от 100 K до 200 K. Однако вне диапазона этих температур он ведёт себя как «плохой» металл. Для объяснения уникального электронного и магнитного поведения были предложены различные механизмы: электрон-фононные взаимодействия, спиновые флуктуации и возбуждение заряда [6].

Целью данной работы является теоретическое исследование электронной структуры моносилицида железа, в частности, спектров ближней тонкой структуры края рентгеновского поглощения (x-ray absorption near edge spectra — XANES) вблизи *K*-края поглощения железа.

## 1. Метод расчёта

В рамках теории функционала плотности (DFT) были проведены расчеты электронной структуры моносилицида железа в квантово-механическом программном пакете Wien2k, в основе которого лежит полнопотенциальный метод присоединённых плоских волн с локальными орбиталями (FP-APW+lo) [7]. Расчет FeSi проводился объемным методом FP-APW+lo с обменно-корреляционным функционалом в приближении модифицированного обменно-корреляционного потенциала Беки-Джонсона (mBJ-LDA), который позволяет получить более точное значение ширины запрещенной зоны полупроводников и диэлектриков [8].

Для вычисления плотностей электронных состояний и зонных структур в основном состоянии использовалась обычная элементарная ячейка и 10000 **k**-векторов в первой зоне Бриллюэна. Для расчетов электронной структуры в возбуждённом состоянии, которое необходимо для корректного описания спектров XANES, использовалась суперъячейка и 200 **k**-векторов в первой зоне Бриллюэна. Параметр $R_{mt} \times k_{\max}$, определяющий число базисных функций, брался равным 7, где $R_{mt}$ — наименьший из радиусов muffin-tin сфер, $k_{\max}$ — граница обрыва присоединенных плоских волн.

При атмосферном давлении моносилицид железа (накуит) стабилен до температуры 1683 K [9]. Накуит (FeSi) принадлежит к кубической сингонии, имеет пространственную группу симметрии *198_P213* и элементарную ячейку с параметрами $a = b = c = 4.4860$ Å, которая содержит 4 формульных единицы. Координаты атомов в элементарной ячейке приведены в табл. 1 [10].

Таблица 1

*Координаты атомов FeSi [10]*

| Координаты атомов | X/a | Y/b | Z/c |
|---|---|---|---|
| Fe | 0.6340 | 0.6340 | 0.6340 |
| Fe | 0.8660 | 0.3660 | 0.1340 |
| Fe | 0.3660 | 0.1340 | 0.8660 |
| Fe | 0.1340 | 0.8660 | 0.3660 |
| Si | 0.3445 | 0.3445 | 0.3445 |
| Si | 0.1555 | 0.6555 | 0.8445 |
| Si | 0.6555 | 0.8445 | 0.1555 |
| Si | 0.8445 | 0.1555 | 0.6555 |

Для моделирования спектров ближней тонкой структуры края рентгеновского поглощения (XANES) был выполнен зонный расчет в возбужденном состоянии. Для этого создается остовная дырка и добавляется один электрон в зону проводимости для сохранения электронейтральности. Для исключения взаимодействия соседних возбужденных атомов создается суперъячейка с объемом, большим, чем объем элементарной ячейки. Размер суперъячейки подбирается таким образом, чтобы расчеты при двух последовательных увеличениях суперъячейки совпадали между собой. Для вычисления *K*-края XANES остовная дырка создавалась на остовном 1*s*-уровне, согласно механизму измерения *K*-края XANES, где остовные электроны, поглощая пучок высокоэнергетических фотонов, выбиваются с 1*s*-уровня. Расчет проводился с использованием универсального приближении обобщенной градиентной аппроксимации (PBE-GGA).

## 2. Результаты и обсуждение

На рис. 1 приведена структура FeSi и её первая зона Бриллюэна. Визуализация структуры осуществлялась с помощью программы XCrySDen.

Зонная структура для основного состояния FeSi представлена на рис. 2. Ширина валентной зоны FeSi, минимум которой приходится на точку $\Gamma$, составила 14.52 эВ. Валентная зона имеет два конкурирующих максимума (потолка): в направлении $\Delta$ и направлении $\Lambda$, а дно зоны проводимости приходится на направление $\Sigma$ первой зоны Бриллюэна. Расчетная ширина запрещенной зоны для FeSi составила 0.127 эВ. Полученное значение с точностью до сотых соответствует экспериментальному значению 0.13 эВ [11].

На рис. 3 приведены спектры полной и локальных парциальных плотностей электронных состояний (ПЭС), полученных на основе зонного расчета для основного состояния FeSi.

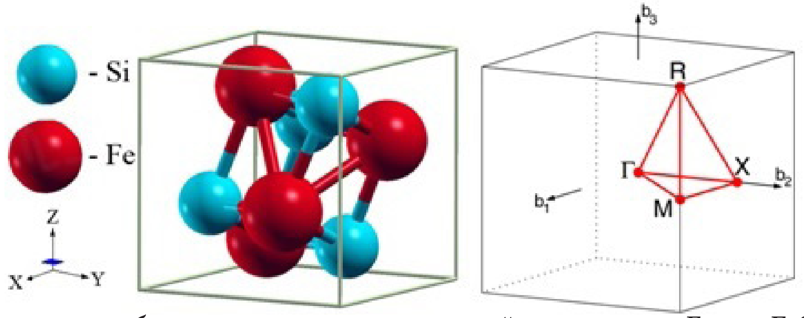



*Рис. 1. Элементарная кубическая примитивная ячейка решетки Бравэ FeSi и первая зона Бриллюэна FeSi. Красной линией обозначен путь обхода неприводимой части зоны Бриллюэна при расчете зонной структуры*

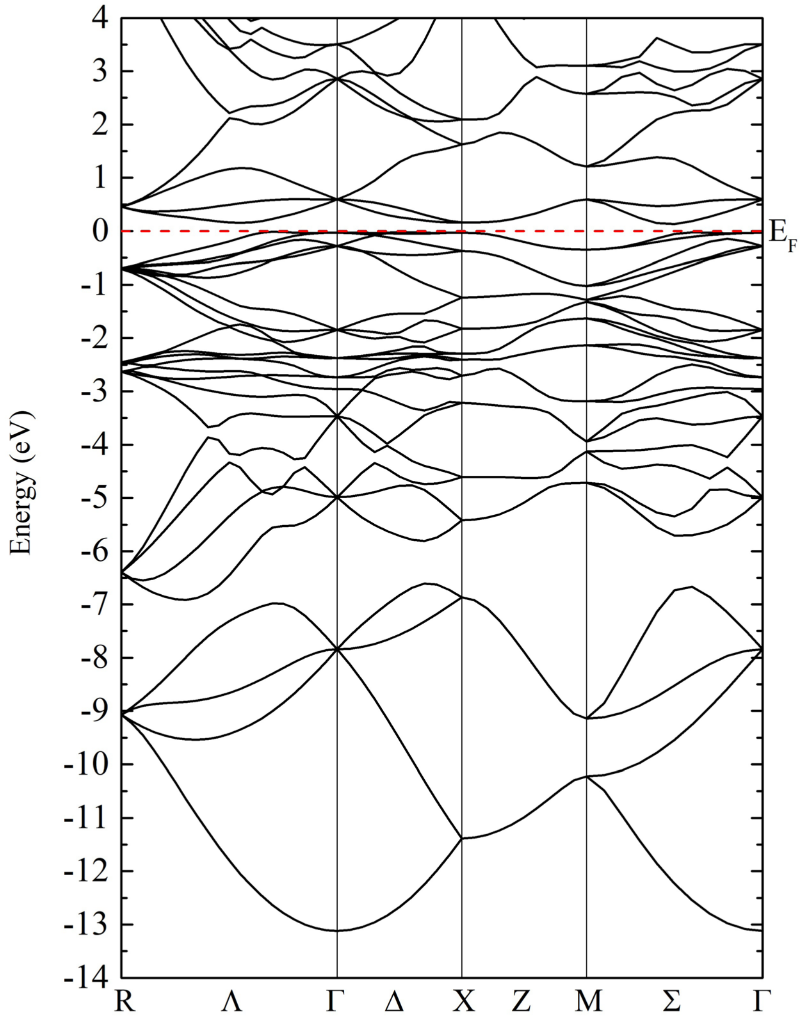



*Рис. 2. Зонная структура FeSi*

Анализ парциальных ПЭС FeSi показывает, что основной вклад дают *d*-состояния железа, локализованные в интервале от –6 эВ и выше относительно уровня Ферми, в то время как *s*- и *p*-состояния кремния преимущественно локализованы соответственно в диапазонах 6.5-13 эВ и 0-7 эВ ниже уровня Ферми. На самом же уровне Ферми образовался минимум как *d*-состояний железа, так и *s*- и *p*-состояний кремния.

Необходимость в моделировании XANES-спектров, отражающих распределение плотности состояний, вносящих вклад в формирование зоны проводимости, обусловлена возможностью сопоставления с соответствующими экспериментальными спектрами и на этой основе

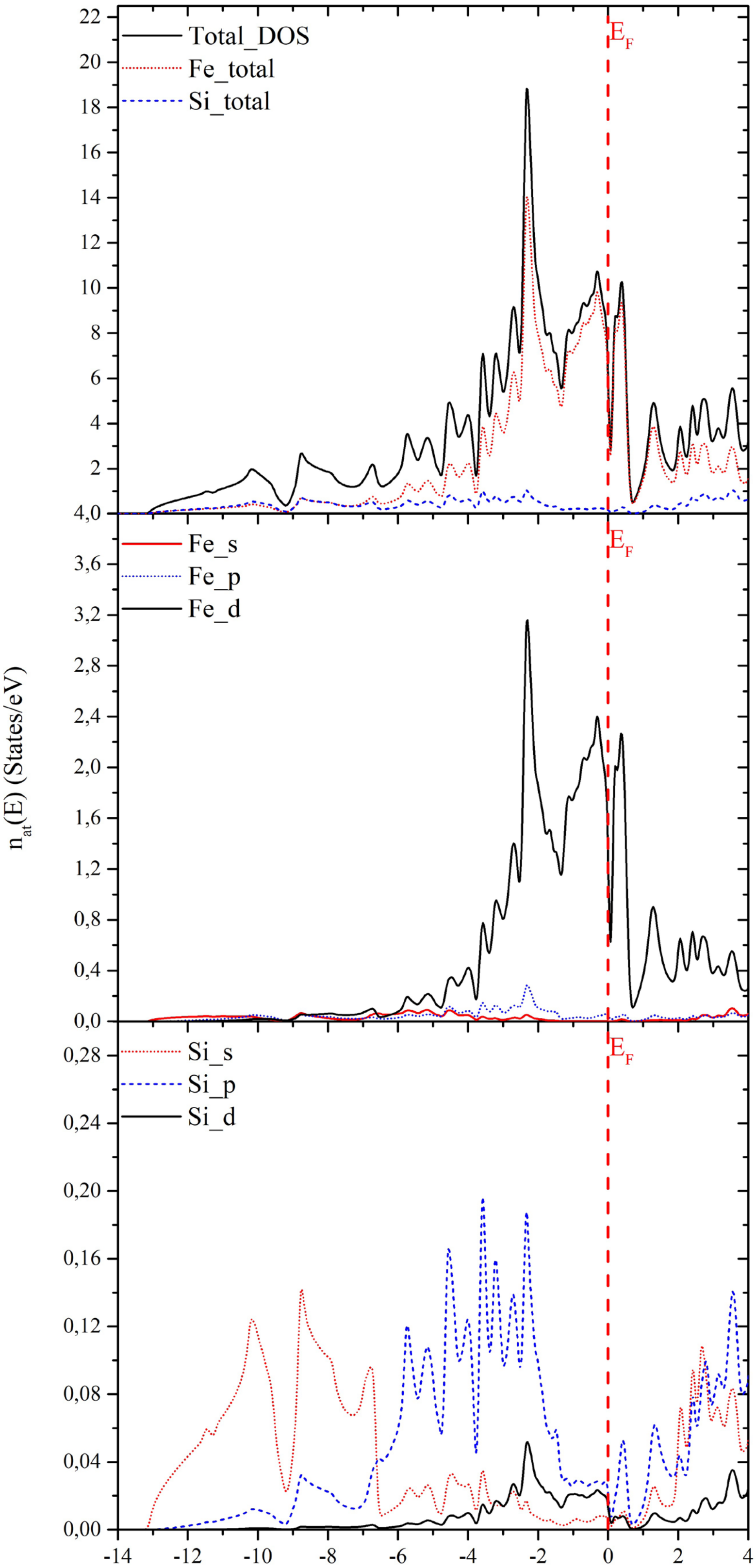



*Рис. 3. Полная и парциальные ПЭС FeSi*

надежной интерпретации последних. Нами был рассчитан *K*-спектр поглощения, при моделировании которого был использован универсальный функционал PBE-GGA, поскольку он позволяет получать надежные расчеты как для металлов, так и для полупроводников при расчете XANES-спектров.

На рис. 4 приведено сравнение зарегистрированного экспериментально *K*-края поглощения железа XANES (FeSi_exp) [12] и смоделированного спектра (FeSi_calc). Край поглощения находится при энергии ~7110 эВ, за которым следует локальный максимум при энергии ~7124 эВ. Главный максимум находится при энергии ~7140 эВ. При энергиях выше ~7145 эВ спектры начинают различаться, поскольку мы имеем дело с другим механизмом рассеяния — EXAFS (расширенная тонкая структура рентгеновского поглощения), где главный вклад в поглощение дает однократное рассеяние фотоэлектрона.

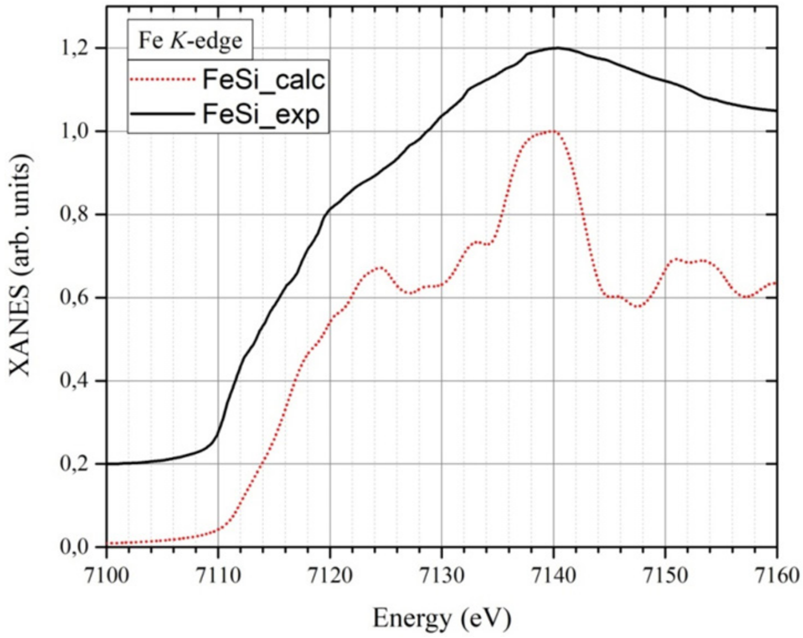



*Рис. 4. Сравнение экспериментального [12] и теоретического XANES K-спектров железа в FeSi*

## Заключение

Таким образом, можно заметить хорошее согласие результатов расчетов с данными, полученными экспериментальным путём. Материалы, полученные в данной работе, могут быть использованы для анализа электронного строения структур на основе кремния и железа.

## Литература

1. *Kalt, J.* Lattice dynamics and polarization-dependent phonon damping in α-phase FeSi2 nanostructures / J. Kalt, M. Sternik, B. Krause, I. Sergueev, M. Mikolasek, D. Bessas, O. Sikora, T. Vitova, J. Göttlicher, R. Steininger, P. T. Jochym, A. Ptok, O. Leupold, H.-C. Wille, A. I. Chumakov, P. Piekarz, K. Parlinski, T. Baumbach, S. Stankov // Physical Review B. – 2020. – V. 101, No 16. – P. 165406-1 – 165406-3.

2. *Potudanskii, G. P.* Oscillating fine structure of x-ray absorption and atomic structure of metallic layers in a magnetic multilayer nanostructure (Co45Fe45Zr10/SiO2)n / G. P. Potudanskii, S. I. Kurganskii, E. P. Domashevskaya // Mater. Res. Express. – 2019. – V. 6, No 11. – P. 1150g9-1 – 1150g9-10.

3. *Борщ, Н. А.* Электронная структура Zn-замещенных германиевых клатратов / Н. А. Борщ, Н. С. Переславцева, С. И. Курганский // Физика и техника полупроводников. – 2009. – Vol. 43, № 5. – P. 590–594.

4. *Борщ, Н. А.* Электронная структура и спектральные характеристики Zn-замещенных клатратных силицидов / Н. А. Борщ, Н. С. Переславцева, С. И. Курганский // Физика и техника полупроводников. – 2011. – Т. 45, № 6. – С. 729–739.

5. *Бурков, А. Т.* Низкотемпературный транспорт в моносилициде кобальта и сплавах на его основе / А. Т. Бурков, С. В. Новиков, В. К. Зайцев, Х. Рейсс // Физика и техника полупроводников. – 2017. – № 51. – С. 723–725.

6. *Tomczak, J. M.* Signatures of electronic correlations in iron silicide / J. M. Tomczak, K. Haule, G. Kotliar // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2012. – V. 109, No 9. – P. 3243–3246.

7. *Blaha, P.* WIEN2k: An APW+ lo program for calculating the properties of solids / P. Blaha, K. Schwarz, F. Tran, R. Laskowski, G.K.H. Madsen, L.D. Marks // The Journal of Chemical Physics. – 2020. – Vol. 152. – P. 074101-1 – 074101-30.

8. *Khan, I.* DFT-MBJ Studies of the Band Structures of the II-VI Semiconductors / I. Khan, I. Ahmad, H. A. Rahnamaye Aliabad, M. Maqbool // Materials Today: Proceedings. – 2015. – V. 2, No 10. – P. 5122–5127.

9. *Massalski, T. B.* Binary alloy phase diagrams / T. B. Massalski, H. Okamoto, P. R. Subramanian, L. Kacprzak ; ASM international. – Ohio: Materials Park, 1992. – Vol. 3. – 2874 p.

10. *Nicheng, S.* Naquite, FeSi, a new mineral species from Luobusha, Tibet, western China / S. Nicheng, B. Wenji, L. Guowu, X. Ming, Y. Jingsu, M. Zhesheng, R. He // Acta Geologica Sinica-English Edition. – 2012. – V. 86, No 3. – P. 533–538.

11. *Mattheiss, L. F.* Band structure and semiconducting properties of FeSi / L. F. Mattheiss, D. R. Hamann // Phys. Rev. B. – 1993. – V. 47, No 20. – P. 13114–13119.

12. Pong, W. F. X-ray absorption studies of carbon-related materials / W. F. Pong, C. L. Yueh, Y. D. Chang, M.-H. Tsai, Y. K. Chang, Y. Y. Chen, J. F. Lee, S. L. Wei, C. Y. Wen, L. C. Chen, K. H. Chen, I. N. Lin, H. F. Cheng // Journal of synchrotron radiation. – 2001. – V. 8, No 2. – P. 145–149.

УДК 519.624;519.688;51-73;537.533.9

# О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ МИШЕНЯМИ

**М. А. Степович[1], В. В. Калманович[1], Е. В. Серегина[2]**

*[1]Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского*
*[2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Калужский филиал*

**Аннотация.** Рассмотрены некоторые возможности использования матричного метода для математического моделирования процессов взаимодействия широкого пучка киловольтных электронов с однородными и многослойными полупроводниковыми мишенями. Модельные расчёты проведены для процессов диффузии неравновесных неосновных носителей заряда в однородных материалах и двухслойных структурах типа «плёнка-подложка». Показано, что аналитическое и численное решения дифференциальных уравнений диффузии матричным методом дают практически одинаковые результаты. В то же время решение этих уравнений с правой частью, отвечающей электрофизическим параметрам плёнки, в т. ч. и при проведении расчётов в ином подложечном материале, может дать лишь оценочные значения распределений неравновесных неосновных носителей заряда в результате их диффузии в двухслойной структуре.
**Ключевые слова:** матричный метод, математическое моделирование, электронный пучок, неравновесные неосновные носители заряда, полупроводники, диффузия.

## Введение

В полупроводниковом материаловедении при проведении исследований материалов с использованием пучков электронов наиболее часто в качестве информативного регистрируется сигнал, связанный с генерацией и диффузией в полупроводниковой мишени неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) и/или регистрируются сигналы, характеристики которых существенно зависят от распределения ННЗ, например, катодолюминесцентное излучение, возникающее при излучательной рекомбинации ННЗ, генерированных в полупроводниковой мишени киловольтными электронами [1, 2]. Регистрация информативных сигналов, возбуждаемых в полупроводниковой мишени, и сравнение экспериментальных данных с математической моделью этого явления позволяют идентифицировать параметры полупроводника, которые весьма сложно или даже невозможно определить другими методами [2, 3]. При использовании широких электронных пучков задача моделирования становится одномерной [2, 4], что в определённой степени позволяет упростить задачу математического моделирования, хотя в этом случае иногда для решения задач идентификации приходится использовать и численные методы [5–8]. Подобный подход может быть предложен и для многослойных мишеней, в частности, использование матричного метода [9–12] в таких случаях может привести к точному аналитическому решению задачи. Рассмотрение возможностей использования матричного метода и некоторых проблем, возникающих при решении дифференциальных уравнений диффузии, и составляет предмет рассмотрения в настоящей работе.

## 1. Постановка задачи

В случае одномерной диффузии в конечный полупроводник вдоль оси $Z$, перпендикулярной поверхности $n$-слойной полупроводниковой структуры ($z \in [0, l]$) распределение ННЗ по глубине находится как решение дифференциального уравнения [8, 13]

$$\frac{d}{dz}\left(D^{(i)}(z)\frac{d\Delta p^{(i)}(z)}{dz}\right)-\frac{\Delta p^{(i)}(z)}{\tau^{(i)}(z)}=-\rho^{(i)}(z),\ i=\overline{1,n} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$D^{(1)}\left.\frac{d\Delta p^{(1)}(z)}{dz}\right|_{z=0}=\nu_s^{(1)}\Delta p^{(1)}(0),\ D^{(n)}\left.\frac{d\Delta p^{(n)}(z)}{dz}\right|_{z=l}=-\nu_s^{(n)}\Delta p^{(n)}(l). \tag{2}$$

Верхний индекс в скобках указывает номер слоя. Для многослойной структуры обозначим: $z_1=0,\ z_{n+1}=l$ — внешние границы полупроводника, $z_2,\ z_3,\ ...,\ z_n$ — координаты границ раздела слоёв; $D^{(i)},\ L^{(i)},\ \tau^{(i)}$ — электрофизические параметры: коэффициент диффузии, диффузионная длина и время жизни ННЗ в $i$-м слое соответственно, при этом $L^{(i)}=\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}$. На границах полупроводника (при $z=0$ и при $z=l$) приведённые скорости поверхностной рекомбинации $S^{(1)}=L^{(1)}\nu_s^{(1)}/D^{(1)}$, $S^{(n)}=L^{(n)}\nu_s^{(n)}/D^{(n)}$, где $\nu_s^{(1)}$ и $\nu_s^{(n)}$ — скорости поверхностной рекомбинации ННЗ на поверхности первого и $n$-го слоёв, соответственно. Функция $\Delta p^{(i)}(z)$ описывает распределение по глубине в $i$-м слое неравновесных ННЗ, генерированных внешним энергетическим воздействием, после их диффузии в полупроводнике. Функция $\rho^{(i)}(z)$ — зависимость от координаты плотности ННЗ, генерированных широким электронным пучком в полупроводниковой мишени. Для широкого электронного пучка $\rho^{(i)}(z)$ может быть найдена из выражения для плотности энергии электронного пучка $\rho^{*(i)}(z)$, выделяемой в мишени в единицу времени до начала процесса диффузии [9], делением $\rho^{*(i)}(z)$ на энергию образования электронно-дырочной пары.

## 2. Алгоритм аналитического решения матричным методом

Введём вектор-столбцы $V, W$ и матрицу $K$ на каждом слое [8, 11, 13]:

$$V^{(i)}(z)=\begin{pmatrix}\Delta p^{(i)}(z)\\ J^{(i)}(z)\end{pmatrix},\ W^{(i)}(z)=\begin{pmatrix}w^{(i)}(z)\\ -D^{(i)}\dfrac{dw^{(i)}(z)}{dz}\end{pmatrix},$$

$$K^{(i)}(z,z_i)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\dfrac{z-z_i}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} & -\sqrt{\dfrac{\tau^{(i)}}{D^{(i)}}}\operatorname{sh}\dfrac{z-z_i}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}}\\ -\sqrt{\dfrac{D^{(i)}}{\tau^{(i)}}}\operatorname{sh}\dfrac{z-z_i}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} & \operatorname{ch}\dfrac{z-z_i}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}}\end{pmatrix},$$

где $J^{(i)}(z)=-D^{(i)}\Delta p^{(i)}(z)$ — поток, $w^{(i)}(z)$ — некоторое частное решение уравнения (1) для $i$-го слоя. Тогда решение уравнения (1) для $i$-го слоя при известных $\Delta p^{(i)}(z_i)$ и $J^{(i)}(z_i)$ имеет вид

$$V^{(i)}(z)=K^{(i)}(z,z_i)\left(V^{(i)}(z_i)-W^{(i)}(z_i)\right)+W^{(i)}(z),\ z_i\le z\le z_{i+1}. \tag{3}$$

Применяя последовательно с первого слоя формулу (3) и считая контакт слоёв идеальным, т.е. $V^{(i)}(z_{i+1})=V^{(i+1)}(z_{i+1})$, получим

$$V^{(i)}(z)=L^{(i,1)}(z,z_1)V^{(1)}(z_1)+\sum_{j=1}^{i}L^{(i,j)}(z,z_j)\left(W^{(j-1)}(z_j)-W^{(j)}(z_j)\right)+W^{(i)}(z), \tag{4}$$

где $W^{(0)}(z_1)=0,\ L^{(i,k)}(z,z_j)=K^{(i)}(z,z_i)K^{(i-1)}(z_i,z_{i-1})\ ...\ K^{(k)}(z_{k+1},z_k),\ i\ge k,\ z_i\le z\le z_{i+1}$.

В конечной точке системы слоёв, согласно (4), получим

$$V^{(n)}(z_{n+1})=L^{(n,1)}(z_{n+1},z_1)V^{(1)}(z_1)+\sum_{k=1}^{n}L^{(n,k)}(z_{i+1},z_k)\left(W^{(k-1)}(z_k)-W^{(k)}(z_k)\right)+W^{(n)}(z_{n+1}). \tag{5}$$

Формула (5) связывает значения потенциала $\Delta p^{(i)}(z)$ и потока $J^{(i)}(z)$ в первой и последней точке системы слоёв, что позволяет в общем случае сводить решение краевой задачи первого, второго или третьего типа при любом конечном числе слоёв к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Таким образом, аналитический матричный метод можно применять к решению краевых задач тепломассопереноса первого, второго или третьего типов для системы (3) в многослойной среде с любым конечным числом слоев. Однако для этого необходимо знать частное решение уравнения (1). В случае, если частное решение найти не удается или оно имеет очень сложный вид, можно по данному алгоритму получить численное решение задачи (1)–(2).

### 3. Численное решение матричным методом

Разобьём длину $l$ полупроводниковой структуры на $m$ отрезков и обозначим точки разбиения $z_j$, где $j$ — номер точки, $j=\overline{1,m+1}$, причём $z_1=0$ и $z_{n+1}=l$. Правую часть уравнения (1) аппроксимируем некоторой функцией $f^{(j)}(z)$ на каждом отрезке разбиения $z\in[z_j, z_{j+1}]$. Обозначим $w^{(j)}(z)$ — частное решение уравнения (1) на отрезке $z\in[z_j, z_{j+1}]$ с $f^{(j)}(z)$ в правой части.

В каждой точке $z_j$ найдем числовые значения матриц $W$ и $K$, учитывая номер слоя $i$, на который попадает точка $z_j$:

$$K^{(j)}(z_{j+1}, z_j)=\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\dfrac{z_{j+1}-z_j}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} & -\sqrt{\dfrac{\tau^{(i)}}{D^{(i)}}}\operatorname{sh}\dfrac{z_{j+1}-z_j}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} \\ -\sqrt{\dfrac{D^{(i)}}{\tau^{(i)}}}\operatorname{sh}\dfrac{z_{j+1}-z_j}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} & \operatorname{ch}\dfrac{z_{j+1}-z_j}{\sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}} \end{pmatrix},$$

$$W^{(j)}(z_{j+1}, z_j)=\begin{pmatrix} w^{(j)}(z_j) \\ -D^{(i)}\left.\dfrac{dw^{(j)}(z)}{dz}\right|_{z=z_j} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$V^{(j)}(z_j)=L^{(j,1)}(z_j, z_1)V^{(1)}(z_1)+\sum_{k=1}^{j}L^{(j,k)}(z_j, z_k)\left(W^{(k-1)}(z_k)-W^{(k)}(z_k)\right)+W^{(j)}(z_j),\ j=\overline{1,m+1}.$$

В данной формуле элементы $V^{(1)}(z_1)$ при решении задачи (1)–(2) изначально неизвестны. Связав $V^{(1)}(z_1)$ и $V^{(m+1)}(z_{m+1})$ и решив систему линейных уравнений с двумя неизвестными, найдем $V^{(1)}(z_1)$, а затем и $V^{(j)}(z_j)$ для всех $j=\overline{1,m+1}$.

### 4. Численное решение методом конечных разностей

Для дифференциальной задачи (1), (2) построена консервативная разностная схема на равномерной сетке $\overline{D}_h=\{z_i=ih,\ i=0,\dots,N,\ h=l/N\}$ [14]:

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{\Delta p_{i+1}-\Delta p_i}{h}-a_i\frac{\Delta p_i-\Delta p_{i-1}}{h}\right)-d_i\Delta p_i=-\varphi_i,\quad 1\le i\le N-1,$$

$$\left(1+\frac{h^2}{2L_1^2}+\frac{S_1}{L_1}h\right)\Delta p_0-\Delta p_1=\frac{\tau_1 h^2\rho_0}{2L_1^2},\quad \left(1+\frac{h^2}{2L_2^2}+\frac{S_2}{L_2}h\right)\Delta p_N-\Delta p_{N-1}=\frac{\tau_2 h^2\rho_N}{2L_2^2}, \tag{6}$$

где $a_i=\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{z_{i-1}}^{z_i}\frac{dz}{D(z)}\right)^{-1}=\left(\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{ds}{D(z_i+sh)}\right)^{-1}$, $d_i=\displaystyle\int_{-0.5}^{0.5}\frac{ds}{\tau(z_i+sh)}$, $\varphi_i=\displaystyle\int_{-0.5}^{0.5}\rho(z_i+sh)ds.$

Здесь $\Delta p_i$ — приближённое значение точного решения $\Delta p(z_i)$, $\rho_i = \rho(z_i)$, а интегралы заменены их приближенными выражениями: $\frac{1}{h}\int\limits_{z_{i-1}}^{z_i}\frac{dz}{D(z)} \sim \frac{1}{D_{i-1/2}}$, $d_i \sim \frac{1}{\tau_i}$, $\varphi_i \sim \rho_i$. Система (6) решалась методом прогонки.

Численное решение методом конечных разностей получено на сетке из 450-ти ячеек с шагом $h = 0{,}0067$ мкм. Расчёты проведёны с помощью математических пакетов Maple и Matlab (MathWorks, Inc.) версии 7.5.0.342 на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор Intel Pentium E5400 (2x2.70 GHz, 2 MB Cache), объем оперативной памяти — 2 GB. Затраты машинного времени на расчёт распределений ННЗ аналитическим и численным методами составили примерно 2 с, что говорит о практической применимости предложенного аналитического матричного метода для решения рассматриваемой задачи.

### 5. Результаты моделирования и их обсуждение

Используя матричный метод, проведено математическое моделирование диффузии ННЗ в однородных и двухслойных полупроводниковых структурах типа «эпитаксиальная плёнка-монокристаллическая подложка» с параметрами, отвечающими электрофизическим параметрам реальных полупроводниковых материалов. Рассмотрены структуры «твёрдые растворы кадмий-ртуть-теллур — CdTe», «GaN — GaN, SiC, Si».

Некоторые возможности использования матричного метода для расчёта распределения концентрации ННЗ после их диффузии в однородном монокристаллическом кремнии при разбиении полупроводника по глубине в пределах 10 мкм на 20 слоёв одинаковых размеров представлены на рис. 1. Здесь и далее результаты расчётов аналитическим и численным методами практически совпадали и потому на рисунках отдельно не выделены.

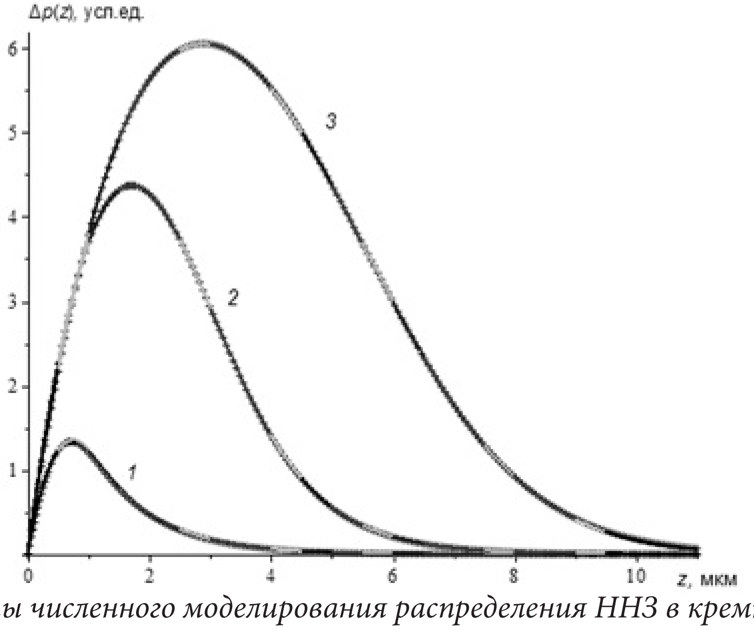



*Рис. 1. Результаты численного моделирования распределения ННЗ в кремнии матричным методом при разбиении участка от 0 мкм до 10 мкм на 20 слоёв (участки на кривых выделены). Энергия электронов пучка $E_0$ = 10 кэВ (кривая 1), $E_0$ = 20 кэВ (кривая 2), $E_0$ = 30 кэВ (кривая 3)*

Расчёты проводились для электрофизических параметров материала, характерных для выбранного типа мишени: скорости поверхностной рекомбинации $v_s = 10^{10}$ мкм/с, коэффициента диффузии $D = 10^8$ мкм$^2$/с, времени жизни ННЗ $\tau = 10^{-8}$с, диффузионной длины $L = \sqrt{D\tau} = 1$ мкм. В выбранном масштабе кривые, полученные численно матричным методом, совпадают с кривыми, построенными по аналитическому решению. Однако оценка относительной погрешности результатов показала, что в приповерхностном слое погрешность очень высока, и наибольшее значение имеет при $z = 0$ мкм. Это может объясняться неизбежностью округлений при вычислении аналитического результата, недостаточным количеством слоёв разбиения и др. При увеличении числа слоёв относительная погрешность уменьшается, при этом сохраняя наибольшие значения близко к поверхности полупроводника.

Некоторые возможности использования матричного метода для расчёта распределения концентрации ННЗ после их диффузии в двухслойной структуре «твёрдый раствор кадмий-ртуть-теллур — CdTe» представлены на рис. 2.

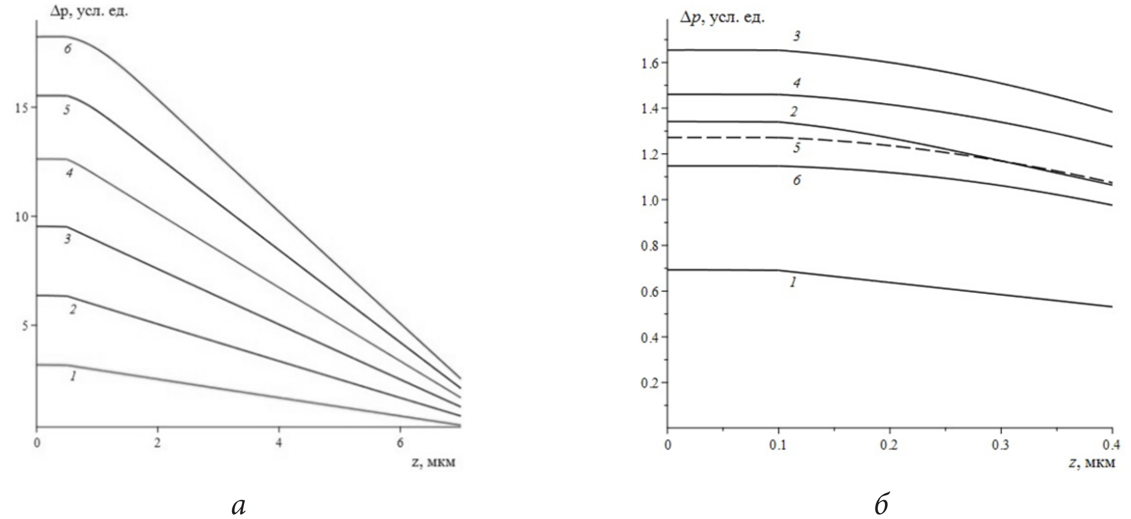



*Рис. 2. а — распределения по глубине ННЗ, генерированных электронным пучком в двухслойной полупроводниковой структуре* $Cd_{0,2}Hg_{0,8}Te/CdTe$ *толщиной 7 мкм (0,5 мкм —* $Cd_{0,2}Hg_{0,8}Te$ *и 6.5 мкм —* $CdTe$*); б — распределения ННЗ, генерированных электронным пучком в двухслойной полупроводниковой структуре* $Cd_{0,2}Hg_{0,8}Te/CdTe$ *толщиной 0,4 мкм (0,1 мкм –* $Cd_{0,2}Hg_{0,8}Te$ *и 0,3 мкм —* $CdTe$*). Энергия электронов пучка: 5 кэВ (кривые 1), 10 (2), 15 (3), 20 (4), 25 (5), 30 (6)*

Расчёты распределений по глубине ННЗ, генерированных широким электронным пучком, проведены для двухслойной полупроводниковой структуры $Cd_{0,2}Hg_{0,8}Te/CdTe$ разной толщины: а — толщиной 7 мкм (0,5 мкм — плёнка $Cd_{0,2}Hg_{0,8}Te$ и 6,5 мкм — подложка CdTe); б — толщиной 0,4 мкм (0,1 мкм — $Cd_{0,2}Hg_{0,8}Te$ и 0,3 мкм — CdTe). Энергия электронов пучка равна: 5 (кривая 1), 10 (2), 15 (3), 20 (4), 25 (5), 30 кэВ (6). В выбранном масштабе кривые, полученные численно матричным методом, совпадают с кривыми, построенными по аналитическому решению и потому на рисунках отдельно не выделены.

Результаты некоторых модельных расчётов распределения по глубине ННЗ, генерированных электронным пучком в двухслойной полупроводниковой структуре на основе нитрида галлия толщиной 0,4 мкм (0,1 мкм — плёнка GaN и 0,3 мкм — подложка GaN) для различных энергий электронов пучка: 10 (сплошная линия), 20 (пунктирная линия) и 30 кэВ (штрих-пунктирная линия), — приведены на рис. 3.

Для того, чтобы продемонстрировать влияние электрофизических параметров на результаты диффузии ННЗ, значения параметров выбраны следующими: для плёнки GaN время жизни ННЗ $\tau = 10^{-6}$ с, приведённая скорость поверхностной рекомбинации $S = 30$, диффузионная длина ННЗ $L = 35$ мкм, скорость поверхностной рекомбинации $v_s = 105 \cdot 10^7$ мкм/с и коэффициент диффузии $D = 122 \cdot 10^7$ мкм²/с; аналогичные значения для GaN-подложки: $\tau = 10^{-5}$ с, $S = 30$, $L = 30$ мкм, $v_s = 9 \cdot 10^7$ мкм/с и $D = 9 \cdot 10^7$ мкм²/с.

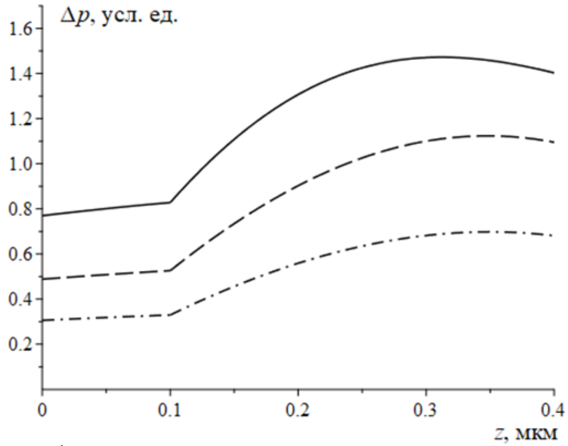



*Рис. 3. Распределения по глубине ННЗ, генерированных электронным пучком в двухслойной полупроводниковой структуре нитрида галлия толщиной 0,4 мкм (0,1 мкм – плёнка GaN и 0,3 мкм — подложка GaN) с различными электрофизическими параметрами на слоях для различных энергий электронов пучка: 10 (сплошная линия), 20 (пунктирная линия) и 30 кэВ (штрих-пунктирная линия).*

Существенное отличие параметров приводит к весьма существенным различиям в распределении потерь энергии электронами по глубине в этих монокристаллических материалах (см. рис. 3) — и, как следствие, к существенным различиям в распределении ННЗ или температуры в результате процессов тепломассопереноса.

Математическое моделирование процессов диффузии ННЗ показало, что существенное различие в параметрах плёнки и подложечного материала при проведении расчётов не позволяют использовать в правой части дифференциального уравнения (1) одно и то же значение $\rho(z)$ для точных расчётов распределений ННЗ или температуры в рассматриваемых двухслойных структурах. По-видимому, лучшие результаты могут быть получены при учёте нарушения монохроматичности первичных электронов при прохождении ими слоёв мишени [15, 16] В то же время даже без учёта этого явления получаемые оценочные значения позволяют использовать описываемый метод при расчётах в многослойных мишенях.

## Заключение

При математическом моделировании процессов тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием киловольтных электронов с полупроводниковыми мишенями, решение дифференциальных уравнений тепломассопереноса с правой частью, отвечающей электрофизическим параметрам плёнки, в т. ч. и при проведении расчётов в ином подложечном материале, может дать лишь оценочные значения распределений неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных широким пучком электронов, в результате их диффузии в такой двухслойной структуре.

## Благодарности

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

**Литература**


1. *Yacobi, B. G.* Cathodoluminescence microscopy of inorganic solids / B. G. Yacobi, D. B. Holt. – New York: Plenum Press, 1990. – 354 p.

2. *Степович, М. А.* Количественная катодолюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники : дис. … д-ра физ.-мат. наук : 01.04.07 / Степович Михаил Адольфович ; МГТУ им. Н. Э. Баумана. – Москва, 2003. – 351 с.

3. *Степович, М. А.* Об использовании методов математического анализа в некоторых задачах идентификации / М. А. Степович // Вестник Калужского университета. – 2008. – № 1-2. – С. 124–132.

4. *Kyser, D. F.* Spatial distribution of excess carriers in electron-beam excited semiconductors / D. F. Kyser, D. B. Wittry // Proc. IEEE. – 1967. – V. 55, No. 3. – P. 733–734.

5. *Серегина, Е. В.* О возможности реализации стохастической модели распределения неравновесных неосновных носителей заряда в полупроводниковом материале / Е. В. Серегина, А. М. Макаренков, М. А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2009. – № 10. – С. 75–86.

6. *Серегина, Е. В.* О модификации модели диффузии неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах, основанной на использовании рекурсивных тригонометрических функций, и оценка устойчивости решений для модифицированной модели / Е. В. Серегина, М. А. Степович, А. М. Макаренков // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2014. – № 9. – С.72–74.

7. *Макаренков, А. М.* Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области / А. М. Макаренков, Е. В. Серегина, М. А. Степович // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 5. – С. 801–813.

8. *Kalmanovich, V. V.* Comparison of analytical and numerical modeling of distributions of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of medium-energy electrons in a two-layer semiconductor structure / V. V. Kalmanovich, E. V. Seregina, M. A. Stepovich // Journal of Physics: Conf. Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. – 2020. – V. 1479. – Paper No. 012116 (10 p.).

9. *Гладышев, Ю. А.* Операторные методы при решении задачи переноса в многослойной среде / Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович // Прикладные задачи математики: Материалы XXIII международной научно-технической конференции / Научный редактор С. О. Папков. – Севастополь: Севастопольский государственный университет, 2015. – С. 106–110.

10. *Калманович, В. В.* О построении решений задач теории переноса в многослойной среде при наличии распределенных источников / В. В. Калманович // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: Сб. трудов VIII международной конференции. – Воронеж : Научная книга, 2015. – С. 166–169.

11. *Kalmanovich, V. V.* On the Possibility of a Numerical Solution of the Heat and Mass Transfer Problem with the Combined Matrix&Generalized Powers of Bers Method / V. V. Kalmanovich, E. V. Seregina, M. A. Stepovich // Journal of Physics: Conf. Series. – 2019. – V. 1163. – Paper No. 012012 (6 p.).

12. *Гладышев, Ю. А.* Об использовании матричного метода решения задач теплопроводности в многослойной среде при наличии фазовых переходов / Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2019. – С. 105–107.

13. *Калманович, В. В.* Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупро-

водниковыми структурами / В. В. Калманович, Е. В. Серегина, М. А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. – 2020. – Т. 84, № 7. – С. 1027-1033.

14. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

15. *Михеев, Н. Н.* Энергетический спектр электронов, прошедших плёночную мишень / Н. Н. Михеев, В. И. Петров, М. А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. – 1993. – Т. 57, № 9. – С. 7–11.

16. *Mikheev, N. N.* The Energy Spectrum of Electrons Passing through Film Targets and some of its Applications to Electron Beam Engineering / N. N. Mikheev, M. A. Stepovich // Materials Science and Engineering B. – 1995. – V. 32, Nos. 1-4. – P. 11–16.

# ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ВЫСШЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

УДК 372.800.2

# МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ ПЕРВОКУРСНИКАМИ

**О. Д. Горбенко, О. Ф. Ускова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье рассматриваются методические аспекты организации нового элемента учебного плана по направлению 02.03.02 – Фундаментальная информатика и информационные технологии. Рассматриваются требования к выполнению курсовой работы и отчету по ней. Приводится пример отчета по курсовой работе.
**Ключевые слова:** учебный план, информатика, программирование, структуры управления, структуры данных, функции.

## Введение

Курсовая работа для студентов 1 курса бакалавриата, обучающихся по кафедре математического обеспечения ЭВМ факультета прикладной математики, информатики и механики по направлению 02.03.02, введена в учебный процесс в 2019–2020 учебном году.

В соответствии с учебным планом указанного направления обучения студенты должны выполнить курсовую работу по дисциплине «Информатика и программирование». Цель курсовой работы – закрепить и продемонстрировать знания в области базовых структур данных и структур управления и навыки в разработке программ на языке программирования. Курсовая работа выполняется самостоятельно во внеучебное время. На ее выполнение отводится один месяц – с 1 по 30 апреля. Завершается выполнение курсовой работы представлением отчета в установленной форме и собеседованием с руководителем курсовой работы.

## *Структура курсовой работы*

Курсовая работа состоит в выполнении практического задания по разработке программ на языке программирования, в которых используются понятия массив данных, указатель на массив данных, функция. Поэтому результатом курсовой работы будут три программы (или три части одной программы):

в первой решение поставленной задачи осуществляется с использованием традиционного подхода к объявлению и созданию статического массива данных;

во второй используются языковые инструменты создания и объявления динамических массивов данных (так называемая адресная арифметика);

в третьей части для реализации одного из многошаговых действий (в любой из предыдущих частей) следует определить и применить функцию.

Каждый студент должен оформить отчет по курсовой работе, который состоит из следующих шести частей.

1. Постановка задачи.

В этой части следует разместить полное описание поставленной задачи так, как оно дается в задании.

2. Описание данных и алгоритма решения задачи.

Здесь следует указать, какими именами в программе обозначаются те или иные простые и структурированные данные, а также дать описание алгоритма решения задачи, для чего можно использовать известные средства описания алгоритмов. Одно из средств – блок-схемы.

С их помощью описание последовательности шагов в алгоритме делается более наглядным. Другое средство – язык псевдокода (русскоязычный алгоритмический язык).

3. Описание структуры программы.

На основе разработанного алгоритма строятся отдельные части программы на языке программирования. Рекомендуется указывать, какой части алгоритма соответствует та или иная часть программы.

4. Результаты тестирования.

В этой части вначале приводятся результаты выполнения программы для простейших случаев входных данных, когда достоверность результата очевидна, например, для значений входного параметра $n = 1$, $n = 2$. Затем следует привести примеры выполнения программы для более сложных случаев ввода исходных данных.

5. Список использованных источников.

Здесь следует перечислить источники (литература на бумажных носителях или источники в электронной форме, найденные в сети Интернет), которые были использованы при выполнении курсовой работы. Это могут быть учебники, монографии, методические указания или рекомендации, web-страницы, содержащие материал, оказавшийся полезным при выполнении курсовой работы. В Приложении дается краткое описание правил оформления ссылок на использованные источники.

6. Приложение.

В этой части отчета размещается полный текст программы.

Банк заданий для курсовой работы первокурсников содержит 80 различных задач [1, 2]. Приведем пример одной из таких задач и полный текст программы на языке С++.

### *Постановка задачи*

С клавиатуры вводится информация об итогах последней экзаменационной сессии. Эта информация включает в себя: 1) целое число n – количество студентов; 2) n объединенных в структуру данных:

<имя ><фамилия> <оценка> <оценка> <оценка> <оценка> <оценка> ,

где <имя>, <фамилия> – символьные строки, содержащие не более 20 символов, оценка за экзамен – десятичная цифра из диапазона '2'..'5'.

Требуется сформировать массив структур, в котором каждый элемент массива содержит фамилию студента и его средний балл, причем элементы располагаются в порядке возрастания средних баллов, и вывести этот массив на экран. Вывести также фамилии и оценки студентов, имеющих наибольшее количество отличных оценок.

<u>*Технические требования*</u>.

В основной памяти исходные данные также следует хранить в виде массива структур.

Не допускается использование дополнительных массивов.

### *Приложение*

Полный текст программы:

```
    // Схема Алгоритмова, студ. 1 курса 261 группы, задание № 765
    /* С клавиатуры вводится информация об итогах последней экзаменационной сессии. Эта
информация включает в себя:
    1) целое число n – количество студентов;
    2) n объединенных в структуру данных:
              <имя ><фамилия>  <оценка>  <оценка> <оценка>  <оценка> <оценка> ,
где <имя>, <фамилия> – символьные строки, содержащие не более 20 символов, оценка за эк-
замен – десятичная цифра из диапазона '2'..'5'.
```

Требуется сформировать массив структур, в котором каждый элемент массива содержит фамилию студента и его средний балл, причем элементы располагаются в порядке возрастания средних баллов, и вывести этот массив на экран. Вывести также фамилии и оценки студентов, имеющих наибольшее количество отличных оценок.*/

```
#include <iostream>
#include<string>
#include<Windows.h>
#include<iomanip>
using namespace std;

struct student
{
	string name;
	string surname;
	string point;
};

struct task
{
	string surname_;
	double middle_point = 0.;
};
//Прототипы используемых функций
student* inp (int n, int& max);
task* creat (student* mass, int n, int& k);
task* sort (task* a, int k);
//int found (student* mass, int n);

int main()
{
	SetConsoleCP(1251);
	SetConsoleOutputCP(1251);
	cout << «Введите количество студентов: \n»;
	int n;
	cin >> n;
	int k = 0;
	int max = 0;
// Ввод данных
	student* mass = inp(n, max);
// Создание результирующего массива
	task* b = creat (mass, n, k);
	if (k != 0)
	{
		b = sort (b, k);
		cout << endl << «Фамилии и средние баллы студентов:\n»;
		for (int i = 0; i < k; i++)
		{
			cout << b[i].surname_ << ‘ ‘;
			cout << b[i].middle_point << endl;
		}
		cout << endl << «Студенты, получившие наибольшее количество отличных
оценок:\n»;
```

```
            for (int i = 0; i < n; i++)
            {
                  int count = 0;
                  int m = mass[i].point.size();
                  for (int j = 0; j < m; j++)
                  {
                        if (mass[i].point[j] == ‘5’)
                              count++;
                  }
                  if (count == max)
                  {
                        cout << mass[i].surname << ‘ ‘;
                        cout << mass[i].point << endl;
                  }
            }
      }
      else
            cout << endl << «Студентов, удовлетворяющих условиям поиска, нет. \n»;
      return 0;
}
// Определения функций
student* inp(int n, int& max)
{
      student* mass = new student[n];
      int count = 0;
      for (int i = 0; i < n; i++)
      {
            cout << «Введите данные « << i + 1 << «-го  студента (имя, фамилию, оценки
подряд без пробелов): \n»;
            cin >> mass[i].name;
            cin >> mass[i].surname;
            bool error = true;
            int m = 0;
            do
            {
                  error = true;
                  //cout << «-> \n»;
                  cin >> mass[i].point;
                  m = mass[i].point.size();
                  if (cin.fail())
                  {
                        cout << «Ошибка ввода. Введите последнее значение повторно в
интервале от 2 до 5» << endl;
                        cin.clear();
                        cin.ignore(cin.rdbuf()->in_avail());
                  }
                  else
                  {
                     error = false;
                     for (int j = 0; j < m; j++)
                     {
                      if (mass[i].point[j] - ‘0’ < 2 || mass[i].point[j] - ‘0’ > 5)
```

```
                                error = true;
                        else
                           if (mass[i].point[j] == ‘5’)
                                count++;

                        if (error)
                             cout << «Ошибка при вводе строки оценок. Она должна состоять
из десятичных цифр из диапазона ‘2’..’5’ Повторите ввод строки оценок \n»;
                    }
            } while (error);
            if (count > max)
                    max = count;
            count = 0;
      }
      return mass;
}
task* creat(student* mass, int n, int& k)
{
      k = n;
      for (int i = 0; i < n; i++)
      {
            int count = 0;
            int m = mass[i].point.size();
            for (int j = 0; j < m; j++)
                  if (mass[i].point[j] == ‘2’)
                        count++;
            if (m == count)
                  k--;
      }
      task* array = NULL;
      if (k != 0)
      {
            array = new task[k];
            int h = 0;
            for (int i = 0; i < n; i++)
            {
                  double count = 0, sum = 0;
                  double m = mass[i].point.size();
                  for (int j = 0; j < m; j++)
                  {
                        sum += (mass[i].point[j] - ‘0’);
                        if (mass[i].point[j] == ‘2’)
                              count++;
                  }

                  if (count != m)
                  {
                        double middle = sum / m;
                        task t;
                        t.surname_ = mass[i].surname;
                        t.middle_point = middle;
                        array[h] = t;
```

```
                        h++;
                    }
                }
            }
            return array;
}
task* sort(task* a, int k)
{
        for (int i = 0; i < k - 1; i++)
        {
                for (int j = 0; j < k - i - 1; j++)
                {
                        if (a[j].middle_point > a[j + 1].middle_point)
                        {
                                double m = a[j].middle_point;
                                a[j].middle_point = a[j + 1].middle_point;
                                a[j + 1].middle_point = m;
                                string s = a[j].surname_;
                                a[j].surname_ = a[j + 1].surname_;
                                a[j + 1].surname_ = s;
                        }
                }
        }
        return a;
}
```

## Заключение

Появление нового блока в учебном плане бакалавриата по направлению 02.03.02 вызвало необходимость разработки методики его проведения. Разработана структура курсовой работы первокурсников по учебной дисциплине «Информатика и программирование», требования к ее выполнению, в помощь первокурсникам разработаны методические рекомендации.

## Литература

1. *Ускова О. Ф.* Начала структурного программирования на языке С++: задачник-практикум / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, О. Д. Горбенко. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. – 261 с.

2. *Ускова О. Ф.* Задачник–практикум по алгоритмическому языку / О. Ф. Ускова, О. Д. Горбенко. – Воронеж: Издательство Воронежского государственного университета, 1990.– 196 с.

УДК 378

# ПОДГОТОВКА ИНЖЕНЕРОВ ВЫСОКОЙ КВАЛИФИКАЦИИ: ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

**Р. Ж. Жахонгирова, Ш. Каюмов**

*Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова*

Нынешнее время, в которое мы живем, это век научно-технического прогресса. Сильное и ускоренное развитие науки и её использование в промышленности способствовало появлению новых отраслей во всех направлениях народного хозяйства. Внедрение и развитие инновационных технологий в различные направления привели к созданию новых типов изделий и продуктов промышленности, социальной сферы и сельского хозяйства. Все это ставит перед высшими учебными заведениями новые задачи по подготовке инженеров особого типа и мышления, умеющих создавать новое, управлять всем, что есть в обществе.

Подготовка инженеров нового типа зависит от того, насколько квалифицированно проводиться обучение, какое им прививает новые знания. Все технические ВУЗы направлены на выполнения этих требований. Однако имеются отдельные проблемы в системе обучения в высших учебных заведениях, основные моменты которых мы и попытаемся изложить.

Если сравнивать рабочих завода, цеха и т. д. со студентами, закончившими вуз, то рабочий лучше знает и квалифицированно выполняет порученные работы, но у него нет диплом вуза. Сейчас уделяется большое внимание к системе высшего образование, принят ряд постановлений, распоряжений и указаний, нацеленных на реконструкции высшего образования, на создание новых вузов. Принимаются меры по повышению качества образования, однако они оказывают влияние больше на структуры образования и управление, а их влияние на нижние слои почти не заметно.

Наряду с проблемами прозрачности и объективности вступительных экзаменов существует еще ряд основных проблем обучения в системах вуза. Когда студенты поступают в вуз, то у многих учеба не идет слаженно из-за низкого уровня знаний по предметами. Для подготовки инженеров высшей квалификации важными является обучение их высшей математике, физике начертательной геометрии и др., особенно по английскому языку, так как современные достижения и продукты научно-технического характера основаны и ориентированы на них. Поэтому следует увеличить часы преподавания по основным базовым предметам, особенно, целесообразно увеличить объёмы обучения высшей математике. Как известно сейчас идет процесс адаптации к европейской системе образования. Но чтобы адаптироваться к ней, необходимо чтобы базовые знания поступающих были на том уровне как у них. Кроме того студенты там учиться сами за себя, никто их не заставляет учиться. Зарплата преподавателей у них в 3–4 раза больше, чем у нас. Для студентов там нет стипендии, учеба в основном платная. У нас, хотя учеба считается добровольная, а на самом деле идет принудительно-добровольная учеба: требуется соблюдение формы одежды, обязательное посещение занятий, ежедневное регистрация, ограничения, устанавливаемые в период сессии и т.д. Если будет осуществлен переход к европейской системе, то все эти лишние требования должны быть исключены.

Ещё главное, что знания поступивших находятся все ещё низком уровне. Более половины студентов не отвечают требованиям вуза. По всей вероятности учеба и подготовка школьников не очень адаптированы к базовым вступительным требованиям или вопросники для поступления составлены трудно. Чтобы поступить ВУЗ необходимо стало проходить довузовскую годичную подготовку (по аналогии с дошкольной подготовкой). Нужно ли эта многоступенчатость? Считаем, что она абсолютно не нужна. Лучше всего будет, если в последний год обучения в средних и средне-специальных учебных заведениях, сделать программу обучения ориентированную на поступление в вуз, а также выпускные экзамены приравнять к вступительным экзаменам. Тогда все эти излишние (ненужные, затратные платные курсы) и обвинения о том, что «вступительные вопросы составлены трудно и без учета школьного курса» отпадут.

В последние годы среди поступающих стало очень много льготников, таких как: военнослужащие, отслужившие срок в армии и имеющие направления, выпускники специальных интернатов, спортсмены, имеющие достижения, победители различных олимпиад и т.д. Всего около десяти категорий людей, которые являются кандидатами на безусловное зачисление в вузы. Некоторые поступающие абитуриенты пытаются фальсифицировать процесс льготы, чтобы поступить. Кстати, и это играет на руку отдельным недобросовестным чиновникам, создающим условия для коррупции. Эти коррупционные явления должны быть искорены полностью, и тогда поступление и учеба в вузе будет на должном уровне.

Время изменяется и должна быть изменена форма проведения лекций и практических занятий, чтобы идти в ногу со временем. Следует видоизменить процедуру чтения лекции, практические занятия проводить в лабораторном стиле. Дать возможность развивать самоуправление и творческие способности студентов.

Тестовые оценки, используемые в период сессии, и сами форма проведений сессии являются не самыми лучшими. Почти ежедневно сдаются письменные (где-то устные) экзамены, которые не позволяют как следует к ним подготовиться. А также следует отметить, что на сессиях студентам необходимо 2–3 дня для подготовки, и тогда можно ожидать хороших результатов.

Считаем, что следует вообще отменить дежурство преподавателей в общежитиях (хотя эту процедуру пытаются представить как консультацию преподавателей по специальности). И что интересно, этого дежурного проверяют от университета, от хокимията, от администрации студенческого городка и иногда от милиции и т.д., кому все это нужно? — все это абсурд. Вместо педагогов в общежитии нужно направлять квалифицированные кадры, которые способны работать со студентами, живущими в общежитии, и имеющие навыки пробудить живой интерес по всем вопросам, в том числе по специальностям обучения. Тогда эффективность от этой формы работы со студентами будет очень высокий.

Необходимо ещё дифференцированно подходить к процессу обучения отдельным специальностям, таким как высшая математика, иностранные языки, исходя из приоритета поступивших студентов (вуз должен сам подготовить поступивших студентов по предметам для дальнейшего их обучения).

Для того, чтобы каждый выпускник вуза был высококвалифицированным специалистом и отвечающим требованиям современного мира, необходимо, на наш взгляд, выполнить следующее:

1. Перед вступительными экзаменами соискатели должен пройти собеседование по тому языку, на котором он хочет учиться, и по его результатам должен быть рекомендован к тем или иным специальностям.

2. Необходимо давать одинаковые баллы по всем предметам, включенным во вступительные экзамены, что заставит абитуриентов подготовиться по всем предметам.

3. В начале года в каждое учебное образовательные учреждение с каждого вуза отправить рабочую группу для профориентации, а также открыть специальные сайты, что даст возможность ученикам подумать о выборе тех или иных направлений.

4. Создать условия социальной поддержки студентов и возможность работать после учёбы, создать портал «Работа студентам».

5. Увеличить практические занятия для студентов. Чтобы глубже понять языки и предметы, которые им нужны, дополнительно, после занятий организовать кружки.

6. Отменить всякое дежурство преподавателей, дать им возможность заниматься своими прямыми делами и работать над собой.

7. Основная цель обучения — подготовить высококвалифицированных специалистов и вся система должно работать на это. Все препятствия: бюрократию, добровольно-принудительные мероприятия — надо убрать с этого пути.

8. Шире развивать самоуправление студентов, вовлекая их в процесс управление вузом.

Мы считаем, что почти во всех ВУЗах существуют эти проблемы в той или иной форме, и поэтому следует обсуждать эти проблемы на различных конференциях и надо вырабатывать соответствующие рекомендации для министерства высшего образования.

**Литература**

1. Программа курса высшей математики для инженерно- технических специальностей высших учебных заведений. Министерство высшего и среднего специального образования СССР. (Приказ Минвуза № 340 от 1 апреля 1981 г.). – М. : Высшая школа, 1984. – 47 с.

2. Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан. 23 август 2008 г. №263. – Ташкент, 2008. – 11с.

3. *Каюмов Ш., Садритдинова З. И., Исканаджиев И. М.* О некоторых проблемах обучения высшей математики в ВУЗе. «Актуальные проблемы обучения современной высшей математики». Материалы межвузовской научно практической конференции. 2 часть. ТГПУ. Ташкент, 2010. – С. 159–162.

4. *Каюмов Ш., Исканаджиев И. М.* О некоторых аспектах проведение лекционных и практических занятий по математике в технических ВУЗах. Сборник статьейнаучно- методической конференции «Проблемы внедрения в учебный процесс инновационных технологий и нетрадиционных методов». МОРУЗ. Джизакское высшее военное авиационное училище. Джизак, 2011. – С. 20–23.

УДК 378

# НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ»

**С. С. Иванова**

*Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского*

**Аннотация.** В данной работе представлена новая программа «Построение первообразной функции, заданной графически», аналогов которой не было найдено на просторах интернета. Созданы несколько заданий на данную тематику, рассмотрены методы решения сложных задач из ЕГЭ, расписаны подробные решения заданий при помощи данной программы.
**Ключевые слова:** производная, обучение, график, функция, программа, информационные технологии.

## Введение

Достаточно часто в обществе возникают идеи отменить изучение производной функции в школе. Сторонники объясняют это невозможностью преодоления главного конфликта: целью изучения производной в школе и методами обучения.

Этот раздел науки изначально возник из практических задач и был посвящен прикладным аспектам. Но в школьном курсе математики этой стороне вопроса выделено очень малое время. В различных учебно-методических пособиях на это отводится разное количество часов. На изучение темы «Производная и ее применение» на базовом уровне по учебнику А. Г. Мерзляка выделено 32 часа, по учебнику С. М. Никольского — 27 часов, по учебнику А. Г. Мордковича — 31 час, на углубленном уровне — до 42 часов. Основное время тратится на отработку знаний, умений и навыков технического вычисления производной. За последние несколько лет материал, предлагаемый в КИМах ЕГЭ по данной теме, существенно изменился. Теперь в заданиях большая роль отводится наглядным представлениям о производной (задание № 7 первой части 2020 года). Начиная с 2017 года это задание имеет самый низкий процент выполняемости среди заданий первой группы: 2017 год — 59,89 %; 2018 — 54,23 %; 2019 — 61,54 % (результаты по Липецкой области). Хотя традиционно это известные, много раз отработанные задания. Почему это происходит? Учебник практически не дает ответа на поставленные вопросы ЕГЭ. Задания в такой формулировке отсутствуют в учебниках. Учителю приходится изощряться в придумывании способов объяснения материала, в подготовке презентаций, чтобы критерии возрастания и убывания функций, признаки максимума и минимума стали более понятными. И вот тут остро ощущается нехватка компьютерных технологий. Ведь доски и мела явно недостаточно, так как невозможно объяснить динамический процесс статическими методами. Школе необходимы новые программные продукты и учителя, готовые не только показывать иллюстрации к уроку, но и учить исследовать динамику математического процесса, наблюдать его изменение во времени, зависимость его протекания от тех или иных параметров.

В образовании наметилась глубокая проблема: на рынке много различных программных продуктов, но учителя не спешат ими воспользоваться. Это связано с тем, что готовые программные продукты пока не могут удовлетворить спрос учителя: в них либо слишком примитивен материал, а предлагаемые способы решения заданий уже устарели или вообще спорны; либо программы, при отсутствии подробного описания, сложны и требуют или специальной установки на компьютер, или постоянного подключения к интернету, что исключает их использование обыкновенным учителем. Возможно, это связано с тем, что программные продукты создают авторы, не ориентирующиеся в настоящих потребностях школы. Мечта любого учителя, не имеющего второго образования программиста, состоит в том, чтобы в школе был свободный программист, умеющий воплотить его замысел в программе и помочь осуществить задуманное на уроке. Но пока остается мечтой!

С другой стороны, с 2016 года в учебные планы десятых классов введен новый курс — «Проектная деятельность», которому в федеральном государственном образовательном стандарте (ФГОС) отводится особое место. Учащиеся выбирают тему проекта, чаще искусственно придуманную, делают свои разработки в «стол», которые никому не нужны, а у самих ребят отнимают много времени. На сегодняшний день в педагогической практике автора уже есть несколько проектных работ, выполненных под его руководством. Эти проекты помогли не только авторам работ, но и их одноклассникам при подготовке к ЕГЭ и ОГЭ. Такая совместная работа помогает разнообразить учебный материал, сделать процесс обучения не только информативным, но и занимательным.

На уроках информатики учатся программированию, но эти продукты проектной деятельности никогда больше не используются. Да, рост программиста невозможен без рутинной отработки навыков написания различных алгоритмов и программ, но пустая работа расхолаживает ребят, у них теряется интерес к данной работе. Еще при обучении в школе в МАОУ «Лицей 44» наметились пути решения данной проблемы. С ребятами, желающими продолжить свое обучение информатике и программированию за пределами школьной программы, устанавливалась более тесная связь учителями других специальностей. Задача педагога — сформулировать конкретную задачу, подготовить точный заказ программного продукта по своему предмету. Школьники получают заказ на эксклюзивные программы, аналогов которых нет, а учитель получает в свое пользование изумительный материал для использования на уроках. Это приучает учащихся работать под заказ, проявлять изобретательность, а, самое главное, они видят продукт своего труда в деле. Ведь программы постоянно используются на уроках преподавателями лицея. Поэтому разработка школьных курсов с использованием такого рода программ, причем выполненных по заказу учителя силами обучающихся, достаточно актуальна. С помощью них на уроках изучается новый материал, отрабатываются навыки при подготовке к сдаче экзаменов.

Данная работа содержит методические указания по использованию программных продуктов, выполненных обучающимися МАОУ «Лицей 44» под руководством автора, а также методические указания по изучению раздела «Производная функции» с использованием приведенных программ.

В работе приведены методические приемы использования созданных программ, показано каким образом их уместно применять на уроке, как грамотно использовать, повышая и темп урока, и понимание происходящего учениками. Работа содержит либо собственные, новые задания, не представленные в методических пособиях, либо новый подход при решении базовых упражнений для подготовки к ЕГЭ. Все программ размещены в свободном доступе https://drive.google.com/drive/folders/1UDswsNT8timjq.

Таким образом, представленная в работе модель изучения темы «Производная функции» с использованием современных информационных технологий и специально созданных программ, может быть полезна для применения на уроках учителем, особенно в условиях цифровизации образования и тем более актуальна в случае, если данную тему обучающимся придется осваивать в  дистанционном формате.

В КИМах ЕГЭ встречаются задания, как по графику производной определить поведение функции. Такие задания в банке данных есть, в учебных пособиях практически отсутствуют. И реалистичную картину не каждый учитель может представить. Для решения данной проблемы обучающимся 11 класса МАОУ «Лицей 44» Яковлевым Сергеем была разработана новая программа «Построение первообразной функции, заданной графически», которая создана под руководством учителей лицея — Ивановой С. С. и Ивановой О. Е., которые не смогли найти в свободном доступе аналогов этой программы, и программ, отвечающих их методическим запросам.

1. Описание и методика использования на уроках математики программы «Построение первообразной функции, заданной графически»

Программа написана на языке программирования “Visual C# 7.0” и откомпилирована в исполняемый файл “integral.exe”. Программа предназначена для построения графика первообразной функции, заданной пользователем графически. Также существует возможность построения касательной к графику в точке.

После запуска на фоне основного макета всплывает окно «Инструкция» (рис. 1), в котором можно ознакомиться с возможностями программы.

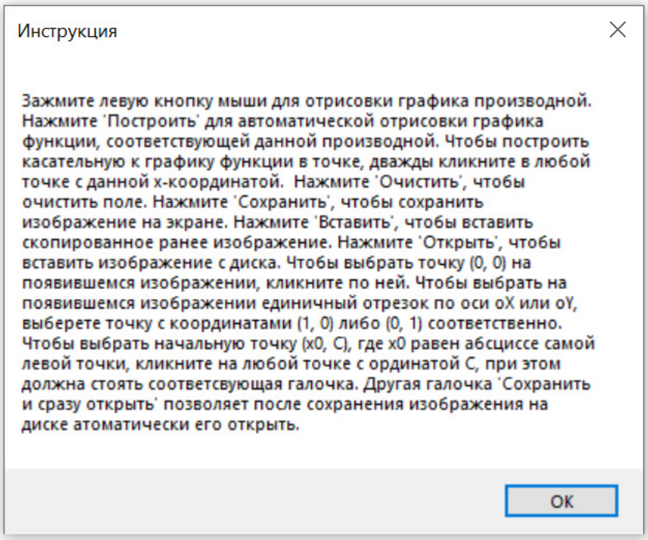



*Рис. 1*

При нажатии кнопки «ОК» окно «Инструкция» закрывается, и активность переходит к основному макету программы (рис. 2).

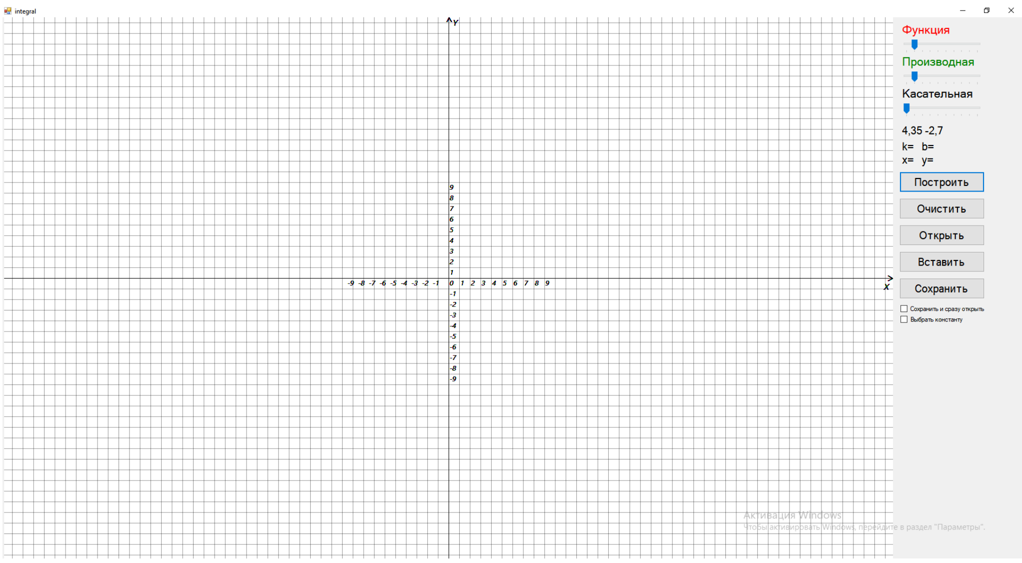



*Рис. 2*

Далее считаем, что пользователь вводит производную некой функции, которую восстанавливает программа. Для того, чтобы траектория движения указателя мыши была нанесена на холст, достаточно зажать левую кнопку мыши и не отпускать, пока график не будет построен окончательно. Построение облегчает клетчатое поле и система координат XOY с нанесёнными координатами от –9 до 9 с интервалом 1. Имеется возможность настройки цвета и ширины линий функции, производной и касательных. Ниже отображаются координаты точки, соответствующей текущему положению указателя мыши. Ещё ниже можно заметить область для отображения параметров последней построенной касательной. Чтобы построить график функции, достаточно задать производной и нажать кнопку «Построить». Если выбрана галочка «Выбрать константу», то пользователю предлагается выбрать начальную точку графика функции. Более подробно инструкцию можно изучить по адресу https://drive.google.com/drive/folders/1UDswsNT8timjq.

С помощью программы пользователь может наглядно уяснить устройство производной функции. Программа особенно полезна студентам и учителям, с её помощью можно наглядно излагать материал.

Программа адаптирована для широкого круга устройств, в частности планшетов, смартфонов и смарт-досок, активно применяющихся в образовании.

С помощью этой программы возможна отработка навыков и умений решения проблемных заданий № 7 ЕГЭ профильного уровня. Разберем основные типы таких заданий из открытого банка данных. В учебниках таких заданий нет.

**Задание 1.** На рис. 3 изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале (–11; 3). Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

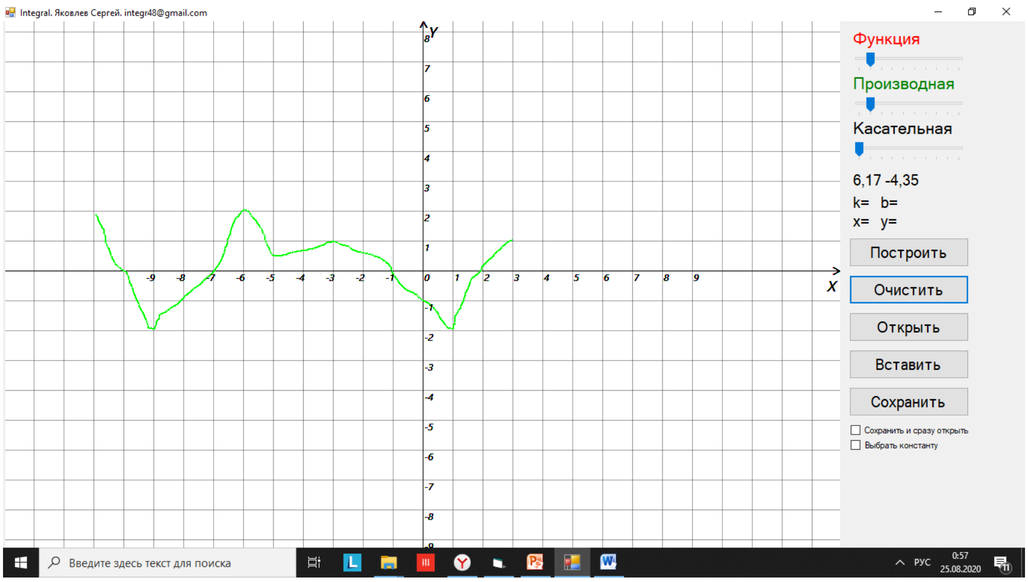



*Рис. 3*

Решение. В этой задаче необходимо сначала найти промежутки возрастания функции, т. е. промежутки на которых $f'(x) > 0$ или равна 0 в конечном числе точек. В нашем случае их три: (–11; –10], и [2; 3), наибольшую длину из них, очевидно, имеет промежуток [–7; –1], его длина равна: –1–(–7) = 6. Теоретические знания очень хорошо подтвердить наглядно, изобразив графиком соответствующей функции. Проверка на программе “integral.exe” рис. 4.

**Задание 2.** На рис. 5 изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(x_1; x_2)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наименьшего из них.

В этом задании обязательно нужно прослушать объяснение, почему ответ 1. Многие учащиеся, путая графики производной и самой функции, дают ответ 1, предполагая отрезок [7; 8]. Найдем промежутки возрастания функции, т. е. промежутки на которых $f'(x) > 0$ или равна 0

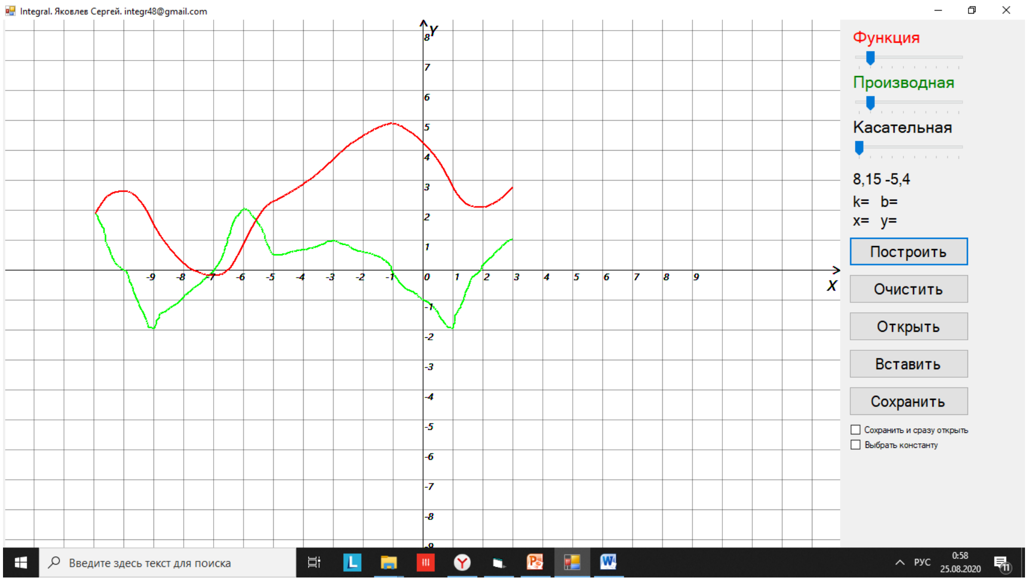



*Рис. 4*

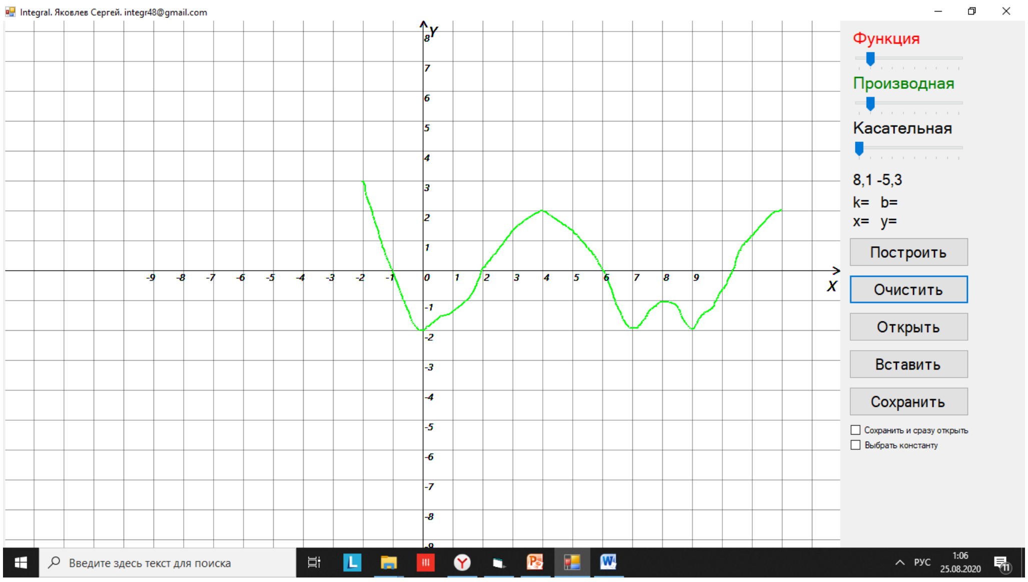



*Рис. 5*

в конечном числе точек. Наименьшую длину из них имеет промежуток (−2; −1]. Ответ : 1. Проверка на программе “integral.exe” рис. 6:

Имея на одной системе координат графики и функции и производной, легко установить закономерности поведения.

2. Примеры заданий для коррекции ошибок, допускаемых учащимися в задании № 7 единого государственного экзамена

В конце изучения темы «Производная функции» всегда нужно оставить время для решения заданий разной тематики. И пытаться не только решить задание и перейти к следующему, а проанализировать опасные места и возможные ошибки. На таких уроках как раз и помогут компьютерные программы, рассмотренные выше.

В комплект заданий были включены задания, позволяющие отработать теоретические вопросы с тонкостями, с неудобными формулировками, неожиданными условиями. Ведь главная причина неудач – неосознанное усвоение теоретического материала.

Работа проходит на уроке в форме беседы. Здесь главное — услышать каждого ученика, его собственные ошибки и всем вместе обсудить и помочь. Первой причиной ошибок учащиеся

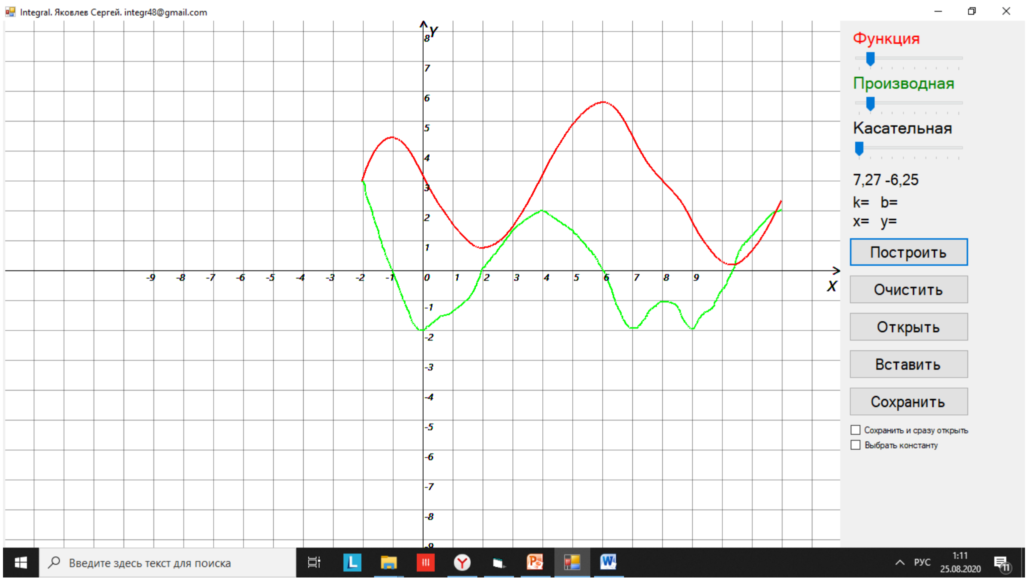



*Рис. 6*

называют невнимательность, когда не обращают внимание на то, что рассматривается, графики функции или ее производной. Приведем алгоритм рассуждений. На экране выведен один рисунок. Подробно разбираем решение и проверяем с помощью программы.

Выделим, что изображено на рисунке, применим теорию для данного графика.

Пример 1. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале (–4;7). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

Решение. На интервале (–4;7) имеется 2 такие точки : –1; 4.

Сумма этих точек будет равна : –1 + 4 = 3.

Проверка на программе “integral.exe” рис. 7.

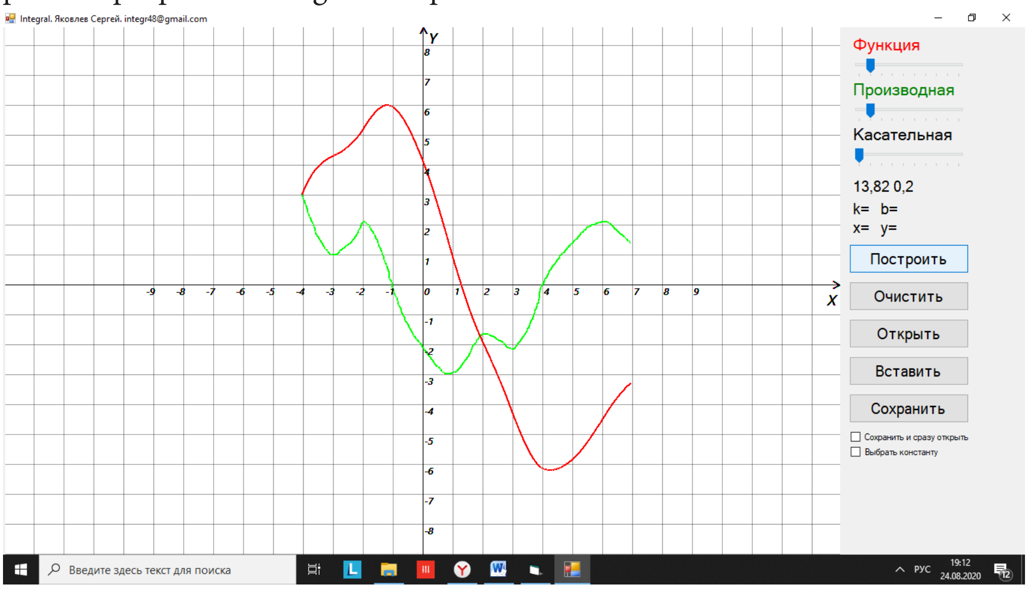



*Рис. 7*

Пример 3. На рис. 8 изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале (–9;8). Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$, в ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение. Учащиеся либо по рисунку ищут промежутки возрастания, забывая, что изображен график производной, либо неточно воспроизводят определение возрастания функции по

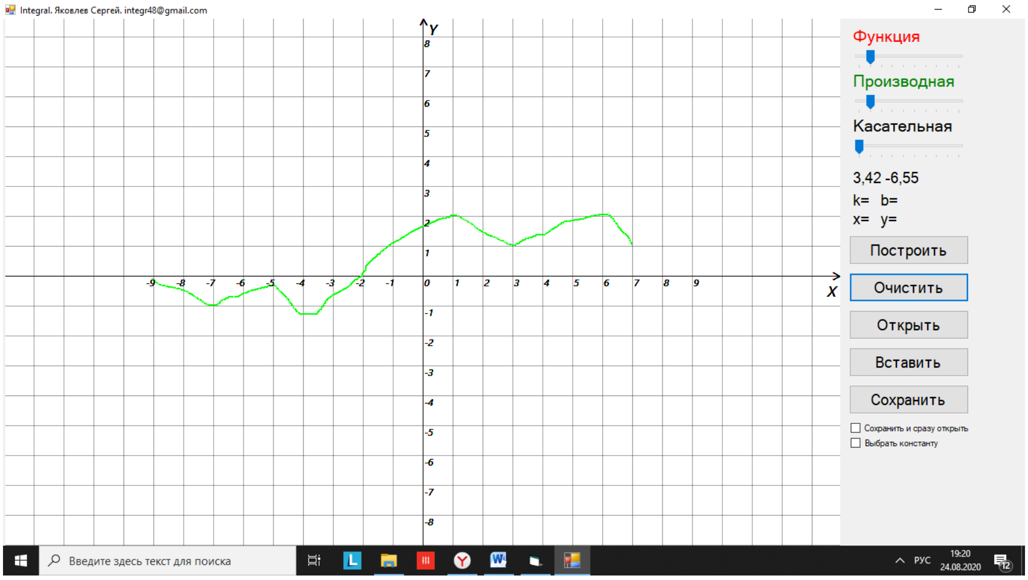



*Рис. 8*

характеру поведения производной и теряют значение $x = -2$. (функция возрастает, если значение производной положительно или равно 0 в конечном числе точек).

$$-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$$

Проверка на программе “integral.exe” на рис. 9.

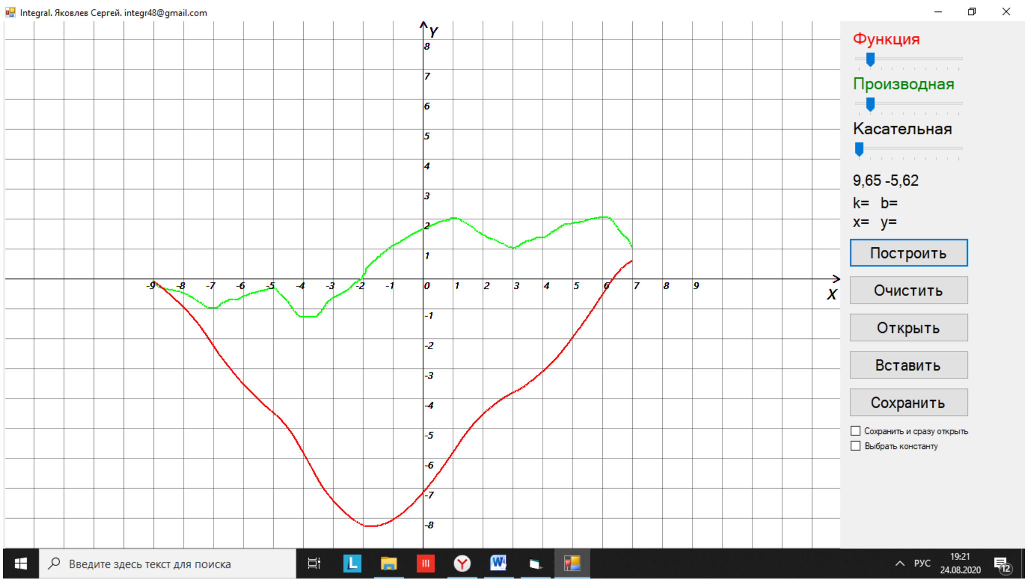



*Рис. 9*

Пример 4. На рис. 10 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале [–8;6]. Исследуйте функцию на монотонность. В ответе укажите количество промежутков, на которых функция возрастает.

Решение: учащиеся дают ответы, поясняя их. Ответы комментируются другими участниками, с пояснением, какая и почему допущена ошибка.

Встречаются ответы: (если таких вариантов нет, их должен дать учитель, как версию)

Ответ 4– (путают графики функции и производной)

Ответ 3– (считая отдельно промежутки [–8;–6]; [–6;0]; [3;5], опять забывая определение: функция возрастает, если значение производной положительно или равно 0 в конечном числе точек).

Проверка на программе “integral.exe” рис. 11:

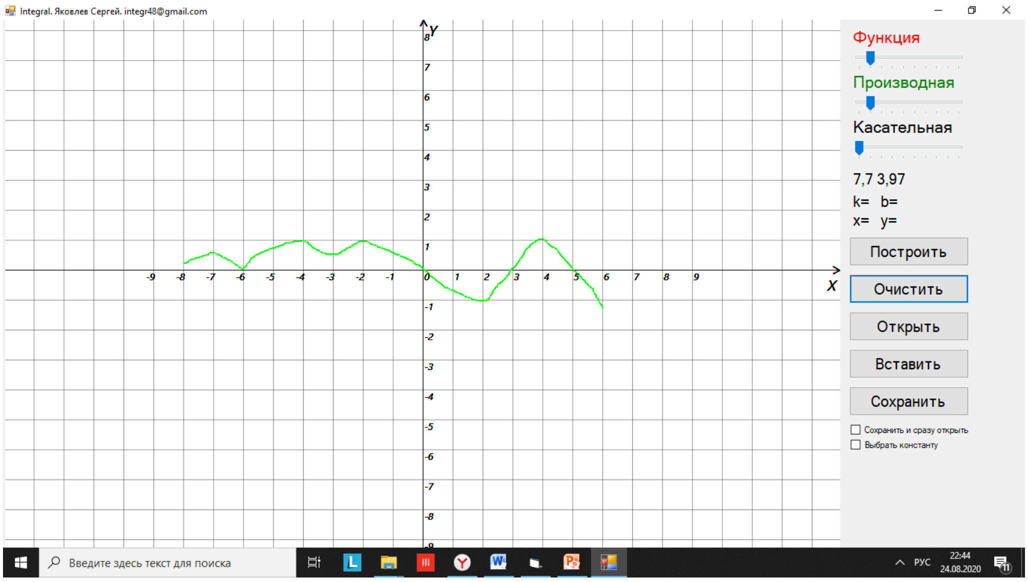



*Рис. 10*

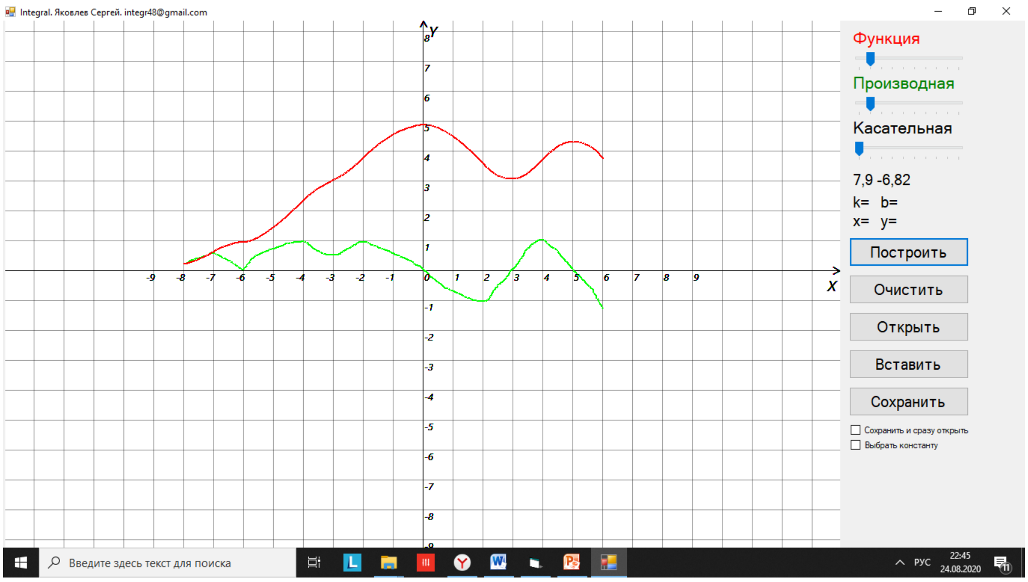



*Рис. 11*

Правильный ответ: 2 промежутка возрастания, [-8;0]с точкой перегиба $x = -6$.

Вторая причина ошибок опять невнимательность, учащиеся рассматривают не тот промежуток, на котором рассматривается функция или производная функции.

Пример 6. На рис. 12 изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-9;8). В какой точке отрезка $[-4;7]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Решение. Изменяя интервал, добиваемся правильного объяснения для каждого случая. Для данного отрезка рассуждения такие: «На данном отрезке единственная точка экстремума $x = -2$, это точка минимума, именно в ней будет наименьшее значение функции».

Если взять отрезок [-1;5], то рассуждения: «На этом отрезке производная положительна, значит, функция возрастает, наибольшее значение на правом конце отрезка, то есть в точке $x = 5$».

Проверка на программе “integral.exe” на рис. 13.

После анализа распространенных ошибок и причин их появления можно проводить и проверочную работу по все теме, пользуясь открытом баком заданий. Например, сборник https://alexlarin.net/ege/2014/b82014.html

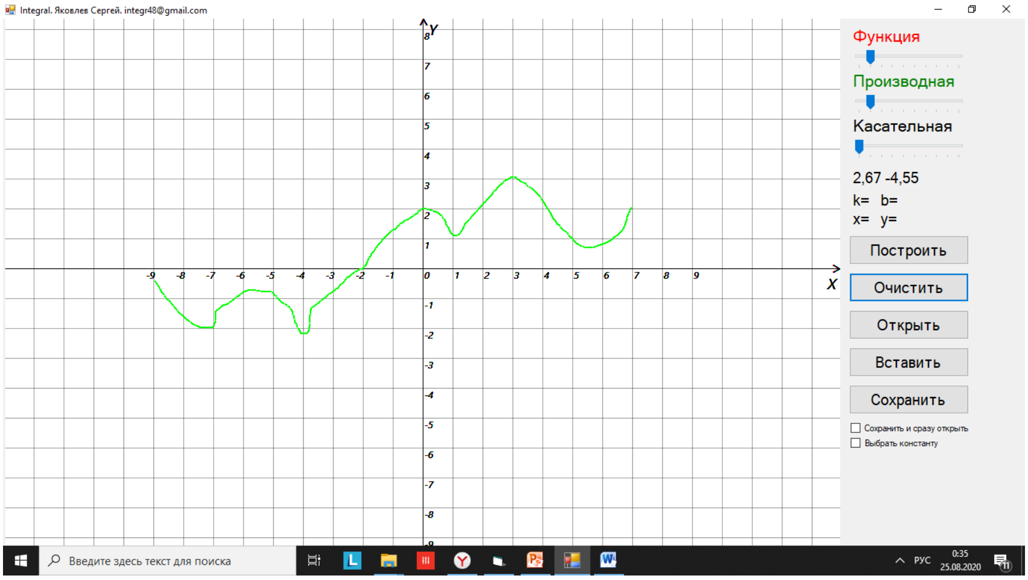



*Рис. 12*

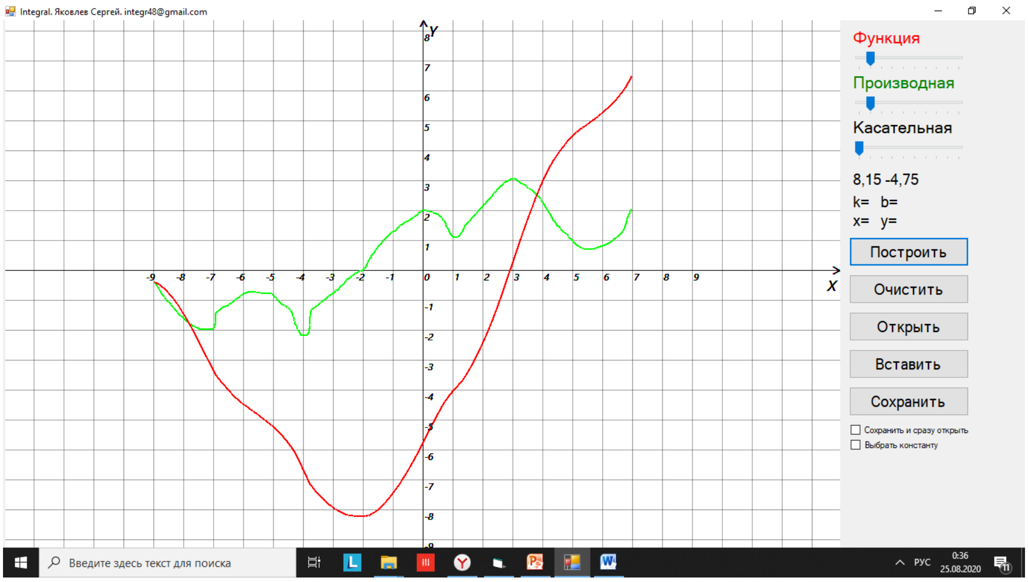



*Рис. 13*

## Заключение

В работе построена инновационная модель изучения темы «Производная функции» с использованием программы, созданной обучающимся МАОУ «Лицей 44» в рамках проектной деятельности по заданию педагога, аналогов которым в свободном доступе не имеется.

Разработаны новые задания для лучшего понимания темы «Производная функции». Представлены авторские решения задач повышенной сложности и проиллюстрированы результаты решения на указанных программах, приведены фрагменты уроков с постановкой проблемы, задач исследовательской деятельности. Разработан комплект заданий для урока-закрепления по теме «Производная функции» с анализом возможных ошибок, также рассмотрены способы использования компьютерных программ на уроках математики.

Данный материал можно использовать не только на уроках в классе, но и при дистанционном обучении, так как учитель может легко объяснить эту тему в режиме «Демонстрация экрана». Умение учителя использовать информационные технологии, различные программные продукты особенно важно в эпоху цифровизации образования. Освоив эти программы, учитель становится творцом на уроке, воплощает любой свой замысел, мгновенно может сориентироваться и любое задание объяснить и продемонстрировать, не тратя время на подготовку презентаций и пособий.

**Литература**

1. *Иванова С. С. Иванова О. Е.* Метод проектной деятельности как способ повышения качества образовательного процесса [Текст] // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания. Сборник трудов конференции. Липецк, ЛГПУ имени П. П. Семенова-Тян-Шанского. – 2019. С. 31-37. – Доступ: http://apns.academia48.ru

2. *Иванова С. С., Иванова О. Е.* Анализ причин ошибок выпускников при решении задания № 7 профильного ЕГЭ и способы их устранения (из опыта работы) [электронное издание] // Сборник трудов Всероссийской Интернет-конференции «Модернизация технологий и содержания обучения в соответствии с новым ФГОС», ГАУДПО ЛО «Институт развития образования». Липецк, 2020. – Доступ: https://sites.google.com/view/iroconf2020/ №123

3. Открытый банк данных ФИПИ. – https://fipi.ru/

УДК 371.3

# ОБ ИЗУЧЕНИИ 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ИНФОРМАТИКИ

**К. В. Кравченко, Г. В. Гарковенко**

*Воронежский государственный педагогический университет*

**Аннотация.** В данной статье рассмотрено изучение 3D-моделированию в средней школе. Был составлен краткий анализ учебников, в которых рассматривается компьютерное моделирование. Были обозначены главные цели внедрения 3D-моделирования в учебный процесс. Приведены аргументы, показывающие важность его изучения и потребность применения в различных сферах жизни.
**Ключевые слова:** 3D моделирование, трехмерная графика, обучение моделированию, абстрактное мышление, моделирование в средней школе.

В современном мире всё больше разнообразных технологических решений внедряется в жизнь человек. Со средней школы ребёнок вступает в жизнь, полную информатизации, а федеральные государственные образовательные стандарты определяют направления изучения информатики в средних классах. На сегодняшний день перед учителем возникает вопрос о необходимости и значимости изучения различных разделов информатики в школе, в том числе и необходимости изучения 3D моделирования в школьном курсе информатики.

Многие авторы учебников в стандартном курсе информатики дают определение «модели», понятие об «информационной модели», рассматривают знаковые, графические, табличные модели, но изучению 3D графики и 3D моделированию отводится место лишь в небольшом количестве учебников. Чаще всего практическому изучению 3D моделирования отводится время на элективных кружках или на внеурочной деятельности.

Изучения 3D моделирования способствует развитию у обучающего абстрактного мышления. Эти знания можно использовать в таких предметных областях как физика, геометрии, черчение, прикладных компьютерных науках и т.д.

Проведя анализ учебников, было определено, что 3D графика и 3D моделирование приведено только в учебнике К. Ю. Полякова и Е. А. Еремина для 11 класса и учебнике Ю. А. Быкадорова для 9 класса.

В учебнике Полякова К. Ю. рассматривается понятие модели и моделирования, понятия анимации и трехмерной графики. Практическую реализацию в данном учебнике предлагается выполнять в графическом редакторе «GIMP» и среде моделирования «Blender». Для изучения данной темы в учебнике 11 класса отводится 9 глава, состоящая из 9 параграфов [4, 5].

На практических занятиях учащиеся должны работать с объектами, примитивами, слоями; уметь связывать координаты, объекты и слои между собой, строить сеточные модели и редактировать их; строить сечения объектов, использовать различные модификаторы, текстуры, логические операции и деформацию; уметь вращать тела в пространстве и настраивать освещение.

В учебнике Быкадорова Ю. А. моделирование изучается в 3D-редакторе «Google SketchUp». Программа предназначена для создания простых трехмерных объектов. Отличает этот редактор его простота. Данная среда является удобной для обучения 3D-моделированию, учащихся средней школы [2].

Компьютерное моделирование отличается значительной широтой. Наглядно показывает связь информатики с различными школьными предметами, такими как математика, физики, биология, географии, робототехника и многими другими [3].

Трёхмерные объекты, современная графика, проектирование изделий, 3D-моделирование сегодня является одним из перспективных направлений в области новых технологий. Изучение данной темы следует начать с понимания основ и самых простых вещей. После базовые навыки необходимо совершенствовать, уделяя всё больше внимания решению практических задач. Основная задача моделирования заключается в том, чтобы дать наиболее полное представление о несуществующем на данный момент объекте. Широкое и практически повсеместное использование данной технологии обусловлено необходимость понимать, что именно требуется изготовить, какими параметрами и характеристиками должен обладать проектируемый объект, его конструктивные особенности. Подобная технология отличается рядом преимуществ, в частности, это высокий уровень информативности, простота в восприятии. 3D модель способна в мельчайших подробностях продемонстрировать то, что на данный момент существует только в виде чертежей либо просто идеи. Восприятие же такой визуализации намного более простое, чем, например, профессионально выполненных инженерных чертежей.

Визуализация происходит достаточно быстро, при необходимости существует возможность внесения определенных коррективов, помимо общего облика проектируемого объекта 3D модель помогает создать представление о необходимых материалах, размерах и прочих характеристиках будущего объекта. Как правило, используемое для создания визуализации программное обеспечение позволяет настроить или изменить при необходимости такие параметры как ракурс, освещение, прозрачность предметов, палитру цветов и многое другое [1].

Одним из примеров моделирования может стать печать человеческих сердец. Группа ученых Высшей технической школы Цюриха Швейцарии в 2017 сделали первое в мире сердце, напечатанное на 3D-принтере, его прототип весит всего 390 грамм и выдерживает около трех тысяч сокращений (рис.1). Но оно создано из человеческих жировых клеток и соединительной ткани. Прорыв медиков состоит в том, что до них при создании человеческих сердец применяли синтетические вещества.

Ученые смогли разработать прототип сердца, который будет максимально похожим на человеческий орган. Сердце состоит из двух желудочков, которые разделены специальной камерой, заменяющей сердечную мышцу. За счет воздушного насоса камера сдувается и надувается, позволяя жидкости перекачиваться через сердце [7].

*Рис. 1. Сердце, сделанное на 3D принтере*

3D моделирование — это настоящее искусство, которое открывает огромные перспективы всем, кто захотел освоить трёхмерную графику. С помощью современного моделирования создаются проекты зданий и построек, спецэффекты из мира кино, архитектурные сооружения, машиностроение, сельское хозяйство, также их часто применяют в медицине.

Внедрение 3D-моделирования в учебный процесс необходимо для достижения следующих целей:

• формирование абстрактного и творческого мышления учеников;

• повышение эффективности обучения в школе, дома, на внеурочных занятиях.
• изучение методов моделирования, их плюсы и минусы, возможности применения;
• обогащение детей знаниями в области технических дисциплин для лучшего понимания;
• развитие творческих, архитектурных, проектировочных и дизайнерских навыков учащихся;
• умение построения трехмерных моделей по их данным свойствам и характеристикам;
• формирование навыков работы в 3D программах;
• применение полученных знаний в обычной жизни, в учебной деятельности, в последующей профессии.

В наши дни у школьников возникает интерес к освоению новых технологий, 3D моделирование являет одной из таких. Его изучение также является предметом определения будущей профессии ученика, что актуально для выпускных классов.

Мир не стоит на месте, поэтому 3D моделирование важно и нужно изучать в высших учебных заведениях. Изучение систем моделирования в вузе способствует лучшей усвояемости знаний по принципам функционирования и т.д., а также формирует корректный подход к решению задач. Так что не нужно рассматривать системы моделирования как нечто особенное, на самом деле это абсолютно обычный инструмент для познания и решения оценочных, оптимизационных задач. Если рассматривать 3D моделирование как деятельность, то абсолютно каждый студент может попробовать себя в этой сфере. Существуют бесплатные и студенческие версии программного обеспечения, которые доступны на просторах сети [6].

Начать создавать что-то посильно каждому, другой момент для чего вы хотите это делать. Возможно вы просто хотите сформировать абстрактное мышление или хотите углубленно погрузиться в сферу 3D-моделирования. Почему стоит обучиться этому навыку и как он поможет в будущей профессии?

3D моделирование будет востребовано во многих отраслях профессий и в наше время не хватает высококвалифицированных специалистов из-за того, что технологии развиваются намного быстрее. Поэтому получив высшее образование по такой специальности будет достаточно легко найти работу. Так же не менее важно ваше портфолио, которое вы можете начать собираться с первого курса обучения. Ваши награды более высокий шанс устроиться в более крупную и востребованную компанию.

Таким образом, можно сделать вывод, что изучение 3D-моделирования в школе и университетах является необходимым и важным для будущего становления учащегося как личности и эксперта.

## Литература

1. 3D моделирование, зачем оно нужно? – [Электронный ресурс]: https://iceberg-media.ru/3d-modelirovanie-zachem-ono-nuzhno/

2. *Быкадоров, В. В.* Информатика и ИКТ. 9 класс / В. В. Быкодоров. – М.: ДРОФА, 2013. – 336 с.

3. Методическое пособие по курсу «Основы 3D-моделирования и создание 3D моделей». – [Электронный ресурс]: http://www.doskol.narod.ru/3d/ps.pdf

4. *Поляков, К. Ю.* Информатика. Углубленный уровень: учебник для 11 класса: в 2 частях Ч. 2 / К. Ю. Поляков. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 240 с.

5. *Поляков, К. Ю.* Примерная рабочая программа. Информатика 10-11 класс: базовый и углубленный уровень / К. Ю. Поляков. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. – 41 с.

6. Почему тебе стоит научиться 3D моделированию. – [Электронный ресурс]: https://brodude.ru/pochemu-tebe-stoit-nauchitsya-3d-modelirovaniyu/

7. Путеводитель по 3D-печати в медицине. – [Электронный ресурс]: https://vektorus.ru/blog/3d-tehnologii-v-meditsine.html

УДК 372.851+811.161.1'32

# МОНИТОРИНГ ОРФОГРАФИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ В СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» (ОКТЯБРЬ 2020)

**Е. А. Момот, А. Е. Зволинский, А. А. Тарабанько**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Приведены результаты четвертого ежегодного мониторинга орфографической грамотности математических образовательных интернет-ресурсов. Сотрудничество авторов с владельцами сайтов ведёт к сокращению количества ошибок. Дан краткий анализ самых популярных ошибок. Выдвинуты идеи и планы по доработке используемого ПО.
**Ключевые слова:** грамотность образовательных ресурсов, разработка ПО, Javascript, регулярные выражения, математическая лингвистика, математическое моделирование лингвистических явлений, орфографические ошибки.

В настоящее время Интернет играет большую роль в разнообразных сферах общественной жизни и, в частности, в образовании. В связи с этим особенную обеспокоенность научного сообщества вызывает грамотность образовательных интернет-ресурсов, так как именно они оказывают значительное влияние на образование и самообразование современных школьников и студентов (см., напр., [1, 2]). Наличие орфографических ошибок на образовательных ресурсах понижает авторитет всей школьной системы преподавания русского языка в глазах школьников: если уважаемые преподаватели не придают большого значения русскому языку, то зачем вообще его учить? Актуальность данной проблемы также возрастает в связи с пандемией: для многих интернет-ресурсы становятся основным способом продолжения обучения.

В 2017 году впервые было проведено междисциплинарное исследование [4] на стыке информатики, математики, педагогики и лингвистики, посвященное изучению орфографической грамотности математических образовательных ресурсов с использованием программы [3]. В продолжение исследований [4–6] был проведен четвертый ежегодный мониторинг орфографической грамотности математических сайтов.

Список изучаемых сайтов был определен на основе верхних строчек рейтинга LiveInternet в рубрике «Образование», посвященных математике. Из обработки исключались: UGC (user-generated content —комментарии, форумы, отзывы), сайты-агрегаторы (напр., studopedia.org), а также сайты, на которых тексты по математике не удалось отделить от текстов по другим, не смежным дисциплинам.

Ошибки в UGC, как правило, не исправляются; с текстами, написанными преимущественно одним человеком, (напр., статьи в блогах) ситуация иная: разосланные авторами письма возымели эффект (см., напр., webmath.ru в табл.), поэтому при построении рейтинга с 2018 года учитываются только такие тексты.

Результаты мониторинга этого года приведены в таблице. $N$ — общее количество выявленных ошибок, $\nu$ — количество ошибок на 1000 словоупотреблений, $P$ — количество обработанных словоупотреблений.

В качестве математической модели орфографической ошибки используются регулярные выражения, которые представляют собой шаблоны неправильного написания слов. Применимость такой модели обоснована в [5].

Заметим, что чувствительность программы к ошибкам неуклонно увеличивается. При анализе каждого сайта программа генерирует списки слов, которые отсутствуют в её словаре. Эти списки просматриваются авторами на предмет попадания в них ранее неизвестных ошибок, на основе которых создаются новые правила для их выявления в текстах сайтов. В общем случае это

| Ресурс | 2017 | | 2018 | | | 2019 | | | 2020 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N$ | $v$ | $N$ | $v$ | $P$ | $N$ | $v$ | $P$ | $N$ | $v$ | $P$ |
| algebraclass.ru | 0 | 0 | 0 | 0 | 54047 | 0 | 0 | 55618 | 0 | 0 | 57131 |
| egetrener.ru | – | – | 0 | 0 | 835394 | 0 | 0 | 835916 | 0 | 0 | 825299 |
| fipi.ru* | – | – | 0 | 0 | 311967 | 2 | 0,0061 | 328675 | 0 | 0 | 48335 |
| cleverstudents.ru | 15 | 0,0391 | 0 | 0 | 388265 | 2 | 0,0049 | 406487 | 2 | 0,0049 | 410137 |
| mathprofi.ru | – | – | 6 | 0,0109 | 549649 | 6 | 0,0101 | 595091 | 5 | 0,0084 | 594267 |
| webmath.ru | – | – | 33 | 0,0490 | 673005 | 26 | 0,0234 | 1113337 | 24 | 0,0139 | 1726478 |
| math4school.ru | – | – | – | – | – | – | – | – | 8 | 0,0150 | 534050 |
| treugolniki.ru | – | – | – | – | – | – | – | – | 1 | 0,0165 | 60447 |
| Википедия** | – | – | 287 | 0,0255 | 11264755 | – | – | – | – | – | – |
| reshuege.ru | – | – | 17 | 0,0121 | 1407188 | 19 | 0,0116 | 1640583 | 31 | 0,0172 | 1800810 |
| ege314.ru | – | – | – | – | – | – | – | – | 4 | 0,0238 | 168137 |
| hijos.ru | 8 | 0,0311 | 4 | 0,0183 | 219103 | 10 | 0,0276 | 362371 | 10 | 0,0270 | 369932 |
| 1cov–edu.ru | 0 | 0 | 0 | 0 | 94353 | 4 | 0,0297 | 134905 | 6 | 0,0392 | 153104 |
| matematikalegko.ru | 64 | 0,3708 | 21 | 0,0583 | 360274 | 34 | 0,0506 | 671518 | 26 | 0,0438 | 594056 |
| mathematics.ru | – | – | – | – | – | – | – | – | 13 | 0,0444 | 292735 |
| ru.solverbook.com | 0 | 0 | 26 | 0,0207 | 1254589 | 28 | 0,0435 | 643346 | 29 | 0,0451 | 643343 |
| ege–ok.ru | – | – | 25 | 0,0639 | 391124 | 20 | 0,0570 | 350729 | 20 | 0,0523 | 382567 |
| kpolyakov.spb.ru | – | – | 20 | 0,1119 | 178719 | 12 | 0,0608 | 197398 | 13 | 0,0654 | 198684 |
| raum.math.ru | – | – | 4 | 0,0843 | 47480 | 10 | 0,0833 | 120120 | 10 | 0,0817 | 122351 |
| ru.math.wikia.com | 21 | 0,0961 | 23 | 0,1270 | 181140 | 54 | 0,0845 | 639220 | – | – | – |
| egemaximum.ru | – | – | 21 | 0,0474 | 442790 | 48 | 0,1069 | 449249 | 42 | 0,0925 | 454117 |
| 5egena5.ru | – | – | – | – | – | – | – | – | 10 | 0,1104 | 90604 |
| studizba.com | – | – | 37 | 0,0578 | 640068 | 59 | 0,0803 | 734375 | 60 | 0,1136 | 527989 |
| pm298.ru | – | – | – | – | – | – | – | – | 40 | 0,1353 | 295670 |
| matemonline.com | – | – | – | – | – | – | – | – | 63 | 0,1587 | 397053 |
| nuru.ru | 1 | 0,0538 | 2 | 0,1077 | 18575 | 3 | 0,1618 | 18547 | 3 | 0,1618 | 18547 |
| alexlarin.net | – | – | 8 | 0,0861 | 92892 | 17 | 0,1745 | 97452 | 17 | 0,1681 | 101155 |
| mathsolution.ru | – | – | 106 | 0,6548 | 161892 | 29 | 0,1866 | 155397 | 29 | 0,1859 | 156022 |
| 5egena5.ru | – | – | – | – | – | – | – | – | 23 | 0,1929 | 119259 |
| tutomath.ru | – | – | – | – | – | – | – | – | 8 | 0,2393 | 33435 |
| ru.onlinemschool.com | 21 | 0,0544 | 82 | 0,3674 | 223197 | 142 | 0,3096 | 458674 | 142 | 0,3013 | 471240 |
| mathportal.net | – | – | – | – | – | – | – | – | 93 | 0,4903 | 189668 |
| calcs.su | – | – | 2 | 0,2125 | 9411 | 6 | 0,5502 | 10905 | 15 | 0,6442 | 23284 |
| dxdy.ru (UGC)* | 18455 | 1,1239 | – | – | – | – | – | – | – | – | – |
| Итого | – | – | 1011 | 0,0519 | 19487910 | 529 | 0,0546 | 9691238 | 747 | 0,0632 | 11811571 |

Таблица 1

*Частые орфографические ошибки 2020 г*

| № | Сигнатура | Количество | Исправлено на |
|---|---|---|---|
| 1 | `еден` | 120 | един |
| 2 | `со+тве[тц]*[в]*[сц]*т*в` | 68 | соответств |
| 3 | `п[оа]д[иы]нт[еэ]грал+ь*н` | 37 | подынтегральн |
| 4 | `луч[ёе]м` | 33 | лучом |
| 5 | `вычесл` | 18 | вычисл |
| 6 | `елемент` | 13 | элемент |
| 7 | `р[ао]з[ао]б[ъь]*[её]` | 12 | разобьё |
| 8 | `расчит` | 12 | рассчит |
| 9 | `то-*есть` | 12 | то есть |
| 10 | `из *под` | 12 | из-под |
| 11 | `к[ао]кой[\s-]*либ[ао]` | 12 | какой-либо |
| 12 | `со+тве[тц]*[сц]т*вен+` | 11 | соответственн |
| 13 | `предстов` | 11 | представ |
| 14 | `привыс` | 10 | превыс |

* — данные приводятся для справок, в итоговых не учтены

** — категория «Математика» и все вложенные подкатегории

не может оказать решающего влияния на количество найденных ошибок в корпусе [5]; однако с учетом рассылаемых писем владельцам сайтов работа в этом направлении достаточно важна.

В табл. 1 приведены данные о наиболее частых орфографических ошибках, которые были допущены на проанализированных в этом году сайтах. Интересный факт: чаще всего ошибки допускаются в специальных терминах. Также нельзя не заметить двукратное попадание в таблицу правил для слов «соответственно», «соответствующий» и их производных. Они почти одинаковые, но второе затрагивает слова с двойным «н». Ошибки, связанные с пропуском согласных или написанием их в неправильном порядке, в этих словах встречаются очень часто.

Авторы снова планируют отправить владельцам сайтов письма с подробными отчетами и продолжать ежегодный мониторинг.

Исходный код программы опубликован на условиях лицензии GNU GPLv3 по адресу: https://github.com/Aisse-258/chas-correct

На данный момент используемое ПО уже приносит полезные результаты, которые можно анализировать. В то же время авторы будут и дальше совершенствовать его, повышать чувствительность к ошибкам и получать более точные данные. Планируется также более тщательный «просмотр» образовательных ресурсов программой с включением данных из расположенных на них файлов в других форматах (напр., PDF, RTF, ODT), что, очевидно, требует дополнительных библиотек.

При этом некоторые части сайтов, напротив, целесообразно исключить из анализа. При просмотре отчетов программы с целью поиска ложноположительных срабатываний было замечено, что на сайте matematikalegko.ru некоторые ошибки засчитываются повторно, так как тексты статей, в которых они содержатся, частично дублируются в их превью. Стоит отметить, что такие повторы не оказывают существенного влияния на основной представленный в таблице показатель грамотности: количество ошибок на 1000 словоупотреблений, так как вместе с ошибками учитывается и часть грамотного текста превью. Но для большей точности анализируемые образовательные ресурсы все же будут проверены на предмет блоков и страниц с превью статей, и они будут исключены из анализа. На данный момент проблема уже решена для вышеупомянутого сайта, что стало причиной уменьшения его корпуса. То же ждет и другие ресурсы, на которых такая проблема будет обнаружена.

В планах также улучшение работы с морфлогией. Это включает в себя автоматизацию склонения слов и отделение аббревиатур и имен собственных от основной массы известных программе слов (находящихся в файле known-words.js). Одним из результатов анализа каждого сайта является список слов, которые не распознал «Яндекс.Спеллер» [7], и которые еще не были внесены в вышеупомянутый файл. С помощью таких списков авторы находят ранее неизвестные ошибки и создают новые правила для их распознавания. Но работу с этими списками усложняет то, что подавляющее большинство результатов — уже известные правильно написанные слова, стоящие в другой форме (роде, числе или падеже).

В проекте остается нерешенной задача классификации правил, по которым производится поиск ошибок. На данный момент они разделены на префиксы (часть слова, которая всегда стоит в начале слова, т. е. слева от которой стоит символ, не принадлежащий слову (пробел или знак препинания)), постфиксы (часть слова, которая всегда стоит в конце), цельные слова и словосочетания (т. е. те, слева и справа от которых находятся небуквенные символы) и фрагменты (напр. жы, шы $\Rightarrow$ жи, ши). Но это не решает задачу полностью: каждый пункт включает в себя огромное количество неупорядоченных правил. Авторы рассматривают возможность введения алфавитной классификации правил по верному варианту написания, но какие задачи решит такая классификация, кроме простого упорядочивания правил, пока не ясно. Авторы приглашают к дискуссии на эту тему интересующихся специалистов в области лингвистики.

**Литература**

1. *Каменкова Н. Г.* Использование интернет-технологий при организации изучения курса «математика и информатика» // Герценовские чтения. Начальное образование. – 2010. – Т. 1. – С. 288–293.

2. *Сон Л. П.* Интернет-коммуникация и проблема грамотности индивида // Научно-информационный журнал Армия и общество – 2013. – № 4 (36). – С. 87–91.

3. *Авдеев Н. Н.* Программа анализа грамотности интернет-СМИ // Культура общения и ее формирование, межвузовский сборник научных трудов. – 2016. – С. 81–83.

4. *Авдеев Н. Н., Шевелева К. В.* Анализ орфографической грамотности математических образовательных ресурсов в сети «Интернет» // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2017. – Вып. 7, Часть I – С. 7–8.

5. *Авдеев Н. Н., Шевелева К. В.* Применимость регулярного выражения как математической модели орфографической ошибки // Сборник Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации» – 2018. – С. 335–340.

6. *Момот Е. А. Шевелева К. В., Авдеев Н. Н.* Рейтинг орфографической грамотности математических образовательных ресурсов в сети «Интернет» (декабрь – январь 2019/20) // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020» / под ред. В. А. Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2020. – С. 192–197.

7. О сервисе – API. Руководство разработчика. – URL: https://yandex.ru/dev/speller/doc/dg/concepts/speller-overview.html/ (дата обращения: 22.10.2020)

УДК 378

# НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ КУРСА МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

**Н. Н. Морозова, Л. К. Проскурякова**

*Академия ФСО России, Орёл*

**Аннотация.** В статье актуализирована роль межпредметных связей курса математики в техническом вузе в плане формирования у студентов при его изучении готовности к дальнейшей учебно-познавательной деятельности и непосредственного совершенствования математической подготовки. Указаны дидактические функции межпредметных связей. Конкретизированы межпредметные связи математики с физикой и некоторыми дисциплинами профессиональной подготовки. Представлены отдельные способы и приемы реализации межпредметных связей. Приведены конкретные примеры задач прикладного характера.

**Ключевые слова:** межпредметные связи, математика, математическая подготовка, учебные дисциплины, прикладные задачи.

Происходящий в последние десятилетия процесс математизации наук обусловливает тот факт, что одним из критериев качества подготовки будущего специалиста технического профиля объективно становится мобильность его математической подготовки: высокий уровень математических знаний и способность применять их на практике при решении учебно-профессиональных задач, а в дальнейшем — профессиональных, в том числе, научно-исследовательских задач, профессиональной деятельности по предназначению. Данный факт актуализирует роль межпредметных связей учебной дисциплины «Математика» в системе вузовского образования.

Межпредметные связи являются обязательным требованием к содержанию и организации современного образовательного процесса, при систематической и целенаправленной реализации они позволяют существенно повысить его результативность и поэтому рассматриваются как дидактический принцип [1]. В дидактическом аспекте межпредметные связи, осуществляемые в курсе математики, выполняют методологическую, формирующую, развивающую, организационную функции: повышают научный уровень математической подготовки; способствуют развитию системного мышления, научного мировоззрения, познавательной активности и интересов обучающихся; формируют у них понимание целостности вузовского образовательного процесса, необходимости прочного усвоения учебного материала по мере его предъявления как фундамента для дальнейшего обучения; освобождают математику от известной абстрактности и позволяют обучающимся убедиться в практическом значении математической подготовки; унифицируют процесс использования математического аппарата при изучении других учебных дисциплин, устраняют дублирование учебного материала; способствуют координации в работе преподавателей различных учебных дисциплин, выработке единых требований. Очевидно, что эти функции взаимосвязаны и дополняют друг друга.

Эффективное выстраивание межпредметных связей в курсе математики предполагает проблемный подход к его изучению в условиях организации поисковой, учебно-исследовательской познавательной деятельности обучающихся в целях обеспечения овладения ими универсальными умениями оперировать математическими знаниями при решении задач из смежных с математикой предметных областей. При этом происходит также повышение глубины, гибкости, обобщенности математических знаний и, в целом, совершенствование математической культуры обучающихся и их готовности к профессиональной деятельности.

Под влиянием межпредметных связей метапредметные умения логического анализа и выполнения таких действий, как определение условий и требований задачи, выделение этапов и составление плана решения, использование необходимого понятийно-формульного аппарата и вычислительных навыков, проверка правильности получаемых результатов, формируемые на содержательно различном учебном материале, но на основе единых требований к его освоению, приобретают характер межпредметных умений [1], что способствует совершенствованию подготовки будущих специалистов.

Наиболее прочными и разносторонними являются межпредметные связи математики и общей физики. Например, приобретаемые обучающимися в курсе математики навыки решения дифференциальных уравнений необходимы для изучения гармонических колебаний и явлений радиоактивного распада; векторная алгебра и векторная функция скалярного аргумента составляют математические основы кинематики; производная функции одного переменного находит применение при изучении электрического тока, а определенные интегралы — теплоемкости кристаллов, работы при прямолинейном движении под действием постоянной силы; тройные и поверхностные интегралы по координатам используются для вычисления потока векторного поля через замкнутую и незамкнутую поверхность соответственно, а криволинейные интегралы по координатам — циркуляции векторного поля и т. п. [2].

В связи с этим для демонстрации прикладных возможностей изучаемого математического аппарата наряду с классическими по содержанию «чисто математическими» задачами обучающимся предлагаются, в частности, задачи следующего физического содержания: «Тело, брошенное под углом $\alpha$ к горизонту, в безвоздушном пространстве описало под действием силы тяжести кривую (параболу), уравнения которой: $x = v_0 \cos\alpha\, t,\ y = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt}{2}$ ($g = 9{,}8$ м/сек$^2$). Зная, что $\alpha = 60°$, $v_0 = 50$ м/сек, определите направление движения при $t = 2$ сек.» [3]; «При гармоническом колебательном движении точки по оси абсцисс около начала координат скорость задается формулой $\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$ ($T$, $\varphi_0$ – const). Определите положение точки в момент времени $t_2$, если известно, что в момент времени $t_1$ она находилась в точке $x_1$.»; «Вычислите работу, необходимую для запуска ракеты весом $P = 1{,}5$ Т с поверхности Земли на высоту $H = 2000$ км.» [4]; «Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение $V$, сопротивления $R$, самоиндукции $L$ и выключателя, который включается при $t = 0$. Найдите зависимость силы тока от времени (при $t > 0$)» [5] и др.

Несомненно, важной для повышения качества математической подготовки обучающихся в аспекте формирования их готовности к успешному изучению общепрофессиональных и специальных дисциплин является также предоставленная нам коллегами информация, содержашая конкретный перечень математический положений и операций, на освоение которых обучающимися в процессе преподавания математики целесообразно обратить особое внимание. Так, математическую базу изучения учебной дисциплины «Цифровая обработка сигналов» составляют такие математические операции, как: нахождение модуля и аргумента комплексного числа и их геометрическая интерпретация, представление комплексных чисел в различных формах и выполнение операций над ними; операции над матрицами; решение систем линейных уравнений методом Крамера; нахождение экстремумов функций нескольких переменных; прямое и обратное преобразования Фурье; вычисление моментов случайных величин; нахождение функции корреляции и коэффициента корреляции двух случайных величин и др. При изучении дисциплины «Теория электрической связи» востребованы знания обучающимися понятий линейного пространства, его базиса и условия независимости векторов; правил умножения и деления многочленов; формулы Эйлера; основных формул и методов интегрального исчисления функций одного и нескольких переменных; элементов теории функций комплексного переменного; методов аппроксимации; прямого и обратного преобразования Фурье; способов расчета спектров периодических и непериодических функций и др.

Делая акцент на изучение именно этого математического аппарата, наряду с формированием умений по его освоению в процессе решения собственно математических задач мы предлагаем обучающимся и задачи соответствующего прикладного характера, детально не вдаваясь в их предметную специфику.

Прикладные возможности теории функций комплексного переменного наглядно проявляются, например, при рассмотрении решения следующих задач учебной дисциплины «Цифровая обработка сигналов» [6].

Задача 1. Определите нули и полюсы передаточной функции цифрового фильтра

$$H(z) = \frac{0,6+0,3\cdot z^{-1}-0,4\cdot z^{-2}}{1+0,6\cdot z^{-1}+0,3\cdot z^{-2}}.$$

Решение. Математический аспект решения данной задачи состоит в том, что необходимо избавиться от отрицательных степеней $z$ и определить корни полиномов числителя и знаменателя получающейся дробно-рациональной функции

$$H(z) = \frac{0,6+0,3\cdot z^{-1}-0,4\cdot z^{-2}}{1+0,6\cdot z^{-1}+0,3\cdot z^{-2}}\cdot\frac{z^2}{z^2} = \frac{0,6\cdot z^2+0,3\cdot z-0,4}{z^2+0,6\cdot z+0,3}.$$

Для уравнения $0,6\cdot z^2+0,3\cdot z-0,4=0$, т. е. уравнения $z^2+0,5\cdot z-\frac{2}{3}=0$, дискриминант $D = \frac{0,25}{4}+\frac{2}{3} \approx 0,8539$ больше нуля, что свидетельствует о наличии у передаточной функции двух действительных нулей:

$$z_1^0 = -\frac{0,5}{2}+\sqrt{0,8539} \approx 0,604 = 0,604\cdot e^{i\cdot 0};\; z_2^0 = -\frac{0,5}{2}-\sqrt{0,8539} \approx -1,174 = -1,174\cdot e^{i\cdot\pi}.$$

Для уравнения $z^2+0,6\cdot z+0,3=0$. дискриминант $D=0,6^2-4\cdot 0,3=-0,84$ меньше нуля, следовательно, передаточная функция имеет два комплексно-сопряженных полюса:

$$z_1^* = \frac{-0,6+i\sqrt{0,84}}{2} \approx -0,3+i\cdot 0,4582 \approx 0,548\cdot e^{i\cdot 2,15},$$

$$z_2^* = \frac{-0,6-i\cdot\sqrt{0,84}}{2} \approx -0,3-i\cdot 0,4582 \approx 0,548\cdot e^{-i\cdot 2,15}.$$

Дидактическое значение данной задачи состоит в том, что она позволяет повторить понятия нулей и полюсов функции комплексного переменного, демонстрирует востребованность умений решать алгебраические уравнения на множестве комплексных чисел и осуществлять перевод комплексных чисел из алгебраической формы в показательную, компактную и более удобную для последующего практического использования. Вместе с тем, являясь реальной задачей из курса «Цифровая обработка сигналов», она свидетельствует о прикладных возможностях теории функций комплексного переменного.

Задача 2. Сигнал представляет собой дискретную экспоненту $x(nT) = a^n$ ($a=\text{const}$; $n=0, 1, 2,\ldots$). Требуется рассчитать прямое $z$ — преобразование сигнала.

Решение. $Z$ -образ дискретной экспоненты определяется равенством:

$$Z(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(a\cdot z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n.$$

Следовательно, область сходимости полученного ряда задается неравенством $\left|a\cdot z^{-1}\right|<1$. Таким образом, $z$-образ сигнала $x(nT)=a^n$ определен при условии $|z|>|a|$, а значит, область сходимости ряда $Z(a^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$ расположена вне круга с радиусом $R=a$. При этом, $Z(a^n) = \frac{1}{1-a\cdot z^{-1}}$.

Для нахождения нулей и полюсов $z$-образа данного сигнала необходимо преобразовать $Z(a^n)$ к виду: $Z(a^n) = \frac{z}{z-a}$. Тогда становится очевидным наличие у $z$-образа одного нуля $z_1^0 = 0$ и одного полюса $z_1^* = a$.

Данная задача позволяет обучающимся убедиться в возможностях практического использования ряда Лорана. Ее решение полезно визуализировано изображением на комплексной плоскости, так называемой, карты нулей и полюсов и области сходимости $z$-образа исследуемого сигнала.

Итогом изучения раздела «Ряд Фурье» в курсе математики может служить домашнее контрольное задание (ДКЗ) комбинированного характера, устанавливающее непосредственную связь с учебным материалом дисциплины «Теория электрической связи». Выполнение такого ДКЗ потребует от обучающихся поисковой работы с дополнительной учебной литературой, обеспечит содержательный итог изучения рядов Фурье и станет хорошей подготовкой к предстоящему освоению теории электрической связи. Приведем пример задачи одного из возможных вариантов ДКЗ.

Задача. Периодическое колебание задано графически на рис. 1.

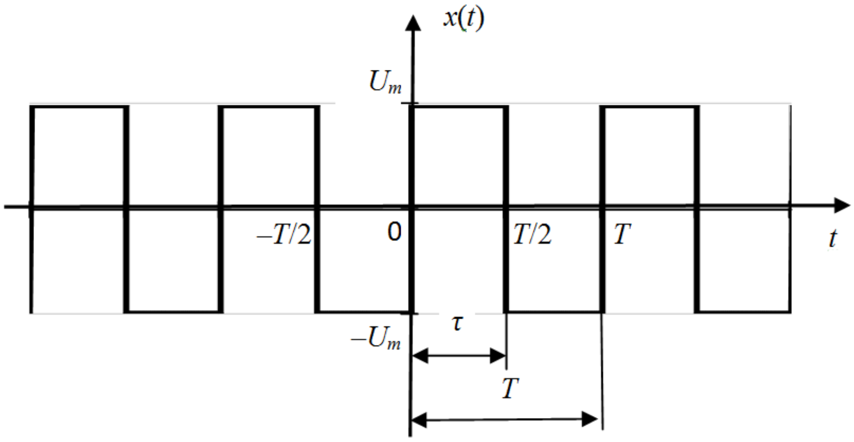



*Рис. 1*

Требуется: найти математическое выражение функции $x(t)$ и общие выражения для коэффициентов $a_k$ и $b_k$; записать ряд Фурье в 1-й (квадратурной) форме; найти численные значения амплитуд гармоник $A_k$ (до 5-й гармоники включительно), постоянной составляющей $A_0$, значения начальных фаз гармоник $\varphi_k$ (до 5-й гармоники включительно); записать ряд Фурье во 2-й (амплитудно-фазовой) форме; определить значения мощностей гармоник $P_k$ (до 5-й гармоники включительно); построить графики спектров амплитуд, фаз и мощности; представить на графике процесс формирования периодической последовательности прямоугольных импульсов путем суммирования постоянной составляющей и первых 3-х не равных нулю гармоник; сравнить формы исходного сигнала и полученного в результате сложения колебаний; определить ширину спектра сигнала по энергетическому критерию, как полосу частот, в пределах которой сосредоточена заданная доля средней мощности сигнала (90 %) [7].

Первичное знакомство обучающихся с прикладными возможностями изучаемого математического аппарата начинается с демонстрации на лекциях структурно-логических схем, отражающих его использование при изучении других учебных дисциплин. При этом нередко демонстрируются и конкретные задачи из смежных предметных областей. Однако ограниченные временные возможности лекционных занятий не позволяют выполнять в полном объеме решение прикладных задач. Такое решение организуется на практических занятиях, самостоятельных работах под руководством преподавателя, при выполнении обучающимися домашних контрольных заданий.

Например, при изучении раздела «Матрицы. Определители» первой темы «Элементы алгебры и аналитическая геометрия» курса математики обучающимся может быть предложена задача, решаемая при изучении одной из специальных дисциплин.

Задача. Оценить количество остовов приведенного на рис. 2 графа (граф демонстрируется на экране с помощью компьютерного проектора).

Студенты-первокурсники не знают понятий «граф», «остовное дерево графа», которые будут изучаться только в третьем семестре в разделе «Дискретная математика». Преподаватель сообщает это обучающимся и, не раскрывая детально смысла этих понятий, демонстрирует в готовом виде так называемую матрицу Кирхгофа $K$ графа, представленного на рис. 2 с пояснением простого правила ее построения:

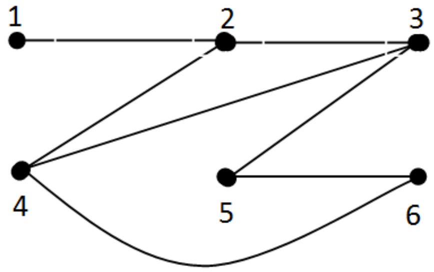



*Рис. 2*

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Затем дается информация [8] о том, что для вычисления числа остовных деревьев достаточно использовать минор, соответствующий любому элементу матрицы, например $M_{22}$. Число остовных деревьев графа обозначается $t(G)$ и записывается соответствующий определитель пятого порядка:

$$t(G) = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычислить этот определитель обучающимся предлагается самостоятельно в часы внеаудиторной самостоятельной работы с последующей проверкой на очередном практическом занятии полученного результата и демонстрацией одного из возможных вариантов решения с использованием компьютерного проектора.

Выполняя решение такой задачи, обучающиеся убеждаются в том, что преподаватель предлагает им для вычисления определители высоких порядков не только и не столько ради того, чтобы совершенствовать умения в вычислении определителей с использованием теоремы о разложении определителя матрицы по элементам строки или столбца и свойств определителей, но с целью формирования их готовности к прикладному использованию приобретаемых математических знаний.

Удачной формой подготовки обучающихся к дальнейшей учебно-познавательной деятельности является реферативная работа прикладной направленности по линии студенческого научного общества. Написание рефератов междисциплинарной тематики позволяет студентам более глубоко погружаться в новые предметные области в процессе самостоятельного изучения рекомендованной преподавателем литературы и вместе с тем обогащает багаж математических знаний, формирует научный кругозор, стимулируя процесс профессионального становления.

От семестра к семестру курс математики усложняется, но при этом возрастают и возможности его междисциплинарного использования, разноплановое знакомство с которыми повышают интерес и мотивацию студентов к его изучению.

**Литература**

1. *Максимова, В. Н.* Межпредметные связи в процессе обучения / В. Н. Максимова. – Москва : Просвещение, 1988. –192 с.

2. *Тверской, Н. В.* Справочное пособие по физике / Н. В. Тверской, В. Н. Юшин ; под общ. ред. М. С. Мартынова. – Орел : Академия ФСО России, 2010. – 274 с.

3. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 548 с.

4. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу: Учеб. пособие для студентов втузов / Г. И. Запорожец. – Москва : Высш. школа, 1966. – 459 с.

5. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учеб пособие для вузов / А. Ф. Филиппов. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 94 с.

6. *Васюков, В. Н.* Цифровая обработка сигналов: Сборник задач и упражнений для студентов вузов / В. Н. Васюков. – Новосибирск : Новосиб. гос. тех. ун-т., 2016. – 51 с.

7. Формирование и обработка сигналов в инфокоммуникационных системах / А. И. Еременко, Н. Г. Богданов, С. Н. Савельев, С. С. Шведов ; под общ. ред. А. И. Еременко. – Орел : Академия ФСО России, 2015. – 400 с.

8. *Носов, В. А.* Основы дискретной математики / В. А. Носов. – Орел : Академия ФАПСИ, 2003. – 252 с.

УДК 681.3.06(075)

# ПРОГРАММИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ В НАЧАЛЕ ИЗУЧЕНИЯ ИНФОРМАТИКИ ПЕРВОКУРСНИКАМИ ФАКУЛЬТЕТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МЕХАНИКИ


**О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева**

*Воронежский государственный университет*



**Аннотация.** Приводятся примеры математических моделей, используемых на первых этапах изучения курса «Информатика и программирование».



**Ключевые слова:** математическая модель, алгоритм, язык программирования С++.


Быть образованным человеком в XXI веке можно, только хорошо владея информационными технологиями.

В прошлом, 2019 году, наш факультет отпраздновал свой полувековой юбилей. Факультет ПММ был образован в нашей стране одним из первых факультетов подобного профиля. Сегодня ПММ — это:

- динамично развивающийся факультет-лидер;
- высоко-квалифицированный профессорско-преподавательский коллектив;
- богатейший парк самых современных компьютеров;
- лаборатории с уникальным оборудованием;
- функциональная система непрерывного IT-образования;
- международная система управления качеством ISO 9001;
- признание роли высшего образования в России и за ее рубежом.

Предмет «Информатика и программирование», изучение которого начинается с первых дней обучения на факультете, является одной из основных дисциплин. Учебным планом предусмотрены лекции, практические и лабораторные занятия.

Для связи с другими учебными дисциплинами составление программ для математических алгоритмов на языке С++ начинается с первых занятий первокурсников. Приведем несколько примеров [1–5], рассматриваемых в течение первых двух месяцев обучения.

В разделе «Линейные алгоритмы» один из вариантов заданий для самостоятельной работы:

*Задание 1.* Треугольник на плоскости задан координатами вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти сумму длин его медиан.

В разделе «Алгоритмы с ветвлениями» рассматривается программа следующей задачи:

*Задание 2.* Вычислить значение функции в задаваемой пользователем точке

$$y = \begin{cases} a - \cos(2x - \pi / 12) + 1, & \text{если } x < \pi / 4; \\ 2(a - \cos(2x - \pi / 2))^2, & \text{если } \pi / 4 \le x < \pi / 2; \\ \dfrac{1}{a - \cos(2x - \pi / 12)} + 3, & \text{если } \pi / 2 \le x < \pi; \\ 3(a - \cos(2x - \pi / 12) + 7), & \text{если } x \ge \pi. \end{cases}$$

*Задание 3.* Составить программу для вычисления значения площади заштрихованной области (рис. 1), если точка с заданными координатами $(x, y)$ попадает в эту область. В противном случае вывести соответствующее сообщение.

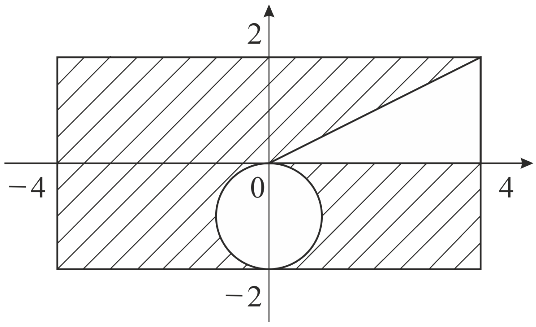



*Рис. 1*

В разделе «Циклические алгоритмы» приведено достаточно большое количество условий как задач с решениями, так и вариантов заданий для самостоятельной работы.

В качестве примеров ниже приведены два таких задания.

*Задание 4.* Пусть отрезок $[a,b]$ разбит точками на $n$ равных частей. В каждой точке вычисляется значение функции

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2x^3 - 1}}.$$

Найдите среднее арифметическое положительных значений функции на отрезке $[a,b]$.

*Задание 5.* При некоторых заданных $x$, $N$ и $E$, определяемых вводом, вычислите

а) сумму $N$ слагаемых заданного вида;

б) сумму тех слагаемых, которые по абсолютной величине больше $E$.

Вычисление второй суммы выполните для двух значений $E$, отличающихся на порядок, при этом определите количество слагаемых, включенных в сумму, вычисляемую для каждого значения $E$. Сравните результаты со значением функции, для которой данная сумма определяет приближенное значение при $x$, лежащем в интервале $(-R, R)$, вычисленным с помощью встроенных функций компилятора.

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (R = 1)$$

Известные математики с мировыми именами внесли большой вклад в развитие информатики и программирования.

Нельзя не согласиться с высказыванием Никлауса Вирта: «Ключ к тайнам компьютеров в гармонии математики, инженерии и программирования» [7].

Никлаус Вирт — известный ученый, директор института информатики Швейцарской высшей политехнической школы в Цюрихе, является создателем языка программирования Паскаль. Этот язык назван в честь Блеза Паскаля (19.04.1623–19.08.1662) – французского математика, физика и философа, который в 19 лет сконструировал счетную машину для двух арифметических действий (сложения и вычитания, чтобы облегчить труд своего отца – сборщика налогов).

Нельзя не отметить роль Селима Григорьевича Крейна, который является автором первой прикладной компьютерной программы для решения дифференциальной краевой задачи второго порядка (1951 г.) совместно с С. А. Авраменко т С. А. Богомолец [6]. Селим Григорьевич Крейн, математик с мировым именем, заслуженный деятель науки РСФСР плодотворно работал в 60–70 годы прошлого века заведующим кафедрой уравнений в частных производных Воронежского государственного университета.

## Литература

1. *Ускова, О. Ф.* Начала структурного программирования на языке С++ : задачник-практикум / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, О. Д. Горбенко. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. – 261 с.

2. *Ускова, О. Ф.* Задачник-практикум по алгоритмическому языку / О. Ф. Ускова, О. Д. Горбенко. – Воронеж : Издательство Воронежского университета, 1990. – 196 с.

3. Программирование на языке Паскаль : задачник / О. Ф.Ускова, М. В. Бакланов, И. Е. Воронина, О. Д. Горбенко [и др]; Под ред. О. Ф. Усковой. – СПб. : Питер, 2002 (2003, 2005). — 366 с.

4. *Ускова, О. Ф.* Информатика. Начальный курс : учебное пособие для поступающих на факультет прикладной математики и механики Воронежского госуниверситета / О. Ф. Ускова, О. Д. Горбенко, Н. А. Каплиева. – Воронеж : Альбион, 2006. – 181 с.

5. *Ускова, О. Ф.* Основы программирования : учебное пособие / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 266 с. (Учебник Воронежского государственного университета).

6. *Ускова, О. Ф.* Из истории Российской информатики / О.Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, О. Д. Горбенко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.). – Воронеж, 2019. – С. 269.

7. *Ускова, О. Ф.* Ключ к тайнам компьютеров. / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, Н. Б. Ускова // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна, 13–19 ноября 2017 г. : сборник материалов. – Воронеж, 2017. – С. 183–184.

УДК 681.3.06(075)

# МЕЖДУНАРОДНЫЕ КОНФЕРЕНЦИИ «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МЕХАНИКИ» — ПЛАТФОРМА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ СТУДЕНТОВ

**О. Ф. Ускова, А. И. Шашкин, Н. А. Каплиева, С. Н. Медведев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрены примеры мероприятий внеаудиторной работы со студентами: соревнования по информатике и программированию, интеллектуальные викторины, соревнования болельщиков, игры «Где логика?», которые регулярно проводятся факультетом ПММ ВГУ в рамках Международных конференций «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Проведение этих мероприятий способствует интеллектуальному развитию личности и профессиональной состоятельности.
**Ключевые слова:** студенческие соревнования по информатике и программированию, интеллектуальные викторины, студенческий директорат, тренерский состав, вузы г. Воронежа — участники мероприятий.

Международные конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» проводятся в Воронежском государственном университете на базе факультета ПММ, который организован в нашей стране в 1969 году одним из первых факультетов подобного профиля [1]. Эти конференции проводятся ежегодно, начиная с 2006 года. Двенадцать конференций были поддержаны грантами РФФИ. В работе конференций принимают участие ученые многих городов России и из-за рубежа.

В рамках Международных конференций проводятся разнообразные мероприятия, связанные с учебным курсом «Информатика и программирование», которые расширяя информационно-образовательное пространство, способствуют подготовке востребованных специалистов [1–7]:

- соревнования первокурсников вузов г. Воронежа;
- интеллектуальные викторины;
- интеллектуальная игра «Где логика?»;
- соревнования болельщиков.

Отличительная особенность этих мероприятий состоит в том, что студенты нашего факультета являются не только участниками, но и активно работают в их подготовке и проведении.

Приведем несколько примеров.

Соревнования студентов по информатике и программированию в рамках Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проведенные 9–16 декабря 2015 года, были посвящены 25-летию их организатору ЗАО НПП РЕЛЭКС, в котором доля выпускников нашего факультета составляет 64 % от общего числа сотрудников [6].

В соревнованиях приняли участие 94 студента, представляющие Тамбовский государственный университет и воронежские вузы: Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина (ВУНЦ ВВС «ВВА»), педагогический университет (ВГПУ), государственный университет (ВГУ), университет инженерных технологий (ВГУИТ), архитектурно-строительный университет (ВГТУ), институт высоких технологий (ВИВТ).

Победителями соревнований стали студенты ВГУ:

Землянухин М. В. (ФКН, 4 курс),

Минаков С. С. (ПММ, магистр),

Золотухин Е. А. (ПММ, 1 курс).

В интеллектуальной викторине по информатике и программированию победу одержал первокурсник факультета ПММ ВГУ Прохоров Д. Ю.

Итоги викторины болельщиков, в которой участвовали 146 студентов:

1 место Зайцев Антон (1 курс ПММ),

2 место Гладков Антон (ВУНЦ ВВС «ВВА»),

3 место Волков Александр (4 курс ПММ).

Большую работу в проведении студенческих соревнований и награждении победителей провела компания ЗАО НПП РЕЛЭКС, генеральный директор которой Бойченко Игорь Алексеевич — выпускник факультета ПММ.

В проверке результатов работ соревнующихся активно работал студенческий директорат, состоящий из студентов и магистрантов факультета ПММ: Солодова Алина, Куликова Оксана, Котелкин Дмитрий, Разумова Татьяна, Бойченко Светлана.

Соревнования студентов по информатике и программированию, посвященные 100-летию со дня рождения выдающегося математика с мировым именем Селима Григорьевича Крейна, состоялись 16 декабря 2017 года [3].

Селим Григорьевич Крейн, профессор, доктор физико-математических наук, работая в ВГУ на математическом факультете в 60-е годы прошлого века, воспитал талантливых учеников. С. Г. Крейн знаменит тем, что одним из первых в нашей стране составил работающую программу для одноадресной ЭВМ первого поколения [3]. В соревнования 2017, посвященные С. Г. Крейну, входили две части: составление программ и интеллектуальная викторина, в которой приняли участие 117 первокурсников различных вузов г. Воронежа.

Студентов к соревнованиям подготовили преподаватели [1]:

ВУНЦ ВВС «ВВА»

Афанасьевский Леонид Борисович,

Будников Сергей Алексеевич,

Калачев Виктор Владимирович;

ВГУИТ

Авсеева Ольга Владимировна,

Медведкова Ирина Евгеньевна,

Тихомиров Сергей Германович;

ВГПУ

Гаркавенко Галина Валериевна,

Кубряков Евгений Анатольевич;

ВИВТ

Львович Игорь Яковлевич,

Преображенский Андрей Петрович;

ВГТУ

Хицкова Юлия Владимировна,

Мковий Катерина Александровна.

Все они получили сертификаты тренеров, подготовивших студентов к участию в соревнованиях [1].

Большую работу в проведении всех мероприятий соревнований студентов 2017 года выполнял студенческий директорат. В него входили студенты 2 курса 61 группы факультета ПММ ВГУ кафедры математического обеспечения ЭВМ:

Барышов Владимир,

Блиняева Александра,

Жданова Софья,

Коток Игорь,
Маслакова Александра,
Назарова Арина,
Строков Никита,
Ярыш Людмила.

Победителем интеллектуальной викторины стал первокурсник факультета ПММ ВГУ Чикунов И. Д.

Соревнования, связанные с разработкой алгоритмов и программ, провели выпускники факультета ПММ ВГУ, успешно работающие в известных компьютерных организациях г. Воронежа РЕЛЭКС, Вистар, DataArt, Atos.

Интеллектуальную викторину организовали факультет ПММ и компания РЕТ, генеральный директор которой кандидат физико-математических наук, закончивший с отличием факультет ПММ ВГУ Лапыгин Д. Р.

Авторские учебники и учебные пособия предоставили в качестве призов преподаватели факультета ПММ: Шашкин А. И., Вервейко Н. Д., Махортов С. Д., Болотова С. Ю., Астахова И. Ф., Азарнова Т. В., Баскаков А. Г., Баева Н. Б., Бондаренко Ю. В., Каплиева Н. А., Каширина И. Л., Ускова О. Ф.

Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» 2019 года посвящена полувековому юбилею их организатору – факультету ПММ ВГУ [7]. В числе мероприятий в рамках конференции 2019 года кроме традиционных соревнований первокурсников и интеллектуальной викторины компанией DataArt были организованы соревнования студентов любых курсов в открытом телекоммуникационном режиме по информатике и программированию [1]. В них приняли участие 40 студентов вузов ВГУ, ВГТУ, ВГПУ.

Победу соревнований DataArt одержали:
Фалалеев Максим (2 курс 3 группа факультета ПММ),
Усков Даниил (3 курс 8 группа факультета ПММ),
Игнатьева Юлия (4 курс 9 группа факультета ПММ),
Палагутин Алексей (2 курс 2 группа факультета ПММ),
Лунь Андрей (3 курс физического факультета ВГУ),
Губина Алина (2 курс 61 группа факультета ПММ).

Впервые в юбилейный для факультета ПММ год в числе мероприятий, расширяющих информационно-образовательное пространство, в рамках Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» была проведена финальная встреча интеллектуальной викторины «Где логика?» между студентами и преподавателями [1].

Председателем оргкомитета интеллектуальных игр является бакалавр 4 курса кафедры МО ЭВМ факультета ПММ, отличник учебы Игорь Коток, научная работа которого связана с разработкой программного обеспечения для организации и проведения внеаудиторных интеллектуальных мероприятий.

Студенческая команда, в состав которой входило 14 человек, проиграла команде преподавателей всего 3 балла. Отметим, что в состав команды преподавателей входили участники Международной конференции не только из ВГУ, но и из других воронежских вузов и даже городов нашей страны:

Замятин Игорь Викторович, ст. преподаватель, канд. физ.-мат. наук, ПММ ВГУ,
Корольков Олег Геннадьевич, доцент, ПММ ВГУ,
Горбенко Олег Данилович, доцент, ПММ ВГУ,
Хицкова Юлия Владимировна, доцент, ВГТУ,

Маковий Катерина Александровна, доцент, ВГТУ,

Зайченко Ольга Константиновна, канд. физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский госуниверситет.

Заметим в заключение, что проведение студенческих соревнований, интеллектуальных игр, викторин и других внеаудиторных мероприятий развивает функциональную грамотность как совокупность не только определенных знаний в области информатики и программирования, но определенных качеств мышления, мотивированных навыков и умений, которые способствуют формированию их способности к обучению и адаптационной гибкости как условия будущей личности и профессиональной состоятельности.

**Литература**


1. Информационно-образовательная среда международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», посвященной 50-летию факультета ПММ ВГУ / О. Ф. Ускова, А. И. Шашкин, Н. А. Каплиева, С. Н. Медведев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. – Воронеж, 2020.

2. *Ускова, О. Ф.* Интеллектуальная викторина по информатике - одна из форм совершенствования образовательного процесса / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, А. И. Шашкин // Информационные технологии в образовательном процессе вуза и школы : материалы 11 Региональной научно-практической конференции, 29 марта 2017 г. – Воронеж, 2017. – С. 133–136.

3. *Ускова, О. Ф.* Ключ к тайнам компьютеров. / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, Н. Б. Ускова // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна, 13–19 ноября 2017 г. : сборник материалов. – Воронеж, 2017. – С. 183–184.

4. 95-летию Воронежского государственного университета посвящается / О. Ф. Ускова, А. И. Шашкин, Д. Р. Лапыгин [и др] // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж, 2015. – Вып. 10. – С. 252–265.

5. Соревнования студентов по информатике и программированию в рамках Международных научных конференций «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» / О. Ф. Ускова, А. И. Шашкин, Н. А. Каплиева // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики [Электронный ресурс] : сборник трудов Международной конференции, 18–20 декабря 2017 г. – Воронеж, 2017. – С. 1474–1477.

6. *Ускова, О. Ф.* Некоторые цифры и факты интеллектуальной викторины 2017 года по информатике и программированию / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, А. И. Шашкин // Информационные технологии в образовательном процессе вуза и школы : материалы 12-й Региональной научно-практической конференции. – Воронеж, 2018. – С. 142–146.

7. *Шашкин, А. И.* 50 лет факультету прикладной математики, информатики и механики / А. И. Шашкин, О. Ф. Ускова. – Воронеж : Научная книга, 2019. – 21 с.

УДК 514.853

# ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО ОБУЧЕНИЯ

**В. Н. Худенко[1], С. А. Ишанов[1], Е. А. Ровба[2]**

*[1]Балтийский федеральный университет имени И. Канта, Калининград*
*[2]Гродненский государственный университет имени Я. Купалы, Республика Беларусь*

**Аннотация.** Рассматриваются достоинства и недостатки преподавания математических дисциплин в условиях смешанного обучения (совокупности дистанционного и традиционного образований) выявленное в процессе проведения занятий в Балтийском федеральном университете им. И. Канта и Гродненском государственном университете им. Я. Купалы, а также рекомендации по устранению недостатков и усилению достоинств.
**Ключевые слова:** дистанционное преподавание, традиционные формы, образовательный ресурс, бально-рейтинговая система, электронные ресурсы, динамическая визуализация, проктеринг.

В текущем календарном году вся система высшего образования в мире столкнулась с новым вызовом — массовым переходом на дистанционное преподавание. В результате часть преподавателей была не подготовлена к такому повороту событий: у них отсутствовал материал лекций и практических занятий в удобной электронной форме. Они были вынуждены перейти на систему отсылки заданий и их проверке через электронную почту, мессенджеры или социальные сети. Такая форма дистанционных занятий свелась, по существу, к заочной форме обучения и может быть реализована только в режиме чрезвычайной ситуации.

Буквально на вторую неделю, руководством вузов, были предприняты шаги по изменению ситуации: получены лицензии для проведения занятий в виде видео конференций. Так в Балтийском федеральном университете им. И. Канта приобретены лицензии на Cisco Webex Meeting — среду, позволяющей проводить занятия с неограниченным числом участников. Одному из авторов настоящей работы довелось читать вводные лекции для всех студентов первого курса, зачисленных в Институт физико-математических наук и информационных технологий (подразделение БФУ им. И. Канта), число слушателей превышало 220 человек, причем многие иностранные студенты, которые не смогли приехать в вуз из-за закрытых границ, участвовали в этих лекциях наравне с другими студентами.

Среда Cisco Webex Meeting позволяет демонстрировать всё, что происходит на экране лектора. Чаще всего демонстрируем заранее подготовленную презентацию (или демонстрируется частями лекционный материал в формате pdf). Авторы достаточно широко применяют анимированный материал, иллюстрирующий построение графиков или математические понятия [1–2]. Примеры таких анимаций изображены на рис. 1–4. Формат статьи не позволяет увидеть динамику построения математических объектов, но желающие могут ознакомиться в полном объеме по ссылке: https://www.youtube.com/channel/UCICd1ydh1XxiW_wyCjbp81A

При необходимости сделать рукописные математические выкладки, пояснения и рисунки можно переключить экран на изображение с графического планшета с помощью программы Microsoft Whiteboard (или им подобные, например в среде Zoom). Следить за аудиторией можно посредством включенного чата со слушателями.

Следует отметить, что студенты при дистанционной подаче материала, даже более активны и, с согласия лектора, задают вопросы прямо походу лекции. Вопрос регистрацией присутствующих также решается с помощью чата, который сохраняется как текстовый файл.

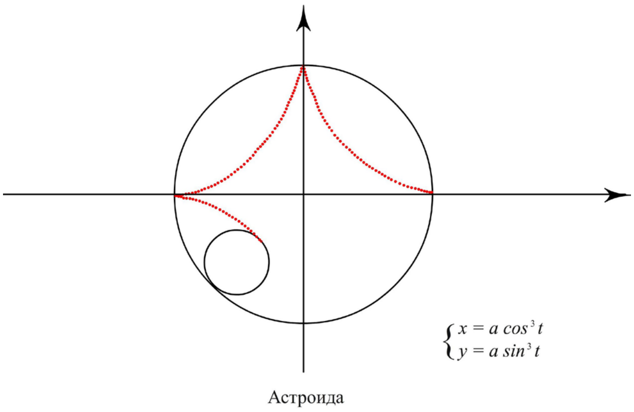



*Рис. 1. Построение астроиды кадр 1*

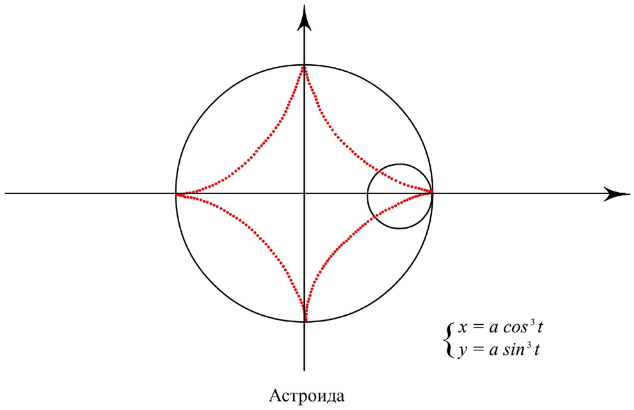



*Рис. 2. Построение астроиды кадр 2*

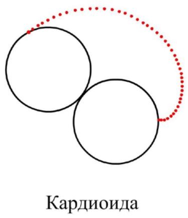



*Рис. 3. Построение кардиоиды кадр 1*

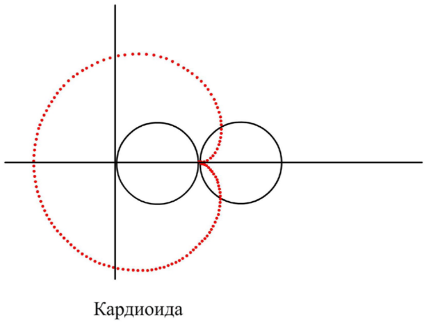



*Рис. 4. Построение кардиоиды кадр 2*

К недостаткам дистанционной формы следует конечно, же отнести отсутствие живого контакта преподавателя и студента, что называется «глаза в глаза», не все преподаватели вузов обладают высокой цифровой культурой, причем это не есть вопрос возраста. Также студенты не все поставлены в равные условия, одни используют достаточно мощную технику, стационарную или мобильную, а другие смотрят лекцию на телефоне до еще ограниченным ресурсом. Еще один недостаток – качество интернет соединения.

При реализации практических занятий в дистанционной форме применение графических планшетов просто необходимо.

Текущий контроль за успеваемостью студентов осуществляется с помощью специально разработанных порталов бально-рейтинговой системы (проверка рукописных конспектов, домашних заданий, тесты, выполнения индивидуальных и контрольных работ).

К семестровым экзаменам студенты подходят с определённым набором достижений, который учитывается при выставлении предварительной оценки. Экзамены, в случае проведения on line, осуществлялись в тех же средах, где и занятия с элементами проктеринга, а в ряде случаев и полным проктерингом, как при процедуре внутренних вступительных испытаний, которые также проводились дистанционно. Результаты сравнимы с итогами вступительных испытаний прежних лет, проводимых традиционным образом в форме компьютерных тестов по математике.

Отдельно следует сказать о консультациях перед вступительными испытаниями, проводимых дистанционно. Такой формат позволил собрать самую большую аудиторию слушателей, которые получили исчерпывающие ответы на свои вопросы. Особенностью ее проведения состояло в том, что уже несколько лет подряд, ее содержание (кроме вопросов) выкладывается в образовательную среду университета и доступна гостю. Материал последней консультации можно найти по ссылке: https://lms-3.kantiana.ru/mod/book/view.php?id=95426, причем здесь демонстрируются анимации, решение примерных задач и есть звуковые комментарии.

Точно так же доступен студентам и лекционный материал, с лекционными демонстрациями, видео, звуковыми комментариями. Особенность является, то что все выложено так, что с материалами можно знакомиться на сайте, а скачать нельзя, что сохраняет авторские права и ограничивает использование материалов для списывания во время экзаменов.

Особо следует отметить, что проведение защит выпускных квалификационных работ по направлениям бакалавриата и магистратуры не вызвало никаких трудностей, при этом выпускники, члены комиссии и слушатели находились в разных странах. Члены экзаменационной комиссии заранее ознакомились с электронными версиями защищаемых работ, а сами работы, как требует регламент заранее были вывешены на сайте университета.

Подводя итоги отметим, что дистанционный формат имеет ряд преимуществ: неограниченный охват аудитории, возможность демонстрации различных материалов, возможность локализации слушателей в различных географических точках, возможность использования материалов различных сайтов и ряд других.

К недостаткам, следует отнести достаточно серьезные требования к уровню интернет соединений, не равный доступ слушателей к контенту, старание студентов обойти требования к самостоятельной работе, особенно при контрольных мероприятиях, повышенные требования к цифровой культуре преподавателей, последнее, видимо, является требованием времени и только будет усиливаться.

**Литература**

1. *Худенко, В. Н.* Использование динамической визуализации учебного материала в процессе преподавания математики для студентов физико-технических направлений / В. Н. Худенко, Е. А. Ровба, Е. П. Новикова, И. С. Маклахова // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2017. – С. 1391–1393.

2. *Худенко, В. Н.* К вопросу об использовании динамической визуализации учебного материала в процессе преподавания теории функций комплексного переменного / В. Н. Худенко, Е. А. Ровба, И. С. Маклахова // Сборник трудов VIII международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». – Воронеж, 2015. – С. 377–379.

3. *Худенко, В. Н.* К вопросу об использовании динамической визуализации учебного материала в процессе преподавания математики для студентов инженерных направлений / В. Н. Худенко, Е. А. Ровба, И. С. Маклахова // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2016. – С. 368–370.

4. *Худенко, В. Н.* Использование динамической визуализации классических алгебраических алгоритмов в процессе преподавания высшей математики / В. Н. Худенко, Е. А. Ровба, Е. П. Новикова, И. С. Маклахова // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2018. – С. 1428–1430.

УДК 372.851

# ПРОБЛЕМА ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ

**Я. А. Шахбазян, Г. Г. Петросян**

*Воронежский государственный педагогический университет*

**Аннотация.** В данной статье рассматривается проблема пространственного мышления школьников. Выявлены причины появления проблемы. Проведен анализ содержания школьных учебных пособий по математике на всех трех уровнях образования. Сделан вывод о том, что в современных концепциях обучения не предусмотрено постепенное развитие пространственного мышления. Проанализированы психологи-педагогический опыт и идеи известных ученых, на основе которых построена последовательность формирования пространственного мышления. Найдены пути решения проблемы путем выполнения специализированных задач и закрепления полученных знаний на каждом этапе обучения.

**Ключевые слова:** пространственное мышление, задачи, развитие, учащиеся, школьный курс, умственная деятельность, формирование, пространство, представление, стереометрия.

Для успешного освоения таких учебных предметов как: черчение, физика, тригонометрии и геометрия школьники должны иметь специфичные интеллектуальные навыки, связанные с развитием пространственного мышления. С помощью пространственного мышления человеку дается возможность анализировать и распознавать различные объекты вне зависимости от угла их рассматривания. Человек может мысленно перемещать, составлять и разбивать объекты на различные комбинации, а также «моделировать» объекты с необходимыми свойствами.

С точки зрения психологии мышление — психический процесс отражения действительности, т. е. одна из форм творческой деятельности человека. В генезе мышления важнейшую роль играет понимание. Следует различать понятие пространственного интеллекта и пространственного мышления. Первое — умение выстраивать в своем сознании пространственные образы. Непосредственное умение манипулировать представленными объектам является пространственным мышлением. Если сознание человека обладает этими качествами, то ему с легкостью удается мыслить объемно. Человек может воплотить в голове схему объекта, который его интересует и изучить его [1].

Пространственное мышление — один из основных видов умственной деятельности человека, которое создает пространственные образы и позволяет мыслить в терминах изображений и использовать их в процессе решения различных задач. Оно может быть сформировано в раннем детстве и существовать отдельно от речевого понятийного интеллекта, не создавая при этом помех для его развития. Ребенок с раннего возраста играющий с конструкторами, кубиками, строительными наборами, становясь старше, начинает проявлять интерес к моделированию. Его пространственное мышление развивается на высоком уровне, в школе он с легкость выполняет схемы, чертежи, рисунки в задачах на построение в геометрии, физике, черчении [4].

По результатам международного исследования качества образования PISA Россия значительно уступает другим странам в способности применять полученные знания и навыки в новых условиях. Одной из причин этого ученые признают плохой уровень гибкости и абстрактности мышления.

Проанализировав содержание школьных учебных пособий по математике, с точки зрения решения задач на пространственное мышление, можно сделать вывод, что на уровне начального общего образовании такие задачи отсутствуют. На уровне основного общего образования в 7 классе появляются основные понятия плоских фигур, изучение которых происходит на уроках геометрии. В 10 классе на среднем основном уровне образования у учащихся возникают трудности с решением стереометрических задач, т. к. они представляют объемную фигуру, как плоскую. Начать формирование пространственного мышления на данный момент обучения поздно, т. к. возраст учащегося становится менее сензитивен, а также на освоение темы выделяются слишком мало учебного времени.

Таким образом, можно судить о том, что в содержании школьного курса математики нет преемственности в решении задач формирования и развития пространственного мышления. Это сводится к тому, что старшеклассники и выпускники не могут решать стереометрические, а иногда и планиметрические задачи, которые так же занимают половину заданий в ЕГЭ.

Решить данную проблему возможно, опираясь на идеи А. Н. Леонтьева, Л. С. Выготского и П. Я. Гальперина. А. Н. Леонтьев выделил связь между внешним предметного действия субъекта и его внутренним психологическим планом, т.е. предметное и наглядно-образное мышление могло стать началом в формировании у ребенка основ творческого мышления. Для это необходимо сначала взаимодействовать с конкретными предметами, манипулируя ими, изменяя их состояние и форму [2].

Л. С. Выготский считал, что зона ближайшего развития, существует между деятельностью и мышлением, он определил ее так: «то самое, что ребенок может сейчас выполнять лишь в сотрудничестве и под руководством, завтра он может сделать уже самостоятельно», поскольку оно «приводит в движение целый ряд внутренних процессов развития, которые, проделывая внутренний ход развития, становятся затем внутренним достоянием самого ребенка» [3].

П. Я. Гальперин раскрыл идею о планомерном развитии умственных действий. Он выделил этапы интериоризации внешних действий и условия их перевода во внутренние действия с заданными свойствами. Этот процесс, по его мнению, свершается поэтапно, проходя определенную последовательность, каждый их которых формирует новый ряд параметров.

Проанализировав работы таких исследователей как Е. Г. Ананьев, Г. Г. Глейзер, В. П. Зинченко и т. д. можно выделить последовательность формирования пространственного мышления:

1) предметно-практические действия, манипуляции предметом;
2) создание пространственного представления;
3) оперирование пространственным образом;
4) овладение методами изображения пространственных объектов.

Следовательно, формирование пространственного мышления школьников необходимо строить на этапе обучения в начальной школе. Необходимо прибегнуть к поэтапному развитию мышления путем практической манипуляции предметом, и лишь затем создания пространственных образов.

Для эффективности данной методики необходимо включить раздел «развития пространственного мышления» в школьный курс математики на всех уровнях обучения. Усложнение задач должно соответствовать физиологическому и интеллектуальному развитию учащихся. Для это необходимо использовать следующие типы задач:

1) интегрированные задачи, направленные на развитие пространственного мышления;
2) практические задачи в контексте жизненной ситуации;
3) креативные задачи, требующие пространственное мышление и творческое воображение.

Таким образом, развитие пространственного мышления школьников остается одной из проблем в образовании, для решения которой требуется пересмотреть содержание учебных предметов и внедрить специализированные задания на каждый уровень образования.

**Литература**

1. *Акиньшин, Р. Н.* Развитие пространственного мышления школьников / Р. Н. Акиньшин // Молодой ученый. – 2016. – № 30. – URL: https://moluch.ru/archive/134/37591/ (дата обращения: 17.10.2020).

2. *Воронцов, А. Б.* Учебная деятельность: введение в систему Д. Б. Эльконина – В. В. Давыдова / А. Б. Воронцов, Е. В. Чудинова. – М. : Рассказов, 2004. – 215 с.

3. *Выготский, Л. С.* Педагогическая психология / Л. С. Выготский. – М. : [б.и], 1992. – 78 с.

4. *Якименская, И. С.* Развитие пространственного мышления школьников / И. С. Якименская. – М. : Педагогика, 1980. – 150 с.

# ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ

UDC 519.151

# COUNTING DEMI-MATROIDS BY ENTROPY

**D. A. Diachkov, K. A. Diachkov**

*Northern (Arctic) Federal University*

**Annotation.** We show how an entropy argument can be applied to bounding the number of demi-matroids on $n$ elements. As Bansal, Pendavingh and Van Der Pol showed in [1] that a direct application of Shearer's Lemma can be used to count the number of matroids on $n$ elements. The estimation they get is very close to the best known derived by Knuth [2]. We show how this probabilistic method might be used to the bigger class of objects, namely demi-matroids. It is known that demi-matroid is essentially the same as simplicial complex. And the number of abstract simplicial complexes on $n$ elements is one less than the $n$-th Dedekind number. However, these numbers grow rapidly and have no known closed-form expression.

**Keywords:** matroids, demi-matroids, entropy.

## Matroids and entropy

In this chapter we recollect some basic facts about matroids and probabilistic method especially Shearer's entropy lemma. Then we revisit the Bansal, Pendavingh and Van Der Pol paper [1] to highlight the aspects that will be used in our demi-matroid case. Start with the definition of a matroid via bases.

**Definition 1.** *A matroid is a pair* $(E,\mathcal{B})$ *where* $E$ *is a finite set and* $\mathcal{B} \subset 2^E$ *satisfies the following axioms:*

$(B_1)$ $\mathcal{B} \neq \varnothing$,

$(B_2)$ $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_2 - B_1, \exists y \in B_1 - B_2, B_2 \cup \{y\} - \{x\} \in \mathcal{B}.$

The set $E$ is called the ground set of the matroid and the elements of $\mathcal{B}$ are the bases. It is straightforward exercise to show that all bases have the same cardinality $r \leqslant |E|$, the rank of the matroid. Let $m_{n,r}$ be the number of matroids of ground set $E=[n]$ and rank $r$, and $m_n$ is the total number of matroids on ground set $[n] := \{1,2,\cdots,n\}$.

One rather obvious estimation of the number of matroids on $n$ elements is $m_n \leqslant 2^{2^n}$ since a matroid is a collection of subsets of $E$. From this point and throughout the paper we consider the $\log$ is base 2. So we rewrite this inequality with $\log\log m_n \leqslant n$.

**Definition 2.** *Let* $X$ *be a random variable taking values from a finite set* $S$, *then the entropy of* $X$ *is*

$$H(X) := \sum_{x \in S} Pr(X=x) \log \frac{1}{Pr(X=x)}.$$

Basically, the entropy of $X$ is equal to the amount of information that is gained by learning the value of $X$. So, natural boundary arise that for any $X$, $H(X) \leqslant \log |S|$ and equality holds only if $X$ is the uniformly random variable on $S$. Hence, if we are able to get some bounds on the entropy it translates directly to bounds on $|S|$. And the following lemma (due to Shearer [5]) gives us such boundary.

**Lemma 1.** *Let* $X=(X_1,X_2,\cdots,X_p)$ *be a random variable taking values in the set* $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_p$, *where each of the coordinates* $X_i$ *of* $X$ *is a random variable taking values in* $S_i$. *Let* $\mathcal{A}$ *be a collection of subsets of* $[p]$, *such that each element of* $[p]$ *appears in at least* $k$ *members of* $\mathcal{A}$. *For* $A \subseteq [p]$, *let* $X_A$ *be a projection to coordinates in* $A$. *Then*

$$H(X) \leqslant \frac{1}{k} \sum_{A \in \mathcal{A}} H(X_A).$$

Now we briefly revisit how Bansal, Pendavingh and Van Der Pol in [1] applied the entropy argument for counting matroids. We only highlight the important steps to deal with demi-matroids later. For detailed proofs you can check [1].

First they defined the set of possible bases of matroids of a given length $r$ over any ground set $E$

$$\mathcal{M}_{E,r} := \left\{ \mathcal{B} \subseteq \binom{E}{r} \mid \mathcal{B} \text{ from definition 1} \right\}.$$

Then $|\mathcal{M}_{E,r}| = m_{n,r} + 1$, one is for empty set which is not included in $\mathcal{M}_{E,r}$. Now we enumerate each $r$-set of $E$ and $\forall \mathcal{B}$ is uniquely represented according to the enumeration by $\binom{|E|}{r}$-dimensional 0-1 indicator vector. Next the authors showed that contracting of $T \subseteq E$ from any matroid gives rise to another matroid $M/T := (E \setminus T, \mathcal{B}/T)$, where $\mathcal{B}/T := \{B \setminus T \mid B \in \mathcal{B}, T \subseteq B\}$. Thus for any $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}_{E,r}$ and $T \subseteq E$ such that $|T| = t$, we have $\mathcal{B}/T \in \mathcal{M}_{E \setminus T, r-t}$. And the indicator vector for $\mathcal{B}/T$ is the projection of indicator vector of $\mathcal{B}$ on the $\binom{n-t}{r-t}$ coordinates containing $T$.

**Lemma 2.** *For* $0 \leqslant t \leqslant r \leqslant n$ *we have*

$$\frac{1}{\binom{n}{r}} \log(m_{n,r} + 1) \leqslant \frac{1}{\binom{n-t}{r-t}} \log(m_{n-t,r-t} + 1)$$

**Proof.** Let $E$ be any set with cardinality $n$, let $X^{E,r}$ be drown uniformly at random from $\mathcal{M}_{E,r}$ so $X^{E,r}$ is a $p := \binom{n}{r}$-dimensional binary random variable with

$$H(X^{E,r}) = \log|\mathcal{M}_{E,r}| = \log(m_{n,r} + 1).$$

Next in [1] authors considered the derived random variable $X^{E,r}/T$ for $\forall T \in \binom{E}{t}$ by projecting $X^{E,r}$ to coordinates corresponding to the $r$-sets of $E$ containing $T$. It is clear that $X^{E,r}/T$ takes its values in $\mathcal{M}_{E \setminus T, r-t}$, so

$$H(X^{E,r}/T) \leqslant \log(|\mathcal{M}_{E \setminus T, r-t}|) = \log(m_{n-t,r-t} + 1).$$

The final step of the proof is due to applying Shearer's lemma to $H(X^{E,r})$ with $\mathcal{A}$ built of $\binom{|E|}{t}$ members $A(T)$, one for each $t$-set $T$ of $E$, defined as $A(T) = \left\{ S \in \binom{E}{r}, T \subseteq S \right\}$, i.e. a coordinate $S \in \binom{E}{r}$ appears in $A(T)$ $\Leftrightarrow T \subseteq S$. Since $|S| = r$ and $|T| = t$, $S$ appears in exactly $\binom{r}{t}$ of the members of $\mathcal{A}$, and using Shearer's lemma we get

$$\log(m_{n,r} + 1) = H(X^{E,r}) \leqslant \frac{1}{\binom{r}{t}} \sum_{T \in \binom{E}{t}} H(X^{E,r}/T) \leqslant \frac{\binom{n}{t}}{\binom{r}{t}} \log(m_{n-t,r-t} + 1).$$

Substitution $\dfrac{\binom{n}{t}}{\binom{r}{t}} = \dfrac{\binom{n}{t}}{\binom{n-t}{r-t}}$ finishes the proof.

The main result for matroids of the paper [1] follows from previous lemma with $t = r-2$ and known upper bounds on $m_{n,2}$:

$$\log(m_{n,2}+1) \leqslant (n+1)\log(n+1).$$

Hence, the bound of $m_n$ obtained by authors [1] is

$$\log\log m_n \leqslant n - \frac{3}{2}\log n + \log\log n + O(1).$$

**Demi-matroids**

Since matroids are the special case of demi-matroids the following enumeration is very natural: $\#\text{matroids} \leqslant \#\text{demi-matroids} \leqslant 2^{2^n}$. For simplicity we adopt the notations from the previous chapter.

**Definition 3.** *A finite demi-matroid is a pair* $(E, \mathcal{I})$ *where* $E$ *is a ground set and* $\mathcal{I}$ *is a family of subsets of* $E$ *(called independent sets) and* $\mathcal{I}$ *satisfies the following axioms:*

$(I_1)$ $\varnothing \in \mathcal{I}$,

$(I_2)$ If $I_1 \in \mathcal{I}$ *and* $I_2 \subset I_1$, *then* $I_2 \in \mathcal{I}$.

Then we can define the $\mathcal{B}$ set of demi-matroid as a set of maximal independent sets under inclusion. The key difference with matroids is that the cardinality of $B \in \mathcal{B}$ can be less or equal to $r$, the rank of demi-matroid.

Now we define the set of possible bases of demi-matroids of a given rank $r$ over any ground set $E$.

$$\mathcal{M}_{E,r} := \left\{ \mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i \leqslant r} \binom{E}{i} \mid \mathcal{B} \text{ from definition above} \right\}.$$

Then $|\mathcal{M}_{E,r}| = m_{n,r}+1$, one is for empty set which is not included in $\mathcal{M}_{E,r}$. Now we enumerate each $i$-set of $E$ and any $\mathcal{B}$ is uniquely represented according to this enumeration by $\sum_{i=1}^{r}\binom{|E|}{i}$-dimensional 0-1 indicator vector. We will use the following standard equalities and bounds on the sum of binomial coefficients.

$$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \leqslant \frac{2^n}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

and

$$\sum_{i=0}^{t}\binom{n+i}{i} = \binom{n+t+1}{t}.$$

It is clear that demi-matroids are closed under contraction as well. And contracting of $T \subseteq E$ from any demi-matroid gives rise to another demi-matroid $M/T = (E \setminus T, \mathcal{B}/T)$, where $\mathcal{B}/T := \{B \setminus T \mid B \in \mathcal{B}, T \subseteq B\}$. Thus for any $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}_{E,r}$ and $T \subseteq E$ such that $|T| = t$, we have $\mathcal{B}/T \in \mathcal{M}_{E\setminus T, r-t}$. And the indicator vector for $\mathcal{B}/T$ is the projection of indicator vector of $\mathcal{B}$ on the $\sum_{i=1}^{r}\binom{n-t}{i-t}$ coordinates corresponding to the $i$-sets of $E$ containing $T$. We continue with demi-matroid analogue of lemma 2.

**Lemma 3.** *For* $0 \leqslant t \leqslant r \leqslant n$ *we have*

$$\frac{1}{\binom{n}{r+t+1}}\log(m_{n,r}+1) \leqslant \frac{1}{\binom{n-t}{r+1}}\log(m_{n-t,r-t}+1).$$

**Proof.** Let $E$ be any set with cardinality $n$, let $X^{E,r}$ be drown uniformly at random from $\mathcal{M}_{E,r}$ so $X^{E,r}$ is a $p := \sum_{i=1}^{r} \binom{n}{i}$-dimensional binary random variable with

$$H(X^{E,r}) = \log |\mathcal{M}_{E,r}| = \log(m_{n,r}+1).$$

Now we consider the derived random variable $X^{E,r}/T$ for $\forall T \in \binom{E}{t}$ by projecting $X^{E,r}$ to coordinates corresponding to the $i$-sets of $E$ containing $T$. It is clear that $X^{E,r}/T$ takes its values in $\mathcal{M}_{E\setminus T, r-t}$, so

$$H(X^{E,r}/T) \leqslant \log(|\mathcal{M}_{E\setminus T, r-t}|) = \log(m_{n-t,r-t}+1)$$

The final step of the proof is due to applying Shearer's lemma to $H(X^{E,r})$ with $\mathcal{A}$ built of $\binom{|E|}{t}$ members $A(T)$, one for each $t$-set $T$ of $E$, defined as $A(T) := \left\{ S \in \bigcup_{i \leqslant r} \binom{E}{i}, T \subseteq S \right\}$, i.e. a coordinate $S \in \bigcup_{i \leqslant r} \binom{E}{i}$ appears in $A(T) \Leftrightarrow T \subseteq S$. Since $|S| = \{r, r-1, \cdots, r-(r+t)\}$ and $|T| = t$, $S$ appears in exactly $\binom{r}{t} + \binom{r-1}{t} + \cdots + \binom{r-(r+t)}{t} = \sum_{i=0}^{t} \binom{r+i}{i} = \binom{r+t+1}{t}$ of the members of $\mathcal{A}$, and using Shearer's lemma we get

$$\log(m_{n,r}+1) = H(X^{E,r}) \leqslant \frac{1}{\binom{r+t+1}{t}} \sum_{T \in \binom{E}{t}} H(X^{E,r}/T) \leqslant \frac{\binom{n}{t}}{\binom{r+t+1}{t}} \log(m_{n-t,r-t}+1).$$

Substitution $\binom{n}{t} \Big/ \binom{r+t+1}{t} = \binom{n}{r+t+1} \Big/ \binom{n-t}{r+1}$ finishes the proof.

Now we derive the upper bounds for demi-matroids of rank 2. Let $\mathcal{B}_i := \{B \in \mathcal{B} \mid |B| = i\}$.

**Lemma 4.** *For any demi-matroid $DM$ on the ground set $[n]$ of rank 2, $DM \setminus \mathcal{B}_1$ is isomorphic to a matroid $M$ on the ground set $[n - |\mathcal{B}_1|]$ of rank 2.*

**Proof.** It is enough to show that any collection of 2-sets on $E$ satisfies the base exchange axiom $(B_2)$. If $ab$ and $cd$ are distinct it follows since $ab \setminus cd = cd \setminus ab = \varnothing$. Now consider 2-sets with one common element, without loss of generality assume that we have $ab$ and $ac$. So $ab \setminus ac = b \Rightarrow \exists c = ac \setminus ab$ such that $ab \setminus b \cup c = ac \in \mathcal{B}$.

Next we use known upper bound for the number of matroids of rank 2 on the ground set $[n]$ from [1], this number is less or equal to $(n+1)^{n+1}$. With lemma 4 and variation on $|\mathcal{B}_1|$ we get the following expression for the number of demi-matroids of rank 2:

$$m_{n,2} \leqslant \binom{n}{0}(n+1)^{n+1} + \binom{n}{1}(n+1-1)^{n+1-1} + \cdots + \binom{n}{n}(n+1-n)^{n+1-n}$$

replacing negatives with 0 and applying binomial theorem we get the upper bound

$$m_{n,2} \leqslant (n+2)^{n+1} \Leftrightarrow \log m_{n,2} \leqslant (n+1)\log(n+2).$$

Now we are all set to bound the number of demi-matroids on a ground set $[n]$.

**Theorem 1.** $\log m_n \leqslant \log(n+1) + \max_r \log \binom{n}{r-1} \dfrac{r(r-1)\log(n-r+3)}{(2r-1)!}$.

**Proof.** By applying lemma 3 with $t = r-2$ along with the bound for $m_{n,2}$, we get the following

$$\log m_{n,r} \leqslant \frac{\log(m_{n-r+2,2})}{\binom{n-r+2}{r+1}} \binom{n}{2r-1} \leqslant \frac{(n-r+2)\log(n-r+3)}{\binom{n-r+2}{r+1}} \binom{n}{2r-1}.$$

Expanding and rearranging the binomials, we have

$$\log m_{n,r} \leqslant \binom{n}{r-1} \frac{r(r-1)\log(n-r+3)}{(2r-1)!}.$$

As $m_n \leqslant \sum_{r=0}^{n} m_{n.r} \leqslant (n+1)\max_r m_{n,r}$, we have

$$\log m_n \leqslant \log(n+1) + \max_r \log m_{n,r} = \log(n+1) + \max_r \log \binom{n}{r-1} \frac{r(r-1)\log(n-r+3)}{(2r-1)!}.$$

We showed in Lemma 3 that the entropy approach can be generalized to demi-matroids, and we bounded the number of demi-matroids of fixed rank $r$ by its arbitrary contraction $t$. However, in Theorem 1 we did not achieve the same convenience like authors [1] did. And the result requires some further analysis.

## References


1. *Bansal N.* An entropy argument for counting matroids / N. Bansal, R. A. Pendavingh, J. G. Van Der Pol // Journal of Combinatorial Theory Series B. – 2012.

2. *Knuth, D.* The asymptotic number of geometries / D. E. Knuth // Journal of Combinatorial Theory Series A. – 1974. – P. 398–400.

3. *Johnsen, T.* Code Theory and Matroid Theory / T. Johnsen, H. Verdure // Preprint, University of Tromsø. – 2013.

4. *Alon, N.* The probabilistic method / N. Alon, J. H. Spencer // Wiley-Interscience Series in Descrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, third edition. – 2008.

5. *Chung F.* Some intersection theorems for ordered sets and graphs / F. R. K. Chung, R. L. Graham, P. Frankl, and J. B. Shearer // Journal of Combinatorial Theory Series B. – 1986. – P. 23–37.

6. *Oxley J.* Matroid Theory / J. G. Oxley // Oxford University Press, Oxford, UK. – 2006. – Vol. 3.

УДК 510.62, 510.52

# О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ В ШИФРОВАНИИ

**Н. В. Авхимович**

*Тверской государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе анализируются проблемы, возникающие при применении логических программ в криптографии. Мы исследуем следующие задачи: по логической программе определить, является ли она обратимой; и по двум программам сказать, будет ли одна обратной для другой. Для обеих задач доказываем coNP-полноту. Также рассматривается вопрос о размерах логических программ и приводится пример программы, длина которой линейна, а длина обратной к ней программы экспоненциальна.

**Ключевые слова:** криптография, логическая программа, вычислительная сложность.

## Введение

Одним из наиболее существенных вопросов, появляющихся при применении вычислительной техники, является безопасность информации. Важной задачей, которая при этом возникает, является шифрование данных. Существует несколько общераспространенных методик шифрования с открытым ключом. Криптостойкость многих таких алгоритмов основана на тех или иных недоказанных предположениях. Например, криптостойкость алгоритма RSA [5] базируется на предположении о вычислительной сложности задачи разложения натурального числа на простые множители.

Одной из классических и до сих пор не решенных проблем является вопрос о соотношении между классами сложности P и NP [1]. Криптостойкость многих алгоритмов шифрования, вполне вероятно, может быть связана с задачами, которые не являются даже NP-полными. Отсюда возникает вопрос о поиске новых методов шифрования, для которых можно было доказать хотя бы NP-полноту задачи их дешифровки.

Для описания тех или иных процессов обработки информации широко применяются логические программы. Привлекательной идеей было бы использование логических программ в том числе для задач шифрования и дешифрования информации. Поскольку многие задачи, связанные с логическими программами активно исследуются [4], то использование логических программ в криптографии поможет точнее определить сложность соответствующих вопросов.

Темой данной работы является исследование проблем, которые возникают при применении логических программ в криптографии.

Мы исследуем следующие задачи: по логической программе определить, является ли она обратимой; и по двум программам сказать, будет ли одна обратной для другой. Для обеих задач доказана coNP-полнота. Также рассмотрен вопрос о длинах логических программ. Показано, что существуют программы, которые имеют линейную длину, в то время как обратные к ним – экспоненциальную.

## 1. Основные определения

**Определение 1.** Нормальным предложением называется формула вида

$$y_i \leftarrow l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n,$$

где $y_i$ – переменная без отрицания, $l_j$ – переменная с отрицанием или без, то есть $l_j = x_j$ или $l_j = \neg x_j$. Логическая программа $L$ называется нормальной, если она состоит только из нормальных предложений.

Для нормальной логической программы $L$, все переменные, которые в ней встречаются, мы делим на три группы: входные, выходные и промежуточные. При наличии предложения

$$y_i \leftarrow l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$$

в программе $L$ и истинности формулы $l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$ на входных данных, считаем, что значение переменной $y_i$ должно быть равно единице. Если значение переменной $y_i$ не равняется единице ни в одном из предложений программы $L$, где $y_i$ стоит в левой части, то считаем его равным нулю.

Мы будем рассматривать только логические программы, не содержащие циклов в определении значений переменных, благодаря чему значение переменной не может меняться более одного раза.

Будем считать, что запись $L(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_m)$ означает, что программа $L$ в качестве входных переменных получает набор $x_1,\ldots,x_n$, а $y_1,\ldots,y_m$ – значения выходных переменных, которые и являются результатом выполнения программы $L$ на наборе $x_1,\ldots,x_n$.

**Определение 2.** Нормальная логическая программа $L$ с входными переменными $\overline{x}$ и выходными переменными $\overline{y}$ обратима, если каждому набору $\overline{y}$ соответствует не более одного $\overline{x}$, для которого $L(\overline{x})=\overline{y}$.

**Пример.** Рассмотрим программу $L(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$:

$$y_1 \leftarrow \neg x_1;$$

$$z_1 \leftarrow x_1 \wedge \neg x_2;$$

$$y_2 \leftarrow z_1.$$

Здесь $\overline{x}$ – входные переменные, $\overline{y}$ – выходные переменные, $\overline{z}$ – промежуточные. Программа $L$ является нормальной, но не является обратимой, так как $L(0,0)=L(0,1)=(1,0)$.

В данной работе мы рассматриваем вычислительную сложность следующих двух задач:

$$\mathrm{OLP}=\{L: \text{существует программа } L' - \text{обратная для } L\},$$

$$\mathrm{OBR}=\{(L,L'): L' - \text{обратная для } L\}.$$

Множество OLP состоит из обратимых логических программ, а множество OBR состоит из пар программ, где вторая является обратной к первой.

## 2. О вычислительной сложности задач

Нормальные логические программы, которые могут использоваться с целью шифрования данных, должны быть обратимы. Иначе говоря, для логической программы $L$ должна существовать логическая программа $L'$ такая, что если $L$ переводит некоторый входной набор $\overline{x}$ в некоторый выходной набор $\overline{y}$, то $L'(L(\overline{x}))=L'(\overline{y})=\overline{x}$.

**Теорема 1.** Задача OLP является coNP-полной.

**Доказательство.** Сначала покажем coNP-трудность данной задачи. Для этого продемонстрируем, что TAUT – задача определения, является ли булева формула в дизъюнктивной нормальной форме тавтологией – полиномиально сводится к задаче OLP.

Пусть $\varphi=\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$ – ДНФ, где $\varphi_i$, $i=\overline{1,m}$ – элементарные конъюнкции. Пусть $\varphi$ содержит переменные $x_1,\ldots,x_n$. Пусть $\varphi'$ – формула, полученная из $\varphi$ заменой переменных $x_1,\ldots,x_n$ на $z_1,\ldots,z_n$.

Построим нормальную логическую программу $L(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n)$.

$$b \leftarrow \varphi_i, \quad i=\overline{1,m};$$

$$z_1 \leftarrow \neg x_1;$$

$$z_i \leftarrow x_i, \quad i=\overline{2,n};$$

$$d \leftarrow \varphi_i', \quad i = 1, m;$$
$$y_i \leftarrow b \wedge x_i, \quad i = \overline{1, n};$$
$$y_1 \leftarrow \neg b \wedge d \wedge \neg x_1;$$
$$y_i \leftarrow \neg b \wedge d \wedge x_i, \quad i = \overline{2, n};$$
$$y_i \leftarrow \neg b \wedge \neg d \wedge x_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

Таким образом, переменная $b$ будет содержать значение формулы $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а переменная $d$ – значение формулы $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \varphi(\neg x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Покажем, что

$$\varphi \in \mathrm{TAUT} \Leftrightarrow L \in \mathrm{OLP}.$$

Пусть $\varphi \in \mathrm{TAUT}$. Значит, для любого набора $x_1, \dots, x_n$ выполняется $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1$. В построенной программе $L$ на любых входных данных переменная $b$ принимает значение равное единице и, благодаря предложениям

$$y_i \leftarrow b \wedge x_i, \quad i = \overline{1, n},$$

получаем $L(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$ для любого набора $x_1, \dots, x_n$. Таким образом, программа $L$ обратима, поскольку значения переменных $y_i$ совпадают со значениями переменных $x_i$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, $L \in \mathrm{OLP}$.

Пусть теперь $\varphi \notin \mathrm{TAUT}$. Значит, существует набор $x_1, \dots, x_n$ такой, что $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$. В программе $L$ на этом входном наборе переменная $b$ принимает значение равное нулю, а для переменной $d$ возможны два варианта.

1. Переменная $d$ равна нулю. Тогда

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n),$$
$$L(\neg x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n).$$

Получаем равенство $L(\neg x_1, x_2, \dots, x_n) = L(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Программа $L$ на различных входных данных приводит к одинаковому результату. Следовательно, обратной программы для $L$ не существует.

2. Переменная $d$ равна единице. Тогда $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\neg x_1, x_2, \dots, x_n)$. Применим $L$ к набору $(\neg x_1, x_2, \dots, x_n)$. Переменная $b$ примет значение, равное единице, а значит, $L(\neg x_1, x_2, \dots, x_n) = (\neg x_1, x_2, \dots, x_n)$. Получаем $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = L(\neg x_1, x_2, \dots, x_n)$ и, следовательно, обратной программы для $L$ не существует.

Из последнего делаем вывод, что $L \notin \mathrm{OLP}$.

Покажем теперь принадлежность задачи OLP классу coNP. Рассмотрим следующий недетерминированный алгоритм для определения того, что программа $L$ не принадлежит OLP.

Вход: программа $L(\overline{x})$.

1. Сгенерировать два неравных набора: $x'$ и $x''$.

2. Применить программу $L$ к наборам из пункта 1. В результате получим $\overline{y}' = L(\overline{x}')$ и $\overline{y}'' = L(\overline{x}'')$.

3. Сравнить полученные $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$. Если , то есть $L(\overline{x}') = L(\overline{x}'')$ при $\overline{x}' \neq \overline{x}''$, «да». Иначе, выдать ответ «нет».

Время работы алгоритма полиномиально зависит от длины программы $L$. □

Пусть теперь у нас есть конкретная программа, которая является потенциально обратной для исходной. Рассмотрим задачу проверки, так это на самом деле или нет.

**Теорема 2.** Задача OBR является coNP-полной.

**Доказательство.** Сначала покажем coNP-трудность. Для этого полиномиально сведем $\overline{\mathrm{CNF}}$ – дополнение задачи о выполнимости булевой формулы в конъюнктивной нормальной форме – к задаче OBR.

Пусть $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ – КНФ, где $\varphi_i$, $i = \overline{1,m}$ – элементарные дизъюнкции. Пусть $\varphi$ содержит $n$ переменных.

Построим нормальную логическую программу $L(x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_n)$.

$$c_i \leftarrow \neg\varphi_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$b \leftarrow \neg c_1 \wedge \ldots \wedge \neg c_m;$$

$$y_i \leftarrow \neg b \wedge \neg x_j, \quad j = \overline{1,n};$$

$$y_j \leftarrow b \wedge x_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

В качестве $L'$ возьмем программу $x_j \leftarrow \neg y_j$, $j = \overline{1,n}$.

Покажем, что

$$\varphi \in \overline{\mathrm{CNF}} \Leftrightarrow (L, L') \in \mathrm{OBR}.$$

Пусть $\varphi \in \overline{\mathrm{CNF}}$. Это значит, что не существует набора $x_1,\ldots,x_n$ такого, что формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ принимала бы значение 1. Следовательно, в программе $L$ при любых входных данных переменная $b$ равняется нулю и, благодаря предложениям

$$y_j \leftarrow \neg b \wedge \neg x_j, \quad j = \overline{1,n},$$

получаем $L(x_1,\ldots,x_n) = (\neg x_1,\ldots,\neg x_n) = (y_1,\ldots,y_n)$ для любого набора $\overline{x}$. Тогда программа $L'$ – обратная для $L$. В самом деле, если $x_j = 1$ (соответственно, $x_j = 0$), тогда $y_j = 0$ (соответственно, $y_j = 1$). Применяя $L'$, получаем $\neg y_i = 1 = x_j$ (соответственно, $\neg y_j = 0 = x_j$). Следовательно, $(L, L') \in \mathrm{OBR}$.

Пусть теперь $\varphi \notin \overline{\mathrm{CNF}}$. Тогда существует набор $x_1,\ldots,x_n$ такой, что $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = 1$. Применяя программу $L$ к этому набору, получаем, что значение переменной $b$ равно единице и, благодаря предложениям

$$y_j \leftarrow b \wedge x_j, \ \ j = \overline{1,n},$$

$L(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_n)$. В данном случае программа $L'$ уже не будет обратной для $L$. Действительно, если $x_j = 1$ $(x_j = 0)$, то $y_j = 1$ $(y_j = 0)$. Применяя $L'$ получаем: $\neg y_j = 0 \neq x_j$ $(\neg y_j = 1 \neq x_j)$. Следовательно, $(L, L') \notin \mathrm{OBR}$.

Покажем теперь принадлежность задачи OBR классу coNP.

Рассмотрим следующий недетерминированный алгоритм проверки того, что пара $(L, L')$ не принадлежит OBR.

Вход: программы $L$ и $L'$.

1. Сгенерировать набор $\overline{x}$.
2. Применить программу $L$ к набору из пункта 1. Получим $\overline{y} = L(\overline{x})$.
3. Применить программу $L'$ к набору из пункта 2. Получим $\overline{x}' = L'(\overline{y})$.
4. Сравнить наборы $\overline{x}$ и $\overline{x}'$. Если $\overline{x} \neq \overline{x}'$ выдать ответ «да». Иначе, выдать ответ «нет».

Время работы алгоритма полиномиально зависит от длины программы $L$. □

### 3. О длинах логических программ без промежуточных переменных для задач шифрования

Заметим, что любое предложение вида

$$y \leftarrow l_1 \oplus l_2 \oplus \cdots \oplus l_n$$

эквивалентно $2^{n-1}$ нормальным предложениям вида $y \leftarrow (\neg)l_1 \wedge (\neg)l_2 \wedge \cdots \wedge (\neg)l_n$, где количество знаков отрицания нечётно (соответственно, чётно), если $n$ чётно (соответственно, нечётно).

Логическую программу $L$ можно построить при помощи матрицы $A$. Делается это следующим образом. Пусть $i$-я строка в матрице размера $m \times n$ имеет вид $(a_{i,1}, a_{i,2},\ldots,a_{i,n})$, тогда $i$-е предложение для программы $L$ имеет вид $y_i \leftarrow l_1 \oplus l_2 \oplus \cdots \oplus l_n$, где $l_j = x_j$, если $a_{i,j} = 1$ и $l_j = 0$ иначе.

Таким образом, из вышесказанного следует, что мы можем с помощью матриц строить нормальные логические программы.

Пусть $L_A$ – логическая программа, построенная по матрице $A$. Тогда обратная программа для $L_A$ может быть построена с помощью матрицы $A^{-1}$ – обратной для $A$.

Оценить длины программ при таком способе построения можно следующим образом. Для $L_A$ нужно найти в матрице $A_{(n\times n)}$ строку, содержащую наибольшее число единиц, пусть это число равно $l$, тогда $|L_A| = O(n\cdot 2^{l-1})$. Для обратной же программы $L_{A^{-1}}$ нужно найти в матрице $A^{-1}$ строку, содержащую наименьшее число единиц, пусть – $k$, тогда $|L_{A^{-1}}| \geq 2^{k-1}$.

Рассмотрим матрицу $A$ размера $(n\times n)$, где $n = 3m+1$, $m = 3,5,7,9,\ldots$ (рис. 1) и матрицу $A^{-1}$ (рис. 2).

$$
\left(\begin{array}{cccccc|cccccc|ccccccc}
\mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
\hdotsfor{19} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
\hdotsfor{19} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
\hdotsfor{19} \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

*Рис. 1. Матрица $A$*

$$
\left(\begin{array}{cccccc|cccccc|ccccccc}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\
\hdotsfor{19} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\
\hdotsfor{19} \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \\
\hdotsfor{19} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

*Рис. 2. Матрица $A^{-1}$*

**Лемма 1.** Матрица $A^{-1}$ – обратная для $A$.

**Доказательство.** Непосредственным умножением легко убедиться, что $A\times A^{-1} = E$. □

**Теорема 3.** Нормальная логическая программа $L_A$, составленная по матрице $A_{(n\times n)}$ имеет длину $O(n)$, в то время как обратная для $L_A$ программа $L_{A^{-1}}$ имеет длину больше или равную $2^{(n-1)/3}$.

**Доказательство.** В матрице $A$ имеем $n$ строк, по три единицы в каждой. Значит, количество предложений в программе $L_A$ равно $2^{3-1}\cdot n = 4n$. Таким образом, $|L_A| = O(n)$.

В матрице $A^{-1}$ минимальное количество единиц в строке равно $(m+2)$, то есть количество предложений в программе $L_{A^{-1}}$ будет не меньше, чем $2^{m+1}$, где $m = (n-1)/3$. Таким образом получаем $|L_{A^{-1}}| \geq 2^{(n-1)/3}$.

## Заключение

Мы исследовали сложность задач OLP и OBR, доказали для них coNP-полноту. Также показали, что существуют нормальные логические программы, которые сами являются короткими, в то время как обратные к ним программы имеют экспоненциальную длину.

Представляет интерес решение следующих задач, которые остались не исследованными в данной работе.

• Выяснить вычислительную сложность задачи существования обратной программы определенной длины. Иными словами, не просто выяснить, существует ли обратная программа, а существует ли короткая обратная программа.

• Разработать алгоритм построения нетривиальных взаимно обратных нормальных логических программ, который гарантированно обеспечивал бы небольшую длину обеих программ. При этом требуется, чтобы вторая программа не строилась каким-то простым способом с помощью первой.

## Литература

1. *Гери М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гери, Д. Джонсон, перевод с английского М. А. Фрумкина, Е. В. Левнера. – М. : Мир, 1982. – 416 с.

2. *Дехтярь М. И.* Лекции по дискретной математике : Учебник / М. И. Дехтярь, С. М. Дудаков, Б. Н. Карлов. – Издание второе, исправленное и дополненное. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2018. – 514 с.

3. *Герасимов А. С.* Курс математической логики и теории вычислимости: Учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп. – СПб. : Лема, 2011. – 284 с.

4. *Dantsin E.* Complexity and Expressive Power of Logic Programming / E. Dantsin, T. Eiter, G. Gottlob, A. Voronkov // Proc. 12th Annual IEEE Conference on Computational Complexity (CCC'97) – Ulm, 1997. – P. 1–20.

5. *Rivest R.* A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems / R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman // Commun. ACM. – 1978. – Vol. 21, Iss. 2. – P. 120–126.

УДК 510.65+512.53

# ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ НЕКОТОРЫХ МОНОИДОВ

**С. М. Дудаков**

*Тверской государственный университет*

**Аннотация.** Мы рассматриваем произвольные коммутативные моноиды с сокращением, содержащие элементы бесконечного порядка. На них мы обобщаем результат полученный нами ранее для циклического моноида: конечные подмножества в таких моноидах сами образуют моноид, в котором интерпретируется элементарная арифметика. Следовательно, теория конечных подмножеств таких моноидов неразрешима.

**Ключевые слова:** моноид, теория, неразрешимость.

## Введение

Изучение алгоритмических свойств теорий разного рода алгебр является одной из центральных проблем математической логики, которая имеет к тому же большое практическое значение. Эти свойства часто возникают, например, при изучении языков запросов к базам данных. Чаще всего эти языки представляются ту или иную стилизацию логического языка [3], а сама база данных является конечной алгебраической системой, вложенной в бесконечный универсум [8]. В результате оказывается, что планировщик запросов должен оперировать логическим языком над произвольным универсумом.

Возможности типизации современных систем управления базами данных таковы, что они позволяют оперировать не только с атомарными значениями, но и с производными структурами — массивами, множествами и т. д. Разумеется, в силу естественных ограничений все эти структуры конечны. В результате возникает весьма сложная алгебраическая система, которая вместо элементов универсума может включать в себя, скажем, его конечные подмножества или другие неатомарные конструкции.

Алгоритмические свойства подобных систем могут варьировать в весьма широких пределах. Классическим является доказательство разрешимости арифметики Скулема, представленной в виде прямой суммы счётно бесконечного количества экземпляров арифметики Пресбургера [9].

Другой важный случай возникает при рассмотрении языков [7], так как язык является множеством слов, то есть элементов некоторого свободного моноида. Некоторые результаты об алгоритмических свойствах алгебры языков получены в [5, 6].

В частности, в работе [4] в качестве одного из следствий нами установлено, что если взять свободный циклический моноид, например, алгебру $(\omega,+,0)$, то теория его конечных подмножеств будет эквивалентна элементарной арифметике, то есть неразрешимой. Возникает вопрос, можно ли перенести этот результат на более широкий круг алгебр или же моноид $(\omega,+,0)$ является своего рода исключением.

Отметим, что подобная конструкция неидентична логике второго порядка [2, 10], так как здесь нет переменных первого порядка или их эквивалентов. Поэтому возможна ситуация [1], когда теория производной алгебры будет проще, чем исходной.

В настоящей работе мы показываем, что результат из [4] о циклических моноидах можно обобщить на любые коммутативные моноиды с сокращением, в которых есть хотя бы один элемент бесконечного порядка. Таким образом, он распространяется например, на алгебры $(\omega,\times,1)$, $(\mathbb{Q},+,0)$ и ряд других классических систем. В частности, он верен для всех абелевых групп, имеющих элементы бесконечного порядка.

## 1. Основные определения

Рассматриваем коммутативный моноид $\mathfrak{A}=(A;*,e)$ с сокращением, в котором есть хотя бы один элемент $a$ бесконечного порядка, то есть такой, что все его степени $a^0=e$, $a^1=a$, $a^2,\dots$ являются попарно различными. Построим моноид $\exp\mathfrak{A}$, элементами которого являются конечные подмножества $\mathfrak{A}$ с операцией $A*B=\{a*b : a\in A, b\in B\}$ и константой $E=\{e\}$ для нейтрального элемента.

В силу сократимости в моноиде $\mathfrak{A}$ для элементов $\exp\mathfrak{A}$ каждое отображение $a\mapsto ab$ является разнозначным для фиксированного $a$. Поэтому имеет место соотношение для мощностей подмножеств: $|ax|=|x|$ для любых $a\in\mathfrak{A}$ и $x\in\exp\mathfrak{A}$. Из этого же следует, что для непустых $x,y\in\exp\mathfrak{A}$ выполнено $|x|,|y|\le|xy|$.

Как и в любом моноиде в $\exp\mathfrak{A}$ определимы отношение делимости $x\mid y$, множество обратимых элементов $Q$, отношение эквивалентности $\sim$, означающее, что $x$ и $y$ отличаются обратимым множителем. Так же напомним, что $x\sim y$ эквивалентно одновременному выполнению условий $x\mid y$ и $y\mid x$: если $x=zy$, то $y=z^{-1}x$, а если $x\mid y$ и $y\mid x$, то $ux=y$, $vy=x$, поэтому $uvy=y$ и из сократимости получаем $uv=e$, то есть $u$ и $v$ обратимы.

Заметим также, что в $\exp\mathfrak{A}$ определимо пустое множество $\varnothing$:

$$x=\varnothing\equiv(\forall y)xy=x,$$

так как для $x\ne\varnothing$ мы получим $x\varnothing=\varnothing\ne x$.

Далее рассматриваем только непустые элементы $\exp\mathfrak{A}$, о чём специально не упоминаем.

**Лемма 1.** *Обратимыми в* $\exp\mathfrak{A}$ *будут в точности элементы вида* $\{a\}$, *где* $a$ *— обратимый элемент* $\mathfrak{A}$.

**Доказательство.** Элементы указанного вида, очевидно, обратимы: $\{a\}\{a^{-1}\}=\{e\}=E$.

Множества $\{a\}$ для необратимых $a$ необратимы, так как $\{a\}x$ не может содержать $e$, в частности, совпадать с $E$. Если $|y|>1$, то $y$ обратимым быть не может, так как из условия $yz=E$ мы для произвольного $b\in z$ получили бы $ab=e$ для всех $a\in y$, чего не может быть в силу единственности обратного элемента в $\mathfrak{A}$. □

## 2. Определимость степеней

Основной нашей целью будет интерпретация в моноиде $\exp\mathfrak{A}$ элементарной арифметики натуральных чисел. Для этого мы последовательно введём ряд определимых отношений.

Следующие предикаты определяют в $\exp\mathfrak{A}$ мощности малых множеств:

$$R_1(x)\equiv(\forall u)(xu=x^3\to u=x^2);$$

$$R_2(x)\equiv(\exists u)(u\ne x^2\wedge xu=x^3\wedge(\forall v)(xv=x^3\to v=u\vee v=x^2)).$$

**Лемма 2.** *В* $\exp\mathfrak{A}$ *условие* $R_1(x)$ *выполнено в точности при* $|x|=1$; *выполнение* $R_2(x)$ *возможно только при* $|x|=2$.

**Доказательство.** Оба утверждения доказываются перебором всевозможным вариантов для $x$, из которых возможными оказываются только перечисленные.

Далее введём два отношения

$$P(x,y)\equiv\neg Q(x)\wedge\neg Q(y)\wedge(\forall u,v)((y=uv\wedge\neg Q(v))\to(\exists w)y=uxw).$$

$$L(x)\equiv R_2(x)\wedge(\forall u,v)(x=uv\to Q(u)\vee Q(v))\wedge \tag{1}$$

$$\wedge(\forall y)(P(x,y)\to P(x,xy))\wedge \tag{2}$$

$$\wedge(\forall y,z)((P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge xy\mid z)\to\neg z\mid y)\wedge \tag{3}$$

$$\wedge(\forall y,z,u)((P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge y=zu\wedge R_1(u))\to Q(u)). \tag{4}$$

**Лемма 3.** *Пусть для* $x=\{a,\ b\}$ *в моноиде* $\exp\mathfrak{A}$ *выполнено* $L(x)$. *Тогда*

*1. для каждого* $m>0$ *выполнено* $P(x,x^m w)$ *для любого обратимого* $w$;

*2. хотя бы один из элементов* $x$ *имеет бесконечный порядок в* $\mathfrak{A}$;

*3. для всякого натурального $l > 0$ выполнено $a^l \neq b^l$;*

*4. множество $x^m$ содержит в точности $m+1$ элемент $a^k b^{m-k}$, $k = 0,\dots,m$.*

**Доказательство.** Если $uv = xw$ для необратимого $v$, то из (1) следует, что $u$ обратим, поэтому $v = xu^{-1}w$. Следовательно, $xw = ux(u^{-1}w)$. Это доказывается истинность $P(x, x^1 w)$. Из истинности $P(x,\ xw)$ с помощью (2) получаем $P(x, x^m w)$ для всех натуральных $m$.

Если $a$ и $b$ имеют конечный порядок, то существует конечно много попарно различных произведений вида $a^k b^n$. Так как $x^m$ содержит только такие произведения, то среди $x^m$ существует только конечное число различных. Поэтому $x^{m_1} = x^{m_2}$ для каких-то $m_1 < m_2$. Тогда выполнено $P(x, x^{m_1})$, $P(x, x^{m_2})$, $xx^{m_1} \mid x^{m_2}$ и $x^{m_2} \mid x^{m_1}$, что противоречит (3).

Предположим, что выполнено $a^l = b^l$ для некоторого $l$. Тогда, используя равенства $a^p b^q = a^{p+l} b^{q-l}$, мы можем любое произведение $a^{m-s} b^s$ привести к виду $a^{m-r} b^r$ для некоторого $r < l$. Следовательно, при $m \geq l$ мы получим $x^m = a^{m-l} x'_m$, где $x'_m$ состоит только из произведений вида $a^p b^q$ при $p + q < l$. Поскольку произведений последнего вида конечно много, то $x'_m$ может принимать конечно много различных значений. Выберем $x'_{m_0}$, встречающееся бесконечно много раз в разложениях $x^m = a^{m-l} x'_{m_0}$ для различных $m$. Пусть, например, $x^m = a^{m-l} x'_{m_0}$ и $x^{m+n} = a^{m+n-l} x'_{m_0}$ для какого-то $n > 0$. Тогда выполнено $P(x, x^m)$, $P(x, x^{m+n})$, $x^{m+n} = \{a^n\} x^m$ и $R_1(\{a^n\})$. Согласно (4) получаем, что $\{a^n\}$ обратим. С другой стороны, из $P(x, x^m)$, $P(x, x^{m+n})$ и $xx^m \mid x^{m+n}$ согласно (3) следует, что $x^{m+n}$ не делит $x^m$, то есть $\{a^n\}$ необратим. Получили противоречие.

Из предыдущих пунктов мы получаем, что $x$ содержит хотя бы один элемент бесконечного порядка, например, $a$. Следовательно, $x^m$ состоит из всех произведений вида $a^k b^{m-k}$. Если бы среди них были одинаковые, например, $a^{k_1} b^{m-k_1} = a^{k_2} b^{m-k_2}$ при $k_1 < k_2$, то при помощи сокращения получим $b^{k_2-k_1} = a^{k_2-k_1}$, что, как уже доказано, невозможно. □

**Лемма 4.** *Пусть в* $\exp\mathfrak{A}$ *выполнено* $L(x)$ *и* $P_x = \{y \in \exp\mathfrak{A} : P(x, y)\}$. *Тогда* $P_x$ *— множество ненулевых степеней* $x$ *с точностью до обратимого элемента.*

**Доказательство.** Множество $x$ из-за (1) должно содержать ровно два элемента $a$ и $b$ (лемма 2). Согласно лемме 3, пункт 1, все степени $x$ принадлежат $P_x$. Таким образом доказано включение в одну сторону.

Докажем обратное включение. Из $P(x,\ y)$ следует, что $y$ — необратимый элемент. Из разложения $y = Ey$ получаем $y = Exw_1 = x^1 w_1$ для некоторого $w_1$. Аналогично из разложения $y = x^1 w_1$ получаем $y = x^1 x w_2 = x^2 w_2$ для некоторого $w_2$. Продолжая этот процесс пока $w_m$ необратимо, мы получаем представления $y = x^m w_m$ для каких-то $w_m$. Ниже мы докажем, что ни для какого $y \in C$ это $m$ не может быть сколь угодно большим. Выберем тогда наибольшее $m$, для которого существует разложение $y = x^m w_m$. Если бы $w_m$ было необратимым, то мы бы далее получили $y = x^{m+1} w_{m+1}$, что невозможно. Следовательно, $w_m$ обратим, а $y$ является произведением степени $x$ и обратимого элемента $w_m$.

Осталось продемонстрировать, что $m$ не может быть сколь угодно большим. Будет рассуждать от противного, пусть $y = x^m w_m$ для бесконечно многих $m$. Как мы уже доказали (лемма 3, пункт 4), $x^m$ содержит $m+1$ элемент. Но, как мы уже отмечали, должно быть выполнено $|x^m| \leq |x^m w_m| = |y|$, в частности, $|y| \geq m+1$. Получили противоречие, так как $y$ фиксировано, а $m$, как мы предположили, может быть сколь угодно большим. □

Докажем, что в $\exp\mathfrak{A}$ действительно есть элементы, для которых выполнено $L$.

**Лемма 5.** *Если* $x = \{g,\ ga\}$, *где* $a \in \mathfrak{A}$ *— элемент бесконечного порядка, а* $g \in \mathfrak{A}$ *— обратимый элемент, то в моноиде* $\exp\mathfrak{A}$ *выполнено* $L(x)$.

**Доказательство.** Условие $R_2(x)$ из (1) выполнено тривиально, поскольку бесконечность порядка $a$ означает в том числе $a \neq e$ и $g \neq ga$ в силу сократимости.

Для удобства обозначим $x' = \{e, a\} = g^{-1}x$.

Чтобы доказать вторую часть (1), рассмотрим произведение $uv = x$ или $(g^{-1}u)v = x'$. Так как $e \in x'$, то для некоторого обратимого $c$ должно выполняться $c \in g^{-1}u$, $c^{-1} \in v$. Взяв

$u' = c^{-1}g^{-1}u$, $v' = cv$ получим $e \in u'$, $v'$ и $u'v' = x'$. Тогда $u'$, $v' \subseteq x'$. Если допустить, что $u'$ и $v'$ содержат неединичные элементы, например, $b$ и $d$ соответственно, то получим, что $b, d, bd \in x$. Так как $b, d \neq e$, то $b = d = a$. Если $bd = a$, то $a$ будет неединичным идемпотентом: $a^2 = bd = a$, поэтому $a$ несократим, что невозможно. Если $bd = e$, то $a^2 = bd = e$ и $a$ имеет конечный порядок, что противоречит его выбору. В любом случае получаем противоречие, поэтому исходное предположение неверно. Следовательно, $u'$ или $v'$ ничего кроме $e$ не содержат, а $u$ или $v$ соответственно будут обратимыми.

Покажем, что $P(x, y)$ выполнено в точности для $y \sim x^m$. Если выполнено $P(x, y)$, то получаем $y = x^m w_m$ для натуральных $m$ пока $w_m$ необратимо. Но $x^m = g^m\{e, a, a^2, \ldots, a^m\}$, поэтому мощность $x^m w_m$ с увеличением $m$ растёт. Так как она не может превосходить мощности $y$, то рано или поздно $w_m$ должен стать обратимым и мы получим $y \sim x^m$.

Обратно, пусть $uv = x^m z$ для обратимого $z$ и необратимого $v$, тогда $(z^{-1}g^{-m}u)v = x'^m$. Так как $e \in x'^m$, то $c \in z^{-1}g^{-m}u$ и $c^{-1} \in v$ для какого-то обратимого $c$. Для $u' = c^{-1}z^{-1}g^{-m}u$ и $v' = cv$ тогда получаем $e \in u'$, $v'$ и $u'v' = x'^m$. Следовательно, $u', v' \subseteq x'^m$. Иными словами, множества $u'$ и $v'$ состоят из элементов вида $a^n$. Выберем наибольшее из $k$ таких, что $a^k \in v'$. Сразу отметим, что $k > 0$, так как $v$ и, следовательно, $v'$ необратимы. Тогда, очевидно, $v' \subseteq x'^k$ и мы получим $x'^m = u'v' \subseteq u'x'^k \subseteq x'^m$. Последнее включение выполнено, так как $u'x'^n$ не может содержать степени $a$ выше $m$, а $x'^m$ содержит все такие степени. Следовательно, $x'^m = u'x'^k = c^{-1}z^{-1}g^{-m}ux'x'^{n-1}$. Домножая на $g^m$ получим

$$x^m = x'^m t^m = c^{-1}z^{-1}ux'x'^{n-1} = c^{-1}z^{-1}g^{-n}u(x'g)x'g^{n-1} = uxc^{-1}z^{-1}g^{-n}x^{n-1} = uxw$$

для $w = c^{-1}z^{-1}g^{-n}x^{n-1}$.

Из доказанного утверждения прямо следуют (2) и (4). Так как $x$ необратим (лемма 1), то в (3) из $xx^n \mid x^m$ следует $n+1 \leq m$, поэтому не выполнено $x^m \mid x^n$. □

### 3. Интерпретация арифметики

Введём отношения

$$D(x, y, z) \equiv P(x, y) \wedge R_2(z) \wedge zy = y^2;$$
$$C(x, z) \equiv (\exists y) D(x, y, z).$$

**Лемма 6.** *Пусть для* $x \in \exp \mathfrak{A}$ *выполнено* $L(x)$. *Тогда в моноиде* $\exp \mathfrak{A}$

• *для каждого* $n$ *и обратимого* $w$ *существует* $z$, *для которого* $D(x, x^n w, z)$;

• *для каждого* $z$ *такого, что* $C(x, z)$, *существует ровно одно натуральное* $n$, *для которого* $D(x, x^n w, z)$ *для какого-то обратимого* $w$.

**Доказательство.** Пусть $x = \{a, b\}$.

Так как $x^n wz = x^{2n} w^2$, то в качестве $z$, очевидно, можно взять $\{a^n, b^n\} w$.

Если выполнено $D(x, y, z)$, то из леммы 4 получаем $y = x^n w$ для обратимого $w$. Если бы существовали $n_1 < n_2$, для которых выполняется указанное условие, то получим $x^{n_1} w_1 z = x^{2n_1} w_1^2$ и $x^{n_2} w_2 z = x^{2n_2} w_2^2$. Далее имеем

$$x^{2n_2} w_2^2 = x^{n_2} w_2 z = w_2 w_1^{-1} x^{n_2 - n_1} x^{n_1} w_1 z = w_2 w_1^{-1} x^{n_2 - n_1} x^{2n_1} w_1^2 = w_2 w_1 x^{n_2 + n_1}.$$

Сократив на $w_2$, мы получаем $x^{2n_2} w_2 = x^{n_2 + n_1} w_1$. Так как $x$ необратим, а $w_1$ и $w_2$ обратимы, то $2n_2 = n_2 + n_1$, то есть $n_1 = n_2$, противоречие. □

Рассмотрим отношения

$$z_1 \leq z_2 \equiv (\exists y_1, y_2)(D(x, y_1, z_1) \wedge D(x, y_2, z_2) \wedge y_1 \mid y_2);$$
$$z_1 \approx z_2 \equiv z_1 \leq z_2 \wedge z_2 \leq z_1.$$

**Лемма 7.** *Пусть для* $x \in \exp \mathfrak{A}$ *выполнено* $L(x)$. *Тогда* $\leq$ — *транзитивное рефлексивное отношение на множестве* $C_x = \{z \in \exp \mathfrak{A} : C(x, z)\}$.

**Доказательство.** Рефлексивность очевидна.

Пусть выполнено $z_1 \le z_2$ и $z_2 \le z_3$. Тогда из леммы 4 мы получаем истинность следующих формул: $D(x, x^{n_1} w_1, z_1)$, $D(x, x^{n_2} w_2, z_2)$, $D(x, x^{n_2} w_2', z_2)$, $D(x, x^{n_3} w_3, z_3)$ для некоторых $n_1 \le n_2 \le n_3$. Но тогда $n_1 \le n_3$ и будет выполнено $z_1 \le z_3$. □

**Следствие 1.** *Отношение $\approx$ является отношением эквивалентности на $C_x$, а фактор-порядок на $C_x$ по $\approx$ изоморфен порядку на натуральных числах.*

Для удобства обозначим с помощью $\hat{n}$ класс эквивалентности таких $z$ из $C_x$, для которых выполнено $D(x, x^n w, z)$ для какого-то обратимого $w$.

Определим формулы

$$L^*(x) \equiv (\forall z)(C(x,z) \to L(z));$$
$$A(z_1, z_2, z_3) \equiv (\exists y_1, y_2)(D(x, y_1, z_1) \wedge D(x, y_2, z_2) \wedge D(x, y_1 y_2, z_3));$$
$$DV(z_1, z_2) \equiv (\exists z_1', z_2')(z_1' \approx z_1 \wedge z_2' \approx z_2 \wedge C(z_1', z_2')).$$

**Лемма 8.** *Пусть в* $\exp\mathfrak{A}$ *выполнено* $L^*(x)$. *Тогда для любых* $z_1, z_2, z_3 \in C_x$, *принадлежащих классам эквивалентности* $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, $\hat{n}_3$ *соответственно,* $A(z_1, z_2, z_3)$ *задаёт сложение* $n_1 + n_2 = n_3$, *а* $DV(z_1, z_2)$ *— отношение делимости* $n_1 \mid n_2$.

**Доказательство.** Если выполнено $A(z_1, z_2, z_3)$, то $D(x, x^{n_1}, z_1)$, $D(x, x^{n_2}, z_2)$ и, следовательно, $D(x, x^{n_1+n_2}, z_3)$, то есть $n_1 + n_2 = n_3$. Обратное выполняется аналогичным образом.

Пусть выполнено $DV(z_1, z_2)$, то есть $D(x, x^{n_1} t_1, z_1')$, $D(x, x_2^{n_2}, z_2')$ для обратимых $t_1$ и $t_2$. Так как для $z_1$ выполнено $L(z_1)$, то $D(z_1', z_1'^m t, z_2')$ для каких-то натурального $m$ и обратимого $t$. Тогда

$$x^{n_2+4n_1 m} t^2 t_1^{4m} t_2 = x^{n_2} (x^{2n_1} t_1^2)^{2m} t^2 t_2 = x^{n_2} (x^{n_1} t_1 z_1')^{2m} t^2 t_2 =$$
$$= x^{n_2} x^{2n_1 m} z_1'^{2m} t^2 t_1^{2m} t_2 = x^{n_2} x^{2n_1 m} z_1'^m t z_2' t_1^{2m} t_2 =$$
$$= (x^{n_1} z_1')^m x^{n_1 m} x^{n_2} t_2 z_2' t t_1^{2m} = x^{2n_1 m} x^{n_1 m} x^{2n_2} t_2^2 t t_1^{2m} = x^{3n_1 m + 2n_2} t t_1^{2m} t_2^2.$$

Так как $t$, $t_1$, $t_2$ сократимы, а $x$ — нет, то получаем $n_2 + 4n_1 m = 3n_1 m + 2n_2$ или $n_2 = n_1 m$.

Аналогично доказывается обратное. Если $n_2 = n_1 m$, то возьмём $z_1' = \{a^{n_1}, b^{n_1}\}$ и $z_2' = \{a^{mn_1}, b^{mn_1}\}$. Тогда будет выполнено $z_1' \approx z_1$ и $z_2' \approx z_2$. Так как из $L^*(x)$ вытекает справедливость $L(z_1')$, то справедливо $D(z_1', (z_1')^m, z_2')$, поэтому истинно $DV(z_1, z_2)$. □

Чтобы иметь возможность пользоваться доказанной леммой, нужно доказать, что элементы, удовлетворяющие формуле $L^*$ действительно существуют.

**Лемма 9.** *Если* $x = \{e, a\}$, *где* $a$ *— элемент бесконечного порядка моноида* $\mathfrak{A}$, *то в моноиде* $\exp\mathfrak{A}$ *выполнено* $L^*(x)$.

**Доказательство.** Из леммы 5 вытекает, что $x$ удовлетворяет $L(x)$, поэтому $P(x, y)$ выполнено в точности для $y = x^n w$ для натурального $n > 0$ и обратимого $w$. Значит, из $C(x, z)$ вытекает $zx^n w = x^{2n} w^2$, то есть $(zw^{-1})x^n = x^{2n}$. Так как $e \in x^n, x^{2n}$, то $zw^{-1} \subseteq x^{2n}$, поэтому $zw^{-1} = \{e, a^k\}$. Легко убедиться, что $(zw^{-1})x^n = x^{2n}$ выполнено только при $zw^{-1} = \{e, a^k\}$ и $z = \{w, a^k w\}$. Но для таких $z$ справедливость $L(z)$ доказана в лемме 5. □

**Теорема 1.** *Если коммутативный моноид с сокращением* $\mathfrak{A}$ *содержит элемент бесконечного порядка, то в* $\exp\mathfrak{A}$ *интерпретируется элементарная арифметика.*

**Доказательство.** Напомним, что для интерпретации элементарной арифметики достаточно уметь интерпретировать сложение и отношение делимости [2, 10]. Зафиксируем какой-либо элемент $t$, для которого выполнено $L^*(t)$. Тогда областью интерпретации будут классы эквивалентности по отношению $\approx$. Для каждой подформулы $\phi$ формулы $\Phi$ строим её интерпретацию $\phi'$. Формула $x + y = z$ интерпретируется с помощью $A(x, y, z)$, формула $x \mid y$ — с помощью $DV(x, y)$, формула $x = y$ — с помощью $x \approx y$. Формулы, построенные с помощью булевых связок, интерпретируются соответственно. Кванторы становятся ограниченными по $C_x$: $(\forall x)\phi$ заменяется на $(\forall x)(C(t, x) \to \phi')$, $(\exists x)\phi$ — на $(\exists x)(C(t, x) \wedge \phi')$. Вся формула $\Phi$ интерпретируется как $(\exists t)(L^*(t) \wedge \Phi')$. □

**Следствие 2.** Если коммутативный моноид с сокращением $\mathfrak{A}$ содержит элемент бесконечного порядка, то теория моноида $\exp\mathfrak{A}$ имеет степень неразрешимости не меньше элементарной арифметики.

Заметим, что этот результат отличается от утверждения из [4], где доказана эквивалентность теории моноида $\exp\mathfrak{C}$ и элементарной арифметики для циклического моноида $\mathfrak{C}$. В нашем случае уже сам моноид $\mathfrak{A}$ может иметь бóльшую степень неразрешимости, а потому и моноид $\exp\mathfrak{A}$ тоже, так как $\mathfrak{A}$ легко интерпретируется в $\exp\mathfrak{A}$ при помощи $R_1$.

## Заключение

Мы показали неразрешимость алгебры конечных подмножеств для достаточно широкого класса моноидов. Естественные вопросы, которые возникают далее, связаны с возможность перенести эти результаты на другие алгебры, отбросив принятые ограничения:

- верно ли утверждение о неразрешимости алгебры $\exp\mathfrak{A}$ для моноидов, все элементы которых имеют конечные порядки, например, для $(\mathbb{Q}_1, +, 0)$ — группы рациональных чисел по модулю 1;
- верно ли такое утверждение для моноидов без сокращения;
- верно ли такое утверждение для некоммутативных моноидов.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00435.

## Литература

1. *Дудаков, С. М.* Об алгоритмических свойствах алгебры конечных подмножеств некоторых униоидов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2019. – № 4. – С. 108–116.

2. *Boolos, G.* Computability and Logic / G. Boolos, J. P. Burgess, R. C. Jeffrey. – Cambridge : Cambridge University Press, 2007. – 364 p.

3. *Codd, E. F.* Relational completeness of data base sublanguages // Database Systems. – ed. Rustin R. – Prentice-Hall, San Jose, 1972. – P. 33–64.

4. *Dudakov, S. M.* On Undecidability of Concatenation Theory for One-Symbol Languages // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 40, No 2. – P. 168–175.

5. *Dudakov, S. M.* On Decidability of Regular Languages Theories / S. M. Dudakov, B. N. Karlov // Proc. of 14th International Computer Science Symposium in Russia (CSR 2019), LNCS 11532. – 2019. – P. 119–130.

6. *Dudakov, S.* On Decidability of Theories of Regular Languages / S. Dudakov, B. Karlov // Theory Comput Syst. – 2020. – DOI: 10.1007/s00224-020-09995-4.

7. *Hopcroft, J. E.* Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation / J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman. – Harlow : Pearson, 2013. – 560 p.

8. *Kanellakis, P.* Constraint query languages / P. Kanellakis, G. Kuper, P. Revesz // Journal of computer and system sciences – 1995. – Vol. 51. – P. 26–52.

9. *Mostowski, A.* On direct products of theories // The Journal of Symbolic Logic. – 1952. – Vol. 17, No 3. – P. 1–31.

10. *Rogers, H.* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. – Cambridge : MIT Press, 1987. – 506 p.

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03

# АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ОДНОГО НЕМАРКОВСКОГО СВОЙСТВА ГРУПП

**В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина**

*Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова*

**Аннотация.** В статье доказана алгоритмическая неразрешимость группового свойства «Позитивная теория группы G совпадает с позитивной теорией свободной неабелевой группы, совпадающей с позитивной теорией класса всех групп». Это свойство не является марковским, поэтому его алгоритмическая неразрешимость не следует из фундаментальной теоремы С. И. Адяна — М. О. Рабина.
**Ключевые слова:** алгоритмическая разрешимость, позитивные теории, немарковские групповые свойства.

Напомним, что групповое свойство $\alpha$ называется *инвариантным*, если из того, что для группы $G$ выполнено свойство $\alpha$, а группа $H$ изоморфна группе $G$ следует, что и для группы $H$ выполнено свойство $\alpha$. Инвариантное групповое свойство $\alpha$ называется *марковским*, если существует конечно определенная группа $G_\alpha^+$, для которой выполнено свойство $\alpha$ и существует конечно определенная группа $G_\alpha^-$, которая не вложима ни в какую конечно определенную группу, для которой выполнено свойство $\alpha$. Можно привести очень много интересных примеров марковских свойств. Например, «*G — единичная группа*», «*G — конечная группа*», «*G — периодическая группа*», «*G — циклическая группа*», «*G — абелева группа*», «*G — нильпотентная группа*», «*G — разрешимая группа*», «*на группе G — выполняется нетривиальное тождество*», « *G — простая группа*», «*G — финитно аппроксимируемая группа*», «*в группе G — разрешима проблема равенства*», «*G — свободная группа*», «*G — группа без кручения*», «*группа G ∃-эквивалентна свободной неабелевой группе*», «*группа G ∀-эквивалентна свободной неабелевой группе*», «*группа G элементарно эквивалентна свободной неабелевой группе*» и т. д. Поэтому особый интерес представляет ***фундаментальная теорема С. И. Адяна — М. О. Рабина***.

**Теорема 1 (Адян — Рабин).** *Любое марковское групповое свойство алгоритмически неразрешимо.*

Существуют интересные примеры немарковских свойств, как алгоритмически разрешимых, так и алгоритмически неразрешимых. Например, немарковскими являются свойства «*группа $G$ совпадает со своим коммутантом*», «*группа $G$ хопфова*». Первое свойство *алгоритмически разрешимо*, а второе — *алгоритмически неразрешимо*: в работе [7] D. J. Collings доказал *алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания хопфовости для конечно определенных групп*, а в работе [9] C. F. Miller III и P. E. Schupp доказали, что *любая конечно определенная группа вложима в некоторую хопфову конечно определенную группу*, значит свойство групп «*Быть хопфовой группой*» не является марковским.

*Элементарная теория* $Th(G)$ группы $G$ (с константами) — это множество всех *замкнутых* (не содержащих свободных вхождений переменных) формул $\Phi$ вида

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\ldots(Q_n x_n)\Psi,$$

где $\Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij}=u_{ij}) \mathbin{\&} (\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it}\neq z_{it}))$,

$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it}$ — слова в алфавите $\{x_1,\ldots,x_n\}\cup G$,

$A_i$ и $B_i$ — множества (возможно пустые), а $Q_1,\ldots,Q_n$ — кванторы $\forall$ или $\exists$, *истинных* на группе $G$.

При этом $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\ldots(Q_n x_n)$ называется *кванторной приставкой* формулы $\Phi$, $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ — *типом кванторной приставки*, а $\Psi$ — *бескванторной частью* формулы $\Phi$.

Формула $\Phi$ называется *позитивной*, если ее бескванторная часть $\Psi$ не содержит отрицаний, т. е. имеет вид

$$\bigvee_{i=1}^{k}(\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij}=u_{ij}).$$

*Позитивной теорией* $Th^{+}(G)$ группы $G$ называется множество всех *замкнутых позитивных* формул $\Phi$ *истинных* на группе $G$.

Аналогичным образом определяются понятия *элементарной теории без констант* $Th(G)$ группы $G$ и *позитивной теории без констант* $Th^{+}(G)$ группы $G$.

Нас будет интересовать немарковское свойство «*позитивная теория группы (без констант) $G$ совпадает с позитивной теорией свободной нециклической группы*». Это свойство не является марковским, так как по теореме Sacerdote G. S. [14] для любой группы $G$ группа $G*F_2$, как и любая группа, имеющая среди гомоморфных образов группу вида $A*B$, где $A$ и $B$ — неединичные группы и по крайней мере одна из них содержит не менее трех элементов, позитивно эквивалентна свободной нециклической группе.

**Теорема 2.** *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе $G$ определить, совпадает ли ее позитивная теория с позитивной теорией свободной нециклической группы.*

Так как по теореме Ю. И. Мерзлякова [11] позитивная теория любой свободной нециклической группы совпадает с позитивной теорией класса всех групп, то получаем следствие.

**Следствие 1.** *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе $G$ определить, совпадает ли ее позитивная теория с позитивной теорией класса всех групп.*

**Теорема 3.** *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе $G$ определить, совпадает ли ее позитивная $\forall^2\exists^k$-теория с позитивной $\forall^2\exists^k$-теорией свободной нециклической группы (с позитивная $\forall^2\exists^k$-теорией класса всех групп).*

**Теорема 4.** *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе $G$ определить, разрешима ли ее позитивная $\forall^2\exists^k$-теория.*

**Следствие 2.** *Невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольной конечно определенной группе $G$ определить, разрешима ли ее позитивная теория.*

Обозначим через $F_2(\mathfrak{N}_2)$ свободную нильпотентную группу ранга 2 ступени нильпотентности 2. Как свободная группа многообразия $\mathfrak{N}_2$ нильпотентных групп ступени нильпотентности $\le 2$ она имеет задание

$$\langle\langle a, b \mid [[x, y], z] = 1\rangle\rangle.$$

Для нас особую важность будет иметь тот факт, что группа $F_2(\mathfrak{N}_2)$ является *конечно определенной* с заданием

$$\langle\langle a, b \mid [[a, b], a] = 1,\ \ [[a, b], b] = 1\rangle\rangle,$$

где $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — коммутатор элементов $a$ и $b$.

Непосредственным следствием ***фундаментального результата*** М. Дэвиса — Дж. Робинсон — П. Путнама — Ю. В. Матиясевича [13] является следующее утверждение:

*по произвольному рекурсивно перечислимому множеству $U$ натуральных чисел можно построить такую формулу $\Phi_U(x_1)$ вида*

$$(\exists x_2 \ldots x_p)\Psi,\ \text{ где }\ \Psi = \mathop{\&}_{i=1}^{m} \varphi_i$$

*и каждая из формул $\varphi_i$ имеет один из следующих видов:*

$$x_i + x_j = x_t,\quad x_i \cdot x_j = x_t,\quad x_i = x_t,\quad x_i = c_t,$$

*где $c_t$, — целое число, что для произвольного натурального числа $n$ справедлива эквивалентность:*

*$n \in U$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_U(n)$ истинна на кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} \vDash \Phi_U(n)$).*

А. И. Мальцев в работе [12] ввел предикат

$$R(x_1, x_2, x_3)=(\exists z_1 z_2)\Psi, \text{ где } \Psi=(\mathop{\&}_{i=1}^{2} [a_i, z_i] = x_i \;\&\; [z_1, a_2] = 1 \;\&\; [z_2, a_1] = 1 \;\&\; [z_1, z_2] = x_3)$$

и доказал, что для произвольных целых чисел $t$, $s$ и $r$:

*формула $R(c^t, c^s, c^r)$, где $c = [a_2, a_1] = a_2^{-1} a_1^{-1} a_2 a_1$ — коммутатор элементов $a_1$ и $a_2$, истинна на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ тогда и только тогда, когда $r = ts$.*

Приведем некоторые хорошо известные факты о группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$. Ее центр совпадает с коммутантом и является бесконечной циклической группой, порожденной, например, коммутатором $c = [a_2, a_1] = a_2^{-1} a_1^{-1} a_2 a_1$. Для любых трех элементов $u$, $v$ и $w$ группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ выполняются равенства $[uv, w] = [u, w][v, w]$ и $[w, uv] = [w, u][w, v]$. Для любых целых чисел $n$ и $m$ выполняются равенства

$$[a_2^n, a_1^m] = [a_2, a_1]^{nm} = [a_2^{nm}, a_1] = [a_2, a_1^{nm}] = [a_1, a_2]^{-nm} = [a_1^{-nm}, a_2] = [a_1, a_2^{-nm}].$$

Поэтому для произвольного элемента $g$ группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ справедливы эквивалентности

*$g$ степень элемента $c \Leftrightarrow g$ принадлежит коммутанту группы $F_2(\mathfrak{N}_2) \Leftrightarrow$*

*на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ истинна формула $(\exists u) g = [u, a_1] \Leftrightarrow$*

*на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ истинна формула $(\exists u) g = [u, a_2] \Leftrightarrow$*

*на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ истинна формула $(\exists u)(\exists v) g = [u, v] \Leftrightarrow$*

*$g$ принадлежит центру группы $F_2(\mathfrak{N}_2) \Leftrightarrow$*

*на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ истинна формула $\mathop{\&}_{i=1}^{2} [x, a_i] = 1$.*

Обозначим через $\mathbb{Z}(x)$, например, формулу $\mathop{\&}_{i=1}^{2} [x, a_i]=1$ или формулу $(\exists u)(\exists v) x = [u, v]$. Тогда для произвольного элемента $g$ группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ справедлива эквивалентность

*$g$ степень элемента $c$ $\Leftrightarrow$ на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ истинна формула $\mathbb{Z}(g)$.*

Для произвольного рекурсивно перечислимого множества $U$ натуральных чисел преобразуем формулу $\Phi_U(x_1)$, относящуюся к кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$, в формулу $\Phi_U^{(1)}(x_1)$, относящуюся к группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$, полагая

$$\Phi_U^{(1)}(x_1)=(\exists x_2 \ldots x_p)(\Psi_1, \;\&\; \mathop{\&}_{i=2}^{p} \mathbb{Z}(x_i)),$$

где $\Psi_1$ получается из $\Psi$ заменой каждой подформулы $\varphi$ вида $x_t + x_s = x_r$ на $x_t x_s = x_r$, вида $x_t x_s = x_r$ на $R(x_t, x_s, x_r)$, вида $x_t = m_s$ на $x_t = c^{m_s}$. Подформулы вида $x_t = x_s$ не меняются.

Тогда для произвольного натурального числа $n$ справедлива эквивалентность:

*$n \in U$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_U^{(1)}(c^n)$ истинна на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ ($F_2(\mathfrak{N}_2) \vDash \Phi_U^{(1)}(c^n)$).*

Приведем формулу $\Phi_U^{(1)}(x_1)$ к предваренной нормальной форме, заменим $x_1$ на $x$ и перенумеруем переменные, получим формулу $\Phi_U^{(2)}(x)$ вида

$$(\exists x_1 \ldots x_k)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x, x_1, \ldots, x_k, a_1, a_2) = 1)$$

такую, что для произвольного натурального числа $n$ справедлива эквивалентность:

*$n \in U$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_U^{(2)}(c^n)$ истинна на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ ($F_2(\mathfrak{N}_2) \vDash \Phi_U^{(2)}(c^n)$).*

Полагаем

$$\Phi_U(x)=(\forall z_1 z_2)(\exists x_1 \ldots x_k)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x, x_1, \ldots, x_k, z_1, z_2) = 1).$$

Тогда для произвольного натурального числа $n$ справедлива эквивалентность:

*$n \in U$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_U(c^n)$ истинна на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$* ($F_2(\mathfrak{N}_2) \models \Phi_U(c^n)$).

Взяв в качестве множества $U$ рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество, получим, что *при некотором $n$ алгоритмически неразрешима позитивная $\forall^2\exists^k$-теория группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$.*

Так как справедливы эквивалентности

$$\text{формула } (\exists x_1 \ldots x_k)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1,\ldots,x_k,a_1,a_2)=1) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_c) \Leftrightarrow$$

$$\text{на группе } F_2(\mathfrak{N}_{c+1}) \text{ истинна формула } (\exists x_1 \ldots x_k)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} \mathop{\&}_{j=1}^{2} [w_i(x_1,\ldots,x_k,a_1,a_2),a_j]=1)$$

$$\text{формула } (\exists x_1 \ldots x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x,x_1,\ldots,x_n,a_1,a_2)=1) \text{ истинна на группе } F_2(\mathfrak{N}_c) \Leftrightarrow$$

$$\text{при любом } p \geq 2 \text{ на группе } F_p(\mathfrak{N}_c) \text{ истинна формула } (\exists x_1 \ldots x_k)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1,\ldots,x_k,a_1,a_2)=1),$$

то по индукции легко получим, что *при некотором $k$ при любых $p \geq 2$ и $c \geq 2$ алгоритмически неразрешима позитивная $\forall^2\exists^k$-теория группы $F_p(\mathfrak{N}_c)$.*

Заметим, что попытки дальнейшего усиления доказанных утверждений наталкиваются на некоторые препятствия.

Так как *формула вида*

$$(\forall z_1)(\exists x_1 \ldots x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1,\ldots,x_n,z_1)=1)$$

*истинна на группе $F_m(\mathfrak{N}_c)$ тогда и только тогда, когда на бесконечной циклической группе $F_1 = \langle\langle a_1 \rangle\rangle$ истинна формула*

$$(\exists x_1 \ldots x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1)=1),$$

то *при любом $n$, при любых $p$ и $c$ позитивная $\forall\exists^n$-теория группы $F_p(\mathfrak{N}_c)$ алгоритмически разрешима.*

Так как *формула вида*

$$(\forall z_1)\ldots(\forall z_p)(\exists x_1 \ldots x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_p)=1)$$

*истинна на группе $F_p(\mathfrak{N}_c)$ тогда и только тогда, когда на этой группе истинна формула*

$$(\exists x_1 \ldots x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_p)=1),$$

то проблема истинности на группе $F_2(\mathfrak{N}_2)$ *для формул вида*

$$(\forall z_1)(\forall z_2)(\exists x_1 \ldots x_n) w(x_1,\ldots,x_n,z_1,z_2)=1)$$

сводится к вопросу об истинности на этой группе формул вида

$$(\exists x_1 \ldots x_n) w(x_1,\ldots,x_n,a_1,a_2)=1),$$

т. е. к *вопросу о разрешимости в этой группе для систем из одного уравнения. Последняя проблема алгоритмически разрешима*, так как из однозначной представимости элементов группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ в виде $a_1^u a_2^v c^z$, где $u$, $v$ и $z$ — целые числа, следует *возможность свести эту проблему к вопросу о существовании целочисленного решения у системы из двух линейных и одного квадратичного уравнений с целыми коэффициентами. А последний вопрос алгоритмически разрешим.*

Г. С. Маканин [15] используя работу Ю. И. Мерзлякова [11] доказал *разрешимость позитивной теории (с константами) свободной группы любого ранга и класса всех групп.*

Воспользуемся конструкцией Ч. Миллера [8]. Пусть группа $G$ имеет конечное задание образующими элементами и определяющими соотношениями

$$G = \langle\langle a_1,\ldots,a_n \mid R_1 = 1,\ldots,R_m = 1 \rangle\rangle,$$

а $w$ — произвольное слово в ее алфавите. Следуя работе [8] Ч. Миллера обозначим через $G_w$ конечно определенную группу со следующим заданием

$$G_w = \langle\langle a_1,\dots,a_n | R_1 = 1,\dots,R_m = 1, a^{-1}ba = (bc)^{-1}c(bc), (ba^2)^{-1}a(ba^2) = (bc^2)^{-1}c(bc^2),$$
$$a^{-3}[w,b]a^3 = c^{-3}bc^3, a^{-(3+i)}a_iba^{(3+i)} = c^{-(3+i)}bc^{(3+i)} (i = 1,2,\dots,n)\rangle\rangle,$$

где $a$, $b$ и $c$ — новые буквы.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Группа $_w$ порождается элементами $b$ и $ca^{-1}$.

2) Если $w = 1$ в группе $G$, то $G_w$ — единичная группа.

3) Если $w \neq 1$ в группе $G$, то группа $G$ является подгруппой группы $G_w$.

Группа $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ имеет конечное задание, содержащее 4 образующих элемента и $(m+2)$ определяющих соотношения.

Если исходная группа $G$ — это группа В. В. Борисова [16] с 12 определяющими соотношениями, то группа $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ имеет конечное задание вида

$$\langle\langle a,b \mid R_1 = 1,\dots,R_{14} = 1\rangle\rangle.$$

1) Если $w = 1$ в группе $G$, то *при некотором* $k$ *позитивная* $\forall^2\exists^k$*-теория группы* $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2) = F_2(\mathfrak{N}_2)$ *алгоритмически неразрешима (не совпадает с позитивной* $\forall^2\exists^k$*-теорией свободной нециклической группы, не совпадает с позитивная* $\forall^2\exists^k$*-теорией класса всех групп).*

3) Если $w \neq 1$ в группе $G$, то *по теореме Sacerdote G. S. [14] позитивная теория группы* $G_w * F_2(\mathfrak{N}_2)$ *совпадает с позитивной теорией свободной нециклической группы, с позитивной теорией класса всех групп*, а значит *по теореме Г. С. Маканина [15] алгоритмически разрешима.*

Подведем итог: в статье доказана алгоритмическая неразрешимость немарковского свойства «*группа* $G$ *позитивно эквивалентна свободной нециклической группе*», а также существование такого натурального числа $k$, для которого алгоритмически неразрешимы немарковские свойства «*группа* $G$ *позитивно* $\forall^2\exists^k$*-эквивалента свободной нециклической группе*» и «*позитивная* $\forall^2\exists^k$*-теория группы* $G$ *совпадает с позитивной* $\forall^2\exists^k$*-теорией свободной нециклической группы*».

**Литература**


1. *Новиков П. С.* Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 85, № 4. – С. 709–712.

2. *Новиков П. С.* Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Труды МИАН. – 1955. – Т. 44.

3. *Boone W. W.* The word problem // Ann. of Math. – 1959. – Vol. 70, № 2. – P. 207–265.

4. *Адян С. И.* Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 103, № 4. – С. 533–535.

5. *Адян С. И.* Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп // Труды ММО. – 1957. – Т. 6. – С. 231–298.

6. *Rabin M. O.* Recursive unsolvability of group theoretic problems // Ann. of Math. – 1958. – V. 67, № 1. – P. 172–194.

7. *Collings D. J.* On recognizing Hopf groups // Arh. Math. – 1969. – V. 20. – P. 235–240.

8. *Miller C. F. III.* Decision problems for groups – servey and reflections // Math. Sci. Res. Inst. Publ. – 1992. – V. 23. – P. 1–59.

9. *Miller C. F. III, Schupp P. E.* Embeddings into Hopfian groups // J. Algebra. – 1971. – V. 17. – P. 171–176.

10. *Miller C. F. III.* On group-theoretic decision problems and their classification // Ann. of Math. Studies. – 1971. – V. 68. Princeton University Press.

11. *Мерзляков Ю. И.* Позитивные формулы на свободных группах. // Алгебра и логика. – 1966. – Т. 5, вып. 4. – С. 25–42.
12. *Мальцев А. И.* Об одном соответствии между кольцами и группами // Матем. сб. – 1960. – Т. 50, № 2. – С. 257–266.
13. *Матиясевич Ю. В.* Диофантовость перечислимых множеств // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 130, № 3. – С. 495–498.
14. *Sacerdote G. S.* Almost all free products of groups have the same positive theory // J. Algebra. – 1973. – V. 27, № 3. – P. 475–485.
15. *Маканин Г. С.* Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы / Изв. АН СССР. Серия матем. – 1984. – № 2. – С. 35–749.
16. *Борисов В. В.* Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, вып. 5. – С. 521–532.

УДК 519.1

# О ПОТОКАХ В СЕТЯХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ДОСТИЖИМОСТЬ

**Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация.** В работе рассмотрены графы с нестандартной достижимостью трех видов: барьерной, вентильной и магнитной. В рамках задачи о максимальном потоке в сетях с рассмотренными ограничениями приведены простые примеры, демонстрирующие существенное отличие потоков в сетях с ограничениями на достижимость от потоков в этих же сетях без ограничений на достижимость. В каждом из рассмотренных случаев имеет место снижение величины максимального потока. При этом, для магнитной достижимости показана возможность управления потоком в сети, а для барьерной и вентильной достижимостей приведены примеры снижения величины максимального потока вследствие эффекта наложения потока на самого себя, чего никогда не наблюдается в классической теории потоков в сетях.

**Ключевые слова:** потоки в сетях, сети со связанными дугами, сети с нестандартной достижимостью, алгоритмы на графах, управление потоком.

## 1. Введение

Графы с ограничениями на достижимость, введенные в рассмотрение сравнительно недавно (см. [1–4]), оказались достаточно интересными с точки зрения математического моделирования объектами, позволяющими учитывать различные особенности реальных процессов. Ограничения различных видов, рассмотренные нами, хорошо моделируют, в частности, коммуникационные сети, в которых имеются каналы, обеспечивающие разное качество передачи информации (каналы с сильным затуханием (см., например, [5, 6]).

Основным способом решения задач о кратчайших путях, случайных блужданиях и потоках в сетях на таких графах оказался метод разверток, состоящий в построении вспомогательного графа, называемого разверткой, и переносе на него исходной задачи. Построение развертки зависит от вида ограничений на достижимость, а само построение развертки позволяет «уходить» от ограничений на достижимость. Важно, чтобы на развертке отсутствовали пути, соответствующие недопустимым данным ограничением на исходном графе, а каждому допустимому пути на исходном графе соответствовал путь на развертке.

При построении развертки каждой вершине исходного графа ставится в соответствие она сама и набор «её двойников», а каждой дуге в зависимости от её типа ставятся в соответствие одна или несколько дуг на развертке. Основной проблемой является перенос весов дуг исходного графа на соответствующие им дуги развертки. В задачах о кратчайших путях и случайных блужданиях этот перенос тривиален, а в случае потоковых задач он таковым не является. Действительно, в том случае, когда дуге исходного графа на развертке соответствует одна дуга, её пропускная способность должна быть равна пропускной способности порождающей дуги, а в случае, когда дуге исходного графа на развертке соответствует несколько дуг, такой перенос не возможен, так как поток на развертке не всегда можно будет интерпретировать как поток на исходном графе (дальнейшие примеры внесут дополнительную ясность).

Сказанное привело нас к тому, что развертки в случае потоковых задач следует понимать как графы со связанными дугами (см. [7]), т.е. на которых имеются такие подмножества дуг, для которых нельзя говорить об их пропускных способностях (она не задана). Для дуг каждого из таких подмножеств задана лишь их суммарная пропускная способность. Сами дуги из таких подмножеств мы назвали связанными. Наличие связанных дуг делает неприменимыми известные алгоритмы нахождения максимального потока в сети.

Нами был предложен эвристический алгоритм прорыва, основанный в последовательно нахождении на развертке путей из источника в сток с насыщением их потоком. Этот алгоритм позволил учитывать наличие связанных дуг. С том случае, когда путь содержит связанную дугу, она насыщается потоком, а суммарная пропускная способность связанных с нею дуг уменьшается на соответствующую величину. В случае, когда такой путь проходит через несколько дуг развертки, соответствующих одной и той же дуге исходного графа, при его насыщении потоком необходимо учитывать кратность прохождения пути по таким дугам. Такая ситуация возникает, например, в случае сети с барьерной достижимостью.

Основная цель настоящей работы — построение простых примеров, демонстрирующих отличие потоков в сетях с ограничениями на достижимость от потоков в этих же сетях без ограничений на достижимость. Наиболее интересными примерами авторы считают описанные в п.п. 2, 3. Падение величины максимального потока в каждом из этих случаев возникает за счет эффекта «наложения» потока самого на себя, который никогда не наблюдается в классической теории потоков сетях. Примеры настолько просты, что нам удалось описать найти максимальные потоки без построения разверток.

## 2. Сети с барьерной достижимостью

Барьерная достижимость предполагает, что на графе имеются дуги трех типов: нейтральные, увеличивающие и барьерные, а также задано натуральное число $h$ — высота барьерных дуг. Какие пути на графе с барьерной достижимостью являются допустимыми? В начале движения по пути считается, что накопленная энергия равна нулю, прохождение по нейтральной дуге разрешено всегда и не меняет энергию, прохождение по повышающей дуге возможно всегда и оно увеличивает накопленную энергию на единицу, прохождение по барьерной дуге возможно только в случае если накопленная до этого энергия не меньше $h$.

Перейдем к рассмотрению одного на наш взгляд интересного примера. Рассмотрим граф на рис. 1 как сеть с барьерной достижимостью (см. [3]).

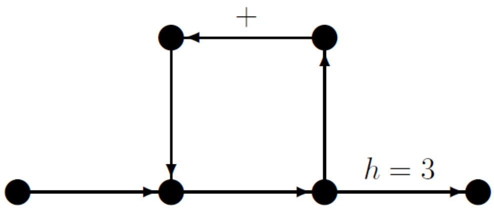



*Рис. 1. Сеть с барьерной достижимостью*

Знаком «+» на рис. 1 помечена увеличивающая дуга. Дуга, помеченная как «$h = 3$» — барьерная дуга высоты 3. Остальные дуги — нейтральные. Пропускная способность каждой дуги равна 4.

Ясно, что без ограничений на достижимость, величина максимального потока равна 4 и он реализуется в виде потока, изображенного на рис. 2. Около каждой дуги выписано значение потока по ней.

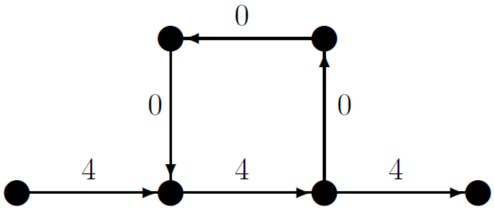



*Рис. 2. Максимальный поток в сети без ограничений на достижимость*

В случае барьерной достижимости этот поток не является допустимым, поскольку он реализуется недопустимым в этом случае путем.

Максимальный по величине поток в этой сети с барьерной достижимостью приведен на рис. 3. Его величина равна 1.

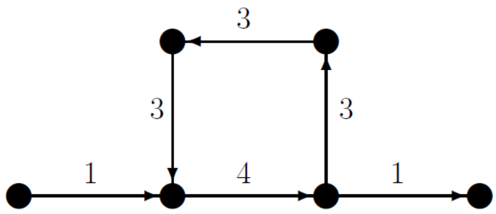



*Рис. 3. Максимальный поток в сети с барьерной достижимостью*

Как вообще понимать этот поток? По дуге, выходящей из источника, протекает единичный поток с нулевой энергией, по барьерной дуге протекает единичный поток, обладающей энергией величины 3. Поток, величина которого равна 4, проходящий по нижней дуге контура, это наслоение четырех единичных потоков с энергиями равными 0, 1, 2, 3 соответственно. Поток, величина которого равна 3, протекающий по правой и верхней дугам контура, является наслоением трех единичных потоков, с энергией равной 0, 1, 2, соответственно. Поток, величина которого равна 3, проходящий по левой дуге контура, это наслоение трех единичных потоков, с энергией равной 1, 2, 3, соответственно.

Фактически, на развертке, дуге выходящей из источника соответствует одна дуга, одна дуга соответствует и барьерной дуге, нижней дуге контура соответствует четыре дуги, а остальным дугам контура соответствует по три дуги. Трехкратная прокрутка потока по контуру на исходном графе на развертке превращается в спираль с тремя витками. А вся сеть на развертке превращается в один путь, ведущий из источника в сток, на котором нижняя дуга контура представлена четырьмя экземплярами связанных между собой дуг, суммарная пропускная способность которых равна 4, и тремя экземплярами каждой из остальных дуг контура, поэтому при применении алгоритма прорыва пропускная способность горизонтальной дуги распределяется поровну между её четырьмя дубликатами на развертке, а пропускная способность каждой из оставшихся дуг контура, распределяется поровну между тремя её дубликатами на развертке. Это определяет, что каждый дубликат нижней дуги контура является минимальным разрезом на развертке и пропускная способность любого из этих разрезов равна 1.

**Замечание 1.** Ясно, что при большей высоте барьера, величина максимального потока будет ещё меньше.

### *3. Сети с вентильной достижимостью*

Аналогичная ситуация наблюдается для графов с вентильной достижимостью (см. [3]). Рассмотрим сеть с вентильной достижимостью порядка 3 на рис. 4. Для определенности полагаем, что пропускная способность каждой дуги равна 3. Дуги множеств $U_1$, $U_2$, $U_3$ отмечены соответствующими цифрами. Остальные дуги являются дугами множества $U_0$.

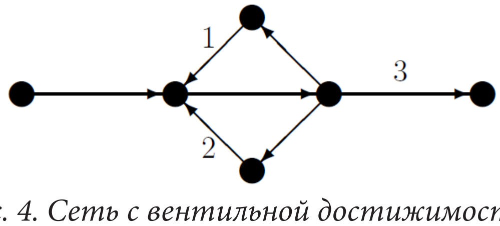



*Рис. 4. Сеть с вентильной достижимостью*

Вентильная достижимость на графе предполагает, что при формировании пути дуги множества $U_0$ могут использоваться без ограничений, а для остальных множеств действует правило: для любого натурального $i$ для прохождения по дугам множества $U_i$ необходимо пройти как минимум по одной дуге множества $U_{i-1}$. Следовательно, чтобы пройти по дуге в сток, необходимо пройти по нижним дугам сети, а для этого необходимо сначала пройти по верхним дугам. Максимальный поток в этой сети приведен на рис. 5, его величина равна 1. Ясно, что если эту сеть рассматривать как сеть без ограничений на достижимость, то максимальный поток равен 3.

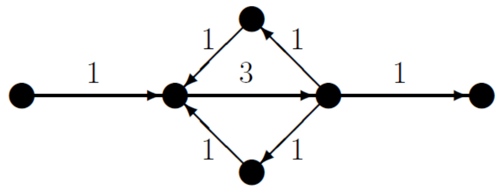



*Рис. 5. Максимальный поток в сети с вентильной достижимостью*

Как вообще понимать этот поток, приведенный на рис. 5? По дуге, выходящей из источника, протекает единичный поток, который проходит по средней дуге контура (диагонали), он же проходит по правой верхней дуге контура, проходя по верхней левой дуге контура он превращается в единичный поток, прошедший через вентильную дугу уровня 1. Этот единичный поток наслаивается на уже имеющийся единичный поток на средней дуге контура, затем этот поток протекает по нижней правой дуге контура, а проходя по нижней левой дуге контура он превращается в единичный поток, прошедший сначала через вентильную дугу уровня 1, а затем через вентильную дугу уровня 2. Этот единичный поток наслаивается на имеющиеся на средней дуге единичный поток, приходящий из источника (поток, не прошедший через вентильные дуги), и единичный поток, приходящий из верхней левой дуги (поток, прошедший через вентильную дугу уровня 1). По дуге, ведущей в сток, протекает единичный поток, прошедший сначала через вентильную дугу уровня 1 (верхняя левая дуга контура), а затем через вентильную дугу уровня 2 (нижняя левая дуга контура).

Фактически, как и в предыдущем примере (сеть с барьерной достижимостью) падение максимального потока происходит за счет наложения потока на связанных между собой дугах. В следующем пункте будет приведен пример сети с ограничениями на достижимость, когда падение потока происходит не за счет наложения потока самого на себя.

## 4. Сети со смешанной достижимостью

Перейдём к рассмотрению еще одного интересного примера. Если в предыдущих случаях падение потока возникало из-за эффекта «наложения» для случаев барьерной и вентильной достижимостей, то для следующего вида сетей построен пример, когда на величину максимального потока существенно влияют пропускные способности дуг контура, для которых величина максимального потока, проходящего по ним в той же сети без учёта ограничений, равна нулю.

Рассмотрим сеть с смешанной достижимостью (см. [1, 2]) на рис. 6.

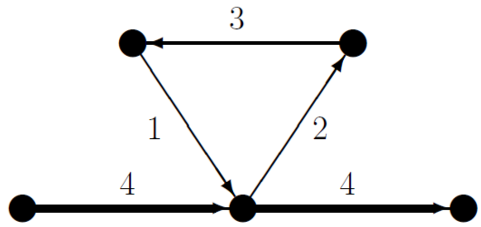



*Рис. 6. Сеть со смешанной достижимостью*

Здесь пропускные способности указаны рядом с дугами, а также «запрещённые» дуги отмечены полужирным.

Смешанная достижимость предполагает, что при формировании пути для действует ограничение на прохождение по двум подряд «запрещённым» дугам. Другими словами, для любой пары последовательных дуг допустимого пути, хотя бы одна из этих дуг должна быть «разрешённой».

Ясно, что без ограничений на достижимость, величина максимального потока равна 4 и он реализуется в виде потока, изображенного на рис. 7. Около каждой дуги выписано значение потока по ней.

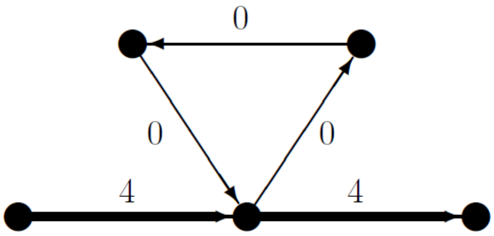



*Рис. 7. Максимальный поток в сети без ограничений на достижимость*

В случае смешанной достижимости этот поток не является допустимым, поскольку он реализуется недопустимым в этом случае путем.

Максимальный по величине поток в этой сети со смешанной достижимостью приведен на рис. 8. Его величина равна 1.

Как вообще понимать поток, приведенный на рис. 8? По дуге, выходящей из источника,

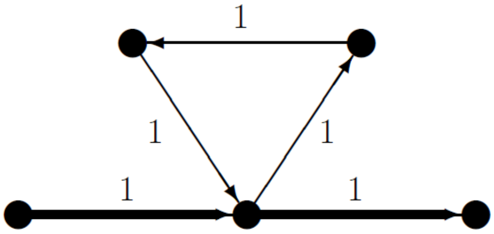



*Рис. 8. Максимальный поток в сети со смешанной достижимостью*

протекает некоторый поток, а поскольку он проходит по «запрещённой» дуге, то движение в сток непрямую становится невозможным, но возможно движение по дугам контура. Таким образом, поток проходит по контуру и, поскольку последняя его дуга является разрешённой, проходит в сток. Поскольку для пройденного пути пропускная способность равна единице, следовательно, величина максимального потока равна 1. Фактически, падение максимального потока происходит за счет прохождения дополнительных контуров с меньшей пропускной способностью, чем на простых путях.

## 5. Сети с магнитной достижимостью

Перейдём к рассмотрению еще одного интересного примера. Рассмотрим сеть с магнитной достижимостью порядка 1 (см. [3]) на рис. 9.

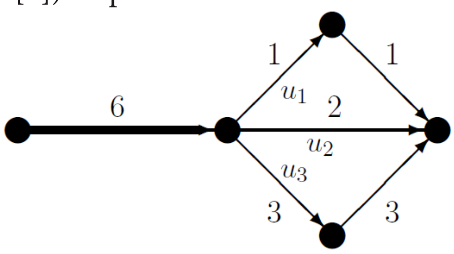



*Рис. 9. Сеть с магнитной достижимостью порядка 1*

Здесь пропускные способности указаны рядом с дугами, магнитная дуга отмечена полужирным и выделены три дуги $u_1$, $u_2$ и $u_3$.

Магнитная достижимость такого порядка предполагает, что если на любом начальном отрезке произвольного пути содержится магнитная дуга и есть возможность продолжения пути по магнитной дуге, то следующая дуга рассматриваемого пути должна быть магнитной. Отметим, что величина максимального потока и без ограничений на достижимость и с ограничением магнитной достижимости в данном случае равна 6. Однако, если дополнительно дуга $u_1$ станет магнитной, то величина максимального потока в такой сети будет равна 1. Такая ситуация показана на рис. 10.

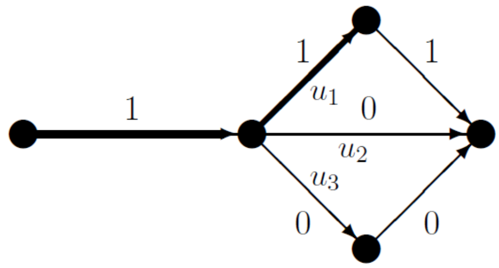



*Рис.10. Максимальный поток величины 1 в сети с магнитной достижимостью*

Действительно, любой путь, содержащий либо дугу $u_2$, либо дугу $u_3$, не удовлетворяет ограничению магнитной достижимости, поскольку начальный отрезок такого пути из источника в сток содержит магнитную дугу, и он продолжаем только по дуге $u_1$.

Если дуга $u_3$ станет магнитной вместо дуги $u_1$, то величина максимального потока в этой сети будет равна 3. Такая ситуация показана на рис. 11.

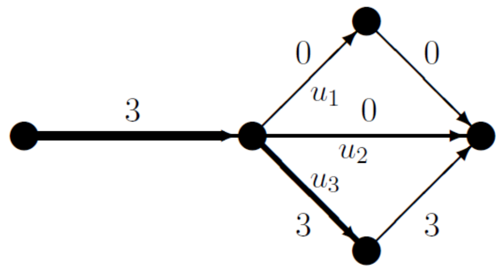



*Рис. 11. Максимальный поток величины 3 в сети с магнитной достижимостью*

Отметим, что для рассматриваемой сети с магнитной достижимостью назначением свойства магнитности для дуг из множества $\{u_1, u_2, u_3\}$ можно добиться, чтобы величина максимального потока была равна 1, 2, 3, 4, 5 или 6. При этом структура рассматриваемой сети такова, что невозможно получить максимальный поток другой величины.

Существуют сети, для которых назначением свойства магнитности некоторых дуг можно получить ситуацию, для которой единственным допустимым потоком в сети будет поток нулевой величины, независимо от пропускных способностей дуг сети.

Рассмотрим граф с магнитной достижимостью порядка 1 на рис. 12. Магнитные дуги выделены полужирным. Для определенности будем считать, что пропускные способности всех дуг такой сети равны единице.

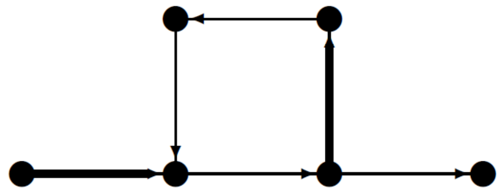


*Рис. 12. Сеть с магнитной достижимостью порядка 1 и нулевым максимальным потоком*

В рассматриваемой сети нет ни одного допустимого пути из источника в сток, поскольку единственная дуга, выходящая из источника, является магнитной, а из предпоследней перед стоком вершины выходит две дуги, одна из которых является магнитной. Действительно, в дальнейшем формировании любого пути, выходящего из источника, приоритет будет отдаваться магнитной дуге (правой дуге контура).

**Замечание 2.** Фактически в этом случае граф, приведенный на рис. 12, вообще не является сетью с источником в левой вершине и стоком в правой.

Отметим, что существуют сети, в которых любое введение магнитных ограничений на достижимость не влияет на величину максимального потока. Такие сети мы называем магнитно-неуправляемыми, пример такой сети приведен на рис. 13

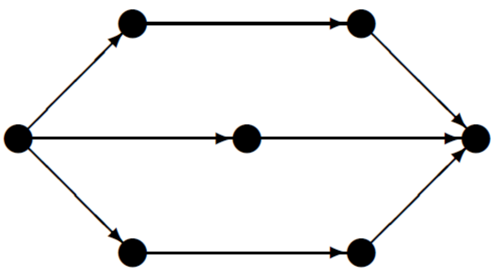


*Рис. 13. Магнитно-неуправляемая сеть*

В то же время, для любой магнитно-управляемой сети без нарушения её структуры (в классическом понимании), только назначением свойства магнитности для дуг можно управлять потоком, меняя при этом не только величину максимального потока, но и пути его прохождения от источника к стоку.

### Литература


1. *Басангова, Е. О.* Различные виды смешанной достижимости / Е. О. Басангова, Я. М. Ерусалимский // Алгебра и дискретная математика: сб. – Элиста: КГУ, 1985. – С. 70–75.

2. *Басангова, Е. О.* Смешанная достижимость на частично-ориентированных графах / Е. О. Басангова, Я. М. Ерусалимский // Вычислительные системы и алгоритмы: сб. – Ростов-на-Дону: РГУ, 1983. – С. 135–140.

3. *Ерусалимский, Я. М.* Графы с нестандартной достижимостью. Задачи, приложения: монография / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьминова, А. Г. Петросян. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009. – 195с.

4. *Ерусалимский, Я. М.* Общий подход к нестандартной достижимости на графах/ Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2005. Спецвыпуск. Псевдодифферен-циальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. – С. 64–67.

5. *Ерусалимский, Я. М.* Достижимость на графах с условиями затухания и усиления / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2004. Спец. выпуск «Математика и механика сплошной среды». – С. 110–112.

6. *Ерусалимский, Я. М.* Графы с затуханием на дугах и усилением в вершинах и маршрутизация в информационных сетях / Я. М. Ерусалимский // Инженерный вестник Дона. – 2015. – Т. 33, № 1-1. – С. 27. – http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2782 (Дата обращения: 12.08.2020)

7. *Скороходов, В. А.* Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами / В. А. Скороходов // Моделирование и анализ информационных систем. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 41–52.

УДК 510.53+510.6

# АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ФРАГМЕНТОВ ТЕОРИИ СЛОВ С ОПЕРАЦИЕЙ КОНКАТЕНАЦИИ

**Б. Н. Карлов**

*Тверской государственный университет*

**Аннотация.** В работе изучаются два фрагмента теории слов с операцией конкатенации. Доказано, что при наличии двух отношений, обозначающих, что одно из двух слов является префиксом (соответственно суффиксом) другого, теория слов эквивалентна элементарной арифметике и, следовательно, неразрешима. Также доказана разрешимость теории слов со счётным множеством операций возведения в степень.
**Ключевые слова:** слово, конкатенация, префикс, суффикс, алгебраическая система, теория, разрешимость, элементарная арифметика, элиминация кванторов.

## Введение

Изучение теории конкатенации началось в статье [12], в которой была построена аксиоматизация второго порядка теории синтаксиса на основе конкатенации. После этого теория конкатенации и её различные варианты изучались во многих статьях, подробный обзор истории её исследования можно найти в [13]. В частности, в [7, 14] доказано, что некоторая конечно аксиоматизируемая теория конкатенации является алгоритмически неразрешимой для двухбуквенного алфавита, а в [8] доказано, что она является существенно неразрешимой. В [11, 13] установлено, что некоторый вариант арифметики Робинсона допускает интерпретацию в такой теории конкатенации. В то же время нетрудно видеть, что в некоторых частных случаях теория конкатенации может быть разрешимой. Например, если алфавит $\Sigma$ содержит единственный символ $a$, то множество слов $\Sigma^*$ с операцией конкатенации изоморфно множеству натуральных чисел со сложением, так как $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Поэтому теория такой алгебраической системы совпадает с арифметикой Пресбургера, а значит, является разрешимой. Более сложные результаты о разрешимости и неразрешимости различных фрагментов теории конкатенации были получены в [9]. В [4–6] были получены результаты о разрешимости теорий с конкатенацией и другими операциями, в которых основным множеством является не множество слов, а множество языков в некотором алфавите.

В настоящей статьей мы исследуем алгоритмическую сложность двух фрагментов теории слов с операцией конкатенации. В разделе 1 приводятся основные определения. В разделе 2 исследуется теория $T_1$, сигнатура которой содержит только символы констант, а также два отношения $\mathrm{Pref}(x, y)$ и $\mathrm{Suf}(x, y)$, означающие, что слово $x$ является префиксом (соответственно суффиксом) слова $y$. Мы доказываем, что теория такой алгебраической системы неразрешима и эквивалентна элементарной арифметике. В разделе 3 исследуется теория $T_2$, сигнатура которой содержит операции возведения в степень $x^i = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{i \text{ раз}}$ для всех натуральных $i > 1$. Мы доказываем, что при подходящем обогащении сигнатуры эта теория допускает эффективную элиминацию кванторов, а значит, она разрешима.

## 1. Основные определения

*Алфавит* — это конечное множество символов. *Слово* в алфавите $\Sigma$ — это конечная последовательность символов из $\Sigma$. Число символов в слове $w$ называется длиной слова $w$ и обозначается $|w|$. Слово длины 0 называется *пустым* и обозначается $\varepsilon$. Через $\Sigma^*$ обозначается множество всех слов в алфавите $\Sigma$. *Конкатенацией* слов $u$ и $v$ называется слово, которое получается приписыванием слова $v$ после $u$. Конкатенация слов $u$ и $v$ обозначается $u \cdot v$ или просто $uv$. $i$*-й степенью* слова $v$ называется слово $v^i = \underbrace{v \cdot \ldots \cdot v}_{i \text{ раз}}$, в частности, $v^0 = \varepsilon$, $v^1 = v$. Слово $u$ называется *префиксом* слова $v$, если $v = uw$ для некоторого слова $w$. Слово $u$ называется *суффиксом* слова $v$, если $v = wu$ для некоторого слова $w$, Слово $u$ называется *подсловом* слова $v$, если $v = xuy$ для некоторых слова $x$ и $y$. Во всех трёх определениях допустимы случаи $u = v$ и $u = \varepsilon$.

*Полусистема Туэ* — это пара $T = (\Sigma, U)$, где $\Sigma$ — алфавит, $U$ — конечное множество правил вида $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Для слов $x$ и $y$ отношение $x \Rightarrow_T y$ обозначает выводимость за один шаг в полусистеме Туэ $T$: $x \Rightarrow_T y$, если существуют слова $u$, $v$, $\alpha$, $\beta$ такие, что $x = u\alpha v$, $y = u\beta v$, $\alpha \to \beta \in U$. Через $\Rightarrow_T^n$ обозначается отношение выводимости за $n$ шагов, а через $\Rightarrow_T^*$ — рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow_T$.

*Теория* $T$ — это множество формул первого порядка, замкнутое относительно логического следования. Формулы $\varphi$ и $\psi$ *эквивалентны* в теории $T$, если $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in T$. Эквивалентность формул обозначается $\varphi \equiv_T \psi$. $n$-местное отношение $P(x_1, \ldots, x_n)$ *определимо* в теории $T$, если существует формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $\varphi$ не содержит $P$ и $P(x_1, \ldots, x_n) \equiv_T \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. $n$-местная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определима в теории $T$, если существует формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $\varphi$ не содержит $f$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = y \equiv_T \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Теория алгебраической системы $\mathfrak{A}$ — это множество всех формул истинных в $\mathfrak{A}$. Теория $T$ допускает *элиминацию кванторов*, если для любой формулы $\varphi$ существует бескванторная формула $\psi$ такая, что $\varphi \equiv_T \psi$. Теория $T$ допускает *эффективную* элиминацию кванторов, если существует алгоритм, который по произвольной формуле $\varphi$ строит эквивалентную ей бескванторную формулу $\psi$.

## 2. Неразрешимость теории слов с отношениями префикса и суффикса

В этом разделе мы изучаем теорию $T_1$ алгебраической системы с основным множеством $\Sigma^*$, где $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, и сигнатурой $\Omega_1 = (\mathrm{Pref}^{(2)}, \mathrm{Suf}^{(2)}; a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_r^{(0)})$. Предикатные и функциональные символы интерпретируются следующим образом:

- $\mathrm{Pref}(x, y)$ — $x$ является префиксом $y$;
- $\mathrm{Suf}(x, y)$ — $x$ является суффиксом $y$;
- $a_i$ — символ $a_i$ из алфавита $\Sigma$.

Сначала мы докажем определимость некоторых дополнительных операций и отношений в теории $T_1$. Отношение $\mathrm{Subw}(x, y)$ означает, что слово $x$ является подсловом слова $y$:

$$\mathrm{Subw}(x, y) \equiv_{T_1} (\exists u)(\mathrm{Pref}(u, y) \wedge \mathrm{Suf}(x, u)).$$

Отношение $\mathrm{Subw}_1(x, y)$ означает, что $x$ является подсловом $y$ и притом ровно в одной позиции:

$$\mathrm{Subw}_1(x, y) \equiv_{T_1} \mathrm{Subw}(x, y) \wedge \neg(\exists u)(\exists v)(u \neq v \wedge \mathrm{Pref}(u, y) \wedge \mathrm{Pref}(v, y) \wedge \mathrm{Suf}(x, u) \wedge \mathrm{Suf}(x, v)).$$

Главной определимой операцией является конкатенация слова с произвольным фиксированным словом. Сначала определяется конкатенация слова и символа, $y = xa$ и $y = ax$, где $a \in \{a_1, \ldots, a_r\}$:

$$y = xa \equiv_{T_1} y \neq x \wedge \mathrm{Pref}(x, y) \wedge \mathrm{Suf}(a, y) \wedge (\forall z)(\mathrm{Pref}(z, y) \to (\mathrm{Pref}(z, x) \vee z = y));$$

$$y = ax \equiv_{T_1} y \neq x \wedge \mathrm{Suf}(x, y) \wedge \mathrm{Pref}(a, y) \wedge (\forall z)(\mathrm{Suf}(z, y) \to (\mathrm{Suf}(z, x) \vee z = y)).$$

Индукцией по длине $w$ определяется операция конкатенации со словом $w$, $y = xw$ и $y = wx$, где $w \in \{a_1, \ldots, a_r\}^*$:

$$y = x\varepsilon \equiv_{T_1} y = \varepsilon x \equiv_{T_1} y = x;$$

$$y = x(wa) \equiv_{T_1} (\exists z)(z = xw \wedge y = za);$$

$$y=(aw)x \equiv_{T_1} (\exists z)(z=wx \wedge y=az).$$

Подчеркнём, что эти операции определены только для случая, когда слово $w$ фиксировано. Приведённая конструкция не позволяет записать конкатенацию двух переменных.

Далее мы покажем, как описать работу произвольной машины Тьюринга с помощью формул сигнатуры $\Omega_1$. Мы будем записывать конфигурации машины Тьюринга $M=(Q,\Delta,P,q_0,q_f)$ в виде слов Поста, то есть в виде слов $\#uqav\#$, где $q\in Q$ — текущее состояние, $a\in\Delta$ — обозреваемый символ, $\#\notin Q\cup\Delta$ — маркер края использованной части ленты, $u,v\in\Delta^*$ — слова, записанные на ленте левее и правее обозреваемой ячейки, при этом $u$ не начинается на пустой символ $\Lambda$, $v$ не заканчивается на $\Lambda$. Известно (см. [3]), что по любой машине Тьюринга $M=(Q,\Delta,P,q_0,q_f)$ можно построить полусистему Туэ $T=(Q\cup\Delta\cup\{\#\},U)$ такую, что для любых двух слов Поста $\alpha$ и $\beta$ выполняется следующее свойство: $\alpha\vdash_M^n\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha\Rightarrow_T^n\beta$. При этом для каждого шага вывода $\alpha\Rightarrow_T^n\beta$ однозначно определяются как применяемое правило, так и место замены. В доказательстве следующей леммы мы предполагаем, что полусистема Туэ фиксирована.

**Лемма 1.** *В теории $T_1$ определимо отношение* $\mathrm{Der}(x,y)$, *означающее, что* $x\Rightarrow^* y$.

**Доказательство.** Мы будем предполагать, что алфавит $\Sigma$ содержит все символы полусистемы Туэ, а также специальный символ \$, то есть что $Q\cup\Delta\cup\{\#,\$\}\subseteq\Sigma$. Вывод $\alpha_1\Rightarrow\alpha_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow\alpha_m$ мы будем записывать в виде одного слова $\$\alpha_1\$\alpha_2\$\ldots\$\alpha_m\$$. Символ \$ выступает в роли разделителя двух последовательных конфигураций.

Определим некоторые отношения, описывающие выводимость в полусистеме Туэ. Отношение $\mathrm{Step}_{\alpha\to\beta}(x,y)$ означает, что $x\Rightarrow y$ по правилу $\alpha\to\beta$, при этом $x$ содержит ровно одно вхождение $\alpha$, а $y$ — ровно одно вхождение $\beta$:

$$\mathrm{Step}_{\alpha\to\beta}(x,y)\equiv_{T_1}\mathrm{Subw}_1(\alpha,x)\wedge\mathrm{Subw}_1(\beta,y)\wedge$$
$$\wedge(\exists u)(\exists v)(\mathrm{Pref}(u\alpha,x)\wedge\mathrm{Suf}(\alpha v,x)\wedge\mathrm{Pref}(u\beta,y)\wedge\mathrm{Suf}(\beta v,y)).$$

Отношение $\mathrm{Conseq}(x,y,z)$ означает, что $x$ и $y$ являются последовательными конфигурациями в $z$:

$$\mathrm{Conseq}(x,y,z)\equiv_{T_1}(\exists u)(\mathrm{Subw}(\$u\$,z)\wedge\mathrm{Subw}_1(\$,u)\wedge\mathrm{Pref}(x\$,u)\wedge\mathrm{Suf}(\$y,u)).$$

Отношение $\mathrm{Der}_1(x)$ означает, что $x$ представляет вывод в полусистеме Туэ:

$$\mathrm{Der}_1(x)\equiv_{T_1}x\neq\$\wedge\mathrm{Pref}(\$,x)\wedge\mathrm{Suf}(\$,x)\wedge(\forall u)(\forall v)(\mathrm{Conseq}(u,v,x)\to\bigvee_{\alpha\to\beta\in U}\mathrm{Step}_{\alpha\to\beta}(u,v)).$$

Главное отношение $\mathrm{Der}(x,y)$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{Der}(x,y)\equiv_{T_1}\neg\mathrm{Subw}(\$,x)\wedge\neg\mathrm{Subw}(\$,y)\wedge(\exists z)(\mathrm{Der}_1(z)\wedge\mathrm{Pref}(\$x\$,z)\wedge\mathrm{Suf}(\$y\$,z)).\qquad\square$$

**Теорема 1.** *Теория $T_1$ эквивалентна элементарной арифметике, даже если сигнатура содержит два символа констант $a$ и $b$.*

**Доказательство.** Мы должны определить в теории $T_1$ сложение и умножение натуральных чисел. Пусть $M_+=(Q,\Delta,P,q_1,q_f)$ — машина Тьюринга, выполняющая сложение чисел, записанных в унарной системе. Можно считать, что число $p$ представляется словом $|^{p+1}$, чтобы избежать пустого слова при $p=0$. Тогда $\#q_1|^{p+1}\Lambda|^{q+1}\#\vdash^*\#q_f|^{p+q+1}\#$. Пусть $Q=\{q_1,q_2,\ldots,q_m\}$, $\Delta=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$. Построим по машине $M_+$ полусистему Туэ $T_+$, в которой закодируем каждый символ $b_i$ словом $ba^ib$, каждое состояние $q_j$ — словом $ba^{n+j}b$, символ \# — словом $ba^{m+n+1}b$, а символ \$ — словом $ba^{m+n+2}b$. При этом можно считать, что $b_1=|$, $b_2=\Lambda$, $q_f=q_2$. Тогда для любых трёх натуральных чисел $p$, $q$, $r$ имеет место $p+q=r$ тогда и только тогда, когда

$$ba^{m+n+1}bba^{n+1}b(bab)^{p+1}baab(bab)^{q+1}ba^{m+n+1}b\Rightarrow^* ba^{m+n+1}bba^{n+2}b(bab)^{r+1}ba^{m+n+1}b.$$

Так как символ | кодируется словом $bab$, то натуральное число $k$ записывается в виде слова $(bab)^{k+1}$, в частности, число 0 представляется словом $bab$. Отношение $\mathrm{Num}(x)$ определяет, является ли слово $x$ кодом некоторого натурального числа:

$$\mathrm{Num}(x) \equiv_{T_1} \neg\mathrm{Subw}(aa,x) \wedge \neg\mathrm{Subw}(bbb,x) \wedge \mathrm{Pref}(b,x) \wedge \mathrm{Suf}(b,x) \wedge$$
$$\wedge\neg\mathrm{Pref}(bb,x) \wedge \neg\mathrm{Suf}(bb,x) \wedge \neg\mathrm{Subw}(aba,x) \wedge \mathrm{Subw}(a,x).$$

Теперь мы можем определить отношение $\mathrm{Add}(x,y,z)$, которое означает, что слово $z$ представляет сумму чисел, представляемых словами $x$ и $y$:

$$\mathrm{Add}(x,y,z) \equiv_{T_1} \mathrm{Num}(x) \wedge \mathrm{Num}(y) \wedge \mathrm{Num}(z) \wedge (\exists u)(\mathrm{Pref}(ba^{m+n+1}bba^{n+1}bxbaab,u) \wedge$$
$$\wedge \mathrm{Suf}(baabyba^{m+n+1}b,u) \wedge \mathrm{Subw}_1(baab,u) \wedge \mathrm{Der}(u,ba^{m+n+1}bba^{n+2}bzba^{m+n+1}b)).$$

Здесь нужно заменить в подформуле Der каждый символ алфавита $Q \cup \Delta \cup \{\#,\$\}$ на его код.

Аналогичным образом определяется и отношение $\mathrm{Mult}(x,y,z)$, означающее, что слово $z$ представляет произведение чисел, представляемых словами $x$ и $y$. Отличие состоит только в том, что формула Der должна быть построена по машине Тьюринга, выполняющей умножение.

Пусть $\varphi$ — произвольная формула арифметики. Можно считать, что все её атомные подформулы имеют вид $x=y$, $x+y=z$ или $x \times y = z$. Для формулы $\varphi$ определяется её перевод $\mathrm{T}(\varphi)$:

- $\mathrm{T}(x=y)$ есть $\mathrm{Num}(x) \wedge \mathrm{Num}(y) \wedge x=y$;
- $\mathrm{T}(x+y=z)$ есть $\mathrm{Add}(x,y,z)$;
- $\mathrm{T}(x \times y=z)$ есть $\mathrm{Mult}(x,y,z)$;
- $\mathrm{T}(\psi \circ \theta)$ есть $\mathrm{T}(\psi) \circ \mathrm{T}(\theta)$ для $\circ \in \{\wedge,\vee,\rightarrow\}$;
- $\mathrm{T}(\neg\psi)$ есть $\neg\mathrm{T}(\psi)$;
- $\mathrm{T}((\exists x)\psi)$ есть $(\exists x)(\mathrm{Num}(x) \wedge \mathrm{T}(\psi))$;
- $\mathrm{T}((\forall x)\psi)$ есть $(\forall x)(\mathrm{Num}(x) \rightarrow \mathrm{T}(\psi))$.

Формула $\varphi$ истинна в арифметике тогда и только тогда, когда $\mathrm{T}(\varphi) \in T_1$.

Для доказательства обратного утверждения введём некоторую «естественную» нумерацию множества всех слов в алфавите $\Sigma$. Пусть $w_k$ — слово с номером $k$. Тогда отношения $\mathrm{Pref}(w_x,w_y)$ и $\mathrm{Suf}(w_x,w_y)$ вычислимы, а значит, они представимы в арифметике (см. [1]). Поэтому по формуле $\varphi$ сигнатуры $\Omega_1$ можно построить арифметическую формулу $\psi$ такую, что $\psi$ истинна в арифметике тогда и только тогда, когда $\varphi \in T_1$. □

**Теорема 2.** *Теория $T_1$ эквивалентна элементарной арифметике, даже если сигнатура не содержит символов констант.*

**Доказательство.** В теории $T_1$ определимо пустое слово $\varepsilon$:

$$x = \varepsilon \equiv_{T_1} \neg(\exists y)(y \neq x \wedge \mathrm{Pref}(y,x)).$$

Также определимо отношение $\mathrm{Symb}(x)$, означающее, что $x$ является символом:

$$\mathrm{Symb}(x) \equiv_{T_1} x \neq \varepsilon \wedge \neg(\exists y)(\mathrm{Pref}(y,x) \wedge y \neq \varepsilon \wedge y \neq x).$$

Пусть $\varphi$ — формула сигнатуры $\Omega_1$, в которой используются два символа констант $a$ и $b$. Заменим их на переменные (обозначим их также $a$ и $b$) и построим следующую формулу $\psi$:

$$(\exists a)(\exists b)(a \neq b \wedge \mathrm{Symb}(a) \wedge \mathrm{Symb}(b)) \rightarrow (\exists a)(\exists b)(a \neq b \wedge \mathrm{Symb}(a) \wedge \mathrm{Symb}(b) \wedge \varphi).$$

Тогда $\varphi \in T_1$ тогда и только тогда, когда $\psi \in T_1$. □

Заметим, что если сигнатура содержит только один из предикатных символов Pref или Suf, то такая структура является автоматной, а значит её теория разрешима (см. [2]).

### 3. Разрешимость теории слов с операциями возведения в степень

В этом разделе мы изучаем теорию слов с операциями возведения в степень $x^i = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{i\ \text{раз}}$. Также мы обогатим сигнатуру символом константы $\varepsilon$, обозначающим пустое слово, и предикатными символами $R_i$, $i = 2,3,\ldots$, обозначающими, что $x$ является $i$-й степенью некоторого слова. Обозначим через $T_2$ теорию алгебраической системы с основным множеством

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_r\}$ и сигнатурой $\Omega_2 = (R_i^{(1)}; x^{i(1)}, \varepsilon^{(0)})$, $i = 2, 3, \ldots$. Заметим, что символы $\varepsilon$ и $R_i$ определимы в исходной сигнатуре:

$$x = \varepsilon \equiv_{T_2} x^2 = x, \quad R_i(x) \equiv_{T_2} (\exists y) x = y^i.$$

**Лемма 2.** *В теории $T_2$ имеет место следующая эквивалентность (через* lcm *обозначено наименьшее общее кратное):*

$$\bigwedge_{i=1}^{m} R_{b_i}(x) \equiv_{T_2} R_{\mathrm{lcm}(b_1, \ldots, b_m)}(x).$$

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай $m = 2$. Если формула $R_{\mathrm{lcm}(b_1, b_2)}(x)$ истинна, то $x = y^{\mathrm{lcm}(b_1, b_2)}$ для некоторого слова $y$. Поэтому $x = (y^{\mathrm{lcm}(b_1, b_2)/b_1})^{b_1} = (y^{\mathrm{lcm}(b_1, b_2)/b_2})^{b_2}$, а значит, формулы $R_{b_1}(x)$ и $R_{b_2}(x)$ истинны. Наоборот, пусть формулы $R_{b_1}(x)$ и $R_{b_2}(x)$ истинны, то есть $x = y^{b_1} = z^{b_2}$ для некоторых слов $y$ и $z$. Из теоремы Линдона — Шютценберже (см. [10]) следует, что существует слово $v$ такое, что $y = v^i$, $z = v^j$ для некоторых $i$ и $j$, так что $x = v^{ib_1} = v^{jb_2}$. Отсюда следует, что $ib_1$ делится и на $b_1$, и на $b_2$, поэтому $ib_1$ делится и на $\mathrm{lcm}(b_1, b_2)$, следовательно, формула $R_{\mathrm{lcm}(b_1, b_2)}(x)$ истинна. Для произвольного $m$ эквивалентность доказывается индукцией по $m$ с использованием равенства $\mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(a, b), c) = \mathrm{lcm}(a, b, c)$. □

**Теорема 3.** *Теория $T_2$ допускает эффективную элиминацию кванторов.*

**Доказательство.** Достаточно показать, как построить бескванторную формулу по формуле вида $(\exists x)\theta$, где $\theta$ — конъюнкция атомных формул и их отрицаний (см. [1]). Пусть

$$\varphi = (\exists x)\left( \bigwedge_{i=1}^{k} x^{p_i} = s_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} x^{q_i} \neq t_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} R_{b_i}(x^{p_i'}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg R_{c_i}(x^{q_i'}) \right),$$

где термы $s_i$ и $t_j$ не содержат переменной $x$. Можно считать, что формула не содержит подформул вида $x^p = x^q$, так как они эквивалентны либо $\top$ при $p = q$, либо $x = \varepsilon$ при $p \neq q$. Нетрудно видеть, что для любого $k \geq 1$

$$x = y \equiv_{T_2} x^k = y^k, \quad R_b(x) \equiv_{T_2} R_{kb}(x^k).$$

Обозначим через $N$ наименьшее общее кратное всех чисел $p_i$, $q_i$, $p_i'$, $q_i'$. Тогда

$$x^{p_i} = s_i \equiv_{T_2} x^N = s_i^{N/p_i}, \quad x^{q_i} \neq t_i \equiv_{T_2} x^N \neq t_i^{N/q_i},$$

$$R_{b_i}(x^{p_i'}) \equiv_{T_2} R_{b_i N/p_i'}(x^N), \quad \neg R_{c_i}(x^{q_i'}) \equiv_{T_2} R_{c_i N/q_i'}(x^N),$$

поэтому

$$\varphi \equiv_{T_2} (\exists x)\left( \bigwedge_{i=1}^{k} x^N = s_i' \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} x^N \neq t_i' \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} R_{b_i'}(x^N) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg R_{c_i'}(x^N) \right)$$

для некоторых $s_i', t_i', b_i', c_i'$, причём показатель при $x$ один и тот же для всех вхождений $x$ в $\varphi$.

Предположим сначала, что формула $\varphi$ содержит равенство. Тогда

$$\varphi \equiv_{T_2} (\exists x)(x^N = t \wedge \varphi'(x^N)) \equiv_{T_2} \varphi'(t) \wedge R_N(t).$$

Остаётся показать, как устранить квантор в формуле без равенств. Пусть

$$\varphi \equiv_{T_2} (\exists x)\left( \bigwedge_{i=1}^{l} x^N \neq t_i' \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} R_{b_i'}(x^N) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg R_{c_i'}(x^N) \right).$$

Обозначим через $B$ наименьшее общее кратное чисел $b_1', \ldots, b_m'$. Тогда по лемме 2

$$(\exists x)\left( \bigwedge_{i=1}^{l} x^N \neq t_{i'} \wedge R_B(x^N) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg R_{c_{i'}}(x^N) \right).$$

Если хотя бы одно из чисел $B$, $N$ делится на некоторое $c_i'$, то $\varphi$ ложна, то есть $\varphi \equiv_{T_2} \perp$. Пусть ни $B$, ни $N$ не делятся ни на одно $c_i'$.

Мы попытаемся найти число $M > 0$ такое, что $MN$ делится на $B$, но не делится ни на одно из $c_i'$. Числа $MN$ и $(M + Bc_1' \ldots c_n')N$ дают одинаковые остатки при делении на $B$, $c_1', \ldots, c_n'$, поэтому $M$ существует тогда и только тогда, когда оно существует на отрезке $[1; Bc'_1 \ldots c'_n]$, следовательно, его можно найти перебором конечного числа вариантов.

Предположим сначала, что $M$ существует. Выберем простое число $p$ такое, что $p > c'_i$ для всех $i$, $pMN > |t_i|$ для всех $i$. Пусть $x = a^{pM}$, тогда $x^N = a^{pMN}$ (здесь $a$ — произвольный символ). Значит, формула $R_B(x^N)$ истинна, так как $pMN$ делится на $B$, а все формулы $R_{c'_i}(x^N)$ ложны, так как $pMN$ не делится на $c'_i$. Формулы $x^N \neq t'_i$ также истинны, потому что $|x^N| > |t'_i|$. Следовательно, в этом случае $\varphi$ истинна, то есть $\varphi \equiv_{T_2} \top$.

Предположим теперь, что $M$ не существует. Тогда для любого $M$ либо $MN$ не делится на $B$, либо $MN$ делится на одно из $c'_i$. Предположим, что $x$ существует. Тогда его можно представить в виде $x = y^K$, где слово $y$ уже не имеет вида $z^L$ для $L \geq 2$. Поэтому $x = y^{KN}$, причём $KN$ либо не делится на $B$, либо делится на одно из $c'_i$. Предположим, что $KN$ не делится на $B$ и рассмотрим формулу $R_B(x^N)$. Если она истинна, то $x^N = u^B$ для некоторого слова $u$, то есть $y^{KN} = u^B$. По теореме Линдона — Шютценберже существует слово $v$ такое, что $y = v^p$, $u = v^q$ для некоторых $p$ и $q$. Но поскольку $y$ не имеет вида $z^L$ для $L \geq 2$, то $p = 1$, $y = v$, $u = y^q$ и $y^{KN} = y^{Bq}$. Отсюда следует, что $KN$ делится на $B$. Получилось противоречие, значит, формула $R_B(x^N)$ ложна и $\varphi \equiv_{T_2} \perp$. Если же $KN$ делится на $c'_i$, то формула $R_{c'_i}(x^N)$ истинна, поэтому снова $\varphi \equiv_{T_2} \perp$. Итак, если $M$ не существует, то $\varphi \equiv_{T_2} \perp$. □

**Следствие 1.** *Алгебраические системы сигнатуры* $\Omega_2$ *элементарно эквивалентны для любого алфавита* $\Sigma$.

**Доказательство.** Это следует из того, что элиминация кванторов не зависит от алфавита. □

### Заключение

В работе исследована алгоритмическая сложность двух фрагментов теории слов с операцией конкатенации. Доказано, что теория $T_1$ с двумя отношениями Pref и Suf эквивалентна элементарной арифметике и, следовательно, неразрешима, а теория $T_2$ с операциями $x^i$ допускает эффективную элиминацию кванторов, а значит, разрешима. Дальнейшая работа в этом направлении может включать исследование других «естественных» фрагментов теории слов с операцией конкатенации, а также исследование аналогичных теорий алгебраических систем, в которых основным множеством является не множество слов, а множество языков.


### Благодарности

Работа поддержана грантом РФФИ №20-01-00435.


### Литература


1. *Boolos, G. S.* Computability and Logic / G. S. Boolos, J. P. Burgess, R. C. Jeffrey. – 5th edn. – New York : Cambridge University Press, 2007. – 364 p.
2. *Chiswell, I.* A Course in Formal Languages, Automata and Groups / I. Chiswell. – London : Springer, 2008. – 157 p.
3. *Davis, M. D.* Computability, Complexity, and Languages : Fundamentals of Theoretical Computer Science / M. D. Davis, R. Sigal, E. J. Weyuker. – 2nd edn. – San Diego : Academic Press Professional, Inc., 1994. – 609 p.
4. *Dudakov, S.* On Decidability of Regular Languages Theories / S. Dudakov, B. Karlov // In: van Bevern R., Kucherov G. (eds.) Computer Science – Theory and Applications. – CSR 2019. Lecture Notes in Computer Science, V. 11532. – Cham : Springer, 2019. – P. 119–130.
5. *Dudakov, S.M.* On Undecidability of Concatenation Theory for One-Symbol Languages / S. M. Dudakov // Lobachevskii J. Math. – 2020. – V. 41. – P. 168–175.

6. *Dudakov, S.* On Decidability of Theories of Regular Languages / S. Dudakov, B. Karlov // Theory of Comput. Syst. – 2020. – Special Issue on Computer Science Symposium in Russia (2019).

7. *Grzegorczyk, A.* Undecidability without Arithmetization / A. Grzegorczyk // Studia Logica. – 2005. – V. 79, No 2. – P. 163–230.

8. *Grzegorczyk, A.* Undecidability and Concatenation / A. Grzegorczyk., K. Zdanowski // In: Ehrenfeucht A., Marek V. W., Srebrny M. (eds.) Andrzej Mostowski and Foundational Studies. – Amsterdam : IOS Press, 2008. – P. 72–91.

9. *Kristiansen, L.* Decidable and Undecidable Fragments of First-Order Concatenation Theory / L. Kristiansen, J. Murwanashyaka // In: Manea F., Miller R., Nowotka D. (eds) Sailing Routes in the World of Computation. – CiE 2018. Lecture Notes in Computer Science, V. 10936. – Cham : Springer, 2018. – P. 244–253.

10. *Shallit, J.* A Second Course in Formal Languages and Automata Theory. – New York : Cambridge University Press, 2008. – 240 p.

11. *Švejdar, V.* On Interpretability in the Theory of Concatenation / V. Švejdar // Notre Dame J. Formal Logic. – 2009. – V. 50, No 1. – P. 87–95.

12. *Tarski, A.* Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen / A. Tarski // Studia Philosophica. – 1935. – V. 1. – P. 261–405.

13. *Visser, A.* Growing Commas. A Study of Sequentiality and Concatenation / A. Visser // Notre Dame J. Formal Logic. – 2009. – V. 50, No 1. – P. 61–85.

14. *Zdanowski, K.* Arithmetics in Finite but Potentially Infinite Worlds : PhD thesis / K. Zdanowski. – Warsaw University, 2005. – 127 p.

УДК 510.624

# ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ PFP-ОПЕРАТОРА И PFP-КВАНТОРА

**В. С. Секорин**

*Тверской государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассмотрены две различные семантики частичной фиксированной точки: как оператор и как квантор. Для них показано, что для достаточно больших алгебраических систем выразительная сила логик первого порядка, обогащённых таким оператором и квантором, эквивалентна. Для этого мы выражаем формулу каждой логики при помощи другой.
**Ключевые слова:** частичная фиксированная точка, алгебраическая система, семантика, обобщённый квантор.

## 1. Введение

Различные методы математической логики всё более широко применяются при решении задач проектирования и анализа программного обеспечения. Одним из разделов математической логики, который наиболее тесным образом связан с информатикой, является теория логических языков. Например, логические языки используются в системах управления базами данных. В них они применяются в качестве средства извлечения информации из базы данных. Но стоит отметить, что многие простые, но имеющие большое практическое значение [1] свойства являются невыразимыми в логике первого порядка. Транзитивное замыкание является одним из таких свойств. Заметим, что транзитивное замыкание является формализацией многих практически важных задач, одной из которых является вопрос существования пути между двумя различными пунктами. Следовательно, невозможность выражения транзитивного замыкания является существенным ограничением выразительных возможностей логики первого порядка.

Эта причина обосновывает тот факт, что логика первого порядка и различные её расширения постоянно изучаются. Среди одних из самых распространённых расширений можно выделить оператор фиксированной точки. Существует несколько видов таких операторов: инфляционной фиксированной точки, наименьшей фиксированной точки и частичной фиксированной точки. Самым общим из этих операторов является оператор частичной фиксированной точки (PFP-оператор). В данной работе мы продолжаем исследование выразительных возможностей оператора частичной фиксированной точки, начатое в работах [6] и [9]. Отметим, что предложен этот оператор был Ю. Гуревичем в работе [3]. Книга [5] Л. Либкина содержит подробное изложение свойств PFP-оператора для конечных алгебраических систем.

Необходимо отметить, что операции базы данных могут выполняться не только над элементами самой базы данных, но и над произвольными элементами универсума. Это тоже может увеличить выразительные возможности языка первого порядка, но незначительно [7]. При совместном использовании этих двух возможностей возникает ситуация, при которой применение PFP-оператора происходит для бесконечных алгебраических систем. Но если перенесение определения с конечных систем на бесконечные для операторов инфляционной и наименьшей фиксированной точек происходит без каких-либо затруднений [2], то для PFP-оператора можно рассматривать и предлагать различные неэквивалентные обобщения.

Можно предложить несколько естественных семантик для частичной фиксированной точки. Например, в работах [4, 9] рассмотрено несколько таких семантик. Одна из них заключается в том, что формула считается истинной, когда набор принадлежит предикату на всех шагах, начиная с некоторого. В настоящей работе мы рассматриваем возможность использования частичной фиксированной точки как квантора (PFP-квантор). Возникает вопрос: как эти семантики соотносятся между собой. Для ответа на него мы исследуем возможность их выражения друг через друга. В качестве основного результата доказано утверждение о том, что логики, обогащённые PFP-оператором и PFP-квантором, обладают равными выразительными возможностями.

## 2. Определения

**Определение 1** (Формула логики частичной фиксированной точки, [5]). *Будем называть формулой* PFP*-логики формулу, которая построена по правилам логики первого порядка с использование оператора частичной фиксированной точки* PFP*: если $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ — формула со свободными переменными $\overline{x}$ и $\overline{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ $Q$, то $\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}(\varphi)$ — формула исходной сигнатуры, содержащая свободные переменные $\overline{x}$ и $\overline{y}$. При этом длина $\overline{y}$ совпадает с местностью $Q$.*

**Определение 2** (Значение $\mathrm{PFP}^{\forall}$, [9]). *Пусть $\mathfrak{A}$ — это алгебраическая система, а формула $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ — это формула с новым предикатным символом $Q$, где $\overline{y}$ — набор переменных. Зафиксируем значения переменных $\overline{x}$ как $\overline{d} \in |\mathfrak{A}|$. Построим последовательность множеств $Q_i^{\overline{d}}$ следующим образом. Пусть*

$$Q_0^{\overline{d}} = \varnothing;\ Q_{i+1}^{\overline{d}} = \{\overline{y} \in |\mathfrak{A}| \,\big|\, (\mathfrak{A}, Q_i^{\overline{d}}) \vDash \varphi(\overline{d},\overline{y})\},$$

*для $i \in \omega$.*

*Значением частичной фиксированной точки является следующее множество $Q_{\forall}^{\overline{d}}$. Множеству $Q_{\forall}^{\overline{d}}$ принадлежат только те $\overline{y}$, для которых существует $i$ такой, что $\overline{y} \in Q_j$ для всех $j > i$. Следовательно, для этих $\overline{y}$ формула $\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}^{\forall}(\varphi)(\overline{d},\overline{y})$ будет истинной.*

**Пример 1.** *Рассмотрим следующую систему: носителем является множество целых чисел, а одноместный функциональный символ $s^{(1)}$ означает, число на единицу большее. Тогда следующая формула будет истинна тогда и только тогда, когда $v \le w$ $\mathrm{PFP}_{Q(x)}^{\forall}(\theta)(v,w)$, где*

$$\theta(v,x) \equiv x = v \vee Q(x) \vee (\exists y)\big(Q(y) \wedge x = s(y)\big).$$

*На первом шаге в предикат $Q$ попадёт только число $v$, то есть $Q_1 = \{v\}$. На всех последующих шагах будет выполнено:*

$$Q_{i+1} = \{x \,\big|\, Q_i(x) \text{ или } (\exists y)\big(Q_i(y) \wedge x = s(y)\big)\},$$

*таким образом на $i+1$-м шаге в предикат попадут те и только те числа, которые были на предыдущем шаге или которые на единицу больше чисел предыдущего шага. То есть на $i+1$ шаге будет выполнено: $Q_{i+1} = \{v,\dots,v+i\}$.*

**Определение 3** (Формула с PFP-квантором). *Формула определяется по индукции, аналогично формуле логики первого порядка, с дополнительным правилом для индукционного шага: если $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ — формула со свободными переменными $\overline{x}$, $\overline{y}$, а $\psi(\overline{x},\overline{y})$ — формула со свободными переменными $\overline{x}$ и $\overline{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ $Q$, то $\big(\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}(\psi)\big)\varphi$ — тоже формула исходной сигнатуры, содержащая свободные переменные $\overline{x}$, а переменные $\overline{y}$ становятся связными. При этом длина $\overline{y}$ совпадает с местностью $Q$.*

**Определение 4** (Семантика PFP-квантора). *Пусть $\mathfrak{A}$ — это алгебраическая система, $\psi(\overline{x},\overline{y})$ — формула с новым предикатным символом $Q$, где $\overline{y}$ — набор из $m$ элементов. Зафиксируем значения переменных $\overline{x}$ как $\overline{d} \in |\mathfrak{A}|$. Построим последовательность множеств следующим образом:*

$$Q_0^{\overline{d}} = \varnothing;\ Q_{i+1}^{\overline{d}} = \{\overline{y} \in |\mathfrak{A}| \,\big|\, (\mathfrak{A}, Q_i^{\overline{d}}) \vDash \psi(\overline{d},\overline{y})\},$$

*для $i \in \omega$.*

*Формула* $\left((\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}(\psi))\varphi\right)(\overline{d},\overline{y})$ *будет истинной тогда и только тогда, когда существует* $i$ *такой, что* $Q_i^{\overline{d}} = \{\overline{y} \in |\mathfrak{A}| \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{y})\}$.

**Пример 2.** *Рассмотрим следующую систему: носителем является множество вершин графа, а двухместный предикат* $E^{(2)}$ *означает, что между двумя вершинами есть ребро. Тогда следующая формула будет истинной тогда и только тогда, когда вершина* $w$ *является единственной вершиной отстоящей от* $v$ *на каком-нибудь расстоянии:* $\left(\mathrm{PFP}_{Q(x)}(\theta)\right)(x = w)$, *где*

$$\theta(v,x) \equiv [\neg(\exists y)Q(y) \to x = v] \wedge [(\exists y)Q(y) \to (\exists y)\left(Q(y) \wedge E(y,x)\right)].$$

*На первом шаге в предикат* $Q$ *попадёт только вершина* $v$, *то есть* $Q_1 = \{v\}$. *На всех последующих шагах будет выполнено:*

$$Q_{i+1} = \{x \mid (\exists y)\left(Q_i(y) \wedge E(y,x)\right)\},$$

*то есть на* $i+1$*-шаге в предикат попадут те и только те вершины, в которые есть ребра из вершин шага* $i$. *Таким образом на* $i+1$ *шаге предикату будут принадлежать только те вершины, которые отстоят от* $v$ *на* $i$ *шагов. Если в некоторый момент времени не найдётся вершин, отстоящих от* $v$ *на некоторое расстояние, то процесс начнётся заново.*

### 3. Определение PFP-квантора с помощью $\mathrm{PFP}^{\forall}$

Основной результат, который мы докажем в этой части, заключается в том, что для любого PFP-квантора можно построить эквивалентную формулу с $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператором.

**Теорема 1.** *Для любых формул* $\varphi$ *и* $\psi$ *можно построить некоторую формулу* $\theta$ *такую, что для любых* $\overline{y}$ *формула*

$$\left(\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}(\psi)\right)\varphi \qquad (1)$$

*будет эквивалентна формуле*

$$(\forall\overline{y})\left((\exists a,b)\ \mathrm{PFP}^{\forall}_{P(u,\overline{y})}(\theta)(a,a,b,\overline{y}) \leftrightarrow \varphi(\overline{y})\right). \qquad (2)$$

*Формула* $\theta(u,a,b,\overline{y})$ *будет определена ниже.*

Введём новый предикатный символ $P$, местность которого на один больше местности предиката $Q$. Пусть $u$, $a$, $b$ — новые переменные, а формула $\psi^P$ получена из формулы $\psi$ заменой каждой подформулы вида $Q(\overline{t})$ на $P(a,\overline{t})$:

$$\psi^P(a,\overline{y}) \equiv (\psi)^{Q(\overline{t})}_{P(a,\overline{t})}(\overline{y}).$$

Предикат $P$ будет использован для построения предиката $Q$, при этом первый аргумент будет поочерёдно принимать одно из значений $a$, $b$.

Определим вспомогательную формулу $\eta$ следующим образом:

$$\eta \equiv (\forall\overline{y})\left(\varphi(\overline{y}) \leftrightarrow (P(a,\overline{y}) \vee P(b,\overline{y}))\right).$$

Данная формула означает, что при построении $P$ мы дошли до множества, определяемого формулой $\varphi$.

Тогда формула $\theta$ строится следующим образом:

$$\theta(u,a,b,\overline{y}) \equiv a \neq b \wedge$$

$$[\neg\eta \wedge \neg(\exists\overline{y})P(a,\overline{y}) \to u = a \wedge \psi^P(b,\overline{y})] \wedge \qquad (3)$$

$$[\neg\eta \wedge (\exists\overline{y})P(a,\overline{y}) \to u = b \wedge \psi^P(a,\overline{y})] \wedge \qquad (4)$$

$$[\eta \to u = a \wedge (P(a,\overline{y}) \vee P(b,\overline{y}))]. \qquad (5)$$

**Лемма 1.** *Пусть* $i_0$ *— наименьший* $P$*-шаг, на котором выполнена формула* $\eta$, *если такой существует. При построении* $\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}(\psi)$ *и* $\mathrm{PFP}^{\forall}_{P(u,\overline{y})}(\theta)$ *для всех* $\overline{y}$ *и любого* $i \le i_0$ *(если такого* $i_0$ *нет, то для любого* $i$*) выполняются следующие утверждения:*

*1)* $Q_i(\overline{y}) \equiv P_i(a,\overline{y})$ *и* $\neg P_i(b,\overline{y})$ *для нечётного* $i$,

*2)* $Q_i(\overline{y}) \equiv P_i(b,\overline{y})$ *и* $\neg P_i(a,\overline{y})$ *для чётного* $i$.

**Доказательство.** Докажем при помощи индукции по $i$.

Базис: $i = 0$. Так как шаг нулевой, то $P_0 = \varnothing$ и $Q_0 = \varnothing$. Следовательно, для всех $\overline{y}$ выполняется $\overline{y} \in Q_i$ тогда и только тогда, когда $(b,\overline{y}) \in P_i$ и не выполнена формула $P_i(a,\overline{y})$.

Индукционный шаг. Допустим, что для $i$ утверждение доказано. Докажем его для шага $i+1 \le i_0$. Так как $i_0$ — наименьший шаг, на котором выполнена формула $\eta$, то на всех предыдущих, в том числе $i$ (предыдущем шаге), была выполнена формула $\neg\eta$. Необходимо рассмотреть два случая: когда $i+1$ нечётное, и когда оно чётное.

Пусть $i+1$ нечётное. Тогда по индукционному предположению и импликации (3) для всех $\overline{y}$ будет выполнено $(b,\overline{y}) \notin P_{i+1}$ и

$$(a,\overline{y}) \in P_{i+1} \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \psi^P(b,\overline{y}) \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \psi(\overline{y}) \Leftrightarrow \overline{y} \in Q_{i+1},$$

где тождество $(a)$ выполнено по определению PFP-квантора, а тождество $(b)$ по определению $\varphi^P$ и индукционному предположению.

Пусть $i+1$ чётное. Тогда по индукционному предположению и импликации (4) для всех $\overline{y}$ будет выполнено $(a,\overline{y}) \notin P_{i+1}$ для всех $\overline{y}$ и

$$(b,\overline{y}) \in P_{i+1} \Leftrightarrow \psi^P(a,\overline{y}) \Leftrightarrow \psi(\overline{y}) \Leftrightarrow \overline{y} \in Q_{i+1},$$

где первые два тождества выполнены аналогично предыдущему случаю. □

**Доказательство теоремы.** Необходимо рассмотреть два случая: когда выполнена и когда не выполнена формула $\left(\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}(\psi)\right)\varphi$.

Пусть формула $\left(\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}(\psi)\right)\varphi$ выполнена. Тогда по определению PFP-квантора существует наименьший $i_0$ такой, что

$$Q_{i_0} \equiv \{\overline{x} \in |\mathfrak{A}| \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{x})\},$$

то есть формула $(\forall\overline{y})(\varphi(\overline{y}) \leftrightarrow Q(\overline{y}))$ выполнена, из этого по лемме 1 следует, что на шаге $i_0$ будет выполнена формула $\eta$. Следовательно, по импликации (5) для всех $\overline{y}$ будет выполнено $(a,\overline{y}) \in P_{i_0+1}$ тогда и только тогда, когда $(a,\overline{y}) \in P_{i_0}$, если номер шага нечётный, или тогда и только тогда, когда $(b,\overline{y}) \in P_{i_0}$, если номер шага чётный. Тогда $P_j \equiv P_{i_0+1}$ для всех $j \ge i_0+1$. Из этого следует, что по определению $\mathrm{PFP}^{\forall}$ будет выполнено

$$\mathrm{PFP}^{\forall}_{P(u,\overline{y})}(\theta) \equiv \{(a,\overline{x}) \in |\mathfrak{A}| \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{x})\}.$$

Следовательно, формула (2 выполнена.

Пусть формула $\left(\mathrm{PFP}_{Q(\overline{y})}(\psi)\right)\varphi$ не выполнена. Тогда по определению PFP-квантора не существует $i_0$ такой, что выполнено

$$Q_{i_0} \equiv \{\overline{x} \in |\mathfrak{A}| \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{x})\}.$$

Следовательно, не будет выполнена формула $\eta$ ни на одном $P$-шаге. Тогда из определения $\mathrm{PFP}^{\forall}$ и построения формулы $\theta$ следует, что $\mathrm{PFP}^{\forall}_{P(u,\overline{y})}(\theta) = \varnothing$. Следовательно, формула (2) не выполнена.

## 4. Определение $\mathrm{PFP}^{\forall}$ с помощью PFP-квантора

В этой части мы докажем утверждение обратное утверждению прошлой части.

**Теорема 2.** *Для любой формулы* $\varphi$ *можно построить некоторую формулу* $\theta_1$ *такую, что для любых* $\overline{y}$ *формула*

$$\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\overline{y})}(\varphi)(\overline{y}) \tag{6}$$

*будет эквивалентна формуле*

$$(\exists a,b,c)(\mathrm{PFP}_{P(u,\overline{z})}(\theta_1))(u=c). \tag{7}$$

*Формула* $\theta_1(u,a,b,c,\overline{y})$ *будет определена ниже.*

Введём два новых предикатных символа $P$ и $R$, местность этих предикатов на один больше местности предиката $Q$. Пусть $u$, $a$, $b$, $c$ и $e$ — это новые переменные, а формулы $\varphi^P$ и $\varphi^R$ получены из формулы $\varphi$ заменой каждой подформулы вида $Q(\overline{t})$ на $P(a,\overline{t})$ и $R(a,\overline{t})$ соответственно:

$$\varphi^P(a,\overline{y}) \equiv (\varphi)^{Q(\overline{t})}_{P(a,\overline{t})}(\overline{y}),$$

$$\varphi^R(a,\overline{y}) \equiv (\varphi)^{Q(\overline{t})}_{R(a,\overline{t})}(\overline{y}).$$

Первый аргумент предиката $P$ будет использован следующим образом:

• $P_j(a,\overline{z})$ будет эквивалентно некоторому $Q_i(\overline{z})$,

• выполнение $P_i(b,\overline{z})$ обозначает, что при построении $P$ дошли до такого шага, что на предыдущем $P$-шаге было выполнено $P_{i-1}(a,\overline{y})$,

• выполнение $P_i(c,\overline{z})$ означает, что при построении $P$ после шага, описанного в предыдущем пункте, дошли до шага, на котором не выполнено $(\mathrm{PFP}_{R(u,\overline{z})}(\theta_2))(u=c)$.

Первый аргумент предиката $R$ будет использован следующим образом:

• $R_i(a,\overline{z})$ будет эквивалентно $Q_i(\overline{z})$,

• выполнение $R_i(b,\overline{z})$ обозначает, что при построении $R$ дошли до $R$-шага, на котором значение $R$ совпадает со значением $P$,

• при помощи $R_i(c,\overline{z})$ будем обозначать, что при построении $R$ после шага, описанного в предыдущем пункте, дошли до шага $i-1$, на котором не выполнено $R_{i-1}(a,\overline{y})$.

Тогда формулы $\theta_1$ и $\theta_2$ строятся следующим образом:

$$\theta_1 \equiv a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c \wedge$$

$$[\neg(\exists\overline{z})P(b,\overline{z}) \wedge \neg P(a,\overline{y}) \to u=a \wedge \varphi^P(a,\overline{z})] \wedge \tag{8}$$

$$[\neg(\exists\overline{z})P(b,\overline{z}) \wedge P(a,\overline{y}) \to u=a \wedge P(a,\overline{z}) \vee u=b] \wedge \tag{9}$$

$$[(\exists\overline{z})P(b,\overline{z}) \wedge (\mathrm{PFP}_{R(u,\overline{z})}(\theta_2))(u=c) \to u=a \wedge \varphi^P(a,\overline{z})] \wedge \tag{10}$$

$$[(\exists\overline{z})P(b,\overline{z}) \wedge \neg(\mathrm{PFP}_{R(u,\overline{z})}(\theta_2))(u=c) \to u=c], \tag{11}$$

$$\theta_2 \equiv a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c \wedge$$

$$[\neg(\exists\overline{z})R(b,\overline{z}) \wedge \neg(\forall\overline{z})(P(a,\overline{z}) \leftrightarrow R(a,\overline{z})) \to u=a \wedge \varphi^R(a,\overline{z})] \wedge \tag{12}$$

$$[\neg(\exists\overline{z})R(b,\overline{z}) \wedge (\forall\overline{z})(P(a,\overline{z}) \leftrightarrow R(a,\overline{z})) \to u=a \wedge \varphi^R(a,\overline{z}) \vee u=b] \wedge \tag{13}$$

$$[(\exists\overline{z})R(b,\overline{z}) \wedge R(a,\overline{y}) \to u=a \wedge \varphi^R(a,\overline{z}) \vee u=b] \wedge \tag{14}$$

$$[(\exists\overline{z})R(b,\overline{z}) \wedge \neg R(a,\overline{y}) \to u=c]. \tag{15}$$

Формула $(\mathrm{PFP}_{R(u,\overline{z})}(\theta_2))(u=c)$ означает, что при построении по $R$ дошли до $R$-шага, равного текущему значению $P$, и на одном из следующих $R$-шагов не будет выполнена формула $R(a,\overline{y})$.

**Лемма 2.** *Предположим, что* $i_0$ *— наименьший номер* $Q$*-шага, после которого* $\overline{y}$ *никогда не пропадает из* $Q$*. При построении оператора* $(\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\overline{y})}\varphi)(\overline{y})$ *и* PFP*-квантора формулы (7) для каждого* $i \leq i_0$ *существует* $j_i$ *такой, что выполнено* $P_{j_i}(a,\overline{z}) \equiv Q_i(\overline{z})$ *для всех* $\overline{z}$.

**Доказательство.** Докажем при помощи индукции по $i \leq i_0$.

Базис: $i=0$. Так как шаг нулевой, то $Q_0=\varnothing$ и существует $j_i=0$: $P_{j_0}=\varnothing$. Следовательно, для всех $\overline{z}$ выполняется $\overline{z}\in Q_i$ тогда и только тогда, когда $(a,\overline{z})\in P_{j_i}$.

Индукционный шаг. Допустим, что для $i$ утверждение доказано, то есть существует соответствующий ему $j_i$. Докажем его для $Q$-шага $i+1 \leq i_0$. На $P$-шаге $j_i$ могут быть выполнены условия импликаций (8), (9) и (10). Условие импликации (11) не может быть выполнено, так как это противоречит условию $i+1 \le i_0$. Если выполнено одно из условий (8), (10), тогда существует искомый $j_{i+1}$ равный $j_i+1$, так как:

$$(a,\overline{z}) \in P_{j_{i+1}} \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \varphi^P(a,\overline{z}) \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \varphi(\overline{z}) \Leftrightarrow \overline{z} \in Q_{i+1},$$

где тождество $(a)$ выполнено по определению PFP-квантора, а тождество $(b)$ по определению $\varphi^P$ и индукционному предположению. Если выполнено условие (9), то будет выполнено $(b,\overline{z}) \in P_{j_i+1}$ для всех $\overline{z}$ и $(a,\overline{z}) \in P_{j_i+1}$ тогда и только тогда, когда $(a,\overline{z}) \in P_{j_i}$. Такой $P$-шаг не может быть выполнен более одного раза, так как на нём в $P$ будут добавлены наборы вида $(b,\overline{z})$, следовательно следующим $P$-шагом будет (10) или (11). Первый случай был разобран выше и тогда получаем, что $j_{i+1} = j_i + 2$. Во втором случае получаем противоречие с тем, что $i+1 \le i_0$. □

**Лемма 3.** *Предположим, что $i_0$ — наименьший номер $Q$-шага, после которого $\overline{y}$ никогда не пропадает из $Q$. При построении оператора* $(\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\overline{y})}\varphi)(\overline{y})$ *и квантора* $\mathrm{PFP}_{R(u,\overline{z})}(\theta_2)$ *выполнено $R_i(a,\overline{z}) \equiv Q_i(\overline{z})$ для всех $\overline{z}$ и любого $i \le i_0$.*

**Доказательство.** Докажем при помощи индукции по $i$.

Базис: $i=0$. Так как шаг нулевой, то $R_0 = \varnothing$ и $Q_0 = \varnothing$. Следовательно, для всех $\overline{z}$ выполняется $\overline{z} \in Q_i$ тогда и только тогда, когда $(a,\overline{z}) \in R_i$.

Индукционный шаг. Допустим, что для $i$ утверждение доказано. Докажем его для шага $i+1 \le i_0$:

$$(a,\overline{z}) \in R_{i+1} \Leftrightarrow \varphi^R(a,\overline{z}) \Leftrightarrow \varphi(\overline{z}) \Leftrightarrow \overline{z} \in Q_{i+1},$$

где первые два тождества выполнены аналогично лемме 2. □

**Доказательство теоремы.** Необходимо рассмотреть два случая: когда выполнена и когда не выполнена формула $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\overline{y})}(\varphi)(\overline{y})$.

Пусть формула $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\overline{y})}(\varphi)(\overline{y})$ выполнена. Тогда, по определению оператора $\mathrm{PFP}^{\forall}$ существует $i_0$ такой, что для всех $i \ge i_0$ выполнено $\overline{y} \in Q_i$. Согласно лемме 2 существует $j$ такой, что $(a,\overline{z}) \in P_j$ тогда и только тогда, когда $\overline{z} \in Q_{i_0}$.

По леммам 2 и 3 наборы $(b,\overline{z})$ будут добавлены в $R$ на $R$-шаге $i_0$, то есть $(a,\overline{y}) \in R_{i_0}$ тогда и только тогда, когда $\overline{z} \in Q_{i_0}$ это в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда $(a,\overline{z}) \in P_j$. На всех $R$-шагах, начиная с $i_0$, будет выполнено $R(a,\overline{y})$ по лемме 3. Следовательно, условие импликации (15) не будет выполнено, то есть наборы вида $(c,\overline{z})$ не будут добавлены в $R$ и формула $(\mathrm{PFP}_{R(u,\overline{z})}(\theta_2))(u=c)$ не будет выполнена. Следовательно, будет выполнено условие импликации (11). Таким образом формула (7) выполнена.

Пусть формула $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\overline{y})}(\varphi)(\overline{y})$ не выполнена. Следовательно, по определению $\mathrm{PFP}^{\forall}$ не существует $i_0$ такого, что для всех $i \ge i_0$ выполнено $\overline{y} \in Q_i$. Тогда необходимо рассмотреть два случая: когда ни на одном шаге не встретится $\overline{y}$, и когда $\overline{y}$ встретится. В первом случае в $P$ никогда не попадут наборы вида $(b,\overline{z})$. Следовательно, не будет выполнено условие импликации (11), то есть не будет выполнена формула (7). Во втором случае всегда будет выполнена формула $(\mathrm{PFP}_{R(u,\overline{z})}(\theta_2))(u=c)$. Следовательно, посылка импликации (11) никогда не будет выполнена, то есть формула (7) не будет выполнена. □

**Теорема 3.** Логики, обогащённые $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператором и PFP-квантором, обладают равными выразительными возможностями.

Доказательство. Прямо следует из теорем 1 и 2. □

### Заключение

Мы продемонстрировали, что обогащения логики первого порядка PFP-оператором и PFP-квантора дают равную выразительную силу. Выделим некоторое вопросы, которые могут представлять интерес для изучения в будущих работах по данной тематике:

1) Поиск других естественных семантик PFP.

2) При выражении $PFP^{\forall}$-оператора и PFP-квантора друг через друга увеличивается их местность. Известно, что унарные и бинарные операторы инфляционной фиксированной точки обладают разными свойствами [8]. Поэтому возникает вопрос о возможности выражения $PFP^{\forall}$-оператора и PFP-квантора друг через друга без увеличения местности.

3) При выражении $PFP^{\forall}$-оператора через PFP-квантор в теореме 2 используются вложенные PFP-кванторы. Представляет интерес исследовать возможность избавления от вложенных PFP-кванторов.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00435.

**Литература**

1. *Aho A. V., Ullman J. D.* Universality of data retrieval languages / A. Aho // Proc. of 6th Symp. on Principles of Programming Languages. – 1979. – P. 110–120.

2. *Dudakov S. M.* On Inflationary Fix-Point Operators Safety / S. M. Dudakov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – V. 36, No. 4. – P. 328–331.

3. *Gurevich Y., Shelah S.* Fixed-point extensions of first-order logic / Y. Gurevich // Annals of Pure and Applied Logic. – 1986. – P. 265–280.

4. *Kreutzer S.* Partial Fixed-Point Logic on Infinite Structure / S. Kreutzer // Computer Science Logic. – 2002. – P. 337–351.

5. *Libkin L.* Elements of Finite Model Theory / L. Libkin. – Berlin : Springer, 2004. – 314 p.

6. *Sekorin V. S.* Partial Fixed Point for Finite Models in Second Order Logic / V. S. Sekorin // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – V. 41, No. 9. – P. 1672–1679.

7. *Дудаков С. М., Тайцлин М. А.* Трансляционные результаты для языков запросов в теории баз данных / С. М. Дудаков // Успехи математических наук. – 2006.— No. 61:2(368). – С. 2–65.

8. *Дудаков С. М.* О безопасности одно- и многоместных IFP-операторов / С. М. Дудаков // Моделирование и анализ информационных систем. – 2018. – No. 25:5. – С. 525–533.

9. *Секорин В. С.* Об эквивалентности двух семантик PFP-оператора / В. С. Секорин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2020. – № 3 (в печати).

# РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 004.418:007.52:004.771

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ WI-FI СИГНАЛА В ЗАДАЧАХ ДИСТАНЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТЕХНИКОЙ

**С. С. Воронцов**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В данной статье рассматривается новый подход по управлению робототехникой, преимущества соединения пульта и машины через сети Wi-Fi вместо радиосвязи, идея о едином классе приложений для возможности управления техникой с любых устройств.
**Ключевые слова:** робототехника, дистанционное управление, Wi-Fi, Raspberry Pi, трансляция видео, низкая задержка, универсальность.

В наше время очень многое изменились под влиянием и развитием информационных технологий. Созданы программы и оборудования, помогающие банковским работникам, экономистам, бухгалтерам, проектировщикам, медикам, преподавателям. Этот список можно продолжать до бесконечности и перечислить все профессии, так как цифровизация коснулась практически всех сфер человеческой жизни. Одним из ключевых путей развития информационных технологий является робототехника. Роботы способны выполнять многие операции более эффективно, с меньшими затратами ресурсов, с меньшей долей ошибок. Одним из примеров можно привести роботизированные комплексы под маркой «РОИН» компании «Интехрос».

Даная техника рассчитана на самые различные цели. Роботы компании поставляются в такие организации, как «Роскосмос», «МЧС России», «Армия России». Большинство из представленной продукции может работать дистанционно и в экстремальных условиях. К примеру, существует техника для работы на Северном полюсе, а также в условиях радиации.

Совсем недавно всё дистанционное управление осуществлялось с помощью радиосвязи, но сейчас происходит переход на управление с помощью сетей Wi-Fi. Данный подход позволяет сделать более универсальными устройства управления машиной, а также предоставляет возможность передавать больший объем информации.

Для соединения пульта дистанционного управления могут использоваться узконаправленные антенны Wi-Fi. Передатчики, устройства ввода-вывода, обработчики событий, видеорегистратор с камерами наблюдения будут находится в одной локальной сети, что даст возможность свободной передачи информации между разными устройствами.

Такой подход является революционным в сфере промышленной робототехники. Он позволит управлять техникой со смартфона, планшета или же ноутбука, а не только с помощью специализированных устройств дистанционного управления. В связи с этим появляется новая задача разработки универсального приложения для управления роботами. Подобные приложения должны обеспечивать:

1) низкую задержку при передаче видеопотоков камер наблюдения, установленных на роботе;

2) общий и понятный интерфейс для всех возможных платформ целевых устройств (пультов дистанционного управления);

3) учет особенностей каждой платформы (производительность, элементы управления);

4) возможность управления каждом видом техники «РОИН» с учетом их особенностей.

На данный момент существуют машина и специальный пульт управления, в программном обеспечении которого уже есть реализация первого требования. Данный пульт представляет собой так называемый кейс с экраном, элементами управления в виде кнопок и джойстиков, имеющий различные разъемы, такие как USB 3.0, HDMI, вход для зарядного устройства, Ethernet. Внутри устройства помимо аккумулятора располагаются различные печатные платы, отвечающие за распределение питания, реакцию на взаимодействие с элементами управления и т. д.

Одной из таких плат является Raspberry Pi 4, работающая на платформе Ubuntu Mate. Именно настройка этого устройства и стала одним из первых этапов перехода на универсальные приложения. В данный момент, к сожалению, приложение лишь транслирует видеоканалы и переключает их. При подключении телевизора по HDMI Raspberry может дублировать изображение на его экране, изменяя при этом пропорции в соответствии с разрешением. В этом случае повторного декодирования видеопотоков удалось избежать благодаря использованию шейдеров, что благотворно повлияло на экономию ресурсов платы.

На данном этапе к приложению имелись следующие требования:

- задержка каждого видеопотока не должна превышать 0.3 секунды вне зависимости от режима,
- режим одновременной трансляции четырех потоков (квадрокартинка),
- режим трансляции выбранной камеры,
- разрешение каждой трансляции не ниже 720р.

Самым сложным в реализации стало требование к снижению задержки. После проведения экспериментов из всех возможных в видеорегистраторе был выбран кодек сжатия H.264+, но при использовании стандартных средств воспроизведения Qt5-приложений задержки достигали недопустимых нескольких секунд.

В поисках решения была протестирована пара кодеков, работающих в ОС Linux: GStremer и Ffmpeg. Последний показал наилучший допустимый результат: задержка около 0.3 секунды в режиме транслирования четырех камер и 0.25 при транслировании одинокого потока. Подобная задержка является приемлемой, но в будущем планируется реализовать собственное решение в виде специального кроссплатформенного декодера и снизить задержку еще сильнее приблизив ее к потоку реального времени.

На данный момент это только начало большой работы по созданию принципиально новой модели управления робототехникой подобного вида, тем не менее уже можно отметить ряд преимуществ. К примеру, в прошлой модели передача видеопотоков осуществлялась в виде трансляции картинки с монитора видеорегистратора при помощи дорогого оборудования, радиоприёмников и достаточно сложного программного обеспечения, при этом цена реализации сильно превышает цену решения. Так же существовала проблема персонализации: к самому регистратору было невозможно отправить запросы, получить ответы, переключать режимы камер и прочее. Более того, данную технологию невозможно улучшить – ее результат в задержку 0.3 секунды является минимально возможным при использовании данного оборудования.

Использование Wi-Fi передатчиков позволит обеспечить масштабируемость конечных приложений: приложения могут обновляться, не меняя технической части, а также использоваться на различных устройствах, появляется возможность шифрования каналов. Это лишь некоторые преимущества, которые могут быть достигнуты при использовании данного подхода.

**Литература**

1. Каталог продукции // Компания ИНТЕХРОС. – URL: https://intehros.ru/katal (дата обращения: 03.09.2020).

2. A cross-platform multimedia framework based on Qt and FFmpeg // GitHub. – URL: https://github.com/wang-bin/QtAV (дата обращения: 07.07.2020).

3. *Агамирзоева, З. А.* Влияние информационных технологий на жизнь человека / З. А. Агамирзоева // Международный научно-исследовательский журнал. – URL: https://research-journal.org/physics-mathematics/vliyanie-informacionnyx-texnologij-na-zhizn-cheloveka (дата обращения: 28.10.2020).

4. Разворачивание сетевого моста: ответ от направленных антенн, TP-LINK и Mikrotik // Хабр. – URL: https://habr.com/ru/sandbox/79057 (дата обращения: 12.07.2020).

5. Raspberry Pi // Ubuntu MATE. – URL: https://ubuntu-mate.org/ports/raspberry-pi (дата обращения: 23.10.2020).

УДК 621.865:004.896

# ПРИМЕНЕНИЕ Q-ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ВЫВОДА СТРЕЛЫ МАНИПУЛЯТОРА В ЗАДАННОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

**А. Ю. Яковлев, А. А. Красная, С. Н. Медведев**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья посвящена поиску определенной кинематической схемы, определяющей движение звеньев стрелы промышленного манипулятора. Рассмотрен робототехнический комплекс с одноконтурной гидравлической системой приводов элементов стрелы. Решена задача автоматического выхода стрелы в заданное пользователем состояние с учетом ограничений по одновременному движению звеньев стрелы и минимальной и максимальной высотам вылета стрелы. Для решения задачи применен метод машинного обучения — Q-learning.
**Ключевые слова:** кинематика манипуляторов, машинное обучение, управление манипуляторами, обучение с подкреплением, Q-learning.

## Введение

В современной промышленной робототехнике удаленное и интеллектуальное управление становится все более и более актуальным, так как позволяет повысить эффективность работы и снизить риски, как повреждения окружающей среды, так и здоровья персонала.

Применение методов машинного обучения и искусственного интеллекта для решения задач управления мехатронными устройствами можно найти в исследованиях различных авторов. Например, в работах [4–6] были рассмотрены методы машинного обучения с использованием гауссовских процессов. Таким подходом решены задачи управления обратным маятником, беспилотным вертолетом, одноколесной тележкой, мини-манипулятором. Данная работа посвящена поиску последовательности действий для вывода трех-сегментной стрелы промышленного манипулятора в заданное пользователем положение.

В рамках сотрудничества между ВГУ и холдингом «Интехрос» [9] на факультете ПММ ВГУ была создана лаборатория Мехатроники и Робототехники, основой технического оснащения которой стал робототехнический комплекс РОИН, разработанный и произведенный специально для лаборатории компанией «Интехрос» (рис. 1). Данный комплекс представляет собой промышленный манипулятор с семью степенями свободы. Для приведения в движение звеньев стрелы РОИН применяются гидравлические приводы и моторы. Управление приводами осуществляется с помощью комплекса электронных блоков на основе микроконтроллеров серии STM32. Пространственное положение элементов стрелы отслеживается по данным с энкодеров, датчиков линейного сдвига и инерциальных датчиков.

Особенностью управления звеньями манипулятора РОИН является учет единственного контура его гидравлической системы, что позволяет в единицу времени перемещать только один из сегментов.

## 1. Описание проблемы

Рассмотрим задачу автоматического вывода стрелы РОИНа в заданную пользователем конфигурацию. При выполнении данного режима система управления должна учитывать максимальный подъем и спуск элементов стрелы, чтобы обеспечить безопасность работ. При жестком определении последовательности движений для всех сегментов от текущего поло-

*Рис. 1. Лабораторный комплекс РОИН*

жения до целевого (которое соответствует заданной конфигурации) высока вероятность нарушения стрелой ограничений по высоте в ходе ее выполнения. Для решения этой проблемы был применен хорошо зарекомендовавший себя метод машинного обучения, относящийся к группе методов обучения с подкреплением —Q-learning (Q-обучения) [2, 10]. С его помощью необходимо определить быстрейшую с точки зрения времени перехода последовательность движений, которая обеспечивала бы положение стрелы в заданных границах на протяжении всего процесса.

## 2. Метод решения

Основными понятиями метода Q-learning являются понятия: $S$ — множество состояний системы, $A$ — множество действий и $R$ — величина ценности (веса) действия. Действие переводит систему из текущего состояния в следующее доступное из множества состояний.

Задача обучения с подкреплением в общем виде формулируется таким образом: каждому переходу, осуществляемому системой из одного состояния в другое, присваивается скалярное значение награды, которое система получает при переходе. Цель системы состоит в построении такой политики управления, чтобы сумма наград или функция ценности $V(x_t)$ (1) была максимальной [2]

$$V(x_t) \leftarrow E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k}\right\}, \tag{1}$$

здесь $\gamma^k$ — коэффициент дисконтирования, который лежит в диапазоне между 0 и 1, $r_t \in \mathbb{R}$ — непосредственно награда, присваиваемая системе при переходе от состояния $x_t$ к состоянию $x_{t+1}$, принадлежащих пространству состояний $X$. Коэффициент дисконтирования регулирует эффект отложенного оценивания действий. Таким образом, функция ценности $V(x_t)$ определяется последовательностью действий, выбираемых политикой управления и представляет собой сумму наград, полученную с момента времени $t$, которую необходимо максимизировать.

Особенностью алгоритма Q-learning является то, что вместо функции ценности (1) он работает с Q-функцией, которая принимает в качестве аргумента не только состояние, но и действие, что позволяет определить политику управления путем итеративного построения данной функции. Обновление Q-функции происходит по следующему закону

$$Q(x_t, a_t) \leftarrow r_t + \gamma \cdot V(x_{t+1}), \tag{2}$$

где $a_t$ — конкретное действие системы из множества всех действий $A$, предпринятое в момент времени $t$. Так как цель состоит в максимизации суммарной награды, то $V(x_{t+1})$ необходимо заменить на $\max_{a \in A} Q(x_{t+1}, a)$, тогда получим выражение

$$Q(x_t, a_t) \leftarrow r_t + \gamma \cdot \max_{a \in A} Q(x_{t+1}, a). \tag{3}$$

Полученные Q-значения или весы хранятся в двумерной матрице, строки которой выражаются состояниями, а столбцы — действиями.

## 3. Решение

На первом этапе решения задачи была построена кинематическая модель стрелы РОИН. Для описания геометрии манипулятора используется схема Денавита — Хартенберга [2]. Ниже представлено графическое изображение последовательности звеньев манипулятора РОИН, соединенных между собой сочленениями (рис. 2).

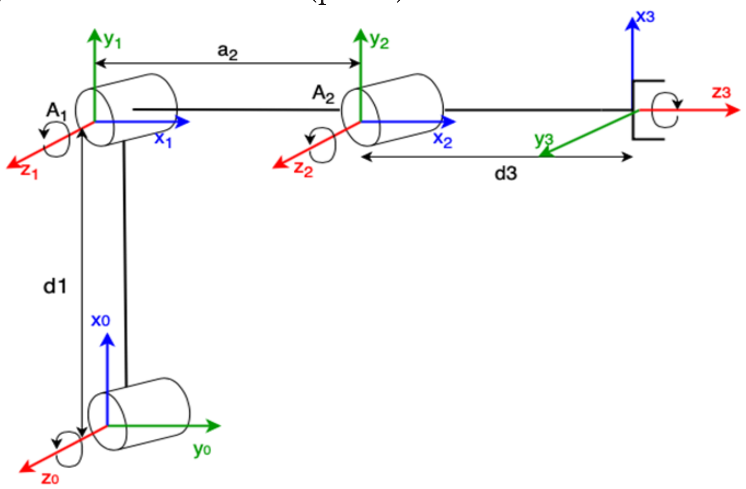



*Рис. 2. Кинематическая схема манипулятора РОИН*

Известно, что положение и ориентация твердого тела (или системы координат, связанной с этим телом) в пространстве однозначно определяется шестью координатами: тремя линейными (декартовыми) и тремя угловыми. Использование метода, предложенного в 1955 г. Учеными Жаком Денавитом и Ричардом Хартенбергом, позволяет сократить это число до четырех параметров, называемыми параметрами Денавита — Хартенберга. [1] Такое упрощение достигается с помощью стандартизированного алгоритма привязки систем координат к звеньям манипулятора.

Параметры Денавита — Хартенберга:

- $a_i$ — линейное смещение — расстояние между пересечением оси $z_{i-1}$ с осью $x_i$ и началом $i$-й системы координат, отсчитываемое вдоль оси $x_i$
- $\alpha_i$ — угловое смещение — угол, на который надо повернуть ось $z_{i-1}$ вокруг оси $x_i$, чтобы она стала сонаправленной с осью $z_i$
- $d_i$ — расстояние между пересечением оси $z_{i-1}$ с осью $x_i$ и началом $i-1$-й системы координат, отсчитываемое вдоль $z_{i-1}$

• $\theta_i$ — присоединенный угол — угол, на который надо повернуть ось $x_{i-1}$ вокруг оси $z_{i-1}$, чтобы она стала сонаправлена с осью $x_i$.

Далее для каждого звена составляются матрицы следующего вида

$$ {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4} $$

которые характеризуют положение текущего звена относительно предыдущего. Для того, чтобы получить положение текущего звена относительно начала координат, необходимо выполнить последовательное умножение

$$ {}^0A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdots {}^{i-1}A_i. \tag{5} $$

В итоговой матрице ${}^0A_i$ первые три элемента четвертого столбца показывают координаты рабочего инструмента стрелы (конца стрелы) относительно начала координат.

Далее на основе данной кинематической модели была разработана компьютерная модель на языке C++ с внедренным в нее алгоритмом Q-learning. В нашей задаче в качестве множества состояний системы использовано дискретное поле положений рабочего инструмента в плоскости стрелы размером $m \times n$ точек (рис. 3). Каждая точка поля характеризуется тройкой величин углов поворота звеньев $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, получаемых с помощью кинематической модели. На рис. 3 было выбрано поле $11\times11$ точек, что в достаточной степени покрывает физическую рабочую область стрелы РОИН. При этом величина дискретизации составляет 5 см., что соответствует точности позиционирования стрелы РОИН.

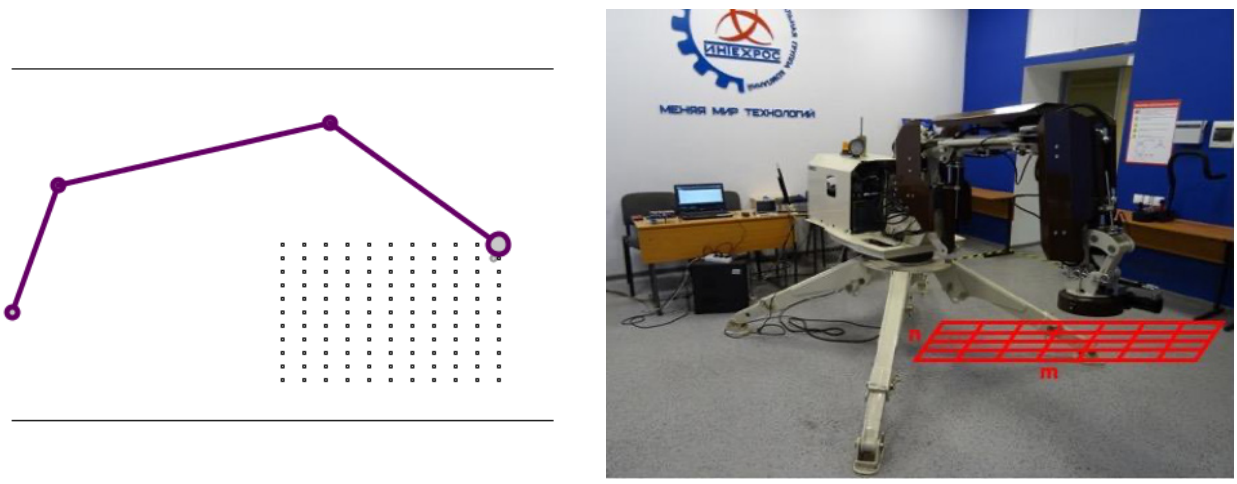



*Рис. 3. Поле положений в лаборатории и на компьютерной модели стрелы РОИН*

Под действием будем понимать переход рабочего инструмента на одну, две или три ближайшие точки по дискретному полю от текущего положения. Матрица весов $Q$ в данной реализации имеет следующую структуру, табл. 1.

Таблица 1

*Структура матрицы весов Q*

| № | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ | X_инстр. | Y_инстр. | Величина веса перехода в новое положение, всего 17 столбцов по количеству возможных действий $(q_1, \ldots, q_{17})$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | | … | … | $q_{14}$ | $q_{15}$ | $q_{16}$ | $q_{17}$ |

Таким образом, размер $Q$-матрицы весов составляет $121 \times 22$, где количество строк соответствует количеству состояний, первые 5 столбцов определяют параметры состояния (углы, определяющие положение звеньев и дополнительно координаты рабочего инструмента), а оставшиеся 17 — соответствующие веса перехода. Такой размер матрицы позволяет поместить ее в оперативной памяти микроконтроллера STM32F103CB без дополнительного расширения.

### 4. Реализация

Приведем описание алгоритма работы программы. На компьютерной модели производится заполнение матрицы $Q$, происходит обучение системы для всех возможных положений инструмента в позициях дискретного поля. Процесс обучения реализован итеративно, каждая итерация представляет следующий набор операций, показанный на рис. 4.

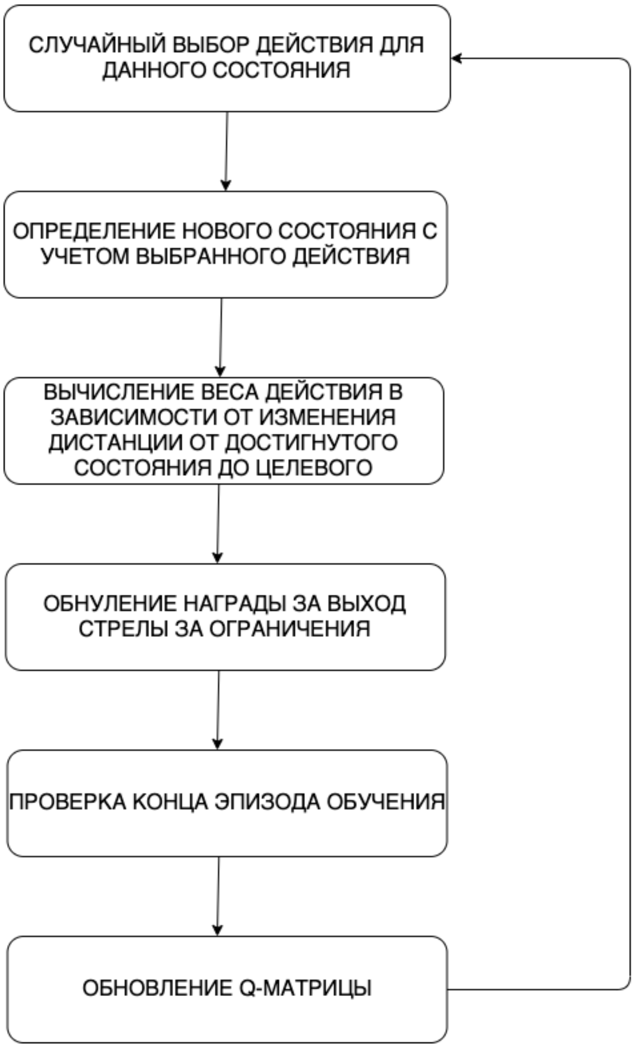
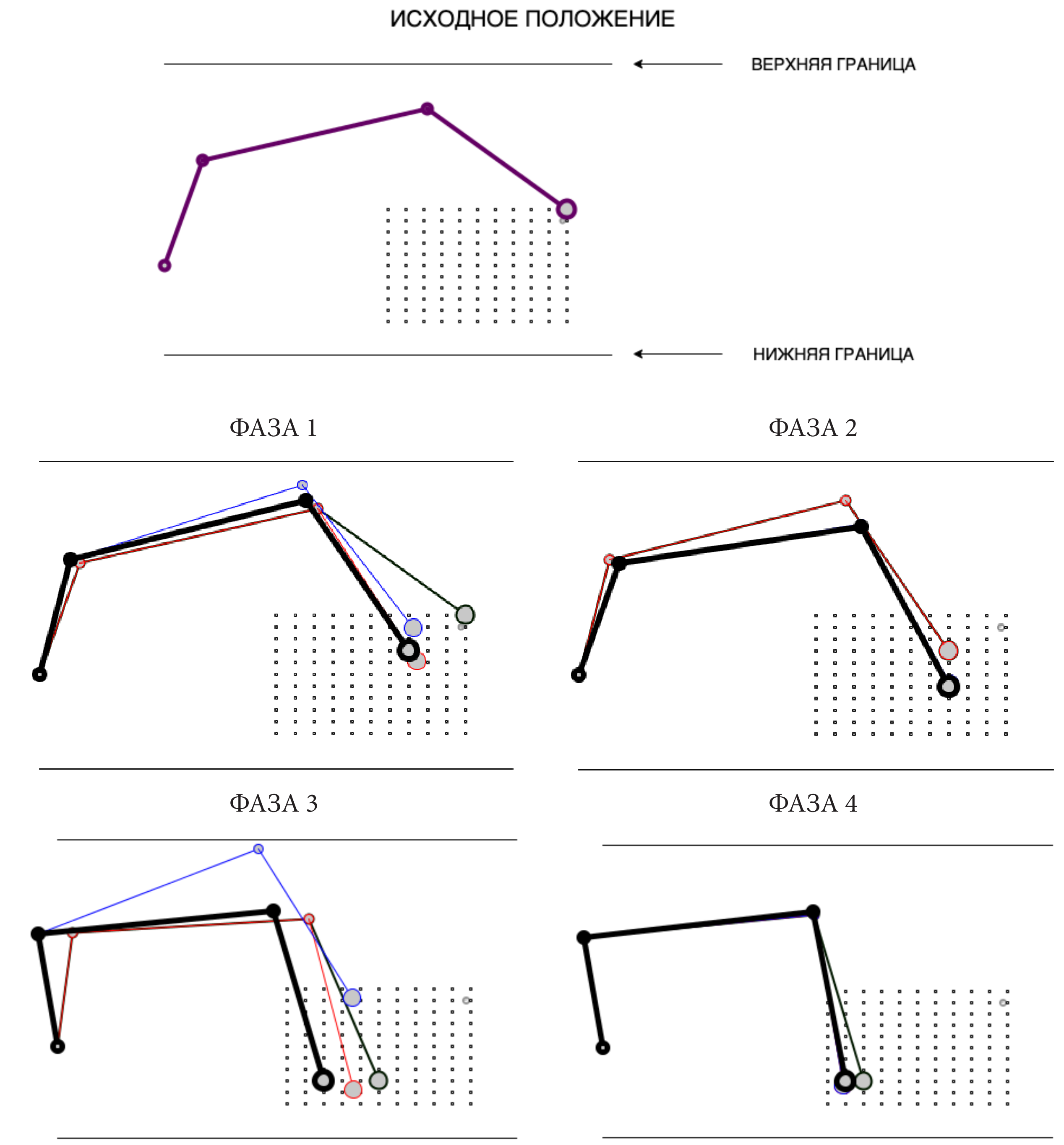



*Рис. 4. Схема алгоритма компьютерной модели Q-обучения*

После выполнения всех итераций процесс обучения считается завершенным, и, используя матрицу $Q$, можно запускать процесс интеллектуального управления стрелой с помощью циклического вызова функции поиска наилучшего нового состояния.

## 5. Результаты

В заключение приведем отдельные фазы движения компьютерной модели стрелы РОИН (рис. 5). В тестовом примере в качестве ограничений по высоте были выбраны следующие значения: максимальная высота подъема относительно основания — 90 см, минимальная высота опускания стрелы ниже основания — 40 см.



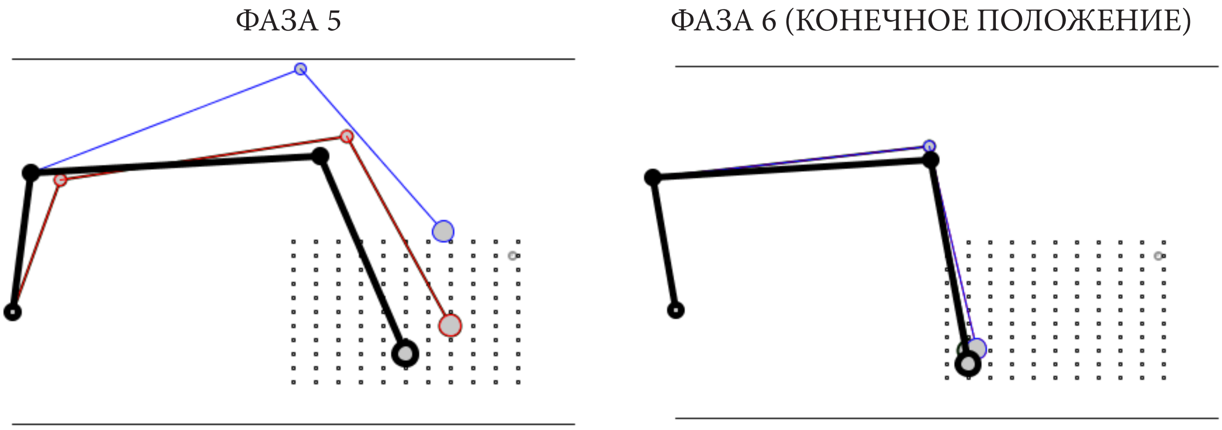



*Рис. 5. Фазы движения модели стрелы РОИНа*

На рис. 5 черной линей отображается стрела РОИН после полного перехода в новое состояние, тонкими линиями стрела манипулятора в процессе перехода при движении отдельными сегментами. Можно наблюдать, что при переходе стрелы из исходного состояния в конечное нарушения ограничения по высоте не произошло. Представленный алгоритм внедрен в управляющее ПО робототехнического комплекса РОИН.

## Заключение

Решение задачи получено методом Q-learning и при наличии физической возможности движения (перехода) алгоритм успешно сходится, что позволяет построить интеллектуальный режим работы робототехнического комплекса.

Преимущества использования данного алгоритма при создании политики управления стрелой робототехнического комплекса заключаются в

- самообучении системы управления, то есть тренировке алгоритма без участия пользователя,
- универсальность
- простота программной реализации алгоритма.

При этом требуется обрабатывать большие объемы данных, которые необходимо хранить в оперативной памяти вычислительного устройства, таким образом уделять большое количество времени для самообучения. В рассматриваемой задаче, с учетом описанных преимуществ, использование Q-learning оправдано. В качестве перспектив рассматривается дальнейшее повышение точности работы при позиционировании звеньев, которое потребует увеличения количества состояний и соответственно увеличит технические требования к вычислительным устройствам (объем данных). Для решения этой проблемы можно использовать развитие данного метода — метод PILCO [5].

## Литература

1. *Фу, К.* Робототехника / К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли; пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – 624 с.

2. *Саттон, Ричард С.* Обучение с подкреплением: Введение / Ричард С. Саттон, Эндрю Г. Барто. – 2-е изд. пер. с англ. А. А. Слинкина. – М. : ДМК Пресс, 2020. – 552 с.

3. *Cutler, M.* Efficient Reinforcement Learning for Robots Using Informative Simulated Priors, / M. Cutler, J. P. How // IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), (Seattle, Washington, May 26--30 2015), Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). – 2015. – P. 2605–2612.

4. *Deisenroth, M.* Gaussian processes for data-efficient learning in robotics and control / M. Deisenroth, D. Fox, C. Rasmussen // Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on. – 2014. – V. PP, No. 99.

5. *Deisenroth, M.* Pilco: A model-based and data-efficient approach to policy search / M. Deisenroth, C. Rasmussen // 28th International Conference on Machine Learning (ICML-11), (Bellevue, Washington, USA, June 28 - July 2, 2011), Madison, WI, USA. – 2011. – P. 465–472.

6. *Deisenroth, M.* Efficient reinforcement learning using gaussian processes. – Karlsuhe : KIT Scientific Publishing, 2010. – 224 p. – URL: http://aiweb.cs.washington.edu/research/projects/aiweb/media/papers/tmppqidj5 (дата обращения 25.08.20).

7. *Rasmussen, C.* Gaussian Processes for Machine Learning / C. Rasmussen, C. Williams. – Cambridge : MIT Press, 2006. – 246 p. – URL: http://www.gaussianprocess.org/gpml/chapters/RW.pdf (дата обращения 04.09.20).

8. *Girard, A.* Gaussian process priors with uncertain inputs — application to multiple-step ahead time series forecasting / A. Girard, C. Rasmussen, R. Murray-Smith // Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), (Vancouver, Canada, December 9-14, 2002), Vancouver, Canada. – 2002. – P. 529–536.

9. Каталог продукции холдинга ИНТЕХРОС: [сайт] – URL: https://intehros.ru/katal (дата обращения 02.07.20)

10. Статья об обучении с подкреплением на ресурсе Habrahabr: [сайт] – URL https://habr.com/ru/post/308094/ (дата обращения 15.08.20)

# СИСТЕМНЫЕ АНАЛИЗ
# И СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 303.732, 654.1

# МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТЕЙ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РИСКОВ

**А. В. Ананьев[1], К. С. Иванников[2], С. А. Тятяев[1]**

*[1]ОАО «Научно-производственное предприятие «Полет», г. Нижний Новгород*
*[2]АО «Научно-производственное предприятие «Радар ММС», г. Санкт-Петербург*

**Аннотация.** Разработана модель оценки устойчивости функционирования сетей связи на основе теории рисков, отличающаяся отличается от известных форматом представления степени устойчивости функционирования сетей связи в виде коэффициента масштаба потерь в выражении риска как отношения изначального количества связей полносвязного графа к количеству связей после разрушения узлов сети связи. Такое представление устойчивости функционирования сети связи позволяет обоснованно оценить степень воздействия разнотипных преднамеренных и непреднамеренных дестабилизирующих факторов, воздействующих на сеть связи и установить зависимость устойчивости функционирования от количества узлов при заданных вероятностях поражения единичного узла сети связи.
**Ключевые слова:** устойчивость функционирования, сеть связи, теория рисков, масштаб события.

## Введение

Разработке научно-методического аппарата повышения и обеспечения устойчивости функционирования систем и сетей связи посвящены работы, в том числе [1–8]. Оценка устойчивости функционирования сетей связи (СС) зачастую определяется путем вероятностной оценки связности узлов или вероятности живучести узлов связи. Кроме того, используется имитационное моделирование, увязывающие воедино утрату узлов связи и возможность их восстановление с потерями пропускной способности. Отдельно отстоят работы, позволяющие учесть «масштаб событий» последствий воздействия преднамеренных и непреднамеренных дестабилизирующих факторов (ДФ) на СС. Значимость понятия «масштаб события» заключается в том, что маловероятные ДФ могут обладать высоким уровнем воздействия на сеть электросвязи и приводить к высоким потерям, что может быть учтено с использованием теории рисков [9, 10]. Однако традиционно риск при исследованиях СС рассматривается как различного рода материальные потери по причине низкого качества связи.

В отличие от известных работ авторами предлагается учесть информационные потери в виде коэффициента затрат в формуле риска, связанного с уменьшением возможностей по переработке, хранению и транспортировке информации в СС.

Пусть узлы сети связи сконцентрированы в объеме пространства, достаточном для передачи информации между каждой парой узлов, что соответствует модели СС в виде полного графа с N вершинами. Отказы узлов СС выражаются в том, что они перестают пропускать расчетные значения потоков информации [9]. В любом случае в результате этого отказа узла СС (компонента СС) информационные потоки должны перераспределиться между другими компонентами системы. Отказ компонента вносит возмущение в сеть и инициирует некоторый переходный процесс, заключающийся в необходимости перераспределении информационных потоков. Кроме того, отказ компонента может инициировать изменение потоков служебной информации, например, о загрузке узлов СС, используемой для выравнивания нагрузки на отдельные узлы, служебные потоки информации также должны перераспределяться среди других компонентов сети. Подобное перераспределение может осуществляться среди соседних компонентов, принадлежащих малой области сети, вокруг поврежденного компонента, но может выйти за эту область и охватывать значительную часть сети или всю сеть. Это означает, что отказ компонента сети в результате перегрузки или воздействия ДФ приводит к увеличению нагрузки на остальные компоненты сети. Поэтому в результате отказа одного компонента СС вероятность отказа остальных компонентов возрастает. Отказ компонента инициирует дополнительные взаимодействия между компонентами сети. Причем, интенсивность этих взаимодействий определяется уровнем нагрузки в сети. Если элементы сети сильно нагружены, то они имеют малые запасы, и, следовательно, могут выдержать меньшее увеличение нагрузки до того, как сами окажутся разрушенными. Учитывая изложенное, можно обоснованно принять, что устойчивость функционирования СС пропорциональна числу связей между ее узлами, равному числу ребер графа. Из комбинаторики [11] известно, что число ребер полного графа равно:

$$C_N^2 = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}, \tag{1}$$

где $C_N^2$ – число сочетаний без повторений. На основе изложенного, можно также обоснованно отождествить (1) с состоянием СС, соответствующим максимальной устойчивости ее функционирования так как по мере снижения количества связей внутри СС она становится более уязвимой к воздействию ДФ [9].

Предположим, что в СС было выведено из строя $n$ узлов. При этом устойчивость функционирования СС снизится пропорционально количеству связей, разрушенных вследствие выведения из строя ее узлов. Отождествив величину, рассчитанную по формуле (1) с максимальным значением устойчивости функционирования СС, введем понятие *детерминированной степени устойчивости функционирования*, определяемое как отношение числа связей (ребер) для системы с выведенными из строя n узлами к числу связей полной системы с $N$ узлами, описываемому выражением:

$$U_i = \frac{C_{N-n}^2}{C_N^2} = 1 - n\frac{2N-n-1}{N^2-N}. \tag{2}$$

Для приближения к реальным условиям и исключения сингулярности, которая появится при дальнейших вычислениях, введем следующее допущение: ограничением разработанной модели функционирования СС в условиях воздействия ДФ является сохранение связи между двумя узлами сети связи. Данное допущение не влияет на общие оценки, представленные далее и преобразует выражение (2) к виду

$$U_i = \frac{C_{N-n}^2 + 1}{C_N^2 + 1} = 1 - n\frac{2N-n-1}{N^2-N+1}. \tag{3}$$

Графики зависимости *детерминированной степени устойчивости функционирования СС*, вычисленные по формуле (3) для разных значений $N$ представлены на рис. 1.

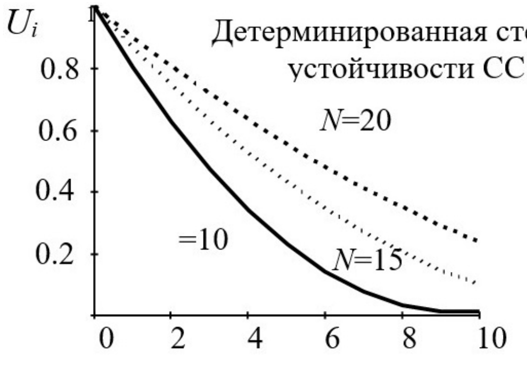



*Рис. 1. Зависимость детерминированной степени устойчивости функционирования СС от числа вышедших из строя узлов для разных объемов N*

Видно, что степень устойчивости функционирования СС заметно растет с увеличением изначального числа узлов СС N при одном и том же числе выведенных из строя узлов n.

На основании (3) можно вычислить детерминированный ущерб СС при выходе из строя ее узлов. Предположим, что детерминированный ущерб $C_i$ обратно пропорционален детерминированной степени устойчивости функционирования, но при этом используем следующую нормировку: при целостности системы, что соответствует $U_i = 1,$ ущерб считается нулевым $C_i = 0,$ при полном разрушении системы связи, связанной с выходом из строя всех узлов связи $U_i = 0,$ ущерб бесконечный. С учетом этого, под детерминированным ущербом, полученным в результат деятельности ДФ $i$-го типа, можно рассматривать величину:

$$C_i = {}^{1}\!\big/\!\left(U_i\right) - 1 = \frac{1}{1 - n\dfrac{2N-n-1}{N^2-N+1}} - 1. \tag{4}$$

Графики зависимостей детерминированного ущерба СС, построенные по формуле (4) для разных значений количества узлов *N*, представлены на рис. 2.

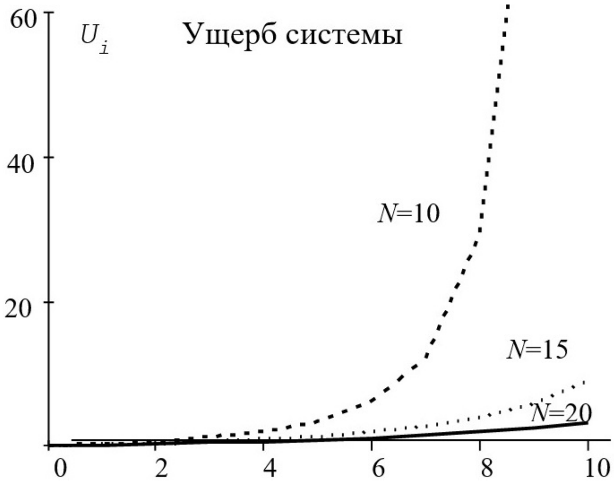



*Рис. 2. Детерминированный ущерб информационной системы в зависимости от числа выведенных из строя узлов для разных объемов N СС*

Перейдем теперь непосредственно к вычислению риска $R_i$ от воздействия ДФ $i$-го типа на работу системы связи. Согласно [9, 10], риск СС

$$R_i = p_i C_i, \tag{5}$$

где $p_i$ – вероятность выхода из строя единичного узла СС при воздействии $i$-го ДФ.

Отталкиваясь от введенного выше понятия *детерминированный ущерб*, введем понятие *вероятностный ущерб системы связи*, определяемый выражением риска (5). Ввиду того, что может быть выведено из строя различное количество узлов СС, что влияет на ущерб, и, как следствие на устойчивость функционирования СС, целесообразно рассчитать математическое ожидание ущерба и использовать его при вычислении риска в формуле (5). Исходя из этого, для использования классической формулы для математического ожидания необходимо знать закон распределения числа выведенных из строя узлов СС $n,$ отталкиваясь от общего количества узлов $N$. Считая, что узлы СС выходят из строя независимо друг от друга и они одного типа, можно предположить, что закон распределения описанной случайной величины n соответствует схеме Бернулли повторных испытаний и распределено по биноминальному закону [12]. Тогда, обозначив биноминальное распределение как $Bi_N(n) = \sum_{n=0}^{N} C_N^n p_i^n (1-p_i)^{N-n}$, риск (5), с учетом (4), можно определить по формуле:

$$R_i = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Bi}_N(n) \cdot C_i = \sum_{n=0}^{N} \left[ \frac{N!}{n!(N-n)!} p_i^n (1-p_i)^{N-n} \cdot \left( \frac{1}{1 - n\dfrac{2N-n-1}{N^2-N+1}} - 1 \right) \right]. \qquad (6)$$

График зависимости риска в результате воздействия ДФ $i$ -го типа от изначального количества узлов СС N в группе при разных значениях вероятности поражения единичного узла СС с учетом процедуры нормирования представлен на рис. 3.

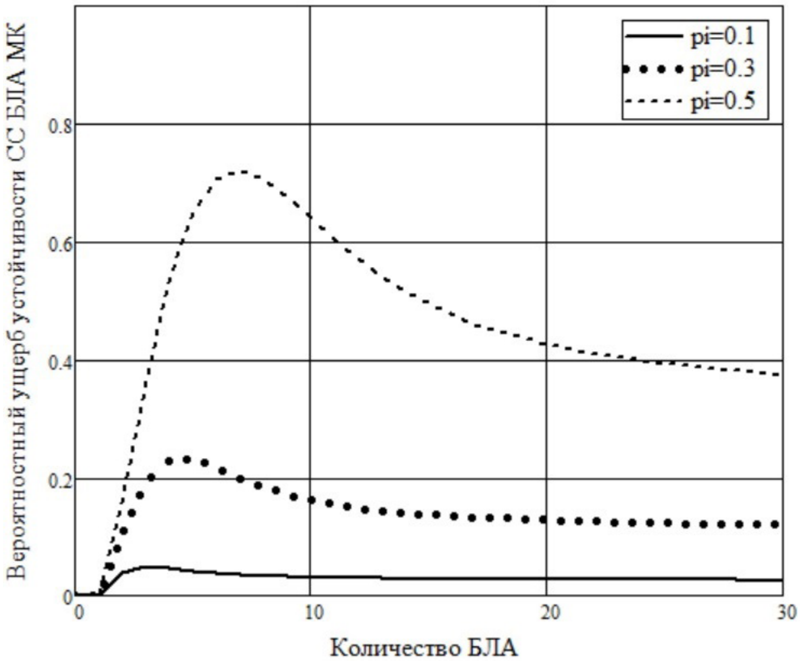



*Рис. 3. Зависимости нормированного риска от воздействия i-го ДФ от количества узлов СС N, при условии для разных вероятностей выведения из строя единичного узла* $p_i$

Следует обратить внимание, что зависимости риска (вероятностного ущерба) от количества $N$, характеризующие устойчивость функционирования СС, представленные на рис. 3 имеют максимумы, смещенные по оси абсцисс в зависимости от вероятности поражения единичного узла. Налицо также и «тяжелые хвосты» зависимостей, обусловленные тем, что вероятность уничтожения $Bi_N(n)$ уменьшается, в то время как ущерб (4) растет. В этом проявляется новое качество модели устойчивости функционирования СС на основе теории рисков (6), которое позволяет найти компромисс между уровнем воздействия ДФ на СС и требуемым количеством узлов $N$ для его компенсации.

**Заключение**

Разработанная комплексная модель оценки устойчивости функционирования СС на основе теории рисков отличается от известных форматом представления степени устойчивости функционирования СС в виде коэффициента «масштаба информационных потерь», а не «материальных потерь» в выражении риска как отношения изначального количества связей полносвязного графа к количеству связей после разрушения узлов сети связи. Это позволяет обоснованно оценить степень воздействия от разнотипных преднамеренных и непреднамеренных ДФ на СС и установить зависимость требуемого количества узлов СС для устойчивой компенсации ДФ с заданными вероятностями поражения узлов сети связи (расчеты показывают, что для вероятностей поражения узла связи в пределах 0,3-0,5 от некоторого ДФ, для достижимой по отношению к нему устойчивой компенсации требуется порядка 8–20 узлов СС), а также обосновать распределение ресурсов СС для противодействия ДФ.

Разработанная модель обладает значимой теоретической общностью, так может быть распространен на все сети связи, которые можно представить в виде модели полносвязного графа с $N$-вершинами, при этом все узлы СС должны быть равновероятно подвержены ДФ $i$-го типа.

**Литература**


1. *Макаренко С. И.* Обеспечение устойчивости телекоммуникационной сети за счет ее иерархической кластеризации на области маршрутизации / С. И. Макаренко // Труды учебных заведений связи. – 2018. – № 4(4). – С. 54–67.

2. *Макаренко С. И.* Метод обеспечения устойчивости телекоммуникационной сети за счет использования ее топологической избыточности / С. И. Макаренко // Системы управления, связи и безопасности. – 2018. – № 3. – С. 14–30.

3. *Макаренко С. И.* Усовершенствованный протокол маршрутизации OSPF, обеспечивающий повышенную устойчивость сетей связи / С. И. Макаренко // Труды учебных заведений связи. – 2018. – № 2(4). – С. 82–90.

4. *Попков В. К.* Модели анализа устойчивости и живучести информационных сетей / В. К. Попков, В. П. Блукке, А. Б. Дворкин // Проблемы информатики. –2009. – № 4. – С. 63–78.

5. *Трегубов Р. Б.* Композиционный метод исследования надежности иерархических многоуровневых маршрутизирующих систем / Р. Б. Трегубов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2016. – № 5(16). – С. 879–892.

6. *Цимбал В. А.* Оценивание связности сети передачи данных АСУ с рокадными связями на основе оценок связности базового сегмента сети / В. А. Цимбал [и др.] // Новые информационные технологии в системах связи и управления: тезисы докл. Российской научно-технической конференции (Калуга, 3–4 июня 2008). – 2008. – 488 с.

7. *Батенков К. А.* Об анализе живучести сетей связи на основе вероятностного подхода / К. А. Батенков // В сборнике: Неделя науки СПбПУ Материалы научной конференции с международным участием. Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций. – 2016. – С. 6–8.

8. *Величко В. В.* Модели и методы повышения живучести современных систем связи / В. В. Величко, Г. В. Попков, В. К. Попков. – М. : Горячая Линия-Телеком. – 2016. – 270 с.

9. *Ананьев А. В.* Оценка риска влияния физических и информационных разрушающих воздействий на аэромобильную сеть связи / А. В. Ананьев, Б. Ф. Змий, А. Г. Кащенко // Авионика. Актуальные вопросы состояния, эксплуатации, и развития комплексов бортового РЭО воздушных судов: тезисы докл. I Всероссийской научно-практической конференции (Воронеж, 19–21 апреля 2016 г.). – Воронеж. – 2016. – С. 22–26.

10. *Ананьев А. В.* Минимизация рисков несанкционированного доступа к информации в наземных и аэромобильных радиосетях критически важных объектов методами многокритериальной многопутевой маршрутизации / А. В. Ананьев, А. С. Багдасарян, Г. А. Кащенко, А. Г. Кащенко // Труды НИИР. – № 2. – 2017.– С. 2–6.

11. *Галкина В. А.* Дискретная математика. Комбинаторная оптимизация на графах / В. А. Галкина. – Гелиос АРБ. – 2003. – 232 с.

12. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Высш. шк. – 1999. – 576 с.

УДК 62-85+681.587

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СЕРВОМЕХАНИЗМА С УЧЕТОМ РЕЖИМА СКОЛЬЖЕНИЯ

**Г. К. Аннакулова, С. А. Саидов, А. З. Юсупов**

*Институт Механики и сейсмостойкости сооружений Академии Наук Республики Узбекистан*

**Аннотация.** В статье рассматривается задача об исследовании устойчивости нелинейной гидравлической системы. Используя дифференциальную форму уравнений движения гидравлической релейной системы получены интегралы движений, определяющие фазовые траектории. Решение задачи об определении характера движений системы, сведена к исследованию трехлистной фазовой плоскости. Построена фазовая плоскость гидравлической системы с учетом и без учета режима скольжения. Получен закон движения изображающей точки системы на поверхности разрыва. Установлено, что движение вдоль поверхности разрыва соответствует устойчивому скользящему режиму сервомеханизма.
**Ключевые слова:** скользящий режим, сервомеханизм, сервомотор, гидроусилитель, устойчивость, золотник, фазовая плоскость, автоколебания, динамическая модель, гидравлическая система.

## Введение

Развитие автоматизации производственных процессов и широкое применение систем автоматического управления в различные области техники ставят новые более сложные задачи перед теорией автоматического управления. Большинство сервомеханизмов представляют собою нелинейные системы, содержащие элементы с нелинейными характеристиками. При соответствующих условиях в сервомеханизмах возникают автоколебания, скользящие режимы, нарушается устойчивость; изучение этих условий и определение параметров, при которых происходит смена характерных режимов работы сервомеханизмов является актуальной задачей их теории. Среди различных принципов управления, позволяющих наилучшим образом управлять объектом регулирования (сервомеханизмом), последнее время внимание специалистов привлекают системы, в которых управляющие воздействия являются разрывными функциями ее координат и внешних воздействий. Исследование таких систем осуществляется методом фазового пространства [1]. Задача синтеза в системах с разрывными управляющими воздействиями сводится к выбору поверхностей в фазовом пространстве, на которых функции управления претерпевают разрыв [2,3,4]. При выполнении определенных соотношений в таких системах возникает специфический вид движений, называемый скользящим режимом. Интерпретация скользящего режима в фазовом пространстве дана в работе [5], обобщена на произвольную дискретную релейную систему в работах [6-9].

## Постановка задачи

Сервомеханизм имеет два каскада усиления: золотник и сервомотор (рис.1).

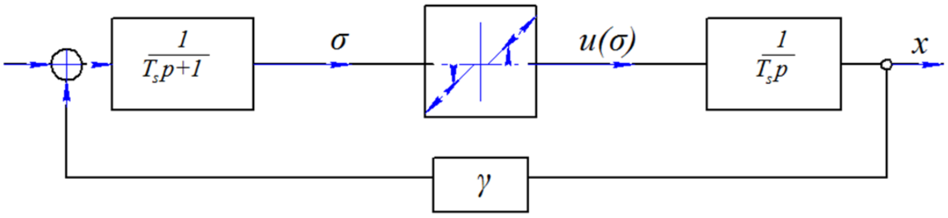



*Рис. 1. Структурная схема динамической модели сервомеханизма*

Вывод уравнений движения каждого каскада с учетом зоны нечувствительности, определяемая перекрытиями в золотнике и сил трения в сервомоторе приведены в работе [1] в следующем виде:

Уравнение движения золотника

$$T_3 \frac{ds}{dt} + s = \rho, \qquad (1)$$

где $T_3 = \lambda_2 f_3 \sqrt{\delta^2 + h^2} \,/\, p_{10} l h$ – постоянная времени золотника $p_{10} = 0{,}5 p_0$; $\lambda_2$ – коэффициент вязкого трения в сечении кольцевого зазора; $f_3$ – площадь поршня золотника; $\delta$ – радиальный зазор между иглой и поршнем золотника; $h$ – начальный осевой зазор между рабочими кромками; $p_0$ – давление масла, подводимого на вход золотника; $l$ – эффективная длина рабочего окна гидроусилителя; $\rho$ – перемещение иглы; $s$ – перемещение золотника;

Уравнение движения гидравлического сервомотора

$$T_c \mu = u(s), \qquad (2)$$

где $T_c = \sqrt{\dfrac{2 f_n^2}{b^2 p_0'}}$ – постоянная времени сервомотора; $f_n$ – площадь поршня; $b$ – коэффициент жесткой обратной связи; $p_0'$ – давление от насоса; $\mu$ – перемещение на выходе сервомотора.

При наличии сил трения с подающей характеристикой в сервомоторе и перекрытий в золотнике, характеристика сервомеханизма представляется зависимостью (рис. 2) [1].

$$\begin{aligned} &u(s) = s - s_4 \ \text{ при } s - u(s) > s_4 \ \text{ и } \dot{\mu} > 0 \\ &u(s) = s + s_4 \ \text{ при } s - u(s) > -s_4 \ \text{ и } \dot{\mu} < 0 \\ &u(s) = 0 \qquad \text{ при } \left| s - u(s) \right| < s_5 \ \text{ и } \dot{\mu} = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

где $s_4 = s_1 + s_2; s_5 = s_1 + s_3$, $s_1$ – величина перекрытия, $s_2$ и $s_3$ – величины действия сил трения с падающими характеристиками.

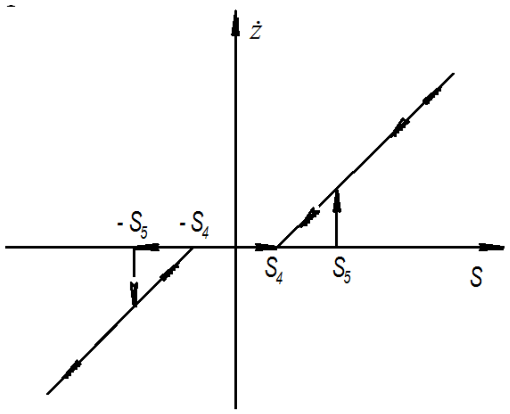



*Рис. 2. Характеристика сервомеханизма*

Уравнение рассогласования для сервомеханизма имеет вид

$$\rho = \delta - b\mu, \qquad (4)$$

где $\delta$ – смещение, передаваемое от чувствительного элемента сервомеханизма.

Рассмотрим свободные колебания сервомеханизма после начальных отклонений, поэтому в уравнении (4) положим $\delta = 0$. После приведения к безразмерным величинам и исключения переменной $\rho$ система уравнений (1)–(4), с учетом влияния перекрытий в золотнике и сил трения в сервомоторе представляются в форме [1]

$$T_3 \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = -x, \qquad (5)$$

$$T_s \frac{dx}{dt} = u(\sigma), \qquad (6)$$

где – нелинейная функция имеет вид:

$$\begin{aligned} &u(\sigma) = \sigma - \varepsilon \ \text{ при } \sigma - u(\sigma) > \varepsilon \ \text{ и } \dot{x} > 0 \\ &u(\sigma) = \sigma + \varepsilon \ \text{ при } \sigma - u(\sigma) > -\varepsilon \ \text{ и } \dot{x} < 0 \\ &u(\sigma) = 0 \ \text{ при } \left| \sigma - u(\sigma) \right| < \varepsilon + \Delta \ \text{ и } \dot{x} = 0, \end{aligned} \qquad (7)$$

а $\sigma = \dfrac{s}{s_{\max}}$, $x = \gamma \dfrac{\mu}{\mu_{\max}}$, $\gamma = b \dfrac{\mu_{\max}}{s_{\max}}$, $T_s = T_c \dfrac{\mu_{\max}}{\gamma s_{\max}}$, $\varepsilon = \dfrac{s_4}{s_{\max}}$, $\Delta = \dfrac{s_5 - s_4}{s_{\max}}$,

$\varepsilon$ – относительная величина зоны нечувствительности реле; $\Delta$ – относительная величина зазоров обратной связи; $\sigma$ – относительная величина перемещения золотника; $x$ – относительная величина выхода сервомотора; $T_s$ – приведенное время сервомотора.

Общее описание фазовой плоскости.

В связи с неоднозначностью функции $u(\sigma)$, фазовое пространство будет состоять из наложенных друг на друга трех листов, соответствующих трем возможным состояниям реле $[u(\sigma)=\sigma-\varepsilon,\ u(\sigma)=\sigma+\varepsilon,\ u(\sigma)=0]$. Переход изображающей точки с одного листа фазовой плоскости $(\sigma, x)$ на другой осуществляется на границах листов. Линиями переключения на фазовой плоскости являются прямые $\sigma=\pm\varepsilon$ и $\sigma=\pm(\varepsilon+\Delta)$. Значения $\sigma=\pm(\varepsilon+\Delta)$ определяют зону нечувствительности сервомеханизма, согласно уравнению (1.5), зоне нечувствительности по координате $x$ соответствуют значения $x=\pm(\varepsilon+\Delta)$.

В качестве листа $I$ обозначим ту часть фазовой плоскости, где нелинейная функция $u(\sigma)$ описывается первым уравнением (7). Система уравнений (5) и (6) для этого случая принимает вид

$$T_з \frac{d\sigma}{dt}+\sigma=-x, \tag{8}$$

$$T_s \frac{dx}{dt}=\sigma-\varepsilon, \tag{9}$$

Произведя замену переменных $\sigma-\varepsilon=\eta_1$, $x+\varepsilon=\xi_1$ в уравнениях (8) и (9), после некоторых упрощений, а также введя безразмерную переменную $t'=\dfrac{t}{\sqrt{T_s T_з}}$, имеем

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2}+2h\frac{d\eta_1}{dt}+\eta_1=0, \tag{10}$$

корни характеристического уравнения (10) имеют вид

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{T_з}\left(\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{h}\right)\right],\ \lambda_2=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{T_з}\left(\frac{h+\sqrt{h^2-1}}{h}\right)\right], \tag{11}$$

где $h=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T_s}{T_з}}$.

Заметим, что при $h>1$ корни характеристического уравнения (11) действительны, при $h<1$ комплексны.

Интеграл уравнений (8) и (9), определяющее фазовые траектории с учетом замены переменных и соотношений (11) имеет вид

$$2h\xi_1+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)\eta_1=C_1\left[2h\xi_1+\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)\eta_1\right]^{\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{h+\sqrt{h^2-1}}}. \tag{12}$$

Из выражений (11) и (12) видно, что корни характеристического уравнения действительные и одного знака и все интегральные кривые проходят через начало координат, являющееся особой точкой, и имеют в нем касательную

$$(L)\ 2h\xi_1+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)\eta_1=0. \tag{13}$$

Из (12) видно также, что фазовыми траекториями служат параболы. Особая точка этих траекторий имеет координаты $\eta_1=0$, $\xi_1=0$ и является устойчивым узлом.

После перехода к координатам $\sigma$ и $x$ уравнение фазовых траекторий на листе $I$ принимает вид

$$2h\left(x+\varepsilon\right)+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)(\sigma-\varepsilon)=C_2\left[2h(x+\varepsilon)+\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)(\sigma-\varepsilon)\right]^{\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{h+\sqrt{h^2-1}}}. \tag{14}$$

На плоскости $\sigma, x$ особая точка $O_1$ листа $I$ имеет координаты: $x=0$, $\sigma=\dfrac{h+\sqrt{h^2-1}}{h+\sqrt{h^2-1}}\varepsilon$.

Две интегральные кривые

$$(L_1)\ 2hx+\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)\sigma=0, \tag{15}$$

$$(L_2)\ 2hx+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)\sigma=0, \tag{16}$$

проходящие через начало координат, являются асимптотами. Уравнение касательной фазовых траекторий имеет форму

$$2h(x+\varepsilon)+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)(\sigma-\varepsilon)=0. \tag{17}$$

В качестве листа $II$ обозначим ту часть фазовой плоскости, где нелинейная функция $u(\sigma)$ описывается вторым уравнением (7). Система уравнений (5) и (6) в этом случае принимает форму

$$T_3\frac{d\sigma}{dt}+\sigma=-x, \tag{18}$$

$$T_s\frac{dx}{dt}=\sigma+\varepsilon. \tag{19}$$

Производя замену переменных $\sigma+\varepsilon=\eta_2,\ \ x+\varepsilon=\xi_2,$ получим после интегрирования уравнений следующее выражение, определяющее фазовые траектории на листе $II$,

$$2h\xi_2+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)\eta_2=C_3\left[2h\xi_2+\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)\eta_2\right]^{\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{h+\sqrt{h^2-1}}}. \tag{20}$$

Из соотношения (20) видно, что фазовыми траекториями на листе $II$ также, как и на листе $I$, служат параболы. Особая точка траекторий этого листа имеет координаты: $\eta_2=0,\ \ \xi_2=0$ и является устойчивым узлом.

После перехода к координатам $\sigma$ и $x$ уравнение фазовых траекторий на листе $II$ принимает вид

$$2h\left(x-\varepsilon\right)_1+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)(\sigma+\varepsilon)=C_4\left[2h(x-\varepsilon)+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)(\sigma+\varepsilon)\right]^{\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{h+\sqrt{h^2-1}}}. \tag{21}$$

На плоскости $\sigma, x$ координаты особой точки $O_2$ листа $II$ будут следующими:

$x=0,\ \ \sigma=-\dfrac{h+\sqrt{h^2-1}}{h-\sqrt{h^2-1}}\varepsilon,$ а уравнение касательной

$$2h(x-\varepsilon)+\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)(\sigma+\varepsilon)=0. \tag{22}$$

В качестве листа $III$ будем рассматривать ту часть фазовой плоскости, где нелинейная функция $u(\sigma)$ равна нулю. Система уравнений (5) и (6) на этом листе преобразуется к виду

$$T_3\frac{d\sigma}{dt}+\sigma=-x, \tag{23}$$

$$T_s\frac{dx}{dt}=0. \tag{24}$$

Из уравнения (24) следует, что на листе $III$ $\ x=const,$ при этом уравнение (23) может быть записано в виде

$$T_3\frac{d\sigma}{dt}+\sigma=x_{03}, \tag{25}$$

где $x_{03}$ – начальное значение $x$ на листе $III$.

Из (25) видно, что фазовыми траекториями на листе $III$ служат прямые, параллельные оси интегральной кривой $L_1$ (15).

На рис. 3 приведена фазовая плоскость гидравлического сервомеханизма для случая $h>1$ без учета режима скольжения. Точки $O_1$ и $O_2$ являются особыми точками траекторий листа $I$ и листа $II$. Эти точки находятся в области покоя системы. На рис. 3 область покоя заштрихован. Из рассмотрения структуры фазовой плоскости в случае $I$ можно увидеть, что при любых соотношениях параметров и при любых начальных отклонениях в системе изображающая точка всегда приходит в область покоя, поскольку особые точки траекторий листов *I* и *II*, являясь устойчивыми узлами, находятся внутри этой области.

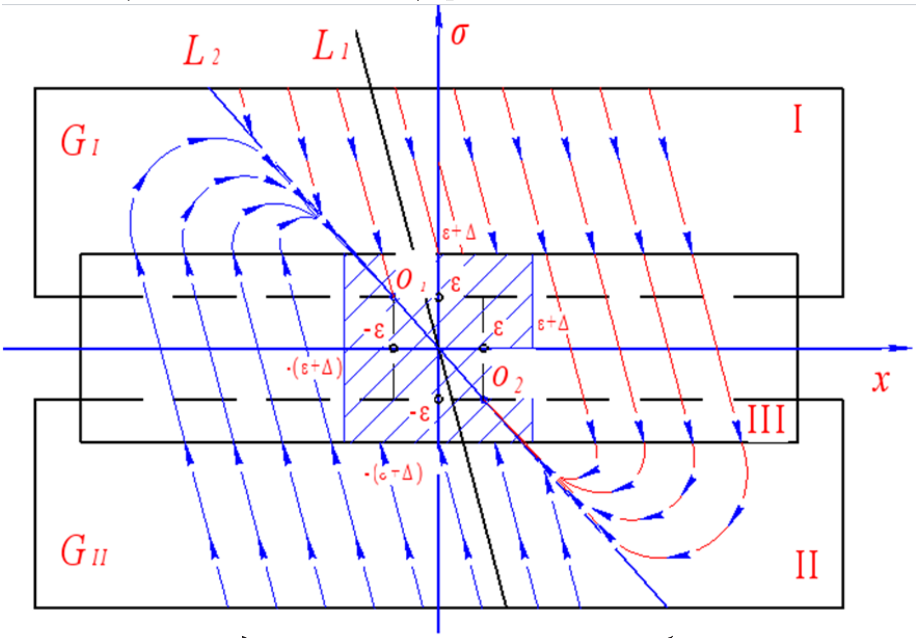



*Рис.3. Фазовая плоскость гидравлического сервомеханизма без учета режима скольжения*

Таким образом, движение системы в случае $h>1$ всегда будет устойчивым.

Учет разрывности правой части в уравнениях движения порождает особенности в описании поведения системы. Поверхностью разрыва в рассматриваемом случае является ось абсцисс

$$\dot{x}=0. \tag{26}$$

Обратим внимание на то, что величина сухого трения $f(\varepsilon,\Delta)$ не определена в точках, когда скорость $\dot{x}$ равна нулю.

Рассмотрим поведение сервомеханизма (5)–(7) на плоскости с координатами $\sigma$ и $x$ (рис. 3). Как видно из рис. 3, при $|x|>\varepsilon+\Delta$ не возникает проблем в описании поведения системы. Если же вектор соотношения окажется на отрезке $|x|\le\varepsilon+\Delta$ прямой разрыва (28), зоны застоя, то он не покидает этот отрезок. В этом случае, поскольку на прямой разрыва функция $f(\varepsilon,\Delta)$ не определена, возникает вопрос, каким уравнением описать движение в зоне застоя. Движение на участке $|x|\le\varepsilon+\Delta$ в системе с сухим трением является движением в скользящем режиме [8].

Уравнение касательной к интегральным кривым является прямой переключений

$$(L_3)\qquad \sigma+\frac{2h}{h-\sqrt{h^2-1}}x+\varepsilon\frac{h+\sqrt{h^2-1}}{h-\sqrt{h^2-1}}=0. \tag{27}$$

Прямая переключений (27) разбивает фазовую полосу на две области $G_I$, в которой движение изображающей точки подчиняется уравнениям (8) и (9), и $G_{II}$, где справедливы уравнения (18) и (19) (см. рис. 3).

Рассмотрим сначала ход фазовых траекторий в области $G_I$, вблизи прямой (27).

Для этого согласно [9] введем величину $\xi=\sigma+\dfrac{2h}{h-\sqrt{h^2-1}}x+\dfrac{h+\sqrt{h^2-1}}{h-\sqrt{h^2-1}}\varepsilon=0$ и определим

$$\xi=\dot{\sigma}+\frac{2h}{h-\sqrt{h^2-1}}\dot{x}=-x+\left(1-\frac{1}{2h\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)}\right)\sigma+\frac{1}{2h\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)}\varepsilon=0.$$

Производная $\xi$ обращается в нуль на прямой

$$x = -\left(1 - \frac{1}{2h\left(h - \sqrt{h^2 - 1}\right)}\right)\sigma - \frac{1}{2h\left(h - \sqrt{h^2 - 1}\right)}\varepsilon, \tag{28}$$

которая, является геометрическим местом точек, где траектории области $G_I$, имеют касательную, параллельную прямой (27), которая совпадает с ней. Таким образом, принимая во внимание аналогичное поведение траекторий области $G_{II}$, в окрестности граничной прямой,

$$(L_4) \qquad \sigma + \frac{2h}{h - \sqrt{h^2 - 1}}x - \frac{h + \sqrt{h^2 - 1}}{h - \sqrt{h^2 - 1}}\varepsilon = 0, \tag{29}$$

касательная, параллельная прямой (29), представляется в форме

$$x = -\left(1 - \frac{1}{2h\left(h - \sqrt{h^2 - 1}\right)}\right)\sigma + \frac{1}{2h\left(h - \sqrt{h^2 - 1}\right)}\varepsilon, \tag{30}$$

Приходим к выводу, что на прямых (27) и (29), имеется отрезок

$$\sigma \leq \frac{h + \sqrt{h^2 - 1}}{h - \sqrt{h^2 - 1}}\varepsilon, \tag{31}$$

к которому фазовые траектории подходят с обеих сторон, а вне этого отрезка в соответствии с требованием непрерывности движения изображающей точки пересекают его (т.е. изображающая точка, двигаясь по этим траекториям, переходит из одной области в другую). Если изображающая точка приходит на отрезок (31), то в дальнейшем она движется по этому отрезку.

Закон движения изображающей точки на отрезке (31) находится из граничных уравнений (27) и (29) при подстановке $\sigma = \dot{x}$ в уравнения граничных прямых

$$\dot{x} + \frac{2h}{h - \sqrt{h^2 - 1}}x + \varepsilon\frac{h + \sqrt{h^2 - 1}}{h - \sqrt{h^2 - 1}} = 0, \tag{32}$$

$$\dot{x} + \frac{2h}{h - \sqrt{h^2 - 1}}x - \varepsilon\frac{h + \sqrt{h^2 - 1}}{h - \sqrt{h^2 - 1}} = 0, \tag{33}$$

Таким образом, соотношения (32) и (33) являются уравнениями скольжения, решения которых представляются в форме

$$x(t) = A_0 e^{-t\frac{h - \sqrt{h^2 - 1}}{2h}} - \varepsilon^{\frac{h + \sqrt{h^2 - 1}}{h - \sqrt{h^2 - 1}}} = 0, \tag{34}$$

$$x(t) = A_0 e^{-t\frac{h - \sqrt{h^2 - 1}}{2h}} + \varepsilon^{\frac{h + \sqrt{h^2 - 1}}{h - \sqrt{h^2 - 1}}} = 0, \tag{35}$$

где $A_0 = e^{(\varepsilon\frac{h + \sqrt{h^2 - 1}}{2h} - 1)\frac{h - \sqrt{h^2 - 1}}{2h}}$.

На рис. 4 представлена фазовая плоскость гидравлического сервомеханизма с учетом режима скольжения. Как видно из рис. 4 движение вдоль отрезка (31) соответствует устойчивому скользящему режиму сервомеханизма. Следовательно, при скользящем режиме движения сервомеханизма отклонение от заданного направления затухает по экспоненциальному закону.

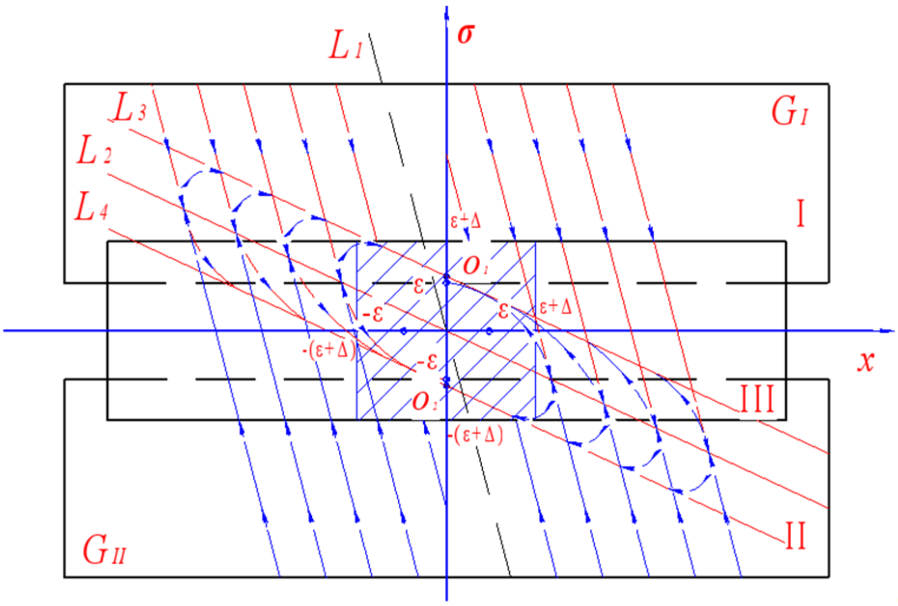



*Рис. 4. Фазовая плоскость гидравлического сервомеханизма с учетом режима скольжения*

**Заключение**

Используя дифференциальную форму уравнений движения гидравлической релейной системы получены интегралы движений, определяющие фазовые траектории. Решение задачи об определении характера движений системы сведена к исследованию трехлистной фазовой плоскости. Построена фазовая плоскость гидравлической системы с учетом и без учета режима скольжения. Получен закон движения изображающей точки системы на поверхности разрыва (в зоне нечувствительности). Установлено, что движение вдоль поверхности разрыва соответствует устойчивому скользящему режиму сервомеханизма. Исследование траекторий движения изображающей точки в режиме скольжения показали, что в зависимости от изменений соотношения параметров и величин начальных отклонений, линия скольжения может переходить в полосу скольжения. Особые точки фазовых портретов сместились, причем величины и знаки смещения определяются параметрами и величинами начальных отклонений системы. Особые точки сместились таким образом, что фазовые траектории в окрестности прямых переключений направлены навстречу друг-другу, что подтверждает о наличии режима скольжения.

**Литература**

1. *Горская Н. С.* Динамика нелинейных сервомеханизмов / Н. С. Горская, И. Н. Крутова, В. Ю. Рутковский. – Москва : Наука, 1959. – 313 с.

2. *Utkin V. I.* Sliding modes in optimization and control problems / V. I. Utkin. – Moscow : Nauka, 1981. – P. 367.

3. *Lee J., Lee H.* Dynamic Simulation of Nonlinear Model-Based Observer for Hydrodynamic Torque Converter System, 2004 SAE World Congress-Transmission & Driveline Symposium, Detroit, Michigan, USA.

4. *Utkin V. I.* Chattering Problem in sliding Mode Control Systems, Proc. 9 the International Workshop on Variabl Structure Systems, V. I. Utkin, H Lee. VSS 2006, Alghero, Sardinia, Italy. – P. 346–350.

5. *Shtessel Y. B.* An asymptotic second-order smooth sliding mode control / Y. B. Shtessel, I. A. Shkolnikov, M. D. J. Brown // Asian Journal of Control. – 2003. – V. 5, No 4. – P. 498–504.

6. *Alvares J.* An invariance Prinsiple for discontinuous Systems with application to a coulomb friction oscillator / J. Alvares, Y. Orlov, L. Acho // Journal of Dynamic Systems Measurement and Control. – 2000. – V. 4, No 122. – P. 687–690.

7. *Pan Y., Furuta K., Edvards C., Colet E. F., Fridman L.* Advances in variable structure and sliding mode control / Y. Pan, K. Furuta, C. Edvards, E.F. Colet, L. Fridman. – P. 272.

8. *Utkin V. I.* Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems / V. I. Utkin. – Moscow : Nauka, 1978. – P. 257.

9. *Khalil N. K.* Nonlinear Systems: N. K. Khalil. – 3rd ed. – Upper Saddle River, NJ : – Prentice Hall, 2002. – P. 766.

УДК 519.81

# МОДЕЛЬ МНОГОЦЕЛЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННАЯ НА ОПЕРАЦИИ АГРЕГИРОВАНИЯ

**Е. М. Аристова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В статье предлагается методика решения задачи многокритериальной оптимизации, основанная на формировании обобщенного критерия (целевой функции) с помощью операций агрегирования, и исследуется взаимосвязь получаемых оптимальных решений со свойством Парето-оптимальности.
**Ключевые слова:** агрегирование, обобщенная оценка, порядковый оператор взвешенного агрегирования, стратегия агрегирования, функция агрегирования, задача многоцелевой оптимизации.

## Введение

Чрезвычайно широкий и крайне важный с практической точки зрения класс задач выбора составляют многокритериальные (многоцелевые задачи), в которых качество принимаемого решения оценивается по нескольким критериям. Успешное решение многокритериальных задач невозможно без использования различного рода сведений о предпочтениях лица, принимающего решение. При этом одним из главных источников таких сведений является информация об относительной важности критериев.

В статье предлагается методика решения задачи многокритериальной оптимизации, основанная на формировании обобщенного критерия (целевой функции) с помощью операций агрегирования, и исследуется взаимосвязь получаемых оптимальных решений со свойством Парето-оптимальности.

## Операции агрегирования для многоцелевых задач

Проблема агрегирования достаточно активно обсуждается в отечественной и зарубежной литературе [1, 2, 6], поскольку лежит в основе многих процедур принятия решений (групповой выбор, многокритериальные (многоцелевые) модели), используется в межотраслевом балансе, нейросетевых технологиях, при исследовании многоцелевых систем.

В самом общем смысле, под *агрегированием* понимается переход от векторной оценки размерности $n$ к векторной оценке размерности $m$ при $m < n$. Зачастую агрегирование предполагает переход от векторной оценки к скалярной, которая называется *обобщенной* (*групповой*, *комплексной*).

Рассмотрим <u>задачу</u>: пусть задано множество альтернатив $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $A_i(x) = a_i$ – частная оценка альтернативы $x$, в качестве которой может выступать оценка по $i$-му критерию (показателю) или оценка, полученная от $i$-го эксперта, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ – векторная оценка альтернативы $x \in X$, тогда ее *обобщенная* (*комплексная*) оценка может быть получена путем агрегирования компонент векторной оценки в соответствии с определенным принципом.

Как правило, каждый критерий $K_i$ из множества критериев $K = \{K_1, \ldots, K_n\}$ характеризуется весовым коэффициентом $w_i$, определяющим степень важности оценки по этому критерию, а каждый эксперт $E_j$ из группы экспертов $E = \{E_1, \ldots, E_m\}$ характеризуется коэффициентом компетентности $c_j$, позволяющим учитывать значимость его мнения.

Оператор агрегирования учитывает весовые коэффициенты $(w_i \mid c_j)$ и имеет вид:

$$\alpha(x) = Agg(W, A),$$

где $Agg(\cdot)$ – оператор агрегирования, формализующий некоторую стратегию агрегирования, $x$ – альтернатива из заданного множества, $\alpha(x)$ – ее обобщенная оценка, $W = (w_1, \ldots, w_n)$ – вектор весовых коэффициентов, $w_i$ – степень влияния агрегатов (частных оценок) $a_i$ на обобщенную оценку $\alpha(x)$.

Если $A$ – вектор оценок альтернативы по критериям (показателям), а вектор $W$ задает веса критериев, то $\alpha(x)$ – многокритериальная оценка альтернативы.

Если компоненты вектора $W$ – коэффициенты компетентности экспертов, а $A$ – вектор оценок, полученных от этих экспертов, то $\alpha(x)$ – групповая (коллективная) оценка альтернативы [1–3].

При формировании обобщенной оценки возможны две схемы агрегирования:

1) $Agg_1(W, A) = Agg_1(g(w_1, a_1), g(w_2, a_2), \ldots, g(w_n, a_n)) = \alpha(x)$,

2) $Agg_2(W, A) = Agg_2(f_1(W), f_2(A)) = (w, \alpha(x))$.

В первом случае вначале строятся агрегаты $g(w_i, a_i)$ для всех $i = \overline{1, n}$, которые затем «сворачиваются» в обобщенную оценку $\alpha(x)$. Во втором случае агрегирование весов и частных оценок альтернатив осуществляют отдельно, причем собственно оценкой альтернативы является $\alpha(x)$, а $w$ рассматривается как степень доверия к этой оценке.

Оператор агрегирования позволяет решать задачу наиболее радикальным способом – за счет свертки векторной оценки с соответствующим набором весов в скалярную величину, позволяя тем самым определить отношение линейного порядка на множестве альтернатив.

Выбор оператора агрегирования – важнейший этап формирования моделей оценки, который напрямую зависит от качества исходной информации. Стоит отметить, что как веса, так и оценки альтернатив могут быть как количественными, так и качественными [2, 3].

Исследователи определяют оператор агрегирования, исходя из различных наборов свойств, среди которых определяющими являются монотонность, идемпотентность, наличие нейтрального элемента, а также дополнительные условия, накладываемые на обобщенную оценку. Комбинирование перечисленных свойств порождает различные семейства операторов агрегирования, многие из которых являются параметрическими. В связи с их многообразием проблема выбора подходящего оператора для конкретной прикладной задачи занимает центральное место, поскольку ее решение влияет на ключевые свойства модели, такие как адаптивность, эффективность вычислений, учет типа исходных данных и стратегии агрегирования. Большое значение имеет параметрическое представление операторов агрегирования, поскольку именно за счет выбора подходящих значений параметров можно обеспечить гибкость оценочной модели и настроить ее информационную среду.

Информация о частных оценках может учитываться в двух различных аспектах. Если важно акцентировать внимание, прежде всего, на значимости источников информации (критериев, экспертов), то используются классические операторы (взвешенные мультипликативные и аддитивные свертки). В случаях, когда первичной является важность значений аргументов, применяются порядковые операторы. Они агрегируют компоненты векторной оценки, упорядоченные определенным образом (в связи с этим, они и называются *порядковыми*). К операторам данного класса относятся OWA-операторы (Ordered Weighted Averaging Aggregation operators) и различные их модификации и обобщения [4,5].

OWA-операторы используются для формирования обобщенной оценки, в случае, если частные оценки альтернатив и весовые коэффициенты являются числовыми из отрезка [0,1]. Введем понятие OWA-оператора.

*Порядковый оператор взвешенного агрегирования* (OWA-оператор), ассоциированный с вектором весов $w = (w_1, \ldots, w_n)$, удовлетворяющим условиям $w_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, есть отображение $F : [0,1]^n \to [0,1]$ такое, что

$$F_W(X) = F(W, X) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_{\sigma(i)},$$

где $\sigma:\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ – перестановка, в которой $a_{\sigma(i)} \ge a_{\sigma(i+1)}$.

Таким образом, обобщенная оценка, вычисленная на основе OWA-оператора [2], есть результат скалярного произведения вектора весов $W$ на вектор, полученный из $A$ упорядочением элементов по невозрастанию. Если этот вектор обозначить через $B$, то

$$F_W(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i.$$

При выборе вида обобщенного критерия для выявления лучшего решения возникает вопрос: является ли такое решение Парето-оптимальным.

**Теорема 1 [1].** *OWA-оператор является строго монотонным по каждому аргументу.*

Для обобщенного критерия на основе порядковых операторов агрегирования справедлива

**Теорема 2 [1].** *Пусть $X$ – множество вариантов решений, $f_i(x)$ – частная оценка решения $x \in X$ по i-му критерию, $f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))^T$ – векторная оценка решения $x$ (множество векторных оценок образуют критериальное пространство).*

*Пусть обобщенная оценка решения $x \in X$ формируется на основе частных оценок с использованием порядкового оператора агрегирования в виде:*

$$F(W, f(X)) = \sum_{i=1}^{n} w_i \widehat{f}_i(x),$$

*где $\widehat{f}(x) = (\widehat{f}_1(x),\dots \widehat{f}_n(x))$ – вектор $f(x)$, упорядоченный по невозрастанию, $W = (w_1,\dots,w_n)$ – вектор весов, причем $\forall i = \overline{1,n}$ $(w_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1)$.*

*Тогда для каждого вектора весов $W$ справедливо включение*

$$X(W) \subset P(X),$$

*где $X(W) = \{\arg\max_{x \in P(X)} F(W, f(x))\}$, $P(X)$ – множество оптимальных решений.*

Выделяют три основных стратегии при «свертывании» компонентов векторной оценки в соответствии с порядковыми операторами: а) обобщенная оценка не может быть лучше самой плохой из частных оценок; б) обобщенная оценка обусловлена лучшей из частных оценок; в) обобщенная оценка занимает промежуточное положение между частными оценками, участвующими в агрегировании [2].

Операции, реализующие первую стратегию, являются конъюнкциями, а сама стратегия – *конъюнктивной*. Вторая – *дизъюнктивная* стратегия – соответствует дизъюнкции, а третья стратегия постулирует основное свойство операций осреднения и называется *компромиссной*.

Конъюнктивная и дизъюнктивная стратегия формализуются соответственно операциями min (связка «и», конъюнкция) и max (связка «или», дизъюнкция), компромиссная стратегия – операциями осреднения. Помимо трех «чистых» стратегий, можно предложить гибридные стратегии, функциональное представление которых задается параметрическим семейством операторов, включающим в качестве исходных некоторые операции дизъюнкции и конъюнкции.

Поскольку в общем случае OWA-оператор является оператором осреднения, то целесообразно оценить его положение между дизъюнкцией (max) и конъюнкцией (min).

Стратегия агрегирования OWA-оператора может непосредственно оцениваться с помощью специальных величин:

$$orness(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (w_i \cdot (n-i)),$$

$$andness(W) = 1 - orness(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (w_i \cdot (i-1)).$$

Данные числовые характеристики классифицируют OWA-операторы по отношению к связкам «и» и «или»: $andness(W)$ характеризует близость оператора к конъюнкции, а $orness(W)$ –

к дизъюнкции. Для произвольного OWA-оператора вводится следующее определение: если $orness(W) > 0.5$, то соответствующий оператор называется *квазидизъюнкцией*, если $andness(W) > 0.5$, (а, значит, $orness(W) \leq 0.5$,), то – *квазиконъюнкцией*. Эти операторы актуальны для тех случаев, когда невозможно с полной уверенностью идентифицировать тип операции агрегирования.

Эмпирический опыт показывает, что ЛПР, склонное к риску, при формировании обобщенной оценки в большей степени учитывает лучшие свойства альтернативы. Эту позицию назовем *оптимистической*.

В противоположность ей ЛПР-пессимист имеет тенденцию в своих суждениях опираться на худшие свойства альтернатив. Заметим, что дизъюнктивная стратегия агрегирования как раз соответствует оптимистической позиции ЛПР, поэтому склонность к риску можно охарактеризовать величиной $orness(W)$. Чем ближе $orness(W)$ к единице, тем в большей степени позиция ЛПР оптимистична.

Справедлива следующая **теорема 3 [1, 2]:** *пусть* $W$ *и* $W'$ *– векторы весовых коэффициентов соответствующих OWA-операторов такие, что* $W = (w_1, \ldots, w_n)$ *и* $W' = (w_1, \ldots, w_r + t, w_{r+1}, \ldots w_{k-1}, w_k - t,\ w_{k+1}, \ldots, w_n)$, *где* $t > 0$, $k > r$, *тогда* $orness(W) < orness(W')$.

Таким образом, изменяя вектор весов, можно увеличивать или уменьшать величину $orness(W)$, управляя, тем самым, стратегией агрегирования или отношением ЛПР к риску.

### Задача многоцелевой оптимизации

Общая методика методов, основанных на моделях агрегирования, может быть представлена с помощью предложенной автором блок-схемы (рис. 1) [1].

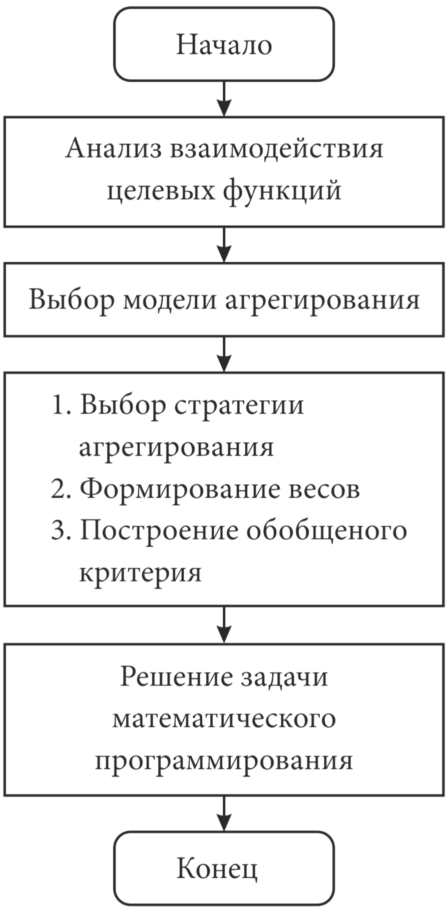



*Рис. 1. Блок-схема методики решения, основанной на моделях агрегирования*

Формирование весов (коэффициентов важности) возможно при использовании различных методов в зависимости от стратегии агрегирования. В качестве основных можно отметить: метод экспертных оценок, метод наибольших отклонений, прямое назначение весов, выбор функций квантификации и др. [1, 2].

Для построения функций агрегирования используется три подхода: аналитический, статистический и нормативный. *Функция агрегирования* – функция, которая является положительнозначной, непрерывной, возрастающей по каждой переменной и вогнутой.

В качестве базовых функций агрегирования обычно рассматривают (табл.1):

Таблица 1

| Наименование функции | Аналитический вид | Условия на параметры |
|---|---|---|
| линейная, на основе взаимозамещения переменных | $\mu_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ | $\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$ |
| линейная, на основе взаимодополнения переменных | $\mu_X(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{x_i}{\beta_i} \right)$ | $\beta_i > 0,\ i = \overline{1,n}$ |
| квадратичная функция | $\mu_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ | $\lambda_i, \beta_{ij} \geq 0,\ i, j = \overline{1,n}$ |
| логарифмическая функция | $\mu_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(\beta_i x_i + 1)$ | $\lambda_i > 0, 0 < \beta_i < 1,\ i = \overline{1,n}$ |
| экспоненциальная функция | $\mu_X(x) = \lambda e^{\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i} - 1$ | $\lambda_i > 0, 0 < \beta_i < 1,\ i = \overline{1,n}$ |
| функция осреднения | $\mu_X(x) = \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ | $\lambda_i > 0, 0 < \beta_i < 1,\ i = \overline{1,n}$ |
| мультипликативная функция | $\mu_X(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}$ | $\lambda > 0$ |

Учитывая все вышесказанное, можно составить таблицу моделей агрегирования для многоцелевых задач (табл. 2):

Таблица 2

| Характеристика множества критериев (целей) | Тип агрегирования | Стратегия агрегирования | Операции агрегирования |
|---|---|---|---|
| Гомогенное множество | Порядковое агрегирование | Дизъюнктивная | Дизъюнкции |
| Гомогенное множество | Порядковое агрегирование | Компромиссная | Квазидизъюнкции, среднее арифметическое, квазиконъюнкции |
| Гомогенное множество | Порядковое агрегирование | Конъюнктивная | Конъюнкции |
| Гетерогенное множество | Взвешенное агрегирование | Компромиссная | Операции осреднения |

**Заключение**

В статье предлагается методика решения задачи многокритериальной оптимизации, основанная на формировании обобщенного критерия с помощью операций агрегирования, и исследуется взаимосвязь получаемых оптимальных решений со свойством Парето-оптимальности. А также предлагается таблица моделей агрегирования для многоцелевых задач.

**Литература**

1. *Аристова Е. М.* Учет взаимодействия между целевыми функциями и их агрегирование в задачах оптимизации: дис. канд. физ.-мат. наук / Е. М. Аристова. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2012. – 152 с.

2. *Леденева Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. – Воронеж : ВГУ, 2006. – 233 с.

3. *Мелькумова Е. М.* Лингвистическая модель оценочной системы // Тезисы докладов Воронежской математической школы им. С.Г. Крейна / Е. М. Мелькумова. – Воронеж : ВГУ, 2010. – С. 101–102.

4. *Ягер Р.* Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Р. Ягер. – Москва : Радио и связь, 1986. – 403 с.

5. *Liu X.* The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA-operators // International Journal of Approximate Reasoning. – 2007. – P. 68–81.

6. *Tora V.* Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators / V. Torra, Y. Narukawa. – Springer : Berlin, 2007. – 284 p.

УДК 004.8:004.514

# ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ЮЗАБИЛИТИ ВЕБ-РЕСУРСОВ

**И. Ф. Астахова[1], К. А. Маковий[2], Ю. В. Хицкова[1]**

[1]*Воронежский государственный университет*
[2]*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В статье рассмотрены возможности прогнозирования состояния юзабилити веб-ресурсов. Процедура юзабилити-тестирования достаточно затратна как с финансовой, так и с временной точек зрения. Поэтому система, которая позволит сократить эти затраты, полезна для современных организаций. Рассмотрены различные варианты прогнозирования количества посетителей страниц сайта с помощью модели ARIMA и нейронный сетей. Важным свойством временного ряда для использования модели ARIMA является стационарность ряда. Выявлено, что для нашего временного ряда данная модель недостаточно подходит, некоторые виды нейронных сетей также не подходят по разным причинам. В итоге выбраны сети NARX, которые успешно применяется для прогнозирования временных рядов, предоставляют возможность использовать экзогенную переменную.
**Ключевые слова:** юзабилити страницы, прогнозирование временных рядов, виды нейронных сетей, модели интеллектуализации, нейросети NARX.

## Введение

Интернет-маркетинг растет очень быстро, становится все более популярным, продвижение сайтов в Интернете становится одним из важнейших способов развития бизнеса.

Инструменты интернет-маркетинга предоставляют пользователям различные приложения, которые помогают следить за юзабилиити информационных-ресурсов организации. Но требуются приложения, позволяющие упростить процедуру юзабилити – тестирования, часто за счёт ее интеллектуализации. Такие системы позволяют автоматизировать процессы оценки ресурсов компании, понять насколько привлекателен ресурс для потенциальных и реальных покупателей товаров и услуг компании.

## 1. Методы интеллектуализации систем

При интеллектуализации систем используются различные методы. Это могут быть: традиционные методы: информационный поиск, имитационное моделирование, ситуационный анализ, методы регрессии. Некоторые из этих методов были разработаны в рамках искусственного интеллекта.

Традиционными методами прогнозирования являются метод скользящей средней, метод экспоненциального сглаживания, метод наименьших квадратов и методы регрессионного анализа [1, 2].

В настоящее время интеллектуализация системы и прогнозирование может осуществляться достаточно новыми, по сравнению с традиционными, методами: методами машинного обучения, в том числе с использованием модели ARIMA, нейронных сетей. Нами рассмотрены различные варианты прогнозирования оценки юзабилити сайтов.

Интегрированная модель авторегрессии – скользящего среднего (Autoregressive Integrated Moving Average – ARIMA) – это модель описания временных рядов и краткосрочного прогнозирования. В общем случае, ARIMA описывается следующим уравнением (1), [3]

$$\phi_p(B)(1-B)^d z_t = \theta_q(B)a_t, \quad (1)$$

где $\phi_p$ и $\theta_q$ – неизвестные параметры; $z_t$ это временной ряд; $B_I$ это оператор обратного сдвига, $d$ – это порядок дифференцирования; и $a_t$ это ряд, который представляет собой белый шум.

Следующим распространенным методом являются искусственные нейронные сети. После разработки алгоритмов обучения, получаемые модели стали использовать в практических целях: в задачах прогнозирования, для распознавания образов, в задачах управления. Сеть обрабатывает входную информацию и в процессе изменения своего состояния во времени формирует совокупность выходных сигналов. Работа сети состоит в преобразовании входных сигналов во времени, в результате чего меняется внутреннее состояние сети и формируются выходные воздействия. Обычно НС оперирует цифровыми, а не символьными величинами [5].

Существует несколько видов нейросетей, которые можно использовать в глубоком машинном обучении. Каждый вид имеет свои преимущества и недостатки. Целесообразность использования одного или другого вида зависит от предметной области и задач применения. Выделяют следующие основные виды нейросетей, в работах [1, 4, 5, 6] систематизированы основные из них.

1. Сверточные нейронные сети (CNN) содержат пять типов слоев: вход, свертка, подвыборка (субдискретизация), полностью связаны и выход. Каждый слой имеет определенное назначение, например, суммирование, подключение или активация. Сверточные нейронные сети получили популярную классификацию изображений и обнаружение объектов. Тем не менее, CNN также применяются в других областях, таких как обработка естественного языка и прогнозирование.

Технология глубокого обучения предполагает наличие процесса конфигурационного усложнения информативных признаков в последовательности нейронных слоёв. Начиная с К. Фукусима предложено множество вариантов реализации этой идеи. Одним из удачных решений являются архитектура свёрточных нейронных сетей [7, 8], которая показала высокую эффективность при решении различных задач. Отличительной особенностью этой архитектуры является наличие в свёрточных слоях нескольких каналов обработки данных (называемых картами или плоскостями). В каждой плоскости выполняется свёртка выходного образа предшествующего слоя с фиксированным ядром небольшой размерности. Свёрточные слои чередуются со слоями объединения (пулинга), кратно снижающих размерность пространства признаков. Слои пулинга не являются обязательными и существуют варианты их полного устранения из архитектуры сети. Другой отличительной особенностью архитектуры является использование полулинейных функции активации, выполняющих роль коммутационных ключей, управляемых значениями переменных скрытых слоёв.

2. Рекуррентные нейронные сети (RNN) используют последовательную информацию, такую как данные с метками времени из сенсорного устройства или устное предложение, состоящее из последовательности терминов.

3. FNN – Feedforward neural networks. Нейронные сети с прямой связью, в которых каждый персептрон в одном слое связан с каждым персептроном из следующего уровня. Информация передается от одного уровня к следующему только в прямом направлении. В нейросети нет петли обратной связи.

4. Нейронные сети NURX Nonlinear autoregressive exogenous model рассматриваются как класс обобщенных, нелинейных, непараметрические, управляемые данными статистическими методами. Нелинейный авторегрессионный экзогенный NN представляет собой комбинацию всех вышеуказанных NN и успешно применяется для прогнозирования временных рядов, а также прогнозирования причинно-следственных связей.

5. Еще одним известным видом нейросетей являются сети автоэкондеры. Автоэнкодеры берут любой ввод, преобразуют его в какую-то сжатую версию и используют его для восста-

новления того, что было вводом. Таким образом, в основном ввод x переходит в скрытый слой $h,\ h = f(x)$ и получается как реконструкция $r,\ r = g(h)$. Автоэнкодер хорош, когда $r$ близко к $x$, или, когда выход выглядит как вход. Нейронные сети автоэнкодеров используются для создания абстракций, называемых кодерами, создаваемых из заданного набора входных данных [9]. Хотя автоинкодеры похожи на более традиционные нейронные сети, они сами пытаются смоделировать входные данные, и поэтому метод считается неконтролируемым. Предпосылка автоэнкодеров состоит в том, чтобы десенсибилизировать не относящееся к делу и сенсибилизировать соответствующее. По мере добавления слоев дальнейшие абстракции формулируются на более высоких уровнях (слоях, наиболее близких к точке, в которой представлен слой декодера). Эти абстракции могут затем использоваться линейными или нелинейными классификаторами.

В нескольких видах нейросетей используется метод градиентного спуска. Это один из самых известных алгоритмов в машинном обучении [10]. Его главное достоинство заключается в его способности обойти проблему наличия большого количества данных. Эта проблема поражает системы, такие как нейронные сети, со слишком большим количеством переменных, чтобы сделать возможным расчет их оптимальных значений. Однако градиентный спуск разрушает проблемы размерности, увеличивая локальную нижнюю точку или локальный минимум многомерной ошибки или функции стоимости. Это помогает системе определить настраиваемое значение или вес, присваиваемый каждому из блоков в сети, возвращая точность в соответствие. Данный метод в том числе используется в нейросетях NARX.

## 2. Использование рассмотренных моделей в целях прогнозирования временного ряда

Рассмотрим возможность использования моделей, перечисленных выше, для прогнозирования количества посетителей страниц сайта.

Принято рассматривать два типа модели ARIMA, а именно, стационарную модель ARIMA и нестационарную модель ARIMA. Стационарность временного ряда связана с видом изменения статистических временных характеристик во времени, так, распределение вероятности постоянны во времени. Стационарность или так называемая слабая стационарность определяется следующим образом:

Ожидаемое значение временного ряда не зависит от времени.

Функция автоковариантности является функцией $k$, где для каждого $k$

$$y_z = Cov(z_t, z_{t+k}).$$

При внимательном рассмотрении уравнения (1) можно выделить две компоненты – авторегрессионную (AR) и скользящее среднее (MA). Таким образом, модель ARIMA может быть моделью AR$(p)$ или моделью MA$(q)$ или их комбинацией, то есть ARMA$(p,q)$, см (2).

Модель авторегрессии AR(p) описывается следующим уравнением:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \ldots + \phi_p z_{t-p} + a_t, \tag{2}$$

где $a_t$ – это ошибка, которая никак не коррелирует сама с собой, где $E\{a_t\} = 0$ и $Var\{a_t\} = \sigma_a^2$. Коэффициенты $\phi_i,\ i = 1,\ldots,p$ – это параметры, которые должны быть вычислены.

Модель скользящего среднего MA – это модель, которая содержит «средние» шумов за текущий период и за предыдущий период. Модель MA (q) описывается уравнением (3).

$$z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \ldots + \theta_q a_{t-q}. \tag{3}$$

Коэффициенты $\theta_i,\ i = 1,\ldots,q$ – это вычисляемые параметры.

Рассмотрим временной ряд посетителей сайта, см. (4).

$$y_1, \ldots, y_T, \ldots, y_t \in R. \tag{4}$$

Данный ряд представлен на рис. 1.

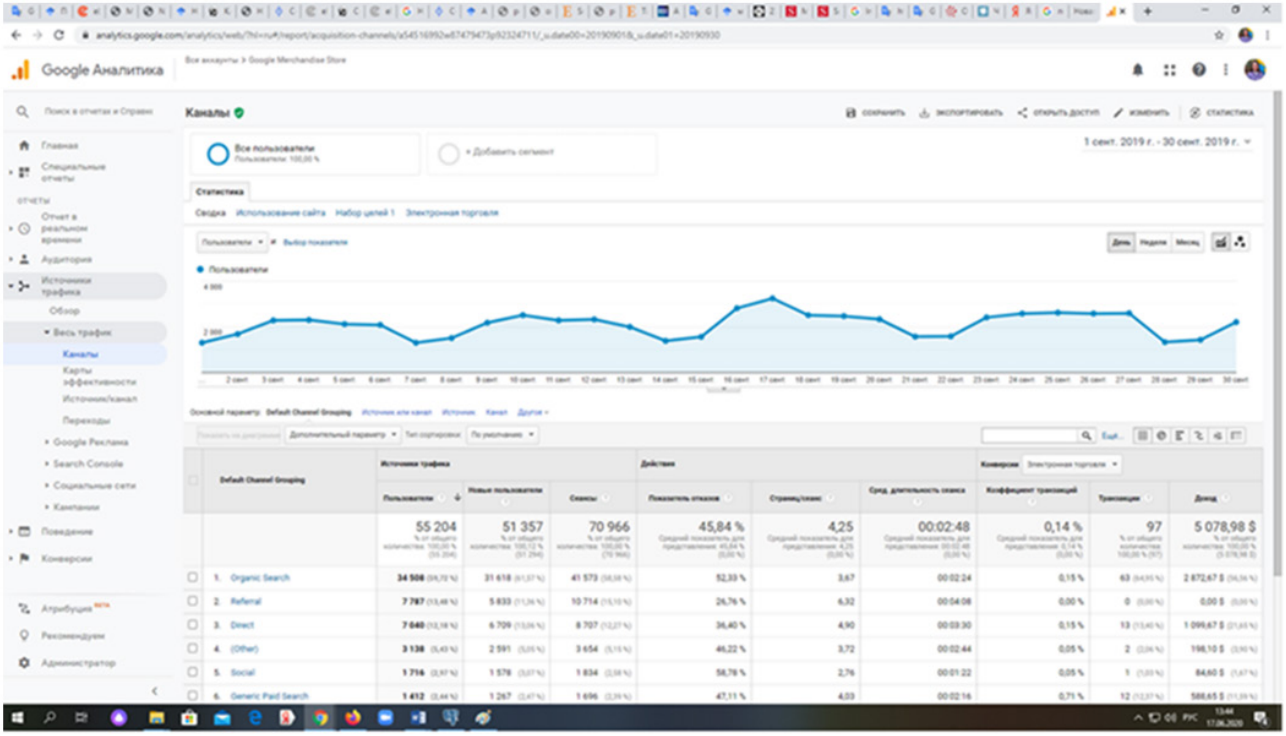



*Рис. 1. Количество посетителей главной страницы сайта и источники трафика в сентябре 2019 года (по дням), источник Google Analytics*

Значение признака – это количество посетителей главной страницы организации, интервал времени – ежедневно. Источник данных Google Analytics. Схематично ряд изображен на рис. 2.

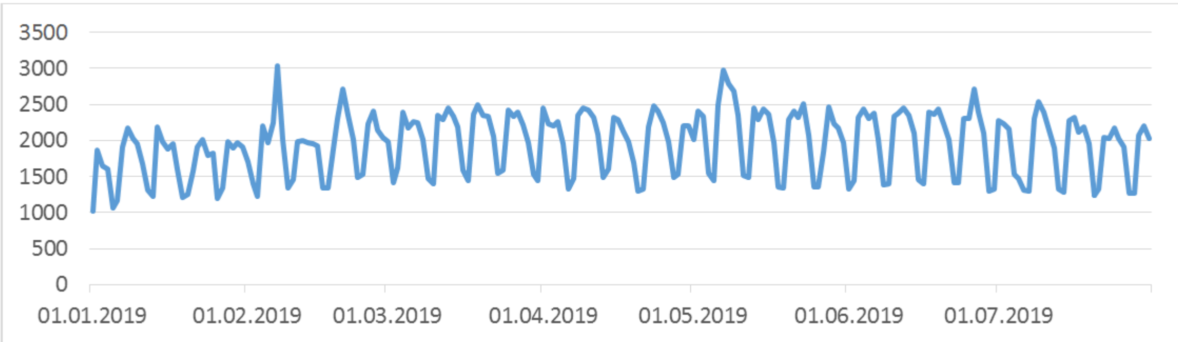



*Рис. 2. Временной ряд – количество посетителей главной страницы сайта*

Проведём анализ данного временного ряда согласно этапам, представленным на рис. 3.

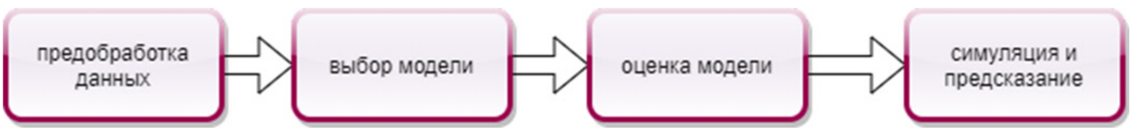



*Рис. 3. Этапы моделирования**

**Источник: сайт «Экспонента», режим доступа https://docs.exponenta.ru/*

### *2.1. Модель ARIMA*

Модели ARMA и ARIMA имеют несомненные достоинства, для их реализации можно использовать несколько инструментов: языки Python и R, а также язык технических расчетов и вычислительную среду MATLAB [11]. Перед составлением модели необходимо рассмотреть свойства временного ряда и возможность использования модели ARMA.

Модель ARMA$(p,q)$ это модель, содержащая компоненты AR и MA. Эта модель не содержит элемент «$i$» потому что это модель, которая уже стационарна. Другими словами, элемент в уравнении (1) равен 0. Математическая запись модели ARMA$(p,q)$ выглядит следующим образом (5) [11].

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \ldots + \phi_p z_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \ldots + \theta_q a_{t-q}, \tag{5}$$

Как видно из уравнения (5), ARMA$(p,q)$ представляет собой сумму двух компонент временного ряда – AR$(p)$ и MA$(q)$.

Важным свойством временного ряда для использования модели ARIMA является стационарность ряда. Ряд $y_1,\ldots,y_T,\ldots,y_t$ стационарен, если $\forall s$ – распределения $y_t,\ldots,y_{t+s}$ не зависит от $t$, то есть его свойства не зависят от времени. Модель ARMA используется только для полностью стационарного ряда.

Для временных рядов, не удовлетворяющих требованиям критериев стационарности, используют дифференцирование. Ряд, который можно смоделировать как стационарный ARMA$(p,q)$ после процедуры дифференцирования по времени $D$ раз, обозначается ARIMA$(p,D,q)$. Математически форма ARIMA$(p,D,q)$ записывается в следующем виде (6):

$$\Delta^D z_t = c + \phi_1 \Delta^D z_{t-1} + \ldots + \phi_p \Delta^D z_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \ldots + \theta_q a_{t-q}, \tag{6}$$

где $\Delta^D z_t$ обозначает $D$ раз продифференцированный временной ряд.

Свойствами стационарности являются следующие.

1. Значение автокорреляции стационарного ряда находится около нуля (любая незначимая величина).

В нашей модели автокорреляция представлена на рис. 4.

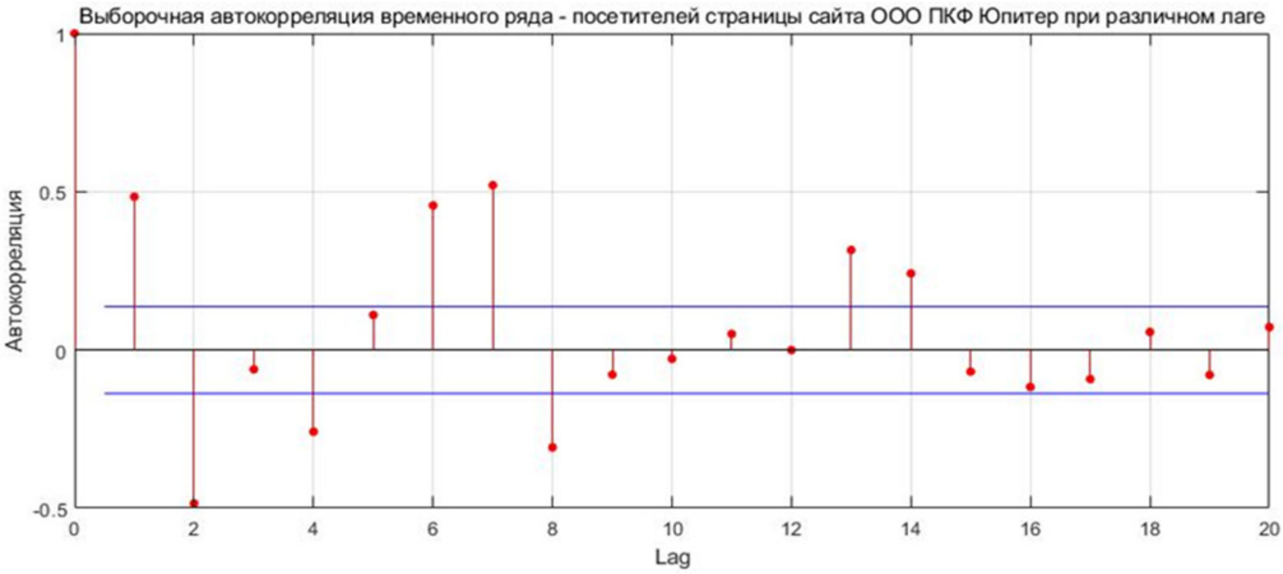



*Рис. 4. Автокорреляция количества посетителей страницы сайта, данные за 7 месяцев, по дням*

Мы видим из рис. 5, что есть точки значимой автокорреляции. Насколько она значима можно проверить с помощью $Q$ – критерия Линга – Бокса или критерия Стьюдента. Гипотеза критерия Стьюдента, что автокорреляция равно нулю, ее проверяют против какой-то альтернативы, скорее всего против какой-то двусторонней, то есть автокорреляции не равной нулю [12].

Из рисунка видно, что существует 8 точек. На которых автокорреляция выходит за пределы возможного в случае использования модели ARIMA.

Стационарность ряда можно проверить и улучшить с помощью его дифференцирования. В нашем ряде наблюдается цикл, но это не значит, что он не стационарен. Для точного определения нужна дополнительная проверка [12].

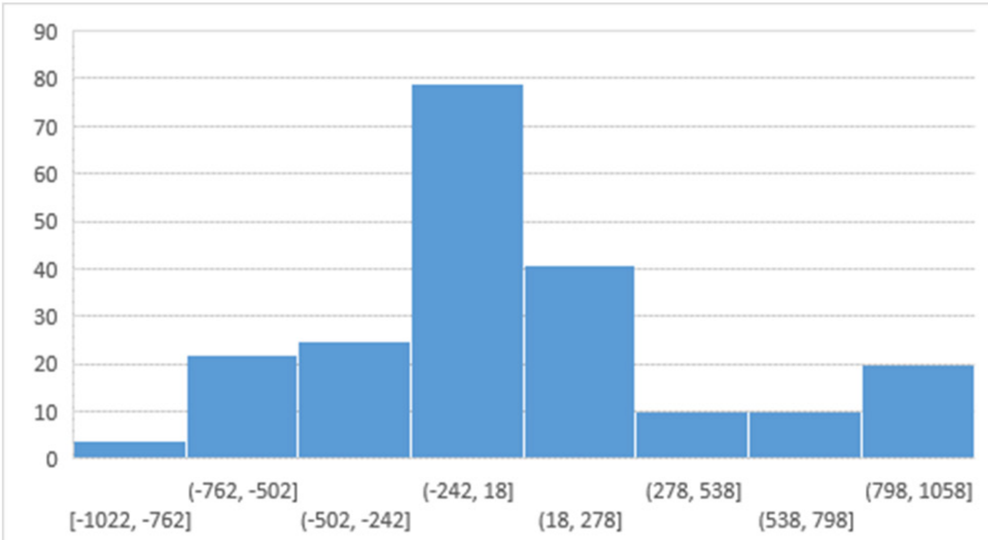


*Рис. 5. Продифференцированный ряд – количество посетителей страницы сайта*

Продифференцируем ряд. После первой дифференциации получилось следующее, рис. 5.

Мы видим, что ряд все-таки не стационарный, потому что значительно выдаются показатели временного ряда, наблюдается повышающийся и понижающийся тренд. Дальнейшее дифференцирование ряда затрудняет прогнозирование. Можно сделать вывод, что модель ARIMA не подходит нам для составления прогноза.

### *2.2. Нейронные сети*

Рассмотрим различные виды нейронных сетей в качестве возможных методов прогнозирования состояния юзабилити веб ресурсов [14]. Недостатком архитектуры свёрточных сетей является отсутствие теоретически-обоснованных методов выбора структуры сети и параметров ядер свёртки. До сих пор выбор структуры свёрточной сети является предметом искусства. Для решения отдельных задач предложено несколько прекрасно работающих конфигураций сетей, но неизвестен общий алгоритм их построения. Второй недостаток связан со временем обучения свёрточных сетей. На типовом процессоре время может варьироваться от нескольких часов до нескольких суток, поэтому для обучения сетей часто используют высокопроизводительные графические процессоры. В нашем случае сайт содержит более 120 страниц (и это не самый большой сайт), поэтому невозможно тратить на обработку одного временного ряда слишком много времени. Данный вид нейросетей не подходит для нашего проекта.

RNN используются в приложениях прогнозирования временных рядов, анализа настроений и других текстовых приложениях. Рекуррентный NN – это, по сути, NN с прямой связью с рекуррентным контуром, поэтому выходные сигналы поступают обратно на вход. Это соответствует целям определения юзабилити. Но в отличие от традиционных нейронных сетей, все входы в рекуррентную нейронную сеть не являются независимыми друг от друга, и выход для каждого элемента зависит от вычислений его предыдущих элементов. Но вход в нашу сеть предполагает наличие независимых переменных. Поэтому данный вид нейросетей также не подходит для временного ряда посетителей сайта.

Для работы FN сетей необходим шаблон, который подаётся в качестве входных данных, но такого шаблона нет при прогнозировании юзабилити – страниц сайта. Поэтому данный вид сетей не применим в этом случае. Автоэкндеры практически не используются в прогнозировании.

### Заключение

Как было отмечено выше сети NARX успешно применяется для прогнозирования временных рядов, Обычная нейронная сеть состоит из входного слоя, который принимает внешнюю информацию, одного или нескольких скрытых слоев, которые обеспечивают нелинейность модели, и выходного слоя, который обеспечивает целевое значение. Каждый слой состоит из одного или нескольких узлов. Все слои связаны через ациклическую дугу. Каждый входной узел во входном слое связан с соответствующим весом. Для вычисления выхода его функция активации применяется к взвешенной сумме входов. Функция активации является либо функцией идентичности, либо сигмоидальной функцией [16, 17]. В этом виде нейронных сетей используются дополнительные экзогенные переменные (в нашем случае это будет фактор времени). В основе нейронных сетей NARX лежит метод Левенберга-Макграфта, его иногда называют – алгоритм обратного распространения, впервые он был использован для минимизации ошибки прогнозирования. В настоящее время используется также для определения веса (синапса) модели NARX. Алгоритм сочетает в себе метод градиентного спуска и метод Ньютона, и обладает быстрой сходимостью и устойчивой производительностью [17]. Главным в нашем случае преимуществом NARX является возможность введения экзогенного параметра, что позволит прогнозировать посещаемость сайта не только с учетом его собственных изменений, но и с учетом фактора времени, что особенно актуально. Посещаемость страниц часто зависит от сезонов, особенно от дня недели, выходной это или рабочий день. Например, модель ARIMA не позволяет учитывать экзогенную переменную.

Таким образом, в результате проведенного анализа, мы останавливаемся на модели NARX в качестве модели для прогнозирования посещаемости страниц сайта.

### Литература


1. *Mitrea C. A., Lee C. K. M., Wu Z.* A comparison between neural networks and traditional forecasting methods: A case study //International journal of engineering business management. – 2009. – Т. 1. – С. 11.

2. *Hubbard E. A. et al.* Dynamic coordination and control of network connected devices for large-scale network site testing and associated architectures: пат. 7254607 США. – 2007.

3. *Tun C. C., Majid N.* Comparison between artificial neural network and autoregressive integrated moving average model in bitcoin price forecasting //Journal of Quality Measurement and Analysis JQMA. – 2018. – Т. 14, № 2. – С. 45–53.

4. *Khajouei R., Zahiri Esfahani M., Jahani Y.* Comparison of heuristic and cognitive walkthrough usability evaluation methods for evaluating health information systems //Journal of the American Medical Informatics Association. – 2017. – Т. 24, № e1. – С. e55-e60.

5. *Заенцев В. И.* Нейронные сети: основные модели. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 199 г., – 77 с.

6. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е издание. – Издательский дом Вильямс, 2008.

7. *Дорогов А. Ю.* Нейронные сети глубокого обучения с управляемой коммутацией нейронных плоскостей //дистанционные образовательные технологии. – 2019. – С. 284–296.

8. *Домингос П.* Несколько полезных вещей, которые нужно знать о машинном обучении // Сообщения ACM. – 2012. – Т. 55, № 10. – С. 78–87.

9. *Wang Y., Zhang X., He L.* Anomalous sound detection based on a novel autoencoder.

10. *Hussain A., Mkpojiogu E. O. C., Kamal F. M.* A systematic review on usability evaluation methods for m-commerce apps //Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering (JTEC). – 2016. – Т. 8, № 10. – С. 29–34.

11. *Cadenas E. et al.* Wind speed prediction using a univariate ARIMA model and a mul-tivariate NARX model //Energies. – 2016. – Т. 9, №. 2. – С. 109.

12. *Tun C.C., Majid N.* Comparison between artificial neural network and autoregressive integrated moving average model in bitcoin price forecasting //Journal of Quality Measurement and Analysis JQMA. – 2018. – Т. 14, № 2. – С. 45–53.

13. *Hussain A., Mkpojiogu E. O. C., Kamal F. M.* A systematic review on usability evaluation methods for m-commerce apps //Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering (JTEC). – 2016. – Т. 8, № 10. – С. 29–34.

14. *Галанов А. Э., Селюкова Г. П.* Нейронные сети и нейронные технологии //Актуальные вопросы науки и хозяйства: новые вызовы и решения. – 2019. – С. 399–405.

15. *Demuth H. B. et al.* Neural network design. – Martin Hagan, 2014.

16. *Андриенко М. П., Юдин П. А., Вишневецкая Е. Ю.* понимание повторяющихся нейронных сетей: предпочтительная нейронная сеть для данных временных рядов//актуальные вопросы современной науки и об-разования. – 2020. – С. 96–98.

17. *Paul R. K., Sinha K.* Forecasting crop yield: forecasting crop yield: arimax and narx model.

УДК 004.9

# АНАЛИЗ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО КАПИТАЛА РЕГИОНА ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

**А. С. Батманова, И. Л. Каширина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** В центре внимания статьи – анализ образовательных показателей, выражающихся в количестве востребованных направлений и профессий в сфере труда. На основе обработанных данных анализируется соотношение количества выпускников вузов и их статуса трудоустройства.
**Ключевые слова:** актуальные направления профессий, востребованные вакансии, трудоустроенные выпускники, количество вузов и программ.

## Введение

Сегодня в условиях стремительно меняющегося мира в нашей стране и регионе довольно остро стоит вопрос о том, как именно сохранить баланс на рынке труда и как грамотно актуализировать интеллектуальный запас населения. Устойчивое развитие экономики регионов в условиях информатизации общества тесно связано с формированием, использованием и развитием человеческого капитала. Несбалансированность на рынке труда влияет в первую очередь на занятость молодежи. Вследствие этого необходимо знать какие направления профессий в нашем регионе будут наиболее востребованы в ближайшем времени и как соотносятся с этими направлениями потенциальные работники, то есть выпускники вузов.

Важной подзадачей в данном исследовании является не только анализ существующих отношений на стыке сферы образования и рынка труда, но и прогноз потребностей в разрезе специальностей и вакансий.

## 1. Востребованные направления

Для того чтобы сложилось представление о ситуации с профессиями и трудоустройством в нашем регионе, был проведен анализ данных на языке Python с помощью библиотек пакета Anaconda [2]. Первый критерий, который анализировался – количество вакансий по различным отраслям профессий (по данным сайта hh.ru) за год на основе которых делался вывод о востребованности профессий. Результаты анализа представлены на диаграмме на рис.1. Так, наиболее востребованными в Воронежской области сферами являются:

– экономика и управление;
– информационные технологии, интернет, телеком;
– строительство, недвижимость;
– административный персонал;
– транспорт, логистика;
– сервис и туризм.

По данным Министерства Науки и Образования РФ одним из показателей образовательно-трудового баланса является количество выпускников, которые в последующем трудоустроились. По данным сайта http://graduate.edu.ru/ в Воронежской области в течение года после выпуска трудоустраиваются около 70 % выпускников вузов. В данном случае, общее количество выпускников можно разделить на тех, кто устроился в своем регионе и тех, кто в другом.

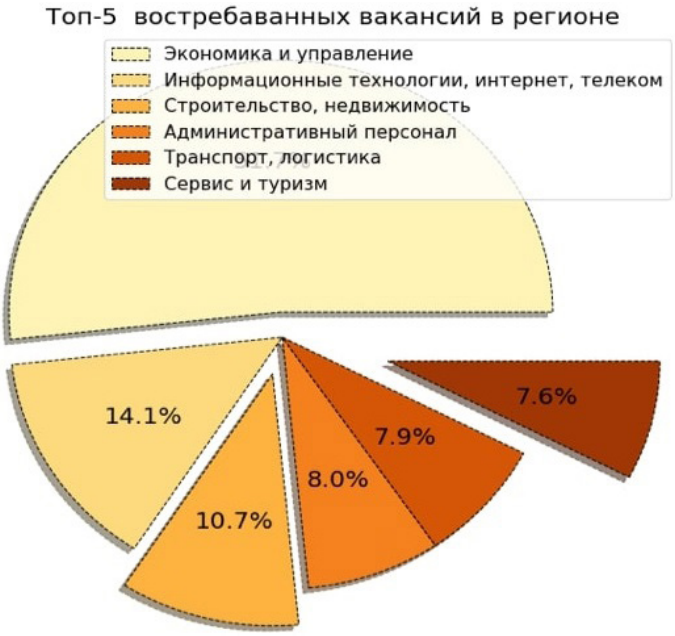



*Рис. 1. Самые востребованные вакансии в регионе*

Ниже приведена таблица, содержащая такие категории как: «Количество вакансий по направлениям», «Всего выпускников», «Устроившиеся в регионе», «Устроившиеся за пределами региона» (табл. 1) и представляющая собой фрагмент исходных данных, собранных для анализа.

Таблица 1

*Количество вакансий и выпускников по направлениями*

| Направления | Количество вакансий по направлениям | Всего выпускников | Устроившиеся в регионе | Устроившиеся за пределами региона |
|---|---|---|---|---|
| Пищевая промышленность | 155 | 63 | 20 | 43 |
| Экономика и управление | 4122 | 6731 | 3050 | 2112 |
| Строительство, недвижимость | 853 | 1515 | 715 | 407 |
| Транспорт, логистика | 626 | 677 | 312 | 129 |
| Государственная служба, некоммерческие организации | 29 | 52 | 34 | 12 |
| Прикладная геоэкология, нефтегазовое дело | 21 | 430 | 197 | 134 |
| Ядерная энергетика | 0 | 13 | 7 | 5 |
| Культуроведение и социокультурные проекты | 0 | 34 | 24 | 8 |
| Информационные технологии, интернет, телеком | 1123 | 1117 | 446 | 458 |
| Искусство, развлечения, масс-медиа | 116 | 59 | 15 | 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Маркетинг, реклама, PR, СМИ и информационно-библиотечное дело | 494 | 345 | 156 | 87 |
| Медицина | 301 | 861 | 456 | 292 |
| Наука, образование | 152 | 1406 | 793 | 322 |
| Юриспруденция | 105 | 2252 | 806 | 579 |
| Информационная безопасность | 48 | 16 | 6 | 5 |
| Сельское хозяйство | 111 | 1438 | 606 | 433 |
| Сервис и туризм | 607 | 192 | 77 | 48 |

Гистограмма, представленная на рис. 2, иллюстрирует наиболее популярные сферы по количеству выпускников, трудоустроившихся в регионе. Более трех тысяч выпускников трудоустроены в сфере экономики и управления. Менее одной тысячи – в сферах: юриспруденция, наука и образования, строительство и сельское хозяйство. Менее пятисот выпускников ежегодно трудоустраиваются в сферах медицины, информационных технологиях, машиностроении, транспорта и логистики и промышленной экологиии.

Среди направлений, по которым насчитывается очень маленькое количество трудоустроенных выпускников в Воронежской области, можно выделить: музыкальное искусство, социологию и социальную работу, политические науки и философию.

Здесь стоить отметить, что данные направления относятся к гуманитарной сфере. Отсюда, следует сделать вывод, что гуманитарные профессии являются недостаточно востребованными в нашей области на данный момент.

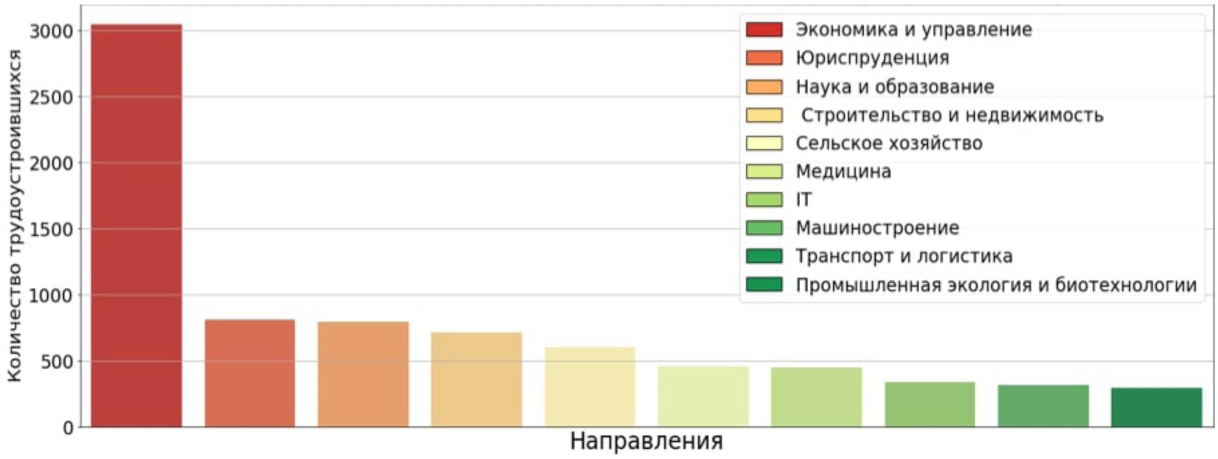



*Рис. 2. Топ направлений, по которым устраиваются выпускники*

На рис. 3 можно увидеть несколько примеров распределения количества выпускников в устроившихся в регионе/вне региона. Также на этой диаграмме представлено общее количество вакансий в нашем регионе для данной сферы за тот же период. Диаграммы построены по исходным данным из табл. 1.

Проанализировав ситуацию, складывающуюся по различным направлениям трудоустройства, можно сделать следующие выводы.

1. К направлениям, среди которых насчитывается малое количество вакансий, но при этом очень большое количество выпускников относятся юриспруденция, образование, сельское хозяйство и медицина. Однако общий процент трудоустроенных выпускников по этим специальностям довольно высокий, здесь встает вопрос о том, действительно ли выпускники трудоустраиваются по специальности?

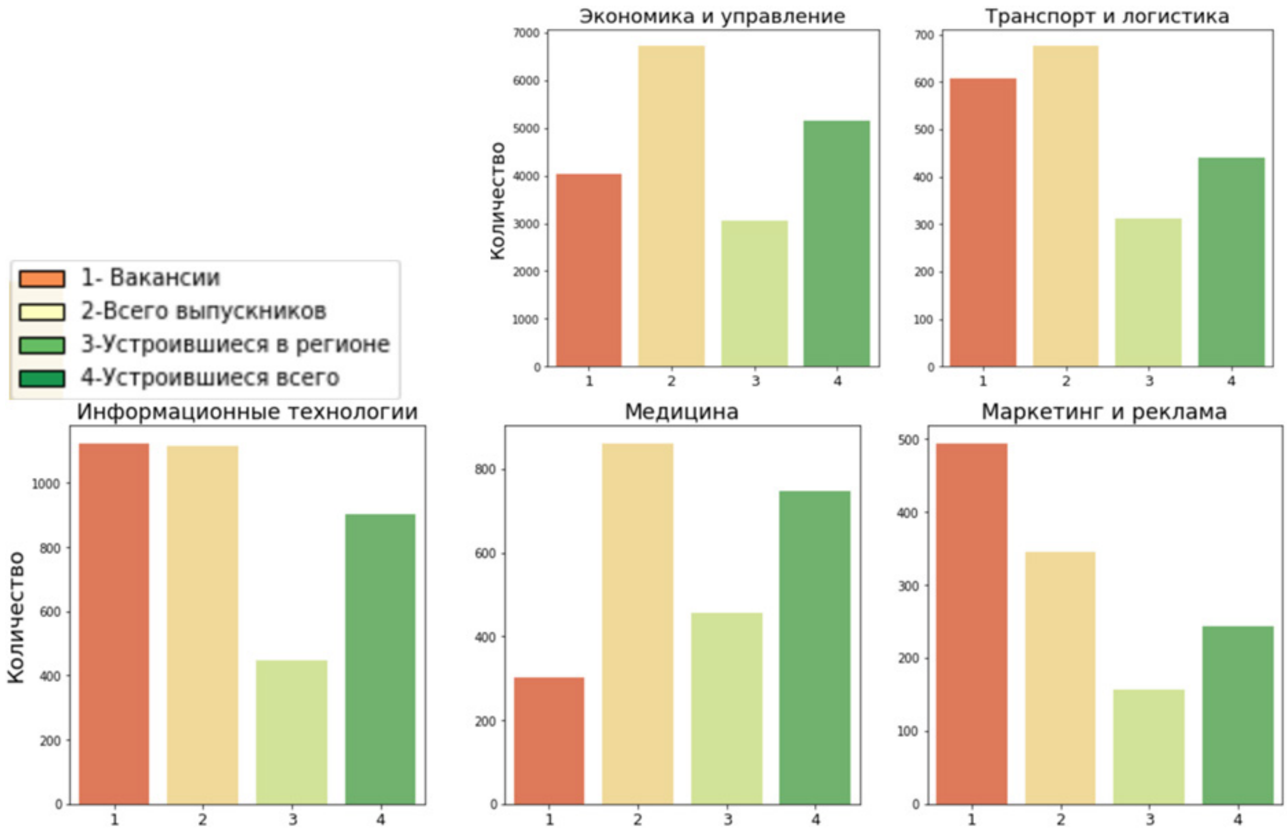



*Рис. 3. Соотношение выпустившихся и трудоустроившихся по специальностям*

2. Следует отметить группу направлений, где ситуация складывается наоборот: здесь наблюдается большое количество вакансий при маленьком количество выпускников. Сюда относятся маркетинг и реклама, сервис и туризм.

3. Очень большое количество вакансий (около четырех тысяч) и огромное количество выпускников (практически семь тысяч, среди которых более пяти тысяч трудоустроены) отмечается в экономическом секторе. Отсюда можно сделать вывод о высокой востребованности специалистов экономической сферы.

4. Оптимальное пропорциональное соотношение сохраняется в сфере информационных технологий, транспорт и логистика, фармация. Особенно стоит отметить направление информационных технологий, где количество вакансий практически точно совпадает с количеством выпускников, но баланс нарушается, так как почти половина выпускников уезжает трудоустраиваться в другие регионы.

5. В целом, к несбалансированным сферам (там, где количество вакансий и количество выпустившихся серьезно разнится) можно отнести: сельское хозяйство, юриспруденцию, пищевую промышленность, консультирование, прикладную геоэкологию.

## 2. Прогнозная модель

Для того чтобы можно было выявит оптимальные для региона показатели выпуска специалистов по различным профессиональным сферам была разработана математическая модель. В работе «Прогнозное моделирование для мониторинга и управления кадровым обеспечением программ регионального развития» [3, с. 71] представлены различные модели для анализа кадрового обеспечения. Аналогичную модель можно проработать и для данной проблематики.

В качестве процесса сбора и обработки данных был реализован следующий механизм. Система построена по модульному принципу и включает в себя такие компоненты.

1. Источниками данных выступают: данные службы занятости, объявления о найме и статистика выпустившихся и трудоустроившихся.

2. Сбор и хранение данных представляет собой предварительную обработку и структурирование и сохранение информации.

3. Обработка данных ведется на языке Python.

4. Анализ данных включает визуализацию (гистограммы, таблицы) и интерпретацию результатов.

5. На заключительном этапе осуществляется выявление тенденций и прогнозирование (моделирование и прогнозирование применимости алгоритмов).

Общая схема обработки данных приведена на рис. 4.


*Рис. 4. Схема обработки информации*

Далее приведем математическую модель определения востребованности специальностей на рынке труда. За теоретическую основу была взята модель кадровой востребованности (Н. И. Клевец, Е. А. Полищук) [4, с.12].

В основе алгоритма решения лежит метод математического программирования – сепарабельное квадратичное программирование. Для решения поставленной задачи использовалась система автоматизированных вычислений MatLab.

Источниками информации являются:

– данные с сайта вакансий hh.ru;

– данные с сайта Министерства науки и образования (официальные данные);

– экспертные оценки для определения приоритетных специальностей.

Основная схема моделирования кадровой потребности.

1) Выбирается K анализируемых специальностей высшего образования.

2) Для выбранных специальностей вычисляются показатели «количество выпустившихся всего», «количество устроившихся в регионе», «количество устроившихся вне региона».

3) Минимизируется целевая функция – взвешенная сумма квадратов отклонений устроившихся в регионе и количества вакансий по данному направлению:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{K} [w_x (D_n - \alpha_n X_n)^2]$$

с учетом ограничений

$$\sum_{n=1}^{K} X_n \le I_{max},$$

$$X_{min} \le X_n \le X_{max},$$

где $X$ – вектор искомых оптимальных планов приема абитуриентов по направлениям (специальностям); $w$ – вектор весовых коэффициентов специальностей, отражающих их приоритетность для развития региона; $D$ – вектор вакансий по направлениям подготовки; $\alpha_n$ – доля выпускников данного направления, трудоустраивающаяся в регионе, $n$ – номер направления подготовки специалистов; $I_{max}$ – суммарная численность абитуриентов в регионе по всем направлениям.

*Достоинства предлагаемой модели*:

– все исходные данные модели являются легко доступными;

– модель позволяет просто и быстро оценить примерный план приема по направлениям подготовки, актуальным в регионе на текущий момент.

*Недостатки модели*:

– моделирование осуществляется только на текущий момент, в частности, доля выпускников данного направления, трудоустраивающаяся в регионе, актуальна только в текущий момент времени;

– не учитывается миграция экономически активного населения;

– весовые коэффициенты приоритетных направлений подготовки специалистов определяются экспертным путем только на текущий момент состояния экономики.

## 3. Востребованные профессии и вузы

Что касается профессий, наиболее востребованными в Воронежском регионе эксперты служб занятости считают следующие:


*Рис. 5. Наиболее востребованные профессии*

Относительно количества вузов, в которых существуют программы обучения по востребованным специальностям, можно отметить, что наибольшее число вузов охватывает IT-направление. К таким вузам относятся: ВГУ, ВГПУ, ВГЛТУ, ВИВТ, ВГТУ. Данный факт еще раз подчеркивает, что IT-специальности очень востребованы и вузы заинтересованы в привлечении абитуриентов для обучения в данной сфере.

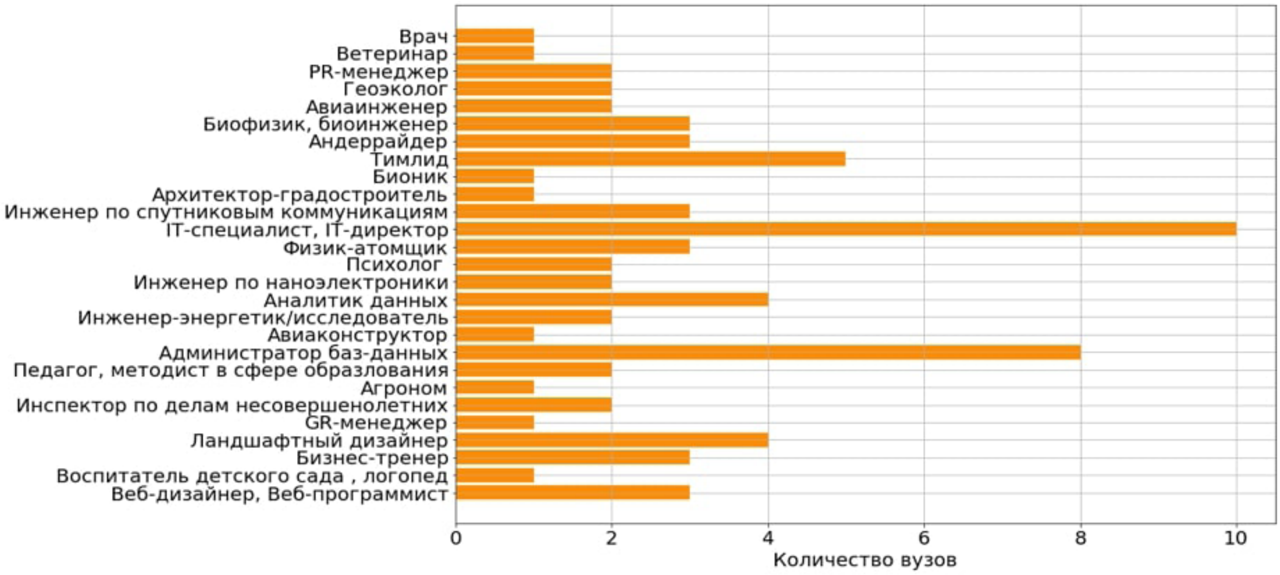



*Рис. 6. Количество программ по специальностям*

Стоит подчеркнуть, что среди востребованных специальностей, по которым в вузах региона существует наибольшее количество программ, можно выделить: IT-специалиста, педагога, тимлида (ИТ-менеджера), администратора баз данных и аналитика данных (рис. 4). Однако для получения таких специальностей как авиаконструктор, логопед, детский воспитатель, веб-дизайнер, бионик программ в вузах г. Воронежа насчитывается довольно мало.

## Заключение

Сложность и многоаспектность проблемы сбалансированности потребностей рынка труда и специальностей выпускников вузов региона обусловливает необходимость создания достаточно полной научной базы для ее решения в виде технологий прогнозного моделирования. Наиболее существенной проблемой в подходе к моделированию образовательной потребности является отсутствие универсальных решений, обеспечивающих достаточную эффективность прогнозирования с учетом разнообразных внешних и внутренних факторов.

Таким образом, результатами проведенного анализа в данной работе можно сформулировать следующие положения, характеризующие интеллектуальный потенциал региона как несбалансированное соотношение по некоторым направлениям:

1. Наибольшее количество вакансий в регионе преобладает в экономической сфере, а также в сферах маркетинг и реклама, транспорт и логистика, информационные технологии.
2. Наибольшее количество трудоустроенных выпускников в сферах экономика и управление, наука и образование, информационные технологии.
3. Наименьшее количество вакансий в регионе насчитывается в таких сферах как музыкальное искусство, социология и социальная работу, политические науки и философия.
4. К наиболее востребованным профессиям в регионе относятся: веб-дизайнер, веб-программист, воспитатель детского сада, бизнес-тренер, ландшафтный дизайнер, GR-менеджер, агроном, педагог, методист в сфере образования, администратор баз-данных, аналитик данных, инженер по наноэлектроники, психолог, физик-атомщик, IT-специалист, IT-директор, архитектор-градостроитель, бионик, тимлид, биофизик, биоинженер, авиаинженер, геоэколог, PR-менеджер, врач.

**Благодарности**

Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-29-07400 мк «Информационно-аналитический инструментарий оценки человеческого капитала как драйвера развития цифровой экономики региона»

**Литература**

1. Экономика образования. – URL: https://www.rbc.ru/tags/.ru (дата обращения 12.07.2020)
2. Anaconda. – URL: https://www.anaconda.com (дата обращения: 12.07.2020).
3. *Давидюк Е. С., Шишаев М. Г., Быстров В. В.* Прогнозное моделирование для мониторинга и управления кадровым обеспечением программ регионального развития // Институт информатики и математического моделирования – С. 61–76.
4. Мониторинг соответствия профессионального образования потребностям рынка труда / С. Д. Валентий, П. В. Зрелов, В. В. Кореньков, С. Д. Белов // Общественные науки и современность. – № 3. – С. 12.
5. Поиск вакансий. – URL: https://voronezh.hh.ru (дата обращения 12.07.2020).
6. Министерство образования и науки Российской Федерации. – URL: http://vo.graduate.edu.ru/passport#/?items=20&slice=6&year=2015&year_monitoring=2016&board=1 (дата обращения 12.07.2020)
7. Востребованные профессии в Воронеже. – URL: https://vuzopedia.ru/professii /region/city/19/7 (дата обращения 12.07.2020).

УДК 519.81

# РАЗРАБОТКА СТИМУЛИРУЮЩЕГО МЕХАНИЗМА СОГЛАСОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ АГЕНТОВ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ СОВМЕСТНЫХ ПРОЕКТОВ

**Ю. В. Бондаренко, Азиз Аммар Имад**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Настоящая статья посвящена разработке механизма, позволяющего повысить эффективность управления ресурсами агентов за счет формирования оптимального пакета проектов и согласованного распределения прибыли от его реализации. Особенность предлагаемого механизма является его направленность на стимулирование агентов к активной деятельности на стадиях инициализации и реализации проектов объединения. Основу предлагаемого подхода составляют математические модели и методы. На первом этапе механизма отыскание оптимального пакета проектов предлагается осуществлять на основе модели дискретной оптимизации. Для реализации второго этапа, связанного с распределением полученной прибыли, вводится понятие согласованного распределения прибыли и описывается его связь с решением кооперативной игры. Основу этапа составляет алгоритм согласованного распределения прибыли с учетом активности агентов. Разработанный программный продукт позволяет автоматизировать практические расчеты этапов механизма.

**Ключевые слова:** агенты, управление ресурсами, согласование, стимулирование, совместные проекты, механизм, математическая модель, объединение, прибыль, распределение прибыли.

## Введение

Одной из форм взаимодействия элементов (агентов) социально-экономической системы любого уровня является объединение или кооперация, формируемые на основе принципов организации или самоорганизации. Экономическими примерами могут случить различные объединения хозяйствующих субъектов – финансово-промышленные группы, холдинги, ассоциации, концерны и т. д. [1–3].

Объединяясь, агенты создают подсистему, которая, как правило, носит временный характер. Мотивом к кооперации является получение дополнительной выгоды в силу достижения синергетического эффекта, а ее необходимым условием – наличие общих интересов участников, которые трансформируются в общесистемные интересы объединения, общие цели и совместные проекты.

Одной из важнейших задач управляющего центра объединения является эффективное управление совокупными ресурсами агентов. С одной стороны, возникает задача выбора оптимального набора проектов, обеспечивающих объединению получение максимальной выгоды (прибыли). С другой стороны, каждый агент преследует частные интересы и заинтересован в получении как можно большей доли в совокупной прибыли. Поэтому процесс распределение прибыли от реализации проектов объединения агентов носит конфликтный характер. Поиск инновационных механизмов, обеспечивающих эффективное управление ресурсами агентов при реализации проектов и согласованное распределение полученной прибыли, учитывающее интересы и вклад каждого участника, является актуальной задачей, решение которой невозможно без привлечения математических методов и моделей.

Теоретической основой решения поставленной задачи послужили передовые отечественные и зарубежные исследования в области формирования и функционирования интегрированных хозяйствующих структур и объединений, управления ресурсами (в том числе и при управлении проектами), согласования интересов и стимулирования агентов.

Вопросам исследования интегрированных структур, в частности, интегрированных хозяйствующих субъектов, посвящено достаточно большое количество научной литературы. Изучается организация структур, связи между элементами, взаимодействие в экономическом и правовом поле [1–4].

Формированию механизмов распределения централизованных ресурсов между активными агентами в организационных системах посвящены многочисленные работы В. Н. Буркова, Д. А. Новикова, А. В. Щепкина и др. [5–6]. Вопросы распределения ресурсов при планировании и реализации проектов исследованы в работах С. А. Баркалова, П. Н. Курочки, P. Brucker, C. Artigues и мн.др. [7–10]. Вопросы согласования интересов контрагентов в разрезе теории контрактов подробно рассмотрены в работах Ж. Тироля, П. Болтона, Е. Берлингер, А. Ловас и др. [11–13].

Алгоритмы согласования интересов между предприятиями финансово-промышленной группы при формировании плана нововведений представлены в [14]. В работе рассматривается распределение прибыли пропорционально вложенным средствам. Проведенный нами анализ предлагаемых алгоритмов показал, что такое распределение прибыли может привести к конфликту интересов и выходу агента (группы агентов) из объединения. Кроме того, одним из допущений подхода является отсутствие приоритета в получении прибыли, что приводит к недостаточной мотивации к активной реализации проектов.

Математический подход к согласованию противоречивых участников (игроков) конфликтной ситуации (игры) исследуется в рамках теории кооперативных игр или игр в форме характеристической функцией [15–17]. Обоснованные теоретические положения, связанные с построением недоминируемых дележей, образующих С-ядро, взяты за основу подхода к согласованному распределению прибыли объединения, предлагаемого в настоящей статье. Учтено, что дележи С-ядра обладают рядом недостатков, среди которых – множественность элементов и невозможность учета активности каждого участника в достижение целей объединения.

Предлагаемый в настоящей статье подход к выбору единственного распределения совместной прибыли агентов основан на мотивации агентов к активному участию в инициализации и реализации проектов, поскольку фактор активности существенно влияет на размер прибыли объединения. Решение данной задачи опирается на современные механизмы мотивации в организационных, иерархических и социально-экономических системах, представленные в работах Ю. В. Бондаренко, И. В. Горошко, Д. А. Новикова, О. И. Горбаневой, Г. А. Угольницкого и мн. др.[5, 18–20].

Целью настоящего исследования является разработка ***стимулирующего механизма согласованного управления ресурсами агентов***, позволяющего:

– повысить эффективность управления ресурсами агентов за счет обеспечения синергетического эффекта от совместной реализации проектов;

– стимулировать агентов к активной деятельности в вопросах инициализации и реализации прибыльных проектов объединения;

– согласовать интересы агентов при распределении прибыли от реализации проектов, обеспечивая каждому агенту преимущества кооперации с позиции достижения собственных целей.

Отличительной особенностью предлагаемого в настоящей работе механизма состоит в том, что он не только обеспечивает согласование интересов агентов и устойчивость объединения, но и стимулирует агентов в активному участию в проектах объединения. Программная реализация механизма делает его удобным для практического использования.

## 1. Материалы и методы

Будем рассматривать активную систему, включающую следующие элементы:

– управляющий центр (УЦ);

– агенты, число которых обозначим через $n$.

В роли агента может выступать предприятие, индивидуум, объединение хозяйствующих субъектов, организация и т.п. В качестве важного свойства агентов отметим их активность – способность формулировать собственные цели и определенная самостоятельность в принятии решений по их достижению.

Полагаем, что каждый агент $A_i$, где $i = 1,...,n$, располагает $M$ видами ресурсов, которые он готов инвестировать в реализацию проектов. В числе таких ресурсов – финансовые средства, материальные ресурсы, основные фонды, трудовые ресурсы и т. п. Количества доступных для инвестиций ресурсов каждого агента представим в виде набора:

$$R^i = \left(R_1^i, R_2^i, ..., R_M^i\right),$$

где $R_m^i$ – количество ресурса вида $m$ агента $A_i$, где $R_m^i \geq 0$, $m = 1,...,M$.

Обладая активностью в принятии инвестиционных решений, каждый агент может:

– самостоятельно, собственными средствами, формировать и реализовывать пакет проектов;

– объединяясь с другими агентами системы, передавать ресурсы в распоряжение управляющего центра («централизованный фонд» системы) для реализации совместных проектов.

Полагаем, что экономическими целями принятия решений отдельными агентами является максимизация собственной прибыли от реализации проектов. Целями управляющего центра является повышение эффективности функционирования системы в целом и сохранение ее системных свойств.

Предлагаемый в настоящей работе ***стимулирующий механизма согласованного управления ресурсами агентов при реализации совместных проектов*** включает два укрупненных этапа:

**Этап 1.** Формирование оптимального пакета проектов, обеспечивающего получение максимальной совокупной прибыли объединения агентов.

**Этап 2.** Согласованное распределение прибыли между агентами, обеспечивающее компромисс интересов и стимулирование агентов к активному участию к инициализации и реализации проектов.

На первом этапе каждый агент $A_i$ направляет управляющему центру свои предложения вариантов тех проектов, в реализации которых он заинтересован:

$$P^i = \left\{P_1^i, P_2^i, ..., P_{Q_i}^i\right\},$$

где $Q_i$ – количество проектов, $P^i$ – множество проектов, $P_1^i,...,P_{Q_i}^i$ – перечень проектов агента $A_i$.

Полагаем, что каждый проект рассчитан на определенный промежуток времени (например, на один год). Для каждого проекта $P_q^i$ $(i = 1,...,n,\ q = 1,...,Q_i)$ приводится обоснование затрат ресурсов каждого вида $m$ в объеме $c_{mq}^i$, а также величины выгоды (прибыли) $\Pi_{iq}$, которую ожидается получить от реализации проекта $q$ агента $A_i$. При этом собственных ресурсов агента может быть достаточным или недостаточным для самостоятельной реализации проектов множества $P_i$.

Кроме того, каждый агент предлагает для реализации проектов объединения собственные ресурсы в объемах, задаваемых вектором $R^i$.

Таким образом, управляющий центр получает информацию о множестве проектов объединения $P = \bigcup_{i=1}^{n} P^i = \left\{P^1, P^2, ..., P^n\right\} = \left\{P_1^1, P_2^1, ..., P_{Q_1}^1, ..., P_1^n, ..., P_{Q_n}^n\right\}$, а также о доступных количествах каждого вида ресурсов: $R_m = \sum_{i=1}^{n} R_m^i$, $m = 1,...,M$.

Практическую реализацию первого этапа механизма (формирование оптимального пакета проектов системы) предлагается осуществлять на основе решения оптимизационной задачи.

Введем в рассмотрение следующие бинарные переменные:

$$y_{iq} = \begin{cases} 1, & \textit{если проект } P_q^i \textit{ включается в пакет,} \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Математическая задача формирования оптимального пакета проектов системы имеет следующий вид:

$$f(y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q_i}\Pi_{iq}\cdot y_{iq}\to\max, \qquad (1)$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q_i}c_{mq}^{i}\cdot y_{iq}\le R_m,\ m=1,\dots,M,\\ y_{iq}\in\{0,1\},\ i=1,\dots,n;\ q=1,\dots,Q_i.\end{cases} \qquad (2)$$

Задача (1)–(2) является многомерной задачей о ранце, в качестве решения которой может быть выбран метод ветвей и границ. В случае, если система ограничений (2) содержит одно неравенство, то (1)–(2) представляет собой задачу о ранце. Последнее возможно, когда, например, агенты на реализацию проектов выделяют только финансовые средства.

Решением задачи (1)–(2) является оптимальный вектор значений переменных $y^*=\left(y_{11}^*,\dots,y_{1Q_1}^*,\dots,y_{n1}^*,\dots,y_{nQ_n}^*\right)$. На основе полученного решения задачи формируется оптимальный пакет проектов объединения (системы) агентов $P^*=\left\{P_q^i\in P\mid y_{iq}^*=1\right\}$, а также рассчитывается оптимальная прибыль объединения $f^*=f\left(y^*\right)$, которую ожидается получить от реализации оптимального пакета проектов.

Вторым этапом механизма является построение правила и алгоритма распределения прибыли $f^*$ между агентами системы.

Обозначим через $\tilde{f}_i$ размер прибыли, которую получает в результате распределения агент $A_i$ $(i=1,\dots,n)$, $\tilde{f}=\left(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\dots,\tilde{f}_n\right)$ – искомый набор (вектор) распределения прибыли.

При этом очевидно, что $\tilde{f}_i\ge 0$ для всех $i=1,\dots,n$ и $\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i=f^*$.

Будем говорить, что распределение $\tilde{f}$ обеспечивает компромисс интересов агентов системы, или является ***согласованным***, если выполняется следующее ***условие согласованности***: *ни одному из объединений агентов не выгодно самостоятельно реализовывать собственные проекты, отделившись от остальных агентов системы.*

Для формального описания условия согласованности рассмотрим множество индексов агентов системы: $I=\{1,2,\dots,n\}$, а также всевозможные непустые подмножества этого множества (коалиции агентов), число которых $2^m-1$. Подмножество, включающее агентов с номерами $i_1,i_2,\dots,i_k$ обозначим как $I_{i_1i_2,\dots,i_k}$. Пусть $f_{i_1,\dots,i_k}^*$ – прибыль, которую самостоятельно может получить коалиция агентов $I_{i_1i_2,\dots,i_k}$.

В рамках введенных обозначений условие согласованности формализовано можно представить в виде следующей системы неравенств:

$$\begin{cases}\tilde{f}_i\ge f_i^*, i=1,\dots,n;\\ \tilde{f}_{i_1}+\tilde{f}_{i_2}+\dots+\tilde{f}_{i_k}\ge f_{i_1i_2\dots i_k}^*,\ \forall I_{i_1i_2\dots i_k}\subset I;\\ \tilde{f}_1+\tilde{f}_2+\dots+\tilde{f}_n=f^*.\end{cases} \qquad (3)$$

Неравенства, выделенные в первую строку условий (3), в теории кооперативных игр носят название условия индивидуальной рациональности, а в последней строке – условия коллективной рациональности [15–16].

Величину прибыли $f_i^*$ каждого отдельного агента в системе (3) управляющий центр может рассчитать как максимальное значение прибыли агента $A_i$, которую он может получить в результате реализации собственных проектов собственными ресурсами. Модель, которая позволяет произвести такие расчеты, имеет следующий вид:

$$f_i\left(x^i\right)=\sum_{q=1}^{Q_i}\Pi_{iq}\cdot x_{iq}\to\max, \qquad (5)$$

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^{Q_i} c_{mq}^i \cdot x_{iq} \le R_m^i,\ m = 1,\dots,M, \\ x_{iq} \in \{0,1\},\ q = 1,\dots,Q_i. \end{cases} \tag{6}$$

Переменные модели (5)–(6) являются бинарными. Если в оптимальной точке $x_{iq}^* = 1,$ то проект $q$ включается в оптимальный пакет проектов агента $A_i$, а если $x_{iq}^* = 0,$ то нет. Тогда $f_i^* = f_i\left(\left(x^i\right)^*\right)$. Задача (5)–(6) относится, как и задача (1)–(2), к многомерной задаче о рюкзаке и может быть решена теми же методами.

Аналогичная задача формируется для расчета прибыли каждой коалиции агентов $I_{i_1 i_2,\dots,i_k}$ :

$$f_{i_1 i_2 \dots i_k}(z) = \sum_{i \in I_{i_1 \dots i_k}} \sum_{q=1}^{Q_i} \Pi_{iq} \cdot z_{iq} \to \max, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in I_{i_1 \dots i_k}} \sum_{q=1}^{Q_i} c_{mq}^i \cdot z_{iq} \le R_m^{i_1} + R_m^{i_2} + \dots + R_m^{i_k},\ m = 1,\dots,M, \\ z_{iq} \in \{0,1\},\ i \in I_{i_1 \dots i_k};\ q = 1,\dots,Q_i. \end{cases} \tag{8}$$

Оптимальные значения бинарных переменных $z_{iq}^*$ модели (7)–(8), аналогично переменным задач (1)–(2) и (5)–(6), определяют тот набор проектов, который обеспечивает коалиции агентов получение максимальной прибыли с условием ограничений на собственные ресурсы: $f_{i_1 i_2 \dots i_k}^* = f_{i_1 i_2 \dots i_k}\left(z^*\right)$.

Можно показать, что оптимальные значения функций цели задач (1)–(2), (5)–(6) и (7)–(8) обладают следующими свойствами:

1) сумма оптимальных значений функции цели $n$ задач (5)–(6) для каждого отдельного агента не превосходит оптимальное значение функции цели задачи (1)–(2):

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^* \le f^*;$$

2) для любых двух непересекающихся коалиций агентов $I_1$ и $I_2$ справедливо следующее неравенство:

$$f_{I_1 \cup I_2}^* \ge f_{I_1}^* + f_{I_2}^*.$$

Отмеченные свойства гарантируют существование решения системы (3) и позволяют рассматривать задачу распределения прибыли как игру в форме характеристической функции, а решение системы неравенств (3) (согласованное распределение прибыли) как элемент С-ядра [15].

Заметим, что согласованное распределение прибыли $\tilde{f} = \left(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n\right)$, представляющее решение системы (3) стимулирует агентов к активному поиску проектов, обеспечивающих получение высокой прибыли.

Система (3) может иметь множество решений, каждое из которых является согласованным распределением прибыли. Представляется логичным, что окончательное распределение прибыли должно обладать не только свойством согласованности, но и мотивировать агентов на активное участие и инициализацию проектов как настоящих, так и будущих. В основе формирования такого распределения прибыли предлагается использовать количественные показатели активности каждого агента в реализации проектов.

### *Алгоритм согласованного распределения прибыли с учетом активности агентов*

*Шаг 1.* Управляющий центр для каждого агента $A_i$ формирует нижнюю $\underline{\Delta_i}$ и верхнюю $\overline{\Delta_i}$ границы стимулирующей надбавки $\Delta_i$, где $\Delta_i \in \left[\underline{\Delta_i}, \overline{\Delta_i}\right]$.

*Шаг 2.* Эксперты управляющего центра определяют $\alpha_i$ – количественный показатель активности агента $A_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

*Шаг 3.* Решение задачи формирования оптимального вектора согласованного распределения прибыли агентов с учетом активности:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \frac{\Delta_i - \underline{\Delta_i}}{\overline{\Delta_i} - \underline{\Delta_i}} \to \max, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \tilde{f}_i \geq f_i^* + \Delta_i, i = 1, \ldots, n; \\ \tilde{f}_{i_1} + \tilde{f}_{i_2} + \ldots + \tilde{f}_{i_k} \geq f_{i_1 i_2 \ldots i_k}^*, \quad \forall I_{i_1 i_2 \ldots, i_k} \subset I, \\ \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \ldots + \tilde{f}_n = f^*, \\ \Delta_i \in \left[ \underline{\Delta_i}, \overline{\Delta_i} \right]. \end{cases} \tag{10}$$

Поскольку задача (9)–(10) с переменными $\tilde{f}_i, \Delta_i$ (где $i = 1, \ldots, n$) является задачей линейного программирования, то для ее решения может быть выбран симплекс-метод. Оптимальное решение задачи $\tilde{f}^* = \left( \tilde{f}_1^*, \tilde{f}_2^*, \ldots, \tilde{f}_n^* \right)$ является согласованным распределением прибыли с учетом активности агентов.

## 2. Результаты и обсуждение

Для практической реализации стимулирующий механизма согласованного управления ресурсами агентов разработан программный продукт. Программа написана на языке программирования C# в среде разработки Microsoft Visual Studio Enterprise 2015 версии 14.0.25431.01. Приведем пример практических расчетов.

Рассмотрим объединение, включающее 3 агентов: $A_1$, $A_2$, $A_3$. Агенты $A_1$ и $A_3$ предлагают к реализации по 5 проектов, агент $A_2$ – 4 проекта. Полагаем, что при реализации проектов задействованы только финансовые ресурсы агентов. Проекты каждого агента, затраты на их реализацию, планируемая прибыль от реализации каждого проекта и финансовые средства каждого агента, выраженные в условных денежных единицах, представлены в табл. 1.

Таблица 1

*Исходные данные*

| *Агенты* | *Проекты* | *Затраты на реализацию проекта, ден.ед.* | *Прибыль от реализации проекта, ден.ед* | *Финансовые средства предприятия, ден. ед.* |
|---|---|---|---|---|
| Агент 1 | 11 | 200 | 70 | 600 |
| | 12 | 250 | 64 | |
| | 13 | 120 | 18 | |
| | 14 | 300 | 120 | |
| | 15 | 150 | 18 | |
| Агент 2 | 21 | 180 | 57.6 | 300 |
| | 22 | 250 | 75 | |
| | 23 | 100 | 25 | |
| | 24 | 200 | 36 | |
| Агент 3 | 31 | 400 | 72 | 1000 |
| | 32 | 300 | 36 | |
| | 33 | 200 | 10 | |
| | 34 | 300 | 80 | |
| | 35 | 500 | 100 | |

Результаты решения оптимизационных задач формирования оптимального пакета проектов объединения (1)–(3), каждого агента в отдельности (5)–(6) и коалиций агентов (7)-(8) представлены в табл. 2.

Таблица 2

*Результаты решения задач формирования оптимальных пакетов проектов*

| *Агенты* | *Оптимальный пакет проектов* | *Оптимальная прибыль* |
|---|---|---|
| Агент 1 | 11, 14 | 190 |
| Агент 2 | 21, 23 | 82,6 |
| Агент 3 | 33, 34, 35 | 190 |
| Агент 1, Агент 2 | 11, 13,14, 21, 23 | 290.6 |
| Агент 1, Агент 3 | 11, 12, 14, 34, 35 | 434 |
| Агент 2, Агент 3 | 21,22, 34,35 | 312,6 |
| Объединение | 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 34 | 545,6 |

Как показали результаты расчетов, в оптимальный пакет проектов объединения агентов вошли 4 проекта агента $A_1$, 4 проекта $A_2$ и только один проект $A_3$.

Согласованным распределением прибыли является вектор $\tilde{f} = \left(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\right)$, координаты которого удовлетворяют условиям индивидуальной и коллективной рациональности: $\tilde{f}_1 \geq 190$, $\tilde{f}_2 \geq 82,6$, $\tilde{f}_3 \geq 190$, $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \tilde{f}_3 = 545,6$.

Выберем следующие значения показателей активности агентов: $\alpha_1 = 0,4$, $\alpha_2 = 0,5$, $\alpha_3 = 0,1$.

Выбранные интервалы изменения стимулирующей надбавки: $40 \leq \Delta_1 \leq 50$, $5 \leq \Delta_2 \leq 40$, $2 \leq \Delta_3 \leq 10$.

Модель (9)–(10) принимает следующий вид:

$$0,4 \cdot \frac{\Delta_1 - 40}{10} + 0,5 \cdot \frac{\Delta_2 - 5}{35} + 0,1 \cdot \frac{\Delta_3 - 2}{8} \to \max,$$

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 - \Delta_1 \geq 190, \tilde{f}_2 - \Delta_2 \geq 82,6, \tilde{f}_3 - \Delta_3 \geq 190, \\ \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 \geq 290,6, \tilde{f}_1 + \tilde{f}_3 \geq 434, \tilde{f}_2 + \tilde{f}_3 \geq 312,6, \\ \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \tilde{f}_3 = 545,6, \\ 40 \leq \Delta_1 \leq 50, 5 \leq \Delta_2 \leq 40, 2 \leq \Delta_3 \leq 8. \end{cases}$$

Решением задачи является следующее согласованное распределение прибыли с учетом активности агентов:

$$\tilde{f}_1 = 233, \quad \tilde{f}_2 = 111,6, \quad \tilde{f}_3 = 201.$$

Полученный вектор распределения прибыли принадлежит С-ядру, т.е. является недоминируемым. При таком распределении всем агентам и коалициям выгодно объединяться для совместной реализации проектов. Учет коэффициентов значимости и интервалов стимулирующей добавки мотивирует агентов к активному поиску и реализации эффективных проектов для объединения.

**Заключение**

В настоящей статье разработан стимулирующий механизм согласованного управления ресурсами агентов при реализации совместных проектов, основу которого составляют математические модели и методы. На первом этапе механизма осуществляется формирование оптимального пакета тестов объединения исходя из предложений агентов и их ресурсной возможности. Оптимальный пакет тестов, обеспечивающий получение наибольшей прибыли объединения, предлагается формировать на основе решения задачи дискретной оптимизации. На втором этапе механизма осуществляется согласованное распределение прибыли между агентами. В работе введено понятие согласованного распределения прибыли, приведено условие согласованности и обосновано, что такое распределение прибыли является С-ядром игры в форме характеристической функции. Выбор единственного вектора согласованного распределения из множества возможных предлагается осуществлять на основе показателей активности агентов в инициализации и реализации проектов на основании разработанного алгоритма. Такое распределение обеспечивает не только согласование интересов участников объединения, но и мотивирует их к активной деятельности, направленной на получение наибольшей прибыли объединения. Разработанный программный продукт позволил провести практические расчеты, а обсуждение результатов с руководителями компаний г. Воронежа подтвердило практическую значимость механизма и позволило наметить пути его дальнейшего развития.

**Литература**

1. *Звягинцева Е. В.* Эффективность интегрированной структуры хозяйствующих субъектов / Е. В. Звягинцева // Вестник тихоокеанского государственного экономического университета. – 2007. – № 2 (42). – С. 3–12.

2. *Егорова А. В.* Интеграция хозяйствующих субъектов как синтезирующая закономерность / А. В. Егорова// Вестник Саратовского государственного социально-экономического университета. – 2018. – № 4(73). – С. 28–32.

3. *Долгих Е. Н.* Формирование интегрированного пространства и интегрированной информационной среды инновационных хозяйствующих субъектов / Е. Л. Долгих, А. В. Семенихина // Экономические и гуманитарные науки. – 2019.– № 3(326). – С. 97–108.

4. *Закирова Э. Р.* Интегрированные хозяйствующие субъекты: вопросы управления и экономической безопасности / Э. Р. Закирова, К.В. Ростовцев // Управленец. – 2015. – № 6. – С. 18–24.

5. *Новиков Д. А.* Теория управления организационными системами / Д. А. Новиков. – Москва : Издательство физико-математической литературы, 2007. – 584 с.

6. *Burkov V.* Methodology and Technology of Control System Developmen t / V. Burkov, A. Shchepkin, V. Irikov., V. Kondratiev // Studies in Systems, Decision and Control. – 2019. – Vol. 181. – P. 29–38.

7. *Barkalov S. A.* Designing Systems Of Group Stimulation In The Management Of Energy Complex Objects / S. A. Barkalov, V. N. Burkov, P. N. Kurochka // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2019. – Vol. 983. – P. 55–68.

8. *Barkalov S. A.* Model Of Formation Plans For The Urban Areas Development / S. A. Barkalov, P. N. Kurochka, M. A. Pinaeva // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering International Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019». Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. – 2019. – P. 62035.

9. *Brucker P.* Scheduling Algorithms / Peter Brucker. – Berlin: Springer, 2007. – 371 p.

10. *Artigues C.* Resource-Constrained Project Scheduling / C. Artigues, S. Demassey, E. Neron.– London: ISTE Ltd, 2008. – 308 p.

11. *Tirole J.* The Theory of Corporate Finance / J. Tirole.– Princeton : Princeton University Press, 2006. – 645 p.

12. *Berlinger E.* State Subsidy and Moral Hazard in Corporate Financing / E. Berlinger, A. Lovas, P. Juhasz // CEJOR. – 2017. – No 25.– P. 743–770.

13. *Болтон П.* Теория контрактов / П. Болтон, М. Деватрпоинт. – Москва : Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2019. – 800 с.

14. *Кузин Б. И.* Методы и модели управления фирмой / Б. И. Кузин, В. Н. Юрьев, Г. М. Шахдинаров. – Санкт-Петербург : ПИТЕР, 2001. – 432 с.

15. *Колокольцов В. Н.* Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации / В. Н. Колокольцов, О. А. Малафеев. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2012. – 624 с.

16. *Харшаньи Дж.* Общая теория выбора равновесия в играх / Дж. Хпршаньи, Р. Зельтен. – Санкт-Петербург: Экономическая школа, 2001.– 424 с.

17. *Астанин С. В.* Конфликтно-игровой подход к распределению ресурсов в организационной системе / С. В. Астанин, Н. К. Жуковская// Прикладная информатика. – 2011. – № 4(34). – С. 125–132.

18. *Bondarenko Y. V.* The Task of Coordinating Social and Economic Indicators of the Development of the Region and the Mathematical Approach to its Solution / Y. V. Bondarenko, I. V. Goroshko, I. L. Kashirina // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203. – P. 012037. (doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012037).

19. *Bondarenko Yu.V.* Aggregated multi-criteria model of enterprise management engineering, taking into account the social priorities of the region / Yu. V. Bondarenko, T. A. Sviridova, T. A. Averina // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering .– T. 537.– C. 042045 (doi:10.1088/1757-899X/537/4/042045).

20. *Gorbaneva O. I.* Static models of coordination of social and private interests in resource allocation / O. I. Gorbaneva, G. A. Ougolnitsky // Automation and Remote Control. – 2018. – V. 29, No 7. – P. 1319–1341.

УДК 519.81

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПРОМИССНОЙ СТАВКИ НАЛОГА НА ПРИБЫЛЬ ПРЕДПРИЯТИЙ РЕГИОНА

**Ю. В. Бондаренко, О. В. Бондаренко**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья посвящена вопросам разработки математического инструментария формирования компромиссной ставки налога на прибыль, обеспечивающей согласование интересов региональных органов власти и руководства предприятий. Предлагается алгоритм формирования компромиссной ставки налога на прибыль группы предприятий региона. Основу алгоритма составляет агрегированная дискретная математическая модель оценки влияния ставки налога на прибыль предприятий. Модель описывает динамику выпуска, прибыли и чистой прибыли группы предприятий в зависимости от ставки налога на прибыль в бюджет региона. Параметры модели рассчитываются на основе доступной для администрации региона статистической информации. Результаты практических расчетов и их обсуждение с представителями региональных органов власти подтвердили возможность применения подхода в практике регионального управления.
**Ключевые слова:** налог, ставка налога на прибыль, предприятие, регион, компромисс, математические методы.

## Введение

Социально-экономическое развитие любого государства во многом определяется успешностью функционирования предприятий его экономической системы. Высокие результаты функционирования отечественных предприятий, выраженные в финансово-экономических показателях, являются основой не только собственной перспективы успешного развития, но и гарантом экономической безопасности региона. При этом, с одной стороны, каждое предприятие является субъектом налогообложения и источником пополнения бюджета региона. В этом случае региональные органы власти заинтересованы в получении как можно большей величины налоговых отчислений. С другой стороны, в интересах и региональных органов власти, и руководства предприятий – получение наибольшей чистой прибыли, которая может быть инвестирована в развитие производства. Описанное противоречие носит объективный характер, а согласование интересов региона и предприятий на основе поиска компромиссного значения ставки налога на прибыль в региональный бюджет является задачей, актуальной для любого территориального образования.

Проблема налогового регулирования предприятий рассматривалась и продолжает рассматриваться во многих исследованиях. Опыт различных стран в проведении фискальной политики анализируется в работах [1–3]. Вопросы оптимизации налоговой системы, ее согласование с ценовой политикой отрасли и заработной платой на предприятиях, представлены в [4–5]. Формирование и совершенствование механизмов налогового регулирования с использованием математических методов, освещены в исследованиях ([2, 6–9]).

Целью настоящей работы является разработка моделей и алгоритмов поддержки формирования ставки налога на прибыль в бюджет региона, обеспечивающей компромисс между поступлениями в региональный бюджет и чистой прибылью предприятий региона. Особенностью предлагаемого подхода является использование доступной статистической информации, что делает его возможным для практического использования региональными органами власти.

## 1. Материалы и методы

Настоящее исследование основывается на формальном представлении экономической системы региона как совокупности следующих взаимосвязанных элементов: региональные органы власти (администрация региона); экономическая система региона;

Экономическая система региона рассматривается как совокупность взаимодействующих предприятий, осуществляющих экономическую деятельность на территории региона. Полагаем, что предприятия региона могут быть объединены в группы (классы) так, что для предприятий одной группы ставка налога на прибыль в бюджет региона должна быть одинаковой и, возможно, отличной от ставки другой. Такими классами могут служить отрасли или виды экономической деятельности. Будем считать, что предприятия региона разделены на $M$ групп.

Рассмотрим одну из групп предприятий. Для удобства индекс группы будем опускать. Ставка налога на прибыль группы предприятий ($\alpha$) состоит из двух компонент:

$$\alpha = \alpha^{fed} + \alpha^{reg},$$

где $\alpha^{fed}$ – ставка налога на прибыль в Федеральный бюджет, единая для всех предприятий региона; $\alpha^{reg}$ – ставка налога на прибыль в региональный бюджет (региональная компонента) для данной группы предприятий, которая устанавливается на уровне региона и может принимать значения из заданного интервала $\underline{\alpha} \le \alpha^{reg} \le \overline{\alpha}$.

Полагаем, что в момент времени $t = 0$ администрация региона должна определить региональную компоненту ставки налога на прибыль для группы предприятий, которая будет действовать последующие $T$ лет.

Если в году $t$ $(t = 1,\dots,T)$ совокупная прибыль группы предприятий до налогообложения составит величину $P_t$, то региональный бюджет пополнится на величину $R_t = \alpha^{reg} \cdot P_t$. Соответственно, прибыль предприятий класса за вычетом налога составит величину $Z_t = \alpha \cdot P_t$. Будем считать, что региональные органы власти (возможно совместно с руководством предприятий) определили нижнюю границу налоговых поступлений в бюджет региона $\underline{R_t}$ и минимальное значение прибыли группы предприятий за вычетом налогов $\underline{Z_t}$, $t = 1,\dots,T$.

Будем говорить, что ставка налога на прибыль $\alpha$ обеспечивает *согласование интересов* предприятий группы и региональных органов власти (является *компромиссной*), если выполняются следующие условия:

$$R_t \ge \underline{R_t},\;\; Z_t \ge \underline{Z_t},\;\; t = 1,\dots,T.$$

Сложность формирования компромиссной ставки налога на прибыль обусловлена тем, что в момент принятия решений $t = 0$ прибыль предприятий класса в каждый год периода $1,\dots,T$ является неизвестной величиной. Осуществить анализ влияния налоговой политики на величину прибыли группы предприятий и налоговых поступлений в бюджет региона мы предлагаем на основе математической модели.

Для формирования математической модели будем полагать, что администрации региона известна следующая агрегированная статистическая информация о результатах деятельности группы предприятий: $Z_0$ – чистая прибыль за год $t = 0$; $K_0$ – основные средства на начало года $t = 1$; $k$ – коэффициент фондоотдачи как отношение основных средств на начало года $t = 0$ к выручке от продаж; $\delta$ – доля чистой прибыли, расходуемая на реинвестирование $\left(\delta \in [0,1]\right)$; $c$ – удельная себестоимость выпуска продукции; $\beta$ – ставка налога на объем выпуска.

Введем следующие обозначения: $K_t$ – основные средства группы предприятий на конец года $t$; $I_t$ – объем инвестиций в предприятия группы в году $t$; $Y_t$ – объем выпускаемой продукции предприятиями группы. *Агрегированная дискретная модель оценки влияния ставки налога на прибыль группы предприятий* представляет систему соотношений:

$$K_t = K_{t-1} + \delta \cdot Z_{t-1} + I_t; \tag{1}$$

$$Y_t = k \cdot K_t; \;\; P_t = (1-c) \cdot Y_t; \tag{2}$$

$$Z_t = \left(1 - \left(\alpha^{fed} + \alpha^{reg}\right)\right) \cdot P_t - \beta \cdot Y_t, \;\; t = 1, \ldots, T. \tag{3}$$

## 2. Результаты и обсуждение

На основании описанного подхода сформирован *алгоритм формирования компромиссной ставки налога на прибыль группы предприятий региона*, включающий следующую последовательность шагов:

*Шаг 0.* Задание параметров и начальных значений модели (1)–(3). Задание допустимого интервала изменения ставки налога на прибыль $\underline{\alpha} \le \alpha^{reg} \le \overline{\alpha}$. Задание значений $\underline{R_t}$ и $\underline{Z_t}, t = 1, \ldots, T$.

*Шаг 1.* Формирование конечного набора значений региональной компоненты ставки налога на прибыль:

$$V = \left\{ \left(\alpha^{reg}\right)^1, \ldots, \left(\alpha^{reg}\right)^S \right\} \subseteq \left[ \underline{\alpha^{reg}}, \overline{\alpha^{reg}} \right].$$

*Шаг 2.* Для каждой ставки множества $V$ по формулам (1)–(3) рассчитываются: $K_t, Y_t, \Pi_t, Z_t$.

*Шаг 3.* В качестве компромиссных выбираются ставки, обеспечивающие выполнение неравенств:

$$R_t = \alpha^{reg} \cdot P_t \ge \underline{R_t}; \;\; Z_t \ge \underline{Z_t}; \;\; t = 1, \ldots, T.$$

В качестве примера работы алгоритма приведем расчеты, выполненные на основе статистических данных группы предприятий машиностроения Воронежской области. Параметры модели (1)–(3) определялись на основе статистических данных, официально представленных Федеральной службой статистики. В качестве временного интервала выбран период $T = 4$ года. В качестве начального года (года планирования) принят 2018 год.

Максимальное значение ставки налога на прибыль предприятий составляет 20 %. Действующая ставка налога на прибыль в Федеральный бюджет Российской Федерации составляет 2 % ($\alpha^{fed} = 0,02$), а в региональный бюджет варьируется от 12,5 % до 18 %.

В табл. 1 приведены результаты расчетов (в миллионах рублей) для двух вариантов ставки налога на прибыль в бюджет региона: $\alpha_1^{reg} = 0,155$, $\alpha_2^{reg} = 0,18$.

Таблица 1

*Результаты расчетов для предприятий машиностроения*

| Годы, t | $\alpha_1^{reg} = 0,155$ | | $\alpha_1^{reg} = 0,18$ | |
|---|---|---|---|---|
| | **$R_t$** | **$Z_t$** | **$R_t$** | **$Z_t$** |
| 1 | 3555.72 | 18441.90 | 4436.96 | 17946.36 |
| 2 | 6714.29 | 37024.74 | 7813.98 | 35988.10 |
| 3 | 10122.31 | 55689.08 | 11752.25 | 54125.73 |
| 4 | 13533.36 | 74455.47 | 15711.30 | 72359.76 |

Обсуждение результатов расчета с представителями региональных органов власти и сравнение их с плановыми значениями прибыли предприятий машиностроительного комплекса и поступлениями в бюджет региона позволили определить, что ставка налога на прибыль в региональный бюджет в размере 15,5 % является компромиссной.

## Заключение

Проблема формирования и совершенствования механизмов налогового регулирования предприятий региона является сложной и многоаспектной, основой поддержки преодоления которой могут служить математические модели и методы. В основе рассматриваемого в настоящей статье подхода предлагаются модель и алгоритм формирования компромиссной ставки налога на прибыль, обеспечивающей согласование интересов региональных органов власти и руководства предприятий. Предлагаемый математический инструментарий позволяет администрации региона рассчитать такое значение ставки налога на прибыль в бюджет региона, которое обеспечивает приемлемое значение поступлений в бюджет региона и достаточную для эффективного функционирования предприятий величину чистой прибыли. При формировании параметров модели учитывалась только доступная статистическая информация, что делает ее реализуемой на практике. Результаты проведенных расчетов, их анализ и обсуждение с представителями региональных органов власти Воронежской области, позволили сделать вывод о практической значимости предлагаемого подхода и определили пути дальнейшего совершенствования.

## Литература


1. *Campbell L.* Fiscal Stabilization Policy and Fiscal Institutions / L. Campbell, S. Wren-Lewis// Oxford Review of Economic Policy.-2005. – № 21(4).– P. 584–597.

2. *Minford L.* Tax, regulation and economic growth: A case study of the UK / L. Minford // Cardiff Economics Working Papers. – 2015. – No E2015/16

3. *Myles G. D.* Economic Growth and the Role of Taxation - Aggregate Data / G. D. Myles // OECD Economics Department Working Papers. – 2009. – P. 714.

4. *Аркин В. И.* Сравнительный анализ различных принципов назначения налоговых каникул / В. И. Аркин, А. Д. Сластников // Экономика и математические методы. – 2016. – № 3 (52). – С. 78–92.

5. *Граболов С. В.* Мажоритарная оптимизация налогов, трансфертов, цен и заработных плат / С. В. Граборов // Экономика и математические методы. – 2015. – № 1 (51). – С. 80–97.

6. *Burkov V.* Methodology and Technology of Control System Development// V. Burkov, A. Shchepkin A., V. Irikov. V. Kondratiev // Studies in Systems, Decision and Control. – 2019. –Vol. 181.– P. 29–38.

7. *Burkov V., Shchepkin A., Irikov V. and Kondratiev V.* Methodology and technology of control system development // Studies in Systems, Decision and Control. – 2019. – 181. – P. 29–38.

8. *Bondarenko Y. V.* The Task of Coordinating Social and Economic Indicators of the Development of the Region and the Mathematical Approach to its Solution / Y. V. Bondarenko, I. V. Goroshko, I. L. Kashirina // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203. – P. 012037. (doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012037).

9. *Bondarenko Yu. V.* Aggregated multi-criteria model of enterprise management engineering, taking into account the social priorities of the region / Yu. V. Bondarenko, T. A. Sviridova, T. A. Averina // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – T. 537. – C. 042045 (doi:10.1088/1757-899X/537/4/042045).

УДК 519.81

# АЛГОРИТМ ПОДДЕРЖКИ СОГЛАСОВАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУБСИДИЙ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЕГИОНА

**Ю. В. Бондаренко, О. С. Гуськова**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Статья посвящена вопросам распределения государственных субсидий на региональном уровне для повышения обоснованности принимаемых решений. В работе приведен алгоритм распределения субсидии предприятиям региона и его реализация. Алгоритм базируется на математических моделях, описывающих процессы рационального распределения собственных и субсидированных средств руководством предприятий. Программная реализация алгоритма позволяет провести вычислительный эксперимент, позволяющий осуществить обоснованный выбор правила начисления субсидии и сформировать плановые значений показателей результативности хозяйствующих субъектов. Результаты расчетов и их обсуждение с сотрудниками администрации подтвердили возможность применения алгоритма как инструмента поддержки принятия управленческих решений в области государственного регулирования.
**Ключевые слова:** субсидия, предприятие, регион, управление, математические модели.

## Введение

В настоящие дни на территории Российской Федерации применяется программно-целевой подход в управлении региональным развитием. Преимущество данного подхода обусловлено целенаправленностью на решение стратегически важных для региона задач, закрепленных в стратегиях и программах социально-экономического развития. Анализ эффективности данных программ и социально-экономического развития региона осуществляется по целому ряду направлений, отражаемых в наборах социальных и экономических показателей (индикаторах). Например, среди стратегических направлений развития Воронежской области можно выделить такие как: улучшение уровня жизни населения, модернизация региональных производственных комплексов через стимулирование изменений условий функционирования экономики, увеличение производительности труда и повышение доли высококвалифицированных работников в регионе и т.д. Достижение поставленных целей регионом возможно через согласование социальных и экономических индикаторов, таких как: объем валового регионального продукта (ВРП), темпы роста (снижения) объемов производства, индекс промышленного производства, уровень безработицы, минимальный размер оплаты труда, номинальные и реальные денежные доходы населения.

Для решения поставленных задач необходимы государственное регулирование и государственная поддержка бизнеса, где субсидирование – это одна из наиболее распространенных форм поддержки предприятий со стороны государства.

## 1. Материалы и методы

Основной задачей исследования является проработка инструментов распределения субсидий и разработка методов порядка предоставления субсидий, которые оптимизируют использования финансовых средств федерального и региональных бюджетов.

Для решения поставленной задачи предлагается алгоритм формирования правила распределения субсидий, позволяющий оказать поддержку администрации региона в формировании порядка предоставления финансовой помощи и включающий следующие этапы:

***Этап 1.*** В зависимости от результатов деятельности предприятий необходимо сформировать множества социальных и экономических показателей. Пусть $(n = 1,.., N)$ определяет число показателей экономической деятельности предприятий за последний отчетный период, тогда показатели экономической деятельности для предприятия $m$ будут определять как $s^m = (s_1^m,..., s_N^m)$. Определим множества социальных и экономических плановых показателей развития региона как $\tilde{R}_j$, $(j = 1,.., J)$. Для анализа зависимостей экономических и социальных плановых показателей развития региона от показателей деятельности предприятий, получающих субсидии, сформируем множество $\overline{R}$ $(j = 1,.., J)$, где $J$ – число показателей множества $\overline{R}$. Для формирования зависимости между показателями множества $\overline{R}$ и показателями деятельности предприятий, получающих субсидии введем следующее обозначение: $R_j = R_j(s^1,..., s^m)$, где $(j = 1,.., J)$, далее необходимо определить расчетную формулу зависимости, регрессионное уравнение и допустимое отклонение плановых занчений от расчетных.

***Этап 2.*** На данном этапе необходимо сформировать множества расчетных правил для определения величины субсидии:

1. Выбор расчетной формулы. Определим расчетную формулу субсидии следующим образом: $F(p) = (\alpha_f + \alpha_r) \cdot p$, где $p$ – показатель экономической деятельности предприятия, $\alpha_f$ – ставка субсидии из федерального бюджета, $\alpha_r$ – ставка субсидии из областного бюджета. Правила могут иметь и более сложное, нелинейное представление. Например, различаться значениями параметров для различных интервалов изменения показателя $p$: $F(p) = \begin{cases} \alpha_1 \cdot p, 0 \le p \le p_1 \\ \alpha_2 \cdot p, p \ge p_1 \end{cases}$, где $\alpha_1$, $\alpha_2$ – параметры правила, $p$ – пороговое значение экономического показателя.

2. Выбор стратегии определения вариантов параметров для каждого правила:
   2.1. Стратегия привлечения экспертов;
   2.2. Стратегия генерирования параметров;
   2.3. Смешанная стратегия.

Результатом второго этапа является совокупность допустимых правил расчета субсидии и $\Gamma = \{F_1(s_1,.., s_N),.., F_h(s_1,.., s_N)\}$.

***Этап 3.*** Данный этап вкючает в себя анализ результатов экономической деятельности предприятий с использоанием модели рационального распределения финансовых средств руководством предприятия. Модель определяет управление, обеспечивающее получение предприятием максимальной прибыли:

$$\pi^m(s^m, u^m(\Phi_{\tilde{n}}^m, B_h^m)) \to \max,$$
$$s_n^m = \varphi_n^m((s^m)^0, \quad u^m(\Phi_c^m, B_h^m)), \quad n = 1,.., N$$

где $\pi^m(\cdot)$ – прибыль предприятия, $s^m = (s_1^m,..., s_N^m)$ – набор показателей экономической деятельности (переменные модели); $\varphi_n^m$ – правило изменения показателя $n$ предприятия с индексом $m$. В результате третьего этапа для каждого правила расчета субсидии $F_h$ (где $h = 1,.., H$) определяются значения экономических показателей деятельности получателей субсидии, которые могут быть достигнуты при рациональном распределении средств их руководством: $\tilde{s}_h = (\tilde{s}_h^1,.., \tilde{s}_h^M)$, $h = 1,.., H$. Данные значения мы предлагаем рассматривать в качестве основы для оценивания того, какое влияние оказывается правилами на деятельность предприятий.

***Этап 4.*** Для выбора наилучшего правила расчета субсидии необходимо сформировать и рассчитать значения интегрального показателя для каждого варианта распределения субсидии, что позволит оценить степень достижения индикаторами развития региона целевых значений: $\Phi(R_1,.., R_J) = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j R_j^{norm}(s^1,.., s^M)$, где $\lambda_j$ – коэффициент приоритетности $j$-го показателя развития региона, определяемый экспертами администрации ($\lambda_j \ge 0, \sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1$); $R_j^{norm}(s_1,.., s_M)$ – нормированное значение показателя $j$. $R_j^{norm}(s^1,.., s^M) = R_j(s^1,.., s^M) / \tilde{R}_j$, если увеличение показателя $j$ благоприятно, иначе $R_j^{norm}(s^1,..,s^M) = \tilde{R}_j / R_j(s^1,..,s^M)$. В качестве окончательного правила выбирается то, которое обеспечивает наибольшее значение интегрального показателя: $\Phi(R_1^{h^*},..,R_J^{h^*}) = \max_{h \in H}(R_1^h,..,R_J^h)$.

Таким образом, результатом работы алгоритма являются: правило распределения субсидий, обеспечивающее приближение региональных показателей развития к плановым значениям и плановые значения экономических показателей хозяйствующих субъектов, получавших субсидии, рассчитанные для правила модели рационального распределения финансовых средств руководством предприятия.

## 2. Практическая реализация и обсуждения

Для модели этапа 3 было разработано Java Swing приложение, реализующее данный алгоритм для статической модели. Для осуществления расчетов будем опираться на данные Воронежской области по развитию молочного производства.

Опираясь на эти данные нам известны плановые значения целевых показателей (табл. 1), ставки субсидий для Воронежской области (табл. 2) и на основе открытой статистической информации по предприятиям Воронежской области из реестра получателей субсидий был подготовлен входной файл с данными показателей предприятий региона

Таблица 1

*Целевые показатели программы развития и плановые значения*

| Показатели предприятий | Плановые значения (2018 г) |
|---|---|
| Производство молока во всех категориях хозяйств Воронежской области, тыс. тонн | 859,2 |
| Число созданных рабочих мест | 200 |
| Среднегодовая заработная плата, руб/месяц | 25 800 |

Таблица 2

*Ставки субсидий для Воронежской области*

| Ставка субсидии | Размер ставки субсидии (руб/т) |
|---|---|
| $S_ф$ | 4600 |
| $S_о$ | 800 |

Проанализируем результаты вычислительного эксперимента и сгруппируем полученные результаты оптимальных ставок при различных стратегиях в общую таблицу (табл. 3):

Таблица 3

*Сравнение результатов вычислительных экспериментов*

| Стратегия для федеральной ставки | Стратегия для региональной ставки | Оптимальная ставка субсидий федеральная | Оптимальная ставка субсидий региональная | Объем выпускаемой продукции |
|---|---|---|---|---|
| ASC | ASC | 890 | 4690 | 850,613 |
| ASC | DESC | 800 | 4600 | 850,071 |
| DESC | ASC | 800 | 4600 | 850,071 |
| DESC | DESC | 800 | 4600 | 850,071 |

В программе доступны два вида стратегий для федеральной и региональной ставок: ASC и DESC. При выборе стратегии ASC текущее значение ставки 10 раз последовательно увеличивается на 10 единиц, при выборе стратегии DESC текущее значение ставки 10 раз последовательно уменьшается на 10 единиц.

Исходя из результатов вычислительного эксперимента, можно наблюдать, что увеличение федеральной и региональной ставок влияет на увеличение расчетных значений по целевым показателям, приближая их к плановым значениям. Следует отменить, что выбранное администрацией Воронежского района правило формирования субсидий в результате расчетов показывает, что уменьшение региональной ставки субсидий и увеличение федеральной ставки субсидий даёт лучшие результаты, чем увеличение региональной и уменьшение федеральной ставок.

## Заключение

В настоящей работе описан подход к совершенствованию процесса предоставления субсидий на региональном уровне, позволяющий осуществить выбор оптимальных параметров правила распределения. Особенностью алгоритма является использования математического и программного инструментария, позволяющего повысить объективность и обоснованность процедуры субсидирования.

## Литература

1. Моделирование экономических процессов / Под ред. М. В. Грачевой, Ю. Н. Черемных, Е. А. Тумановой. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2013. – 543 с.

2. *Угольницкий Г. А.* Иерархическое управление устойчивым развитием / Г. А. Угольницкий. – М. : Изд-во физико-математической литературы, 2010. – 336 с.

3. *Бондаренко Ю. В.* Об одном математическом подходе к мотивации хозяйствующих субъектов региона / Ю. В. Бондаренко, В. Л. Козлов, А. Н. Чекамазов // Экономика и менеджмент систем управления. – 2014. – Т. 14, № 4. – С. 24–31.

4. *Горошко И. В.* Согласование социальных и экономических показателей развития региона: понятие и механизмы / И. В. Горошко, Ю. В. Бондаренко // Проблемы управления. – 2015. – № 1. – С. 63–72.

5. *Бондаренко Ю. В.* Математические модели и алгоритмы поддержки формирования взаимовыгодного сотрудничества государства и бизнеса на региональном уровне / Ю. В. Бондаренко, В. Л. Козлов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 4. – С. 92–100.

УДК 517.97, 681.5

# ОБЗОР КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ В УМНЫХ И МИКРО- СЕТЯХ

**Д. Васенин[1], О. Сотникова[1], М. Пазетти[2], Я. Золотухина[1], Т. Гуцуляк**

*[1]Воронежский государственный технический университет*
*[3]Университет Брешии, Италия*

**Аннотация.** Существует огромное количество исследований, а также множество концепции будущей системы энергосетей; супер сети, интеллектуальные сети, микро сети, активные сети, силовые ячейки, и т. д. Некоторые из них фокусируются на функциях уровня передачи электроэнергии с использованием устройств управления, а иные на покрытии низкого уровня напряжения пользователя.

Общее видение умной сети или аналогичных концепций является важным вопросом для развития коммерчески успешных будущих систем доставки электроэнергии.

Наше исследование направлено на краткосрочный прогноз электропотребления применительно к интервалам от одного часа до 1 недели на основе использования усовершенствованных нечетких рекуррентных и LSTM нейронных сетей.

Усовершенствование нечетких рекуррентных нейронных сетей будет связано с современным механизмом обучения в виде гендерного генетического алгоритма с действительными переменными (RGGA). LSTM нейронные сети будут разработаны и применены в виде нечеткой версии с переносом на данную модель опробованного RGGA.

**Ключевые слова:** нейронная сеть, суперсети, интеллектуальные сети, микросетки, активные сети, интеллектуальные инвестиции, декарбонизированные и распределенные энергетические системы, временные ряды, регрессия, ARIMA, методы мягких вычислений.

## Введение

В течение последнего десятилетия растущее давление на устойчивые, декарбонизированные и распределенные энергетические системы наряду с дерегулированием энергетических рынков внесло соответствующие изменения для всех энергетических операторов, касающиеся как производства, передачи, распределения, так и использования энергии. В частности, растущее распространение просумеров (то есть местных потребителей и производителей энергии [1] и растущее проникновение распределенной генерации (ГД) из возобновляемых источников энергии (ВИЭ) ставят новые задачи перед всеми заинтересованными сторонами в области энергетики, особенно в отношении интеграции гетерогенных распределенных энергетических ресурсов (ДЭР) в энергетический ландшафт. Несколько потоков исследований были посвящены предстоящим проблемам, связанным с переходом к декарбонизированным и распределенным энергетическим системам, охватывающим различные области: от применения и управления распределенными системами хранения электроэнергии (DESS) для смягчения стохастического поведения ВИЭ и разработки инновационных подходов к управлению для работы интеллектуальных сетей (SG) и микросетей (мкГ), к применению схем транзакционного управления на стороне спроса (DSM). Применение таких моделей и методов (от оптимального планирования DER до участия в схемах DSM) основывается на точном прогнозе моделей генерации и потребления не только на агрегированных уровнях (например, на вторичных подстанциях), но даже на уровень просумеров. В частности, на следующий день и внутридневные прогнозы приобретают все большую актуальность, чтобы противостоять внутреннему прерывистому характеру возобновляемых (то есть зависящих от погоды) источников и обеспечивать фактическую интеграцию активных конечных пользователей (то есть пользователей, которые являются возможность изменять свое энергопотребление в соответствии с правильной ценой или сигналами событий) в современных схемах DSM.

В этой связи разработка и тестирование в реальной рабочей среде (с использованием энергетических средств лаборатории eLUX) набора моделей и инструментов, которые способны обеспечить надежные и точные прогнозы нагрузки при низком и среднем напряжении. пользователей, с учетом исторических данных, так и динамического поведения конечных пользователей, является особенно актуальной задачей.

## 1. Эксперимент

Существует огромное количество исследований, а также множество будущих концепций энергосистем, таких как суперсети, интеллектуальные сети, микросетки, активные сети, элементы питания и так далее. Некоторые из них фокусируются на функциях уровня передачи электроэнергии с использованием контрольных устройств, тогда как другие фокусируются на низком уровне напряжения пользователя. Все эти подходы имеют много общего, но есть некоторые различия. Общее видение интеллектуальных сетей и аналогичных концепций является важной проблемой для разработки коммерчески успешных будущих систем доставки энергии [1].

Интеллектуальные сети можно охарактеризовать как гибкие, интеллектуальные, интегрированные и работающие совместно с поставщиками распределенной энергии. Интеллектуальные инвестиции вносят вклад в защиту, эксплуатацию, IT и телекоммуникационные технологии, а не просто в пассивные линии, кабели, трансформаторы и распределительные устройства. Существенную роль в этой концепции играет прогнозирование уровня краткосрочного потребления энергии, которое позволяет мобилизовать ресурсы, необходимые для покрытия пиковых нагрузок, и позволяет планировать определенные меры по техническому обслуживанию и ремонту в период снижения энергопотребления. Поддержание баланса между производством и потреблением энергии гарантирует частоту энергосети на соответствующем уровне. Процесс постепенно усложняется из-за увеличения уровня прерывистого проникновения энергии для производства электроэнергии, основанного на энергии ветра или солнечной энергии.

За последнее десятилетие различные методы использовались для управления спросом на энергию, чтобы точно предсказать будущее энергетические потребности, в том числе традиционные методы, такие как временные ряды, регрессия, ARIMA, а также методы мягких вычислений, такие как нечеткая логика, генетический алгоритм и нейронные сети. Среди новых методов прогноза отметим регрессию опорных векторов, а также оптимизацию колоний муравьев и роя частиц[3–5].

Используя локально линейную нечеткую нейро-модель удалось получить как долгосрочный, так и краткосрочный прогнозы энергопотребления в США и Канаде [6]. Многочисленные усовершенствования метода нечетких временных рядов и проведенные сравнения с другими методами показали его более высокую эффективность [7]. Несмотря на это, некоторые вопросы, существенные для применения данного подхода, остаются пока без ответа. Для надежного применения метода значительный интерес представляет оценка рисков, связанных с неопределенностью прогноза [8] и пока не проведенное исследование таких рисков при сравнении компьютерного моделирования и натурного (real world) поведения. Остается открытым решение проблемы прогнозирования временных рядов со сложной нерегулярной структурой при дополнительном требовании быстрого обучения.

Наше исследование направлено на краткосрочное прогнозирование энергопотребления с интервалом от 1 часа до 1 недели на основе использования улучшенных нечетких повторений и нейронных сетей LSTM.

Улучшение нечетких рецидивирующих нейронных сетей должно быть связано с современным механизмом обучения в форме гендерно-генетического алгоритма с реальной переменной (RGGA). Нейронные сети LSTM будут спроектированы и реализованы в виде нечеткой версии с передачей проверенной RGGA в модель.

**2. Исследование**

Исследование планируется организовать следующим образом. На первом этапе теоретического исследования будет произведено сравнение разных обучающих систем, основанных на методе наискорейшего спуска, генетическом алгоритме, случайном поиске и гендерном генетическом алгоритме [9–12]. Будет изучено влияние выбора вида функции принадлежности на точность предсказания динамики энергопотребления в электрических сетях с помощью нечетких временных рядов. В том числе будет исследована перспективность выбора вейвлетов в качестве базисных функций принадлежности при прогнозировании на основе нечетких нейронных сетей [13].

Предполагается обосновать эффективность использования рекуррентных нечетких нейронных сетей [14] с обучением на основе гендерного действительно-значного генетического алгоритма. Тестирование алгоритма будет проводиться на специально сгенерированных временных рядах, статистических рядах потребления электроэнергии и временных рядах из других областей применения.

Для повышения точности и гибкости системы прогноза будет исследована нечеткая модель длинной краткосрочная памяти (long-short term memory — LSTM). Ожидается, что эта модель повысит качество прогноза для временных рядов, имеющих заметные отклонения от стационарности.

В качестве инструмента для проведения планируемого комплекса теоретических исследований будет разработан комплекс программ на основе языка Python или в системе MATLAB. Оптимальный выбор системы программирования будет сделан на основе анализа перспективной области применения, а также имеющихся для реализации финансовых и компьютерных ресурсов.

Основным теоретическим методом прогноза в исследовании выбраны нечеткие временные ряды. Пионерские работы над нечеткими временными рядами [15–7] были затем усовершенствованы [18, 19]. Идея состоит в том, чтобы разделить весь временный ряд на интервалы (нечеткие множества) и изучить его поведение в каждой отдельной области, извлекая правила из картины временного ряда. Правила, полученные в этих моделях, покажут, как распределения связаны между собой с течением времени, когда значения меняются скачком. Другими словами, создается лингвистическая переменная для представления числового временного ряда, и эти области будут лингвистическими термами нашей переменной. Создается лингвистическая переменная для представления ряда, затем «словарь», и затем нечеткий ряд представляется в виде слов из этого словаря. Последовательности слов составят предложения или фразы, как шаблоны, которые нам нужно определить.

Компьютерные модели будут экспериментально протестированы в различных секциях и зданиях инженерного городка с использованием всех данных, собранных распределенными системами учета, включая измерения мощности, данные об окружающей среде и измерения в помещении.

В качестве планируемого результата проекта ожидается получение нового более совершенного метода краткосрочного прогнозирования потребления электроэнергии, а также верифицированных программных инструментов обеспечения такого прогноза.

Опишем коротко методологию нечетких временных рядов в виде двух процедур: обучения и прогнозирования. Для начала нужно определить универсальное множество $U$ по обучающим данным, таким как:

$$U = \{\min(X), \max(X)\}. \quad (1)$$

Обычно задают верхнюю и нижнюю границы в 20 % как надежные. Теперь нужно разделить $U$ на несколько перекрывающихся интервалов и создать нечеткий набор для каждого из них. Количество интервалов является одним из наиболее важных параметров в нечетких временных рядах и напрямую влияет на точность модели. Помимо количества интервалов способ, которым мы разделяем $U$, также влияет на точность. В самом простом методе разбиения, Grid Partitioning, все интервалы имеют одинаковую длину и формат. Следующим шагом следует преобразовать числовые значения исходного временного ряда $X(t)$ в нечеткие значения лингвистической переменной $\tilde{A}$, порождая нечеткий временной ряд $F(t)$. Нечеткие множества перекрываются, поэтому для каждого $x$ из $X(t)$ возможно, что он принадлежит более, чем одному нечеткому множеству $A_i$ из $\tilde{A}$. В методе Chen (1996) просто выбирается только одно нечеткое множество с максимальной принадлежностью. Однако в других методах учитываются все нечеткие значения.

Процедуры обучения оптимальному предсказанию достаточно подробно описаны [20]. Правила модели имеют формат: *Прецедент* $\rightarrow$ *Последовательный член*, указывая на нечеткое множество в момент времени $t+1$, возникающее после нечеткого множества в момент $t$. Учитывая ранее созданные временные шаблоны, мы группируем их по прецедентам. Модель содержит правило для каждого найденного отдельного прецедента, а следствием каждого правила будет объединение всех последовательностей каждого временного шаблона с одним и тем же прецедентом.

Набор правил задает модель нечеткого временного ряда. Этот набор определяет, как ведет себя рассматриваемый временной ряд, и, если он в достаточной мере стационарный, можно использовать данную модель для прогнозирования состояний в следующие моменты времени.

Процедура прогнозирования строится следующим образом. Мы знаем числовое значение для времени $t$, $x(t)$ из $X(t)$, и хотим предсказать значение в следующий момент, $x(t+1)$. Входное значение $x(t)$ будет преобразовано в нечеткие значения лингвистической переменной $\tilde{A}$, генерируя значение $f(t)$, в качестве которого выбирается наиболее подходящий набор. Находится правило, прецедент которого равен $f(t)$. Следствием правила будет нечеткий прогноз для $t+1$, то есть $f(t+1)$. Полученное нечеткое значение $f(t+1)$ нужно преобразовать в числовое значение. Для этого мы используем метод центра масс, где числовое значение равно среднему значению центров нечетких множеств $f(t+1)$, то есть:

$$x(t+1) = n^{-1} \sum A_i \quad (2)$$

для $i = 0 \ldots n-1$ и $n$ равно числу множеств в $f(t+1)$.

## 3. Выводы

Прогнозированию временных рядов с помощью нечетких множеств удобно придать форму нечетких нейронных сетей с характерными для них процедурами обучения [21, 22]. Обучение нечеткой рекуррентной нейросети можно усовершенствовать, используя гендерный генетический алгоритм с действительной кодировкой [23, 24]. RCGA является простым и эффективным генетический алгоритмом для ограниченной оптимизации при действительных параметрах (constrained real-parameter optimization). Его эволюционные операторы включают ранжирование выбора (RS Selection), кроссовер на основе направления (DBX) и динамическую случайную мутацию (DRM) для имитации особого эволюционного процесса, который имеет параллельную структуру внутреннего цикла. RCGA превосходит большинство алгоритмов оптимизации, обеспечивая большую скорость сходимости, а также лучшую точность решения, особенно для задач с ограничениями.

Заявкой на существенный прогресс является подход, основанный на распространении модулей LSTM на нечеткие временные ряды [25, 26], который планируется программно реализовать при проведении исследования.

RCGA совместно с нечетким алгоритмом LSTM, в рамках парадигмы нечетких временных рядов, являются главной методологической основой планируемого исследования.

Суммируя отмеченные проблемы, как основной приоритет исследования мы рассматриваем повышение точности системы предсказания для сложных временных рядов и увеличение скорости ее обучения с целью достижения большей надежности и качества управления локальными электоэнергетическими сетями.

**Литература**

1. *Strasser, T.; Andrén, F.; Kathan, J.; Cecati, C.; Buccella, C.; Siano, P.; Leitão, P.; Zhabelova, G.; Vyatkin, V.; Vrba, P.; et al.* A Review of Architectures and Concepts for Intelligence in Future Electric Energy Systems // IEEE Trans. Ind. Electron. – 2015. – 62. – P. 2424–2438.

2. *Suganthi L., Anand A. Samuel.* Energy models for demand forecasting – A review. Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2012. – 16. – P. 1223–1240.

3. *Hyojoo Son, Changwan Kim*. Forecasting Short-term electricity demand in residential sector based on support vector regression and fuzzy-rough feature selection with particle swarm optimization. Procedia Engineering. – 2015. – 118. – P. 1162–1168.

4. *Kumar Biswajit Debnath, Monjur Mourshed*. Forecasting methods in energy planning models // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2018. – 88. – P. 297–325.

5. *Hossein Iranmanesh, Majid Abdollahzade and Arash Miranian*. Forecasting energy consumption using fuzzy transform and local linear neuro fuzzy models // International Journal on Soft Computing (IJSC). – 2011. – 2(4). – P. 11–24.

6. *Shou-Hsiung Cheng,Shyi-Ming Chenc,Wen-Shan Jian*. Fuzzy time series forecasting based on fuzzy logical relationships and similarity measures // Information Sciences. – 2016. – 327. – P. 272–287.

7. *Douglas A. P., Breipohl A. M., Lee F. N. and Risk R.* due to load forecast uncertainty in short term power planning // IEEE Trans. On Power Systems. – 1998. – 13 (4). – P. 1493–1499.

8. *Mehrnoush Davanipour, Hanieh Asadipooya*. Nonlinear model predictive control based on fuzzy wavelet neural network and chaos optimization // Turk J Elec Eng & Comp Sci. – 2017. – 25. – P. 3569–3577.

9. *Zhirong Guo, Shunyi Xie, Wei Gao*. Study on a recurrent functional link-based fuzzy neural network controller with improved particle swarm optimization. The Ninth International Conference on Electronic Measurement & Instruments ICEMI'2009 IEEE 3 (2009) 1095-1100.

10. *Chaoyin Li, Qingyu Xiong, Kai Wang,Yang Yu, Tong Liu*. System identification and prediction of dynamic system and microwave thermal process using a recurrent fuzzy quantum neural network // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – 466. – 01210.

11. *Yuan Wang, Kirubakaran Velswamy and Biao Huang*. A long-short term memory recurrent neural network based reinforcement learning controller for office heating ventilation and air conditioning systems // Processes 5. – 2017. – 46.

12. *Lu C.-H.* Wavelet fuzzy neural networks for identification and predictive control of dynamic systems. IEEE Trans. Ind. Electron. – 2011. – 58(7). – P. 3046–3058.

13. *Lee C.-H., Teng C.-C.* Identification and control of dynamic systems using recurrent fuzzy neural networks // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2000. – 8(4). – P. 349–366.

14. *Song Q., Chissom B. S.* Fuzzy time series and its models // Fuzzy Sets and Syst. 1993. – 54(3). – P. 269–277.

15. *Song Q., Chissom B. S.* Forecasting enrollments with fuzzy time series-Part I // Fuzzy Sets Syst. – 1993. – 54(1). – P. 1–9.

16. *Song Q., Chissom B. S.* Forecasting enrollments with fuzzy time series-Part II // Fuzzy Sets Syst. – 1994. – 62(1). – P. 1–8.

17. *Chen Y. C., Teng C. C.* A model reference control structure using a fuzzy neural network // Fuzzy Sets and Systems. – 1995. – 73. – P. 291–312.

18. *Shyi-Ming Chen.* Forecasting enrollment based on fuzzy series // Fuzzy sets and systems. – 1996. – 81. – P. 311–319.

19. *Yang Gao, Meng Joo Er.* NARMAX time series model prediction: feedforward and recurrent fuzzy neural network approaches // Fuzzy Sets and Systems. – 2005. – 150. – P. 331–350.

20. *Cheng-Jian Lin, Chih-Feng Wu, Hsueh-Yi Lin, Cheng-Yi Yu.* An interactively recurrent functional neural fuzzy network with fuzzy differential evolution and its applications // Sains Malaysiana. – 2015. – 44(12). – P. 1721–1728.

21. Recurrent Neural Networks, Book edited by: Xiaolin Hu and P. Balasubramaniam, I-Tech, Vienna, Austria, 2008.

22. Chuang Y.-C., Chen C.-T., Hwang C. A simple and efficient real-coded genetic algorithm for constrained optimization // Applied Soft Computing Journal. – 2015.

23. http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2015.09.036

24. *Mingxiao Li, Feng Lu, Hengcai Zhang, Jie Chen.* Predicting futurelocations of moving objects with deep fuzzy-LSTM networks // Transportmetrica A: Transport Science. – 2018. – DOI: 10.1080/23249935.2018.1552334.

25. *Farman Ali, Shaker El-Sappagh, Daehan Kwak.* Fuzzy ontology and LSTM-based text mining: A transportation network monitoring system for assisting travel // Sensors. – 2019. – 19. – P. 234.

УДК 004.9+656.5

# АРХИТЕКТУРА СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ РЕМОНТАМИ АВТОТРАНСПОРТА ПРЕДПРИЯТИЯ

**С. Я. Егоров[1], А. В. Калач[1,2], Салих Хайдер Сабах[3], А. В. Затонский[4], М. Н. Фелькер[4]**

*[1]Тамбовский государственный технический университет,*
*[2]Воронежский институт ФСИН России,*
*[3]Министерство высшего образования и научных исследований Ирака,*
*[4]Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

**Аннотация.** Разработана архитектура системы поддержки принятия решений транспортного предприятия, обеспечивающая баланс между надежностью и затратностью. Это позволяет обеспечить лицо, принимающее решение, достоверной и качественной информацией о последствиях выбора того или иного вида ремонта. Техническая реализация произведена с помощью 1С-бухгалтерии.
**Ключевые слова:** автотранспортное предприятие; лицо принимающее решение; Парето-оптимальная задача; поддержка принятия решений; модуль внутренней оценки.

Поддержка принятия решений — это эффективный способ повышения качества управления, как производствами, так и оказанием услуг, включая транспортные. Рост масштаба автотранспортного предприятия неминуемо приводит к пропорциональному и даже опережающему росту сложности поддержки принятия решений [1]. Для их поддержки широко применяются системы, основанные на *Big Data*, *Data Mining* на основании информации из хранилищ данных (ХД) и системы на основе онтологий. Все они основываются на моделях разной природы, скрытых от пользователя за слоем интеллектуальных технологий обработки данных. Для подобных целей могут применяться как объясняющие модели (в т.ч. регрессионные), так и необъясняющие — *ARIMA*, нейронные сети [2], модели на основе нечеткой математики. Эффективным является использование моделей деятельности, если задачи выбора или оценки последствий управляющих воздействий настолько объемны, что не разрешимы алгоритмически за приемлемое время. Для таких случаев [3] эффективным оказывается метод включения в контур управления самого лица, принимающего решения (**ЛПР**). Реализуя трудно формулируемые правила, сформировавшиеся в ходе предыдущей деятельности, человек способен отбрасывать заведомо неприемлемые решения или неформально подходить к выбору наилучшего решения. Задачей информационной системы при этом становится расчет последствий решений ЛПР, и не более того.

Как обосновано в [4], для крупного автотранспортного предприятия, располагающего автопарком с ненулевым износом, критически важной становится задача принятия решений о превентивном или оперативном финансировании ремонтных работ.

Задачи ремонта и замены возникают, когда оборудование или транспортные средства с течением времени устаревают, изнашиваются и требуют необходимости ремонта или замены. Основная зависимость определяется на основании кривой старения или снижения эффективности его использования $E(t)$ (рис.1).

Для устаревшего оборудования в некоторые моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ может выполнятся ремонт, который естественным образом повышает эффективность его использования до значений $E_1, E_2, \ldots, E_n$. В крайнем случае, не ремонтопригодности выполняется полная замена. Каждый проведенный ремонт предполагает затраты $C_{p1}, C_{p2}, \ldots, C_{pn}$. Итак, пусть цена новой машины (или оборудования) равна $C_{зам}$. Интервал времени $t_{зам} - t_0$ от покупки машины (или оборудования) до его замены обозначим через $T_{ij}$ (время жизненного цикла). В задаче ремонта необ-

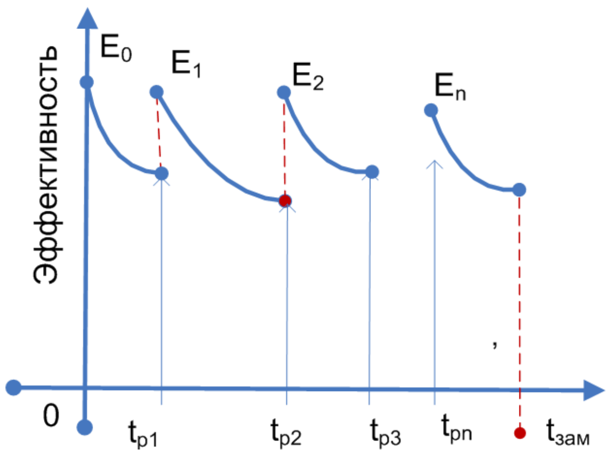



*Рис. 1. Периоды замены деталей и узлов ДСМ*

ходимо рассчитать количество восстановительных ремонтов $C_{p1}, C_{p2}, \ldots, C_{pn}$ и их сроки с целью минимизации средних затрат на ремонт оборудования за весь жизненный цикл (в задаче ремонт может предполагать замену оборудования на новое или модернизованное), то есть

$$\frac{1}{T_{ij}}\left(C_{\text{зам}} + \sum_{i=1}^{M} C_{pi} \cdot t_{pi}\right) \to \min.$$

Однако существует такое оборудование, в котором ряд компонентов (деталей) полностью выходят из строя. Предполагается, что эти компоненты не восстанавливаются. Они могут быть лишь заменены (например, лампа, предохранитель и т. п.). В такой постановке задача несколько модифицируется.

С целью идентификации возможных неисправностей необходимо рассчитать времена профилактического контроля, которые доставляют минимум суммарным затратам на выполнение процедур контроля, а также предполагаемых затрат из-за простоя машин (оборудования) и снижения эффективности выполнения необходимых технологических операций.

Неспособность автопредприятия выполнять поток поступающих заказов на перевозку в зависимости от устаревания автопарка растет сверхлинейно.

Качественно тренд условно линейной технической готовности показан на рис. 2, где $T_{\text{раб}}$ — интервал готовности ТС, $T_{\text{рем}}$ — период обслуживания или ремонта ТС.

Здесь обозначения $t_1, t_2, t_3$ соответствуют трем очевидным периодам в эксплуатации ТС:

1) непосредственно после приема к эксплуатации или после капитального ремонта, когда в ТС возможно обнаружение недоработок или ремонтных ошибок;

2) основного периода эксплуатации ТС, когда повышается вероятность поломки или, иначе говоря, снижается техническая готовность;

3) снижение технической готовности ниже предела, при котором вероятность немедленной поломки выше допустимой (ТС необходимо вывести в ремонт, который занимает некоторое время $T_{\text{рем}}$).

В результате ремонта техническая готовность восстанавливается, но, как правило, не до первоначальной, а несколько меньше $\Delta P_i(V) = {P(t_i)}/{P(t_{i-1})} < 1$. Общую тенденцию к ухудшению послеремонтной готовности транспортных средств от одного ремонта к другому можно представить кривой $P_V(t)$ (рис. 3).

Кривая предельного восстановления $P_v(t)$ после ремонтов проходит через точки возврата трендов P(t) с собственным углом наклона $\left.\frac{dP_v(t)}{dt}\right|_V = \frac{\Delta P_i(V)}{\Delta t_i} \neq 0$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Если $\Delta P_i(V)$ постоянный, то $P_v(t)$ представляет собой линейную зависимость, в общем случае она нелинейная. Время готовности $\Delta t_i = t_{2i} - t_{1i}$, следовательно, зависит от вида ремонта $V$, начальной

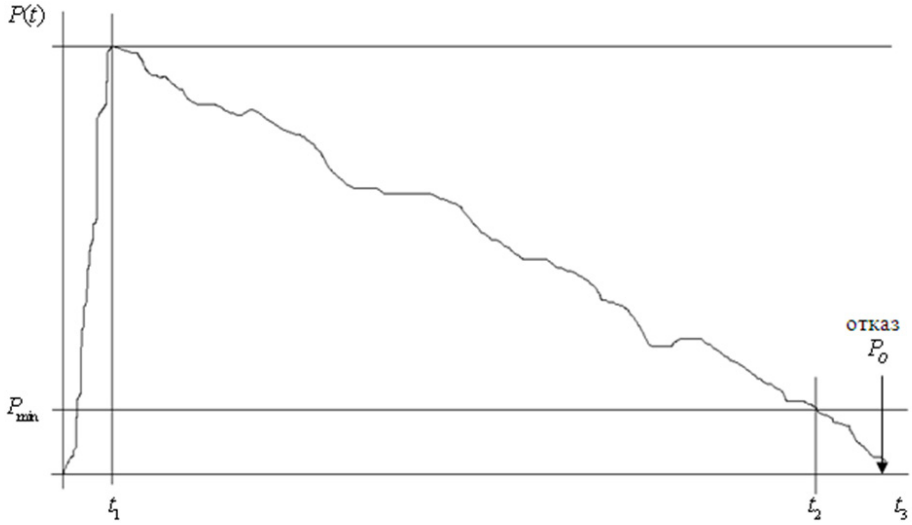



*Рис. 2. К иллюстрации линейного изменения технической готовности ТС во времени*

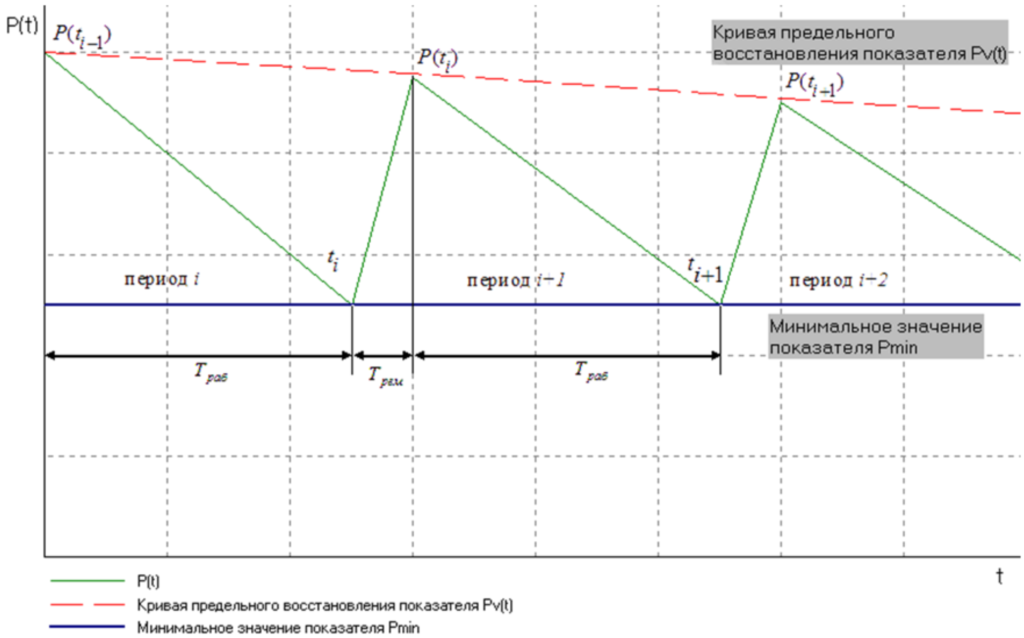



*Рис. 3. К иллюстрации предельного восстановления ТС после однотипных ремонтов*

и установленной минимальной технической готовности: $\Delta t_i = f\left(P(t_{i-1}), \Delta P_i(V), P_{\min}\right)$. При неограниченном цикле ремонтов наступает время $t_{\text{крит}}$ после номера ремонта $i_{\max}$, когда увеличение технической готовности перестает компенсировать ремонтные расходы того же типа (например, текущий ремонт ТС). В такой ситуации возможен более комплексный ремонт (например, капитальный ремонт), после которого техническая готовность восстанавливается в большей степени (но не обязательно достигает начального уровня $P_{\text{нач}} = P(0)$ ).

В результате информационная модель обеспечения технической готовности ТС (рис. 4) включает следующие соотношения:

– функции зависимости технической готовности от времени

$$P(t) \in \left\{P_1(t), P_2(t), P_3(t)\right\};$$

– уравнения для определения коэффициента восстановления в зависимости от номера $i$ и вида ремонта

$$\Delta P_i(V),$$

где $V \in \{TO, TP, KP\}$;

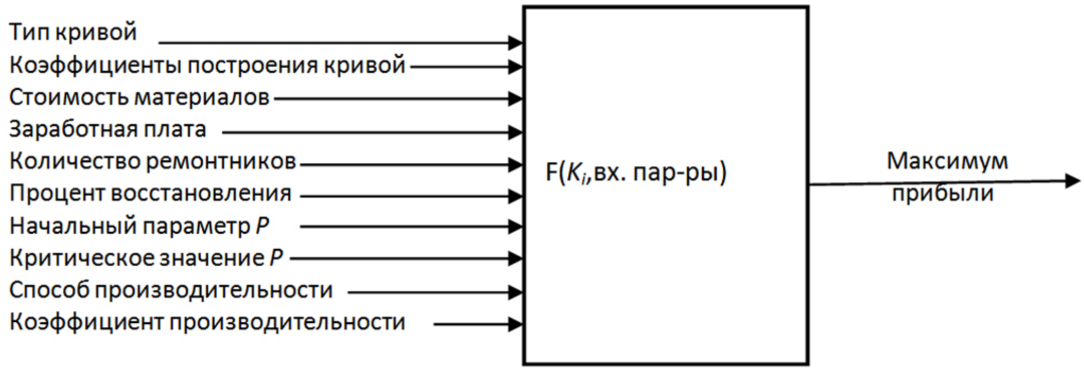



*Рис.4. Информационная схема обеспечения технической готовности транспортных средств, крупного предприятия*

– лимитирующие условия — ремонтные ресурсы предприятия

$$\Delta R_k(V).$$

Финансовые ресурсы предприятия [43], выделяемые на поддержание технической готовности ТС (обозначим их $C_1(V_i)$) состоят из переменных и постоянных затрат

$$C_1(V_i) = C_{1V}(V_i) + C_{1C}(V_i)$$

при этом важно, чтобы для любого ремонта $V_i$, происходящего в момент $t_{Vi}$, выполнялось условие:

$$C_{1C}(V_i) > 0 \quad \forall i.$$

Тогда задача определения технической готовности ТС примет вид:

$$C_\Sigma = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_k C_k(V_i) \to \min_i$$

$$C_k(i) \le C_k^{\max} \ \forall k,$$

$$C_k(i) \ge 0 \ \forall k, i$$

$$P(t) \ge P_{\min} \ \forall t$$

где $k$ — номер вида ресурса для проведения $i$-го ремонта, начиная с самого первого и заканчивая $i_{\max}$, после чего транспортное средство выводится из эксплуатации. Как показано выше, после идентификации параметров модели в режиме сбора статистической информации о деятельности крупного автотранспортного предприятия, решение этой задачи оптимизации возможно путем имитационного моделирования.

Конкретизируя общую вышеприведенную модель, получим другое выражение той же самой оптимизационной задачи

$$C_\Sigma\left(t_{Vi}\right) = C_0\left(t_{Vi}\right) + C_{ПЗ}\left(t_{Vi}\right) \to \min,$$

где $C_0(t) = C_{ЗЧ} + C_T + C_M + C_{TP} + C_{УЩ}$ — ресурсы на внеплановые ремонты; $C_{ПЗ}(t) = C_{ЗЧ} + C_M + C_{TP}$ — ресурсы на предупредительные замены запасных частей с целью отсрочить ремонт $V_i$; $C_T$ — ресурсы на перемещение ремонтной базы; $C_{ЗЧ}$ — ресурсы на запасные части; $C_M$ — ресурсы на расходные материалы; $C_{TP}$ — цена ремонтных работ по устранению внепланового отказа; $C_{УЩ}$ — ущерб (недополучение прибыли) вследствие простоев ТС в нерабочем состоянии. Для каждого $j$-й номенклатуры изделия рассчитываются общие затраты

$$C_{0j}\left(t\right) = \sum_{k=1}^{N_{0,j}} C_{0,kj}, \quad C_{ПЗj}\left(t\right) = \sum_{i=1}^{N_{ПР,j}} C_{ПЗ,kj}$$

где $N_{0,j}$ определяет число отказов типа $k$, а $N_{ПР,ij}$ задает количество $i$-х предупредительных замен за весь цикл эксплуатации ТЦ.

Разумеется, ограничивающим условием для затрат снизу является необходимость обеспечения минимальной технической готовности $P_{\min}$ [5].

В случае, когда восстановление технической готовности транспортных средств (ТС) в ходе предупредительных или аварийных ремонтов недостаточно, они выходят из строя, нагрузка на оставшиеся ТС увеличивается, срок их службы до отказа сокращается, и так далее. Однако общепринятым и наиболее примитивным критерием эффективности деятельности везде и всегда являются внутренние расходы предприятия, и их стараются уменьшить. Следовательно, ЛПР автотранспортного предприятия постоянно вынужден решать Парето-оптимальную задачу выбора между вложениями в ремонты и снижения общей технической готовности к перевозкам [6].

При этом ряд проблем, связанных с повышением обоснованности такого выбора, делает затруднительными непосредственное применение множественных существующих систем поддержки принятия решений (**СППР**). Поэтому целью данной статьи является разработка обоснованной архитектуры СППР транспортного предприятия, обеспечивающей баланс между надежностью и затратностью.

Перечислим задачи жизненного цикла подобной СППР, основываясь на представлении о возможности косвенной идентификации технической готовности одного ТС на основании данных о множественных однотипных ТС, описанной в [7]. Попутные рассуждения проведем на основании типичной для грузового автопарка поломки, например, выхода из строя редуктора ведущего моста. Очевидно, что в данной ситуации, как минимум, перед ЛПР стоит дилемма — оперативно заменить дефектный мост на резервный или продолжительное время осуществлять его ремонт, всегда приводящий к меньшему восстановлению технической готовности, но менее затратный. Это решение надо принимать, даже если мост имеется в наличии в резерве. Общая ситуация, сопутствующая возникновению задачи принятия решения, показана на рис. 5.

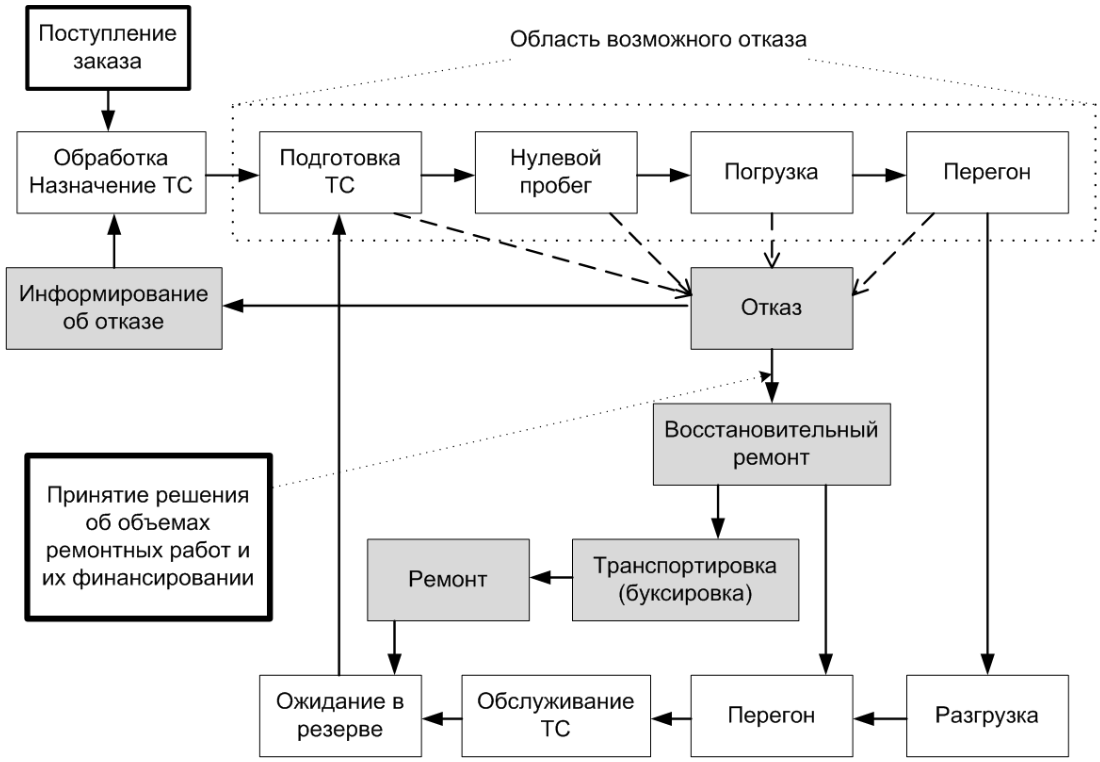



*Рис. 5. Жизненный цикл перевозок и отказов в перевозках*

Критерием принятия решения об объемах ремонтных работ, естественно, должна быть прибыльность предприятия

$$Pr = In - Co - C,$$

где $In$ — доход предприятия, $Co$ — стоимость выполнения ремонтных работ, $C$ — себестоимость перевозок, за какой-то будущий промежуток времени $T_1$, неразрывно связанная с технической готовностью автопарка. Поэтому для СППР, как минимум, оказываются необходимыми модули:

1. Расчета вероятности выполнения всех поступающих заявок на перевозку за некоторый период времени в будущем, при заданном уровне технической готовности парка ТС.
2. Расчета доходности In предприятия вследствие выполнения системы заявок.
3. Расчета стоимости ремонтных работ $Co$, необходимых для достижения заданного уровня технической готовности парка ТС.

Себестоимость перевозок, не включающая рассматриваемую отдельно стоимость ремонтных работ, очевидно, является суммой себестоимостей по всем ТС парка:

$$C = \sum_i C_i,$$

где себестоимость $C_i$, зависит от стоимости часа рабочего времени $C_i = C_{iq} + C_{eq}$, где $C_{iq}$ определяет цену одного часа ТС типа $q$, непосредственно в работе (р./м.-ч), $C_{eq}$ определяет затраты на перемещение ТС типа $q$, которые соотносятся с машино-часом использования машины на строительном объекте (р./м.-ч.), т. е.

$$C_{iq} = k_{\text{нр}} \cdot \left( \frac{1}{\Phi_г} \cdot C_г + C_{\text{тек}} \right),$$

где $C_{\text{г}q}$ формирует годовые расходы, связанные с капитальным ремонтом (р./ год);

$C_{\text{тек}q}$ — эксплуатационные расходы за один часа работы машины (р./м.-ч);

$k_{\text{нр}}$ — коэффициент, который определяет накладные расходы на использование машины;

$\Phi_{\text{г}q}$ определяет годовой фонд машины (м.ч/год)

$$C_{eq} = k_{\text{нр}} \cdot \left( \sum_{a=1}^{a0} C_{na} + C_c + \sum_{a=1}^{a0} \sum_{b=1}^{b0} C_\tau^{ab} L_\tau^b \right)_q$$

где $C_{na}$ — затраты, связанные с погрузочно-разгрузочными работами на ТС а, а также возможные работы сцепки-отцепки или монтажу-демонтажу от тягача (р.);

$C_{cq}$ определяет стоимость обустройства пребывания машины на объекте, которое необходимо для эффективной и нормальной работы (р.);

$C_\tau^{ab}$ определяет стоимость перемещения машины на средствах типа $a = 1\ldots a0$ на 1 км дорогам с показателями $b = 1\ldots b0$ (р./км);

$L_\tau^b$ определяет длину маршрута перевозки с показателем $b$ (км).

Непроизводительные затраты, связанные с простоем рассчитываются как $C_{\text{чп}q} = C_{nq} + C_{eq}$, где $C_{ïq}$ представляют расходы за час простоя машины типоразмера $q$, (р./м.-ч) и равны

$$C_{nq} = k_{\text{нр}} \cdot \left( C_c \cdot \frac{1}{\Phi_\tau} + 0{,}5 \cdot (C_{\text{эп}} + C_{\text{см.о}}) + P \right)_q,$$

где $C_{\text{чп}q}$ составляют затраты на горючее одного м.-ч. работы машины (р./м.-ч);

$C_{\text{см.о}q}$ представляет показатель расходов на обтирочные и смазочные материалы отнесенные к м.-ч. Работы машины (р./м.-ч.);

$P_q$ — зарплата машинистов за час работы (р./ч.).

В результате, определяемые в такой постановке расходы на реализацию механизированных работ (это и есть критерий эффективности) представляют аддитивную функцию трех аргументов

$$C^{t} = C_{н} + C_{e} + C_{q} \to \min,$$

где $C_{н} + C_{e} + C_{q}$ определяют расходы на выполнения, перемещение машин и простой из-за недогрузки.

Кроме особенностей расчета себестоимости, для автотранспортного предприятия, по сравнению, например, с промышленным, большое влияние имеет сезонность. Поэтому коэффициенты моделей, рассчитанные методом [7] для летнего времени, будут отличаться от таких же, полученных для периода распутицы. Следовательно, во-первых, необходимо адаптировать модели к фактору времени, а во-вторых, периодически обновлять их коэффициенты. Это может быть достигнуто внедрением в СППР модуля внутренней оценки качества моделей, сравнивающего их прогнозные значения со вновь поступающими данными. Достижение заданного рассогласования является поводом произвести повторную идентификацию коэффициентов на основании данных, полученных за какой-то промежуток времени в прошлом $T_2$.

При этом сами глобальные настройки $T_1$ и $T_2$ не являются чем-то предопределенным, и должны выбираться таким образом, чтобы качество поддержки принятия решений было максимальным. Так, слишком малое значение $T_1$ приведет к тому, что влияние какого-то одного конкретного дорогого ремонта может стать недопустимо большим, а слишком большое — к наложению разных сезонных ситуаций, требующих разных подходов к ремонтному обеспечению [8].

Отдельной задачей становится учет и реагирование на отклонения от плановых значений системы показателей деятельности [9]. С одной стороны, данные отклонения могут означать несовершенство систем планирования и СППР в целом, при котором, как минимум, требуется настройка внутренних параметров СППР. С другой стороны, очевидный стохастический характер деятельности транспортного предприятия исключает отсутствие подобных отклонений [10].

Общая архитектура СППР представлена на рис. 6.

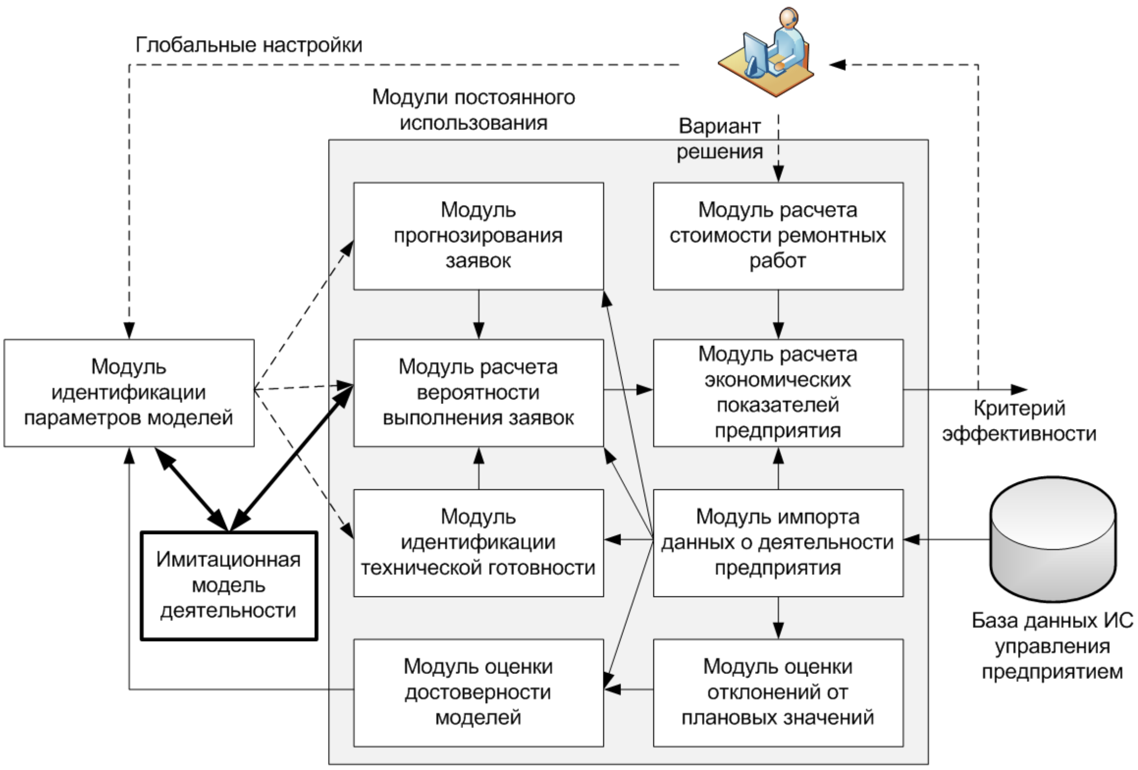
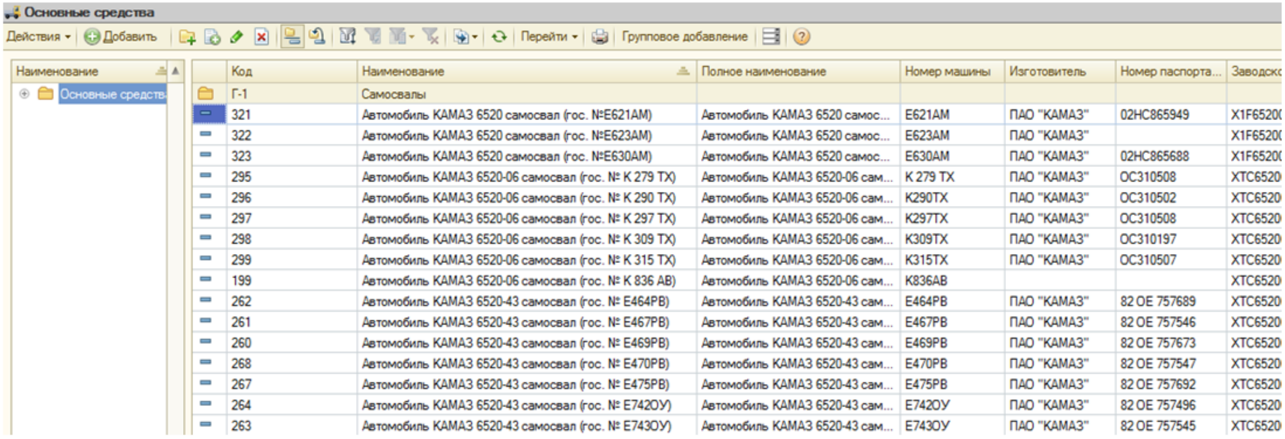



*Рис. 6. Архитектура СППР*

Техническая реализация СППР зависит от имеющейся у предприятия программной базы, включающей ИС управления и учета деятельности. В РФ широко распространены 1С-конфигурации, решающие эти задачи. В частности, необходимый для данной СППР перечень транспортных средств может быть реализован в виде справочника основных средств 1С-бухгалтерии (рис. 7).




| Код | Наименование | Полное наименование | Номер машины | Изготовитель | Номер паспорта... | Заводско |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Г-1 | Самосвалы | | | | | |
| 321 | Автомобиль КАМАЗ 6520 самосвал (гос. №Е621АМ) | Автомобиль КАМАЗ 6520 самос... | Е621АМ | ПАО "КАМАЗ" | 02НС865949 | X1F6520( |
| 322 | Автомобиль КАМАЗ 6520 самосвал (гос. №Е623АМ) | Автомобиль КАМАЗ 6520 самос... | Е623АМ | ПАО "КАМАЗ" | | X1F6520( |
| 323 | Автомобиль КАМАЗ 6520 самосвал (гос. №Е630АМ) | Автомобиль КАМАЗ 6520 самос... | Е630АМ | ПАО "КАМАЗ" | 02НС865688 | X1F6520( |
| 295 | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 самосвал (гос. № К 279 ТХ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 сам... | К 279 ТХ | ПАО "КАМАЗ" | ОС310508 | XTC6520 |
| 296 | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 самосвал (гос. № К 290 ТХ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 сам... | К290ТХ | ПАО "КАМАЗ" | ОС310502 | XTC6520 |
| 297 | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 самосвал (гос. № К 297 ТХ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 сам... | К297ТХ | ПАО "КАМАЗ" | ОС310508 | XTC6520 |
| 298 | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 самосвал (гос. № К 309 ТХ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 сам... | К309ТХ | ПАО "КАМАЗ" | ОС310197 | XTC6520 |
| 299 | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 самосвал (гос. № К 315 ТХ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 сам... | К315ТХ | ПАО "КАМАЗ" | ОС310507 | XTC6520 |
| 199 | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 самосвал (гос. № К 836 АВ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-06 сам... | К836АВ | | | XTC6520 |
| 262 | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 самосвал (гос. № Е464РВ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 сам... | Е464РВ | ПАО "КАМАЗ" | 82 ОЕ 757689 | XTC6520 |
| 261 | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 самосвал (гос. № Е467РВ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 сам... | Е467РВ | ПАО "КАМАЗ" | 82 ОЕ 757546 | XTC6520 |
| 260 | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 самосвал (гос. № Е469РВ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 сам... | Е469РВ | ПАО "КАМАЗ" | 82 ОЕ 757673 | XTC6520 |
| 268 | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 самосвал (гос. № Е470РВ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 сам... | Е470РВ | ПАО "КАМАЗ" | 82 ОЕ 757547 | XTC6520 |
| 267 | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 самосвал (гос. № Е475РВ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 сам... | Е475РВ | ПАО "КАМАЗ" | 82 ОЕ 757692 | XTC6520 |
| 264 | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 самосвал (гос. № Е742ОУ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 сам... | Е742ОУ | ПАО "КАМАЗ" | 82 ОЕ 757496 | XTC6520 |
| 263 | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 самосвал (гос. № Е743ОУ) | Автомобиль КАМАЗ 6520-43 сам... | Е743ОУ | ПАО "КАМАЗ" | 82 ОЕ 757545 | XTC6520 |

*Рис. 7. Справочник ТС*

В этом случае часть модулей СППР может эффективно быть выполнена в виде внешних обработок [11], что позволит уменьшить риски нарушения работы основной конфигурации. Поскольку развертывание данной СППР, естественно, будет происходить без приостановки деятельности предприятия, без приостановки работы основных 1С-конфигураций, обеспечивающих эту деятельность, только использование внешних обработок позволяет добавлять новые возможности без сохранения каждый раз конфигурации в целом.

Разработанная архитектура СППР позволяет обеспечить ЛПР достоверной и качественной информацией о последствиях выбора того или иного вида ремонта для экономической эффективности предприятия в целом.

## Литература

1. *Mnif S., Elkosantini S., Darmoul S, Ben Said L.* An immune memory and negative selection based decision support system to monitor and control public bus transportation systems// IFAC-PapersOnLine. – 2016. – Vol. 49. – P. 143–148.

2. *Володина, Ю. И.* Прогнозная модель процесса флокуляции на основе нейронной сети / Володина Ю. И. Затонский А. В., Рахимова О. В., Середкина О. Р. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2017. – Т. 17, № 2. – С. 42–50.

3. *Затонский, А. В.* Информационное обеспечение поддержки принятия решений на примере составления расписания занятий образовательной организации / А. В. Затонский, С. А. Варламова// Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2018. – Т. 18, № 3. – С. 88–106.

4. *Егоров, С. Я.* Имитационная модель технической готовности крупного автопарка / С. Я. Егоров, Х. С. Салих, А. В. Затонский // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2020. – № 2. – С. 14–15.

5. *Салих, Х. С.* Методы, модели и алгоритмы поддержки принятия решений по управлению автотранспортным предприятием с распределенной структурой обслуживаемых объектов: дис. ... канд. техн. наук. Тамб. гос. техн. университет, Тамбов, 2020.

6. *Sprenger R., Mönch L.* A decision support system for cooperative transportation planning: Design, implementation, and performance assessment // Expert Systems with Applications. – 2014. – V. 41. – P. 5125–5138.

7. *Салих, Х. С.* Идентификация технической готовности транспортных и технологических машин крупного автотранспортного предприятия / Х. С. Салих, С. Я. Егоров, А. В. Затонский, П. В. Плехов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2020. – № 8(1).

8. *Abdi A., Taghipour S.* Sustainable asset management: A repair-replacement decision model considering environmental impacts, maintenance quality, and risk // Computers & Industrial Engineering. – 2019. – V. 136. – P. 117–134.

9. *Остроух, А. В.* Математическая модель системы дистанционной диагностики неисправностей автомобилей / А. В. Остроух, Н. Е. Суркова, А. В. Воробьева, Х. С. Салих // В мире научных открытий. – 2015. – № 6 (66). – С. 63–70.

10. *Prytz R., Nowaczyk S., Rögnvaldsson S., Byttner S.* Predicting the need for vehicle compressor repairs using maintenance records and logged vehicle data // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2015. – V. 41. – P. 139–150.

11. *Анисимов, А. П.* Экономика, планирование и анализ деятельности автотранспортных предприятий / А. П. Анисимов. – М. : Транспорт, 2016. – 250 с.

12. *Mnif S., Elkosantini S., Darmoul S, Ben Said L.* An immune memory and negative selection based decision support system to monitor and control public bus transportation systems // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – V. 49, issue 5. – P. 143–148.

13. *Volodina Yu. I. Zatonsky A.V., Rakhimova O. V., Seredkina O. R.* Predictive model of the flocculation process based on the neural network // Bulletin of the South Ural State University the city. Series: Computer Technologies, Management, Electronics. – 2017. – V. 17, No. 2. – P. 42–50.

14. *Zatonsky A. V., Varlamova S. A.* Information support for decision-making on the example of scheduling the classes of an educational organization // Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies, Management, Electronics. – 2018. – V. 18, No. 3. – P. 88–106.

15. *Egorov S. Ya., Salikh Kh.S., Zatonsky A.V.* Simulation model of technical readiness of a large fleet // Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies, Management, Electronics. – 2020. – No. 2. – P. 14–15.

16. *Salih Kh. S.* Methods, models and algorithms for decision support for the management of a motor transport enterprise with a distributed structure of serviced objects: dis. ... Cand. tech. sciences. Tamb. state tech. University, Tambov, 2020.

17. *Sprenger R., Mönch L.* A decision support system for cooperative transportation planning: Design, implementation, and performance assessment // Expert Systems with Applications. – 2014. – V. 41. – P. 5125–5138.

18. *Salikh Kh. S., Egorov S. Ya., Zatonsky A. V., Plekhov P. V.* Identification of technical readiness of transport and technological vehicles of a large motor transport enterprise // Modeling, optimization and information technology. – 2020. – No. 8 (1).

19. *Abdi A., Taghipour S.* Sustainable asset management: A repair-replacement decision model considering environmental impacts, maintenance quality, and risk // Computers & Industrial Engineering. – 2019. – V. 136. – P. 117–134.

20. *Ostroukh A. V., Surkova N. E., Vorobyova A. V., Salikh Kh. S.* A mathematical model of a system for remote diagnostics of vehicle malfunctions // In the world of scientific discoveries. – 2015. – No. 6 (66). – P. 63–70.

21. *Prytz R., Nowaczyk S., Rögnvaldsson S., Byttner S.* Predicting the need for vehicle compressor repairs using maintenance records and logged vehicle data // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2015. – V. 41. – P. 139–150.

22. *Anisimov, A. P.* Economics, planning and analysis of the activities of motor transport enterprises. – Moscow : Transport, 2016. – 250 p.

УДК 005.722

# ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ НАУЧНЫМ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕМ В ВЕДОМСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

**А. В. Калач[1], Е. О. Бухаров[2], Н. В. Мартинович[3], А. Н. Батуро[3]**

[1]*Воронежский институт ФСИН России*
[2]*Краснодарское высшее военное училище имени генерала армии С.М. Штеменко*
[3]*Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России*

**Аннотация.** В статье проанализированы существующие типы организационных структур управления, проанализированы возникающие типовые проблемы научных подразделений, предложена организационная структура, позволяющая оптимизировать управление научно-исследовательским центром организации силового ведомства.
**Ключевые слова:** оптимизация управления, организационная структура, научные подразделения.

## Введение

Структура организационной системы представляет собой уровни управления и функциональные области, которые логически связаны между собой и построены в определенной форме, позволяющей достичь целей организации максимально эффективно, а также отражающей наиболее существенные взаимоотношения между различными элементами и подсистемами, входящими в ее состав [1].

Под организационной структурой подразделения понимается схема расстановки людей на разные позиции, которые влияют на ролевые отношения между ними, а также система управления, которая подразумевает принципы и механизмы принятия решений, прохождения информации, планирования, системы мотивации и стимулирования. Следует также заметить, что организационная структура является динамическим объектом и изменяется по мере развития организации в соответствии со стоящими перед ней задачами и условиями, продиктованными внутренней и внешней средой. Цель организации или подразделения должна рассматриваться в качестве ориентира для направления потоков связей и полномочий.

Необходимость исследования организационной структуры подразделения вытекает из детального рассмотрения целей его функционирования. Под целью функционирования, в данном случае, понимается конкретное состояние или конкретный желаемый результат, которого стремится добиться организация. Процесс планирования заключается в разработке цели и доведении ее до членов организации. Необходимость оптимизации организационной структуры возникает, в том числе, когда при росте задач, стоящих перед организацией (подразделением), появляются: зоны безответственности, дублирование функций, различия в нагрузке на персонал, а также тогда, когда существующая структура не обеспечивает возможность оперативно реагировать на отрицательные изменения в результатах работы.

Повышение эффективности функционирования организации (подразделения) в основном определяется организованностью именно системы управления, зависящей как от структуры, так и от деятельности всех ее элементов в направлении выбранной цели.

Грамотно построенная организационная структура дает возможность оптимизировать взаимодействие подразделений, равномерно распределять нагрузку на персонал, избегать дублирования функций, устранить двойное и тройное подчинение, разграничить сферу деятельности руководителей, определить их полномочия и зону ответственности, повысить производительность труда.

## 1. Теоретический анализ научной задачи

Существуют следующие организационные структуры, при этом вид организационной структуры зависит от типа, целей и размеров объекта управления и его внешней среды [2]:

**Линейная** — многоуровневая иерархическая структура управления, характеризующая тем, что во главе каждого звена или подразделения стоит единоличный руководитель, ему подчиняется руководители более низкого уровня, им — свои подчиненные, и так до самого низшего звена управления. Линейную структуру можно считать одной из простейших многоуровневых структур [1]. Данная структура применяется во всех организациях силовых ведомств в разных исполнениях: линейная, линейно-штабная, линейно-функциональная (рис. 1).

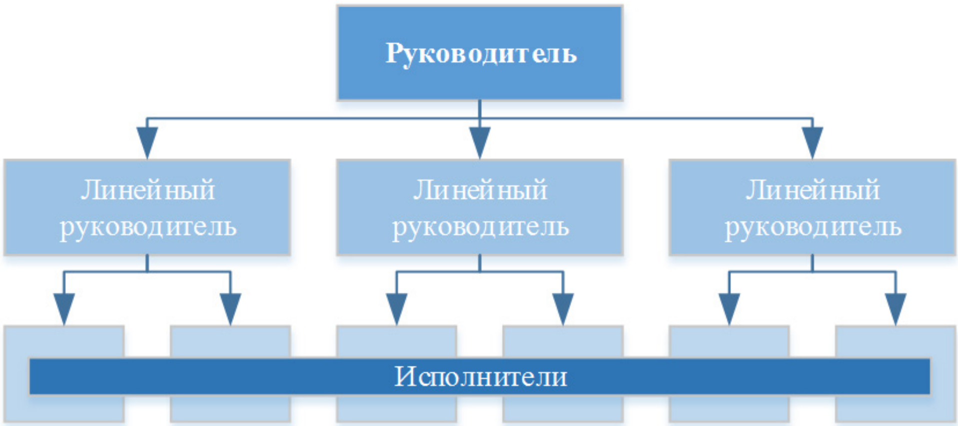



*Рис. 1. Линейная организационная структура*

К преимуществам линейной структуры управления следует отнести реализация принципа единоначалия, единства распоряжений, ориентация на решение оперативных задач; простота управления (один канал связи); четко выраженная ответственность руководителя за результаты управленческой деятельности и результаты каждого подразделения.

Недостатками линейной структуры управления являются необходимость высокого уровня компетентности руководителя с широким спектром компетенций; в структуре отсутствуют специальные уровни по планированию и подготовке управленческих решений; избыток информационных связей; сложные связи между уровнями управления, затруднение согласования решений; высокая концентрация ответственности.

**Линейно-штабная** — разновидность иерархической структуры, сущность которой заключается в формировании дополнительного звена по горизонтали — штаба, который принимает участие в подготовке управленческих решений, но не обладают правом их принятия (своеобразные помощники для руководителей). Примеры штабов — служба контроля, отдел координации, аналитический отдел, подразделение сетевого планирования, социологическая служба, юридический отдел. Схема расположения функциональных элементов линейно-штабной структуры представлена на рис. 2.

Преимущества линейно-штабной структуры управления:

– снижение управленческой нагрузки на линейных руководителей;

– возможность привлечения специалистов и экспертов для планирования и подготовки управленческих решений.

Недостатки линейно-штабной структуры управления:

– снижение управленческой ответственности, так как за подготовку решения отвечает штаб, который не принимает участие в его реализации;

– тенденция к избыточной централизации управленческой деятельности;

– как и в линейной структуре необходим высокий уровень компетентности руководителя с широким спектром компетенций;

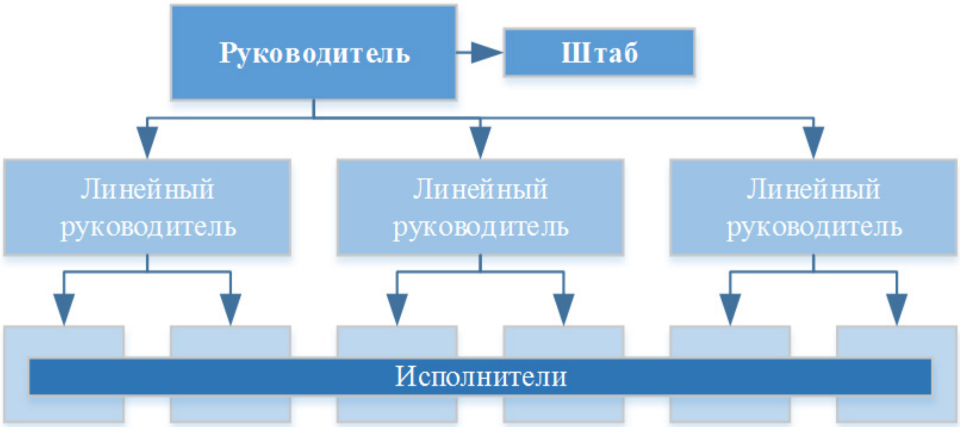


*Рис. 2. Линейно-штабная организационная структура*

– при увеличении масштабов организации или подразделения, линейная цепь становится длинной, громоздкой и неэффективной, а рост объемов подразделений формирует необходимость координации больших участков работы, что в конечном итоге отражается на качестве достигаемых результатов.

**Линейно-функциональная** — иерархическая структура, воплощающая в себе симбиоз идей иерархии и департаментизации (функциональной специализации) (рис. 3). Это наиболее распространенная структура управления, используется на крупных и средних предприятиях любой отрасли и сферы деятельности. Шахматный принцип построения, лежащий в основе линейно-функциональной структуры, подразумевает выстраивание внутри каждого департамента (функции) своей иерархической структуры. Линейно-функциональная организационная структура является ступенчатой, иерархической структурой и состоит из осуществляющих основную работу линейных подразделений и специализированных обслуживающих функциональных подразделений. Подобный тип структуры является наиболее распространенным в современном капиталистическом обществе, и применим на большинстве предприятий среднего и крупного отраслевого бизнеса [4].

Преимущества линейно-функциональной структуры управления:

– разумный баланс между соблюдением принципа единоначалия и рациональной специализацией отдельных уровней управленческой деятельности;

– руководитель организации освобождается от необходимости подробного анализа проблем;

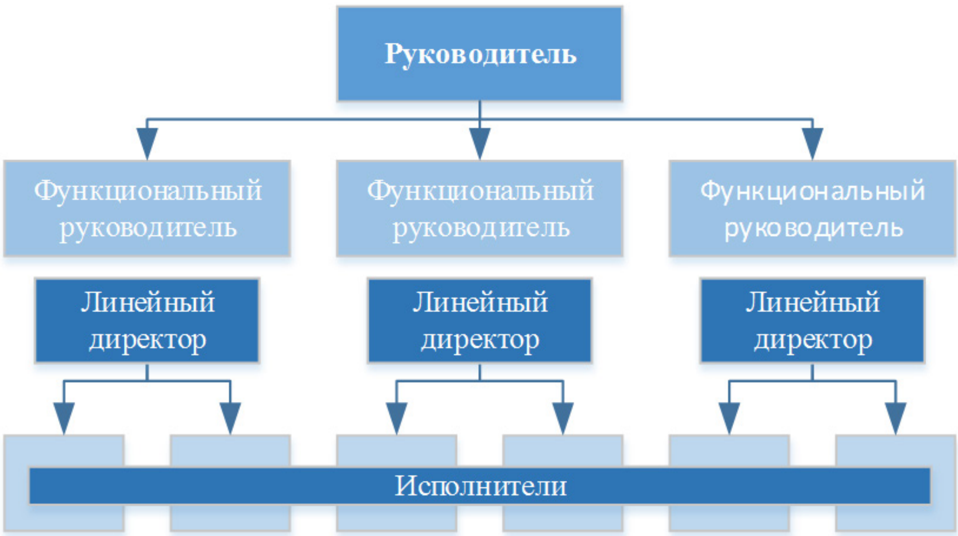


*Рис. 3. Линейно-функциональная организационная структура*

– сохраняется возможность привлечения консультантов и экспертов для участия в подготовке и проработке управленческих решений;

– частичное делегирование полномочий на нижние уровни управления в соответствии с направлениями деятельности подразделений.

Недостатки линейно-функциональной структуры управления:

– снижается степень взаимодействия между разными подразделениями организации на горизонтальных уровнях, координация осуществляется верхними управленческими звеньями; снижение ответственности отдельных руководителей; усиление вертикальной управленческой иерархии в ущерб качеству реализации управленческих решений.

**Функциональная** — тип организационной структуры, при котором каждый функциональный блок реализуется на каждом уровне управления [3] (рис. 4).

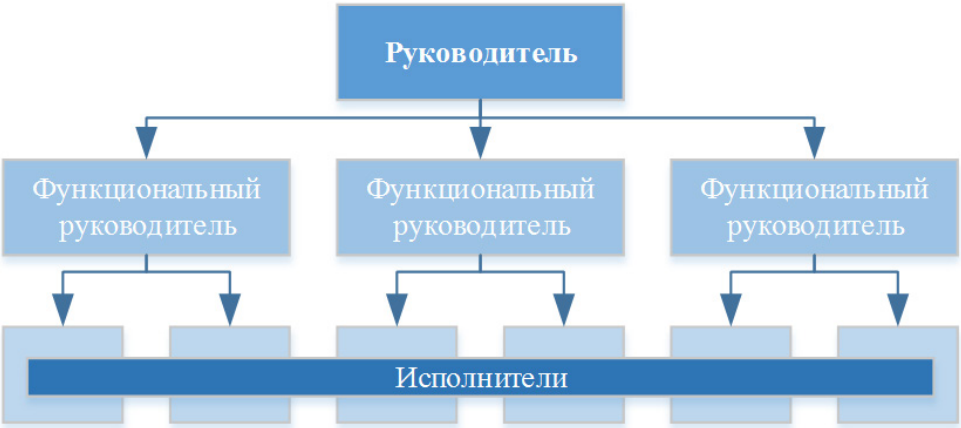



*Рис. 4. Функциональная организационная структура*

Преимущества функциональной структуры управления:

– снижается потребность в руководителях с широким спектром компетенций в пользу руководителей с высоким уровнем именно управленческой компетентности;

– в функциональной структуре управления стимулируется повышение квалификации работников аппарата управления; требуется высокий уровень компетентности специалистов и функциональных руководителей со специальными компетенциями;

– снижается потребность в специалистах широкого профиля.

Недостатки функциональной структуры управления:

– большой объем работы по координации всех подразделений аппарата управления;

– стратегические задачи отодвигаются на задний план, преобладает решение текущих вопросов с одновременным ухудшением способностей предприятия к адаптации к изменяющимся условиям хозяйствования; нарушается принцип единоначалия, повышается безответственность производственных и управленческих работников; предприятие с функциональной структурой управления может успешно функционировать только в условиях относительно стабильной внешней среды; существенно затрудняется процесс управления процессом в целом.

**Программно-целевая** (проектный тип) — структура управления, при которой деятельность рассматривается как совокупность выполняемых проектов, каждый из которых имеет фиксированное начало и окончание (например, освоение и производство нового изделия, внедрение новых технологий, строительство объектов и т. д.) (рис. 5).

Под каждый проект выделяются трудовые, финансовые, промышленные и другие ресурсы, которыми распоряжается руководитель проекта. Каждый проект имеет свою структуру, и управление проектом включает определение его целей, формирование структуры, планирование и организацию работ, координацию действий исполнителей. После выполнения проекта структура проекта распадается, ее компоненты, включая сотрудников, переходят в новый

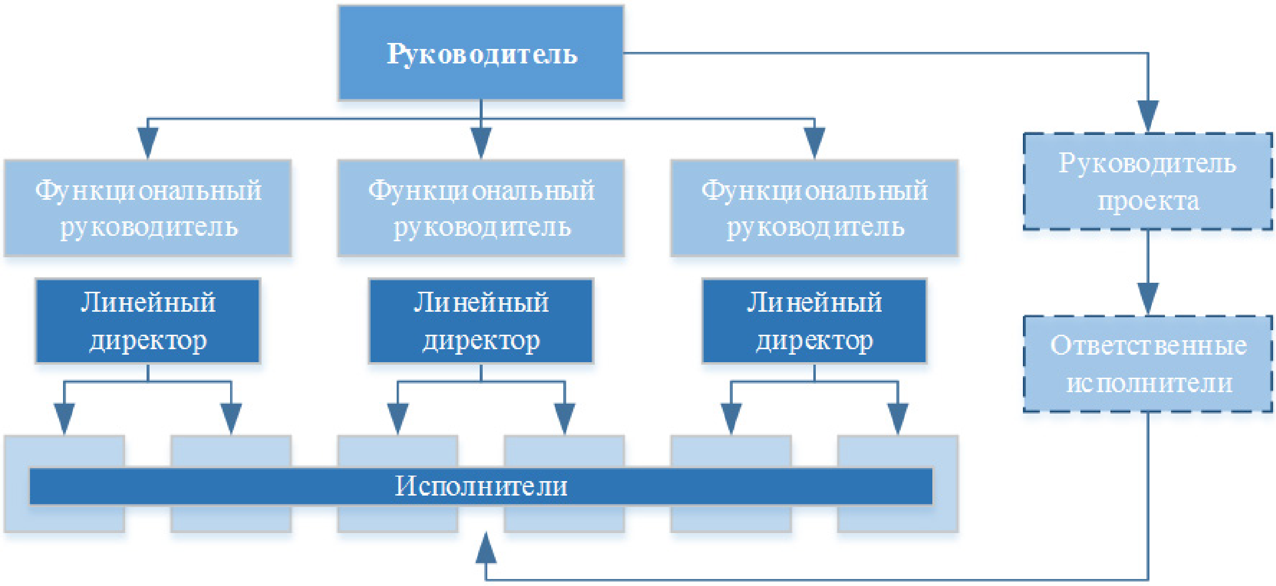



*Рис. 5. Программно-целевая организационная структура*

проект. При проектной организационной форме структура предприятия строится исходя из выполняемых им проектов. Под проектом понимается процесс осуществления комплекса целенаправленных мероприятий по созданию нового продукта или услуг в рамках установленных бюджета, времени и качества [5].

Программно-целевая структура управления возникает в рамках линейно-функциональных структур.

Преимущества программно-целевой структуры управления:

– целевая ориентация; специализация; концентрация ресурсов на конкретной программе или проекте; высвободившиеся ресурсы по окончании проекта могут применятся в другом проекте, либо в основной хозяйственной деятельности предприятия.

Недостатки программно-целевой структуры управления:

– ресурсы (финансовые, управленческие, человеческие, производственные и т. д.) замораживаются до тех пор, пока не будут закончены все работы по текущему проекту;

– двойное подчинение исполнителей в период выполнения работ по проекту: линейному руководителю – на весь период работы в компании и проектному руководителю — на период проекта. Наличие двух руководителей одновременно формирует сложности, связанные с распределением рабочего времени данного подчиненного между двумя различными блоками работ.

**Матричная** — сетевая структура, построенная на принципе двойного подчинения исполнителей: с одной стороны – непосредственному руководителю функциональной службы, которая предоставляет персонал и техническую помощь руководителю проекта, с другой – руководителю проекта или целевой программы, который наделен необходимыми полномочиями для осуществления процесса управления (рис. 6).

Матричная организационная структура управления — структура, которая реализует принцип множественности подчинения, когда структурные подразделения производственно-хозяйственной системы сформированы по линейному и функциональному принципам [6]. При такой организации руководитель проекта взаимодействует с двумя группами подчиненных: с постоянными членами проектной группы и с другими работниками функциональных отделов, которые подчиняются ему временно и по ограниченному кругу вопросов. При этом сохраняется их подчинение непосредственным руководителям подразделений, отделов, служб.

Преимущества матричной структуры управления:

– быстрое реагирование и адаптация к изменению условий хозяйствования; повышение активности административно-управленческого персонала за счет активного взаимодействия;

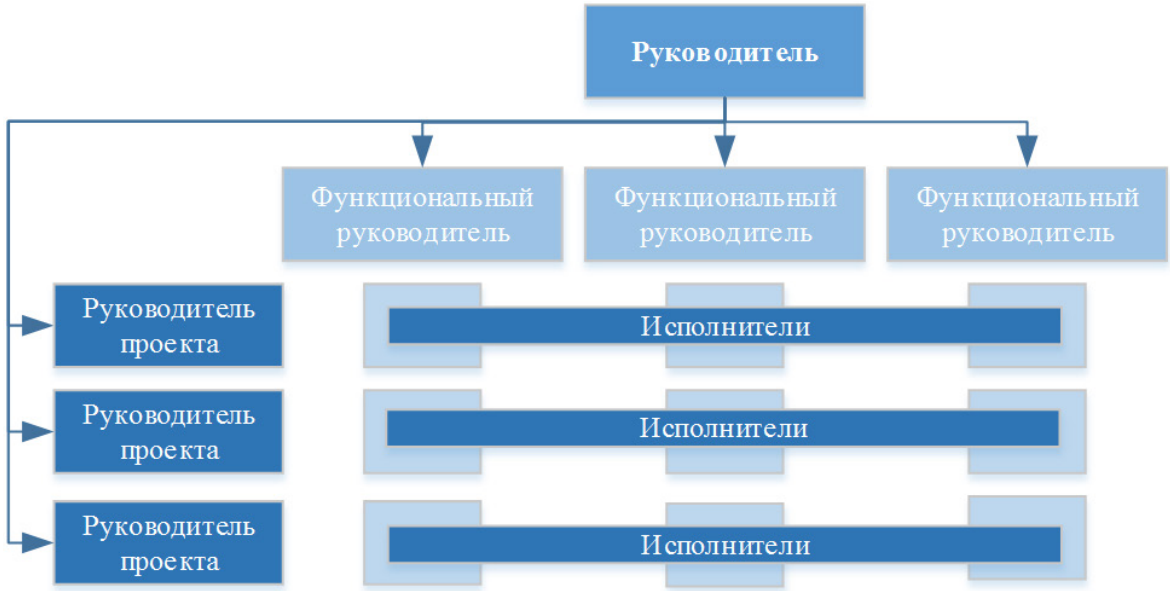



*Рис. 6. Матричная организационная структура*

рациональный подход к распределению ответственности, прав, обязанностей и реализуемых функций между линейными, функциональными и программно-целевыми органами.

Недостатки матричной структуры управления:

– распределение ответственности и обязанностей между руководителями и подразделениями часто существует только на бумаге, в действительности, повышается коллективная безответственность;

– сложная структура соподчинения, в результате возникают проблемы с определением приоритетов заданий и распределением времени на исполнение поручений руководителей; усложнена система работы в новой организационной структуре из-за изменения характера управления; ответственность подразделения за результаты своей работы размыта; повышается частота конфликтов между руководителями подразделений и проектов.

Анализ структуры управления научных организаций (подразделений) показал, что в настоящее время довольно остро стоит проблема формирования системы управления наукой, отвечающей современным условиям ее функционирования, причем задача ее решения имеет двойственный характер. Во-первых, необходимо обеспечить получение высоких научных результатов, во-вторых, быстро и эффективно использовать эти результаты на практике. Несомненно, что при формировании и совершенствовании системы мер управления наукой следует учитывать внутренние проблемы научного комплекса. В данном контексте задача управления сводится к созданию условий для научного поиска, реализации учеными своих профессиональных амбиций, к продуцированию научными организациями результатов достаточного уровня [7].

Основным отличием научных подразделений организаций силовых ведомств от научных организаций является отсутствие в штате подразделения отделов и служб, функционал которых заключается в обеспечении деятельности подразделений, осуществляющих основной вид деятельности. То есть научное подразделение является структурным элементом какой-либо организации (учебной, испытательной и т. п.) (рис. 7).

Налицо линейно-штабная структура управления, недостатками которой являются: снижение управленческой ответственности, так как за подготовку решения отвечает штаб, который не принимает участие в его реализации; тенденция к избыточной централизации управленческой деятельности; как и в линейной структуре необходим высокий уровень компетентности руководителя с широким спектром компетенций.


*Рис. 7. Типовая организационная структура организации силовых ведомств*

Кроме того, в отличие от организаций, деятельность которых направлена на получение прибыли, в силовых ведомствах, зачастую, штаб (обеспечивающие подразделения) «перекидывают» часть своих функций на «основные» подразделения. Таким образом, в подразделениях, осуществляющих основной вид деятельности, появляется дополнительная нагрузка.

В данном случае структура является линейной с некоторыми зачатками линейно-штабной. Штаб в данном случае выполняет функции помощи руководителю элемента (начальнику управления) в части научной деятельности (ведущий научный сотрудник) и делопроизводства.

В некоторых случаях может появляться заместитель руководителя, который вносит еще один уровень управления, которых и так с избытком.

С целью выявления типовых возникающих проблемных вопросов были проанализированы несколько научно-исследовательских центров организаций силовых ведомств.

Научно-исследовательский центр, как правило, осуществляет работу в области разработки тактико-технических (технических) требований к перспективным образцам вооружения, военной и специальной техники, военно-научного сопровождения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, проводимых организациями по разработке указанных выше образцов (в том числе, участие в приемке этапов работ и в государственных испытаниях), обоснования и военно-научного сопровождения выполняемых комплексных целевых (федеральных, ведомственных) программ.

Типовая структура научного подразделения организации представлена на рис. 8.


*Рис. 8. Типовая организационная структура научного подразделения*

С этой целью проводит фундаментальные, прогнозные, поисковые, прикладные исследования, участвует в научных (военно-научных, военно-исторических) конференциях, совещаниях, семинарах, конкурсах и выставках; проводит изобретательские, рационализаторские и патентно-лицензионные работы; осуществляет научно-публикационную и научно-апробационную деятельность; организовывает, развивает и поддерживает научные связи, с научными организациями федеральных органов исполнительной власти, общественными научными организациями и вузами, ведущими исследования по заданной тематике.

## Заключение

В результате анализа существующих организационных структур и систем управления научно-исследовательских центров были выявлены проблемные вопросы. Анализ выявленных проблем в подразделениях, а также особенностей их деятельности позволили определить пути совершенствования системы управления, которые должны быть направлены на повышение управляемости (принятие решений, планирование, исполнение, анализ, контроль) за счет уменьшения избыточного количества уровней управления; реализацию возможности легкого добавления функций/направлений при росте задач и развитии; снижение конфликтных ситуаций.

## Литература

1. *Краснов-Михальченко А. А., Яцук К. В.* Организационная система воинского подразделения // Военный научно-практический вестник. – 2016. – №1 (4). – С. 38–40.

2. *Емельянова Д. А., Шульгина А. И.* Организационные структуры в системе управления персоналом // Сборник материалов всероссийской научно-практической конференции «Актуальные аспекты обеспечения конкурентоспособности организаций в условиях перехода к цифровой экономике». Курск, 11 ноября 2019. – С. 254–258.

3. *Кувшинов Н. Е.* Организационная и функциональная структура управления районами электрических сетей // Теория и практика современной науки. – 2016. – № 12(18). – С. 669–672.

4. *Крупенич Е. А.* Преимущества и недостатки линейно-функциональной организационной структуры предприятия // Сборник трудов конференции «Начало в науке» материалы IV международной научно-практической конференции школьников, студентов, магистрантов и аспирантов: в 3 частях. 2017. – С. 238–241.

5. *Кременецкая М. Е., Шкромадо А. А.* Адаптация организационных структур предприятий аэрокосмической отрасли к проектному управлению // Вестник Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16, №1(5). – С. 1441–1447.

6. *Шмырова К. В.* Управление изменением структуры: переход с линейно-функциональной на матричную организационную структуру // Сборник трудов конференции «Проблемы эффективного использования научного потенциала общества», Челябинск 10 декабря 2017. – С. 210–213.

7. *Миндели Л. Э., Медведева Т. Ю.* Совершенствование институтов управления фундаментальной наукой – М. : ИПРАН РАН, 2018. – 108 с.

УДК 004.946

# СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ АДАПТИВНЫХ ТРЕНАЖЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ

**А. Е. Архипов[1], С. В. Карпушкин[1], С.А. Бокадаров[2]**

[1]*Тамбовский государственный технический университет*
[2]*Воронежский институт ФСИН России*

**Аннотация.** Рассмотрена классификация задач, для решения которых создаются адаптивные тренажерные комплексы, компоненты и технологии системы визуализации. Предложена постановка задачи структурного синтеза системы визуализации адаптивного тренажерного комплекса, предусматривающая обеспечение возможности решения максимального количества задач обучения. Разработана схема связей между задачами и технологиями, конкретизации компонентов визуализации, позволяющих решить конкретный набор задач.
**Ключевые слова:** эргатические системы, адаптивныйтренажерный комплекс, система визуализации, структурный синтез, компоненты и технологии.

## Введение

В настоящее времяадаптивные тренажерные комплексы (АТК) активно применяются для обучения персонала в отраслях с высокими рисками, где особенно велика значимость человеческого фактора, где невозможно обучение на реально действующих объектах: на транспорте, в оборонном комплексе, в работе по ликвидации чрезвычайных ситуаций, в медицине, в энергетике [1, 2]. Однако, требования к качеству визуализации в каждой из этих сфер применения АТК значительно отличаются. В ряде отраслей точность воспроизведения реальных процессов должна быть максимальной, что предъявляет высокие требования к аппаратному и программному обеспечению системы визуализации.

В данной работеисследуются связи между задачами, решаемыми в ходе тренажерной подготовки, и компонентами системы визуализации АТК, которые используются для решения этих задач. Сформулирована задача структурного синтеза системы визуализации АТК, формализующая зависимости между функциональными требованиями к тренажеру и возможностями его компонентов. Для решения этой задачи предлагается реализовать схему соответствия между задачами обучения и компонентами системы визуализации.

## 1. Анализ предметной области

Введем ряд уточнений терминов и понятий, применяемых в данной предметной области.

АТК — это техническое средство подготовки пользователя, предназначенное для формирования у него определенных знаний, умений и навыков. С помощью этого средства реализуется система «человек-компьютер» и ее взаимодействие как непосредственно с предметом управления, так и с внешними факторами. Таким образом, термин АТК отвечает следующим критериям [1]:

1) в основе тренажера лежит модель реальной системы, для управления которой необходим человек-оператор;

2) эта искусственная среда преследует строго образовательные цели: направлена на формирование профессиональных компетенций;

3) тренажер включает компоненты системы визуализации для взаимодействия с пользователем либо с инструктором.

Система визуализации АТК — это совокупность программных и аппаратных компонентов, предназначенных для представления изучаемого объекта эргатической системы (или системы в целом) в виде, удобном как для восприятия пользователем, так и для взаимодействия пользователя с АТК [2].

С учетом приведенных уточнений разработана классификация основных задач, для решения которых создаются АТК:

1. Теоретическая подготовка. Как правило, реализуется в виде интерактивного приложения с простыми элементами взаимодействия (инструкция по сборке определенного узла на производстве, по подготовке оператора химического производства к управлению АСУ ТП).

2. Формирование грубых и тонких моторных навыков. К грубым можно отнести умение управлять различными подвижными техническими средствами (комбайны, танки, самолеты). К тонким — манипуляции с специализированными инструментами (электрододержатель сварочного аппарата, хирургический скальпель).

3. Психологическая подготовка. Тренажер моделирует стрессовые ситуации при возникновении нештатной ситуации.

4. Физическая подготовка. Моделирование непривычных физических воздействий на человека (гидравлическая имитация невесомости для подготовки космонавтов к работе в условиях открытого космоса) [3].

5. Умение ориентироваться в пространстве моделируемой системы. Задачей системы визуализации является реализация возможности свободного перемещения и свободных действий обучаемого в моделируемой системе.

Остановимся подробнее на системе визуализации. Она включает множество компонентов и технологий их функционирования. К компонентам относятся различного рода аппаратные средства, взаимодействующие с системой ввода или вывода информации АТК:

– системы отслеживания движений, позволяющие определить положение головы, глаз или рук человека с помощью гироскопических, инфракрасных датчиков, специальных костюмов, перчаток и т. д.;

– различные игровые контроллеры, позволяющие добиться более удобного и реалистичного взаимодействия с моделируемой системой (джойстики, дубликаты средств управления автомобилями, самолетами и т. п.);

– привычные системы вывода графической информации, такие как мониторы или проекторы. В некоторых случаях данную функцию может выполнять дисплей смартфона;

– привычные устройства ввода: клавиатура и компьютерная мышь;

– функциональные модули, позволяющие управлять конструкционными и режимными параметрами моделируемого объекта, полностью реализовать функции и параметры оригинала, например полный аналог приборной панели управления технической системой;

– системы создания физического воздействия, обеспечивающие выработку дополнительных навыков, таких как адаптация к физическим нагрузкам, мышечная память;

– устройства непосредственной реализации технологий визуализации (шлемы и комнаты виртуальной реальности (VR), очки дополненной (AR) и смешанной (MR) реальности;

– имитаторы узконаправленного инструмента – различные средства имитации инструментов для развития навыков мелкой моторики.

Таким образом, компоненты системы визуализации реализуют процесс отображения различных режимов функционирования и параметров эргатических систем профессионального назначения в АТК в соответствии с выбранными моделями и алгоритмами с помощью воздействия на органы чувств человека с использованием различных средств вывода информации. Для реализации программного обеспечения системы используются различные средства создания двумерной и трехмерной графики, например, широко распространенные среды разработки и графические платформы Unity3D, DirectX, UnrealEngine, OpenGL и др. [4].

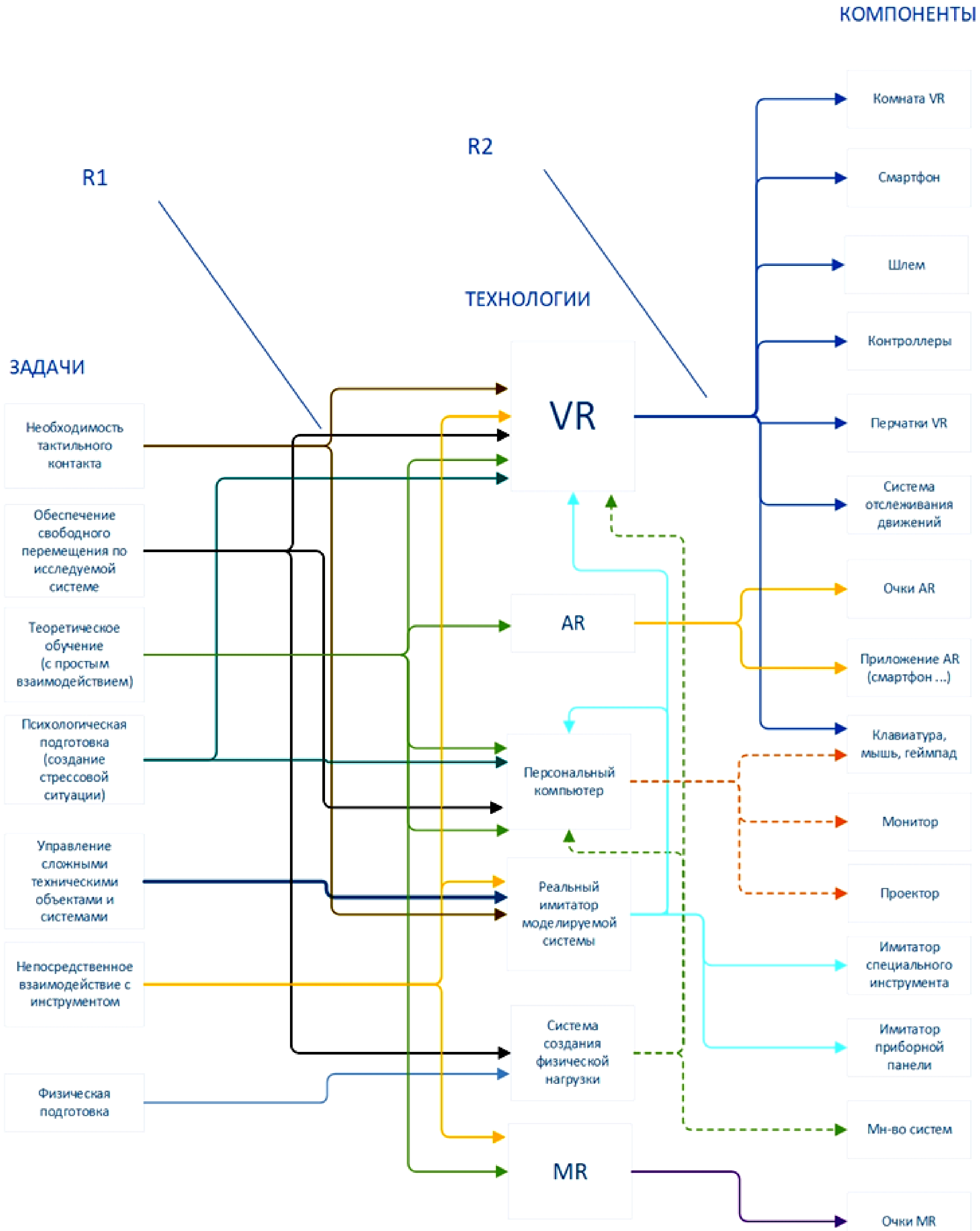



*Рис. 1. Схема связи между задачами и технологиями, конкретизации компонентов визуализации*

## 3. Постановка задачи

Необходимо найти множество $C$ компонентов системы визуализации и множество технологий их реализации, обеспечивающие возможность решения максимального количества задач обучения, поставленных перед тренажерным комплексом:

$$f(C,T) = Z \to \max,$$

где $f$ — функция, реализующая выбор компонентов и технологий визуализации, определение перечня задач, решаемых с их использованием;

$T = \{t_j\}$ — множество технологий визуализации;

$t_j = \{fa_{jm}\}$ — конкретная технология;

$fa_{jm}$ — конкретная функциональная возможность;

$Z = \{z_i\}$ — множество задач;

$z_i = \{ft_{in}\}$ — конкретная задача обучения;

$ft_{in}$ — одно из функциональных требований к АТК.

Основные связи между задачами и технологиями можно формализовать в видемножества

$$R^1 = \{r^1{}_{ij} \mid z_i \to t_j\},$$

т. е. каждое из функциональных требований $\{ft_{in}\}$ каждой задачи $z_i$ соответствует одной из функциональных возможностей $\{fa_{jm}\}$ технологии $t_j$. Для решения задачи $z_i$ необходимо, чтобы пересечение множеств $\{ft_{in}\}$ и $\{fa_{jm}\}$ было максимальным.

Конкретизацию компонентов визуализации, позволяющих решить множество задач $Z$ удобно представить в виде множества

$$R^2 = \{r^2{}_{jk} \mid t_j \to c_k\}$$

характеризующего связи между технологиями визуализации и конкретными примерами их реализации в виде компонентов.

На рис. 1 представлена схема связей типа $R^1$, $R^2$ для некоторого набора задач, технологий и компонентов визуализации. Рассмотрим пример формирования связей на данной схеме: необходимо найти множество компонентов системы визуализации для реализации подготовки сварщика. Основными задачами $z_i$ в данном случае являются развитие мелких моторных навыков и необходимость тактильного контакта обучаемого с инструментом. Данному набору задач соответствует набор требований к технологии $\{ft_{in}\}$, которые можно удовлетворить с применением возможностей $\{fa_{jm}\}$: реального имитатора системы и технологии VR (связь $R^1$). Конкретизация итоговых компонентов связью $R^2$: наилучшим компонентом $c_k$ является имитатор специального инструмента.

## Заключение

Постановка задачи структурного синтеза системы визуализации АТК позволяет предварительно, на этапе проектирования, прогнозировать его обучающие возможности, определить стоимостные характеристики и сформулировать требования к алгоритму структурно-параметрического синтеза системы визуализации, который включает следующие этапы [5]:

– формализацию структуры системы визуализации на основе классификации компонентов;

– выбор технологии визуализации с учетом набора требуемых компетенций;

– методику оценки компонентов для их выбора путем сужения множества возможных альтернатив;

– оптимизация структуры и параметров системы визуализации.

## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта:-договор № 20-37-90123\20 от 25.08.2020

## Литература

1. Modeling of the learning process in adaptive training complexes / M. Krasnyanskiy, A. Obukhov, D. Dedov et al. // Journal of Applied Engineering Science. – 2018. – V. 16, No. 4. – P. 487–493.

2. Methodology of Forming the Readiness of Miners for Work in Extreme Situations Using a Training Complex / M. Krasnyansky, S. Karpushkin, A. Popov et al. // International Journal of Emerging Technologies in Learning. – 2020. – V. 15, No. 2. – P. 86–97.

3. A Mathematical Model of Organizing the Developmental Instruction in the System of Professional Education / A. Obukhov, D. Dedov, M. Krasnyanskiy et al. // Tehnički vjesnik. – 2020. – V. 27, No. 2. – P. 480–488.

4. Visualization Technology and Tool Selection Methods for Solving Adaptive Training Complex Structural-Parametric Synthesis Problems / M. N. Krasnyanskiy, D. L. Dedov, A. D. Obukhov et al. // Journal of Computing and Information Science in Engineering. – 2020. – V. 20, No. 4: 041001 (10 pages).

5. Алгоритм выбора компонентов визуализации для адаптивных тренажеров / М. Н. Краснянский, А. Д. Обухов, Д. Л. Дедов и др. // Пилотируемые полеты в космос. – 2020. – № 1 (34). – С. 57–71.

УДК 656.61

# ОБОСНОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВОИНСКИХ ПЕРЕВОЗОК ВО ВНЕПОРТОВЫХ УСЛОВИЯХ

**Ю. Д. Кравец[1], Д.В. Шувалов[1], А. Е. Радаев[2]**

*[1]Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва*
*[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

**Аннотация.** В работе рассмотрены вопросы обоснования характеристик транспортно-технологической системы воинских морских перевозок во внепортовых условиях в части наиболее предпочтительных вариантов технологических схем разгрузки судна в локациях назначения, а также агрегированных показателей суммарных затрат и длительности соответствующих логистических процессов. На основе результатов указанной процедуры сделан вывод об относительно невысокой эффективности традиционных технологических схем, а также отсутствии эффективных инструментальных средств для обоснования наиболее предпочтительных схем выгрузки. Указанные обстоятельства определили целесообразность разработки альтернативных технологических схем выгрузки и системы хранения грузов на побережье.
**Ключевые слова:** морской транспорт, воинские перевозки, технологическая схема, оптимизационная модель, грузовая единица, хранение.

## Постановка общей проблемы

В современных условиях развития морских воинских перевозок особую важность приобретают вопросы рациональной организации соответствующих технологических процессов, реализуемых в том числе при разгрузке судна во внепортовых условиях в рамках различных локаций назначения в составе сложных маршрутов перевозки грузовых единиц (ГЕ). Данная особенность обусловлена как сложностью структуры соответствующих логистических процедур, предполагающих привлечение значительных объемов ресурсов (единиц личного состава и военной техники), так и критической важностью своевременного выполнения операций в рамках снабжения воинских подразделений необходимыми для выполнения поставленных задач материально-техническими средствами в составе обрабатываемых ГЕ [1]. При этом результаты предварительного анализа научных и методических работ в соответствующей предметной области свидетельствуют об отсутствии эффективных инструментальных средств для решения задач рационального обоснования характеристик процессов транспортировки ГЕ морским транспортном из порта отправления до локаций назначения с учетом особенностей разгрузки судна в отдельных локациях транспортного маршрута, не имеющих каких-либо стационарных объектов транспортной инфраструктуры (причальных стенок, перегрузочных площадок и т. п.). Вышеуказанные обстоятельства определили целесообразность проведения исследования, целью которого является разработка инструментальных средств для обоснования характеристик транспортно-технологической системы воинских перевозок во внепортовых условиях.

При этом в качестве основных задач исследования были сформулированы следующие:

1. Произвести анализ научных работ и существующих практических аспектов реализации процедур транспортировки ГЕ из трюма судна в прибрежную зону в рамках морских воинских перевозок.

2. Сформировать альтернативные варианты технологических схем разгрузки судна (транспортировки ГЕ в прибрежную зону) во внепортовых условиях.

3. Разработать и реализовать на практическом примере оптимизационную модель обоснования характеристик транспортно-технологической системы воинских перевозок во внепортовых условиях.

4. Разработать технологию подготовки мест выгрузки путём обеспечения длительного хранения плавсредств.

## Постановка частной проблемы

Таким образом, объектом исследования является технологический процесс перевозки ГЕ в рамках морских воинских перевозок, предполагающий последовательную разгрузку судна в локациях назначения с применением определенных технологических схем.

Предметом исследования являются характеристики вышеуказанного технологического процесса.

Результаты анализа научных работ и существующих практических аспектов реализации процедур транспортировки ГЕ из трюма судна в прибрежную зону в рамках морских воинских перевозок (выполненного на начальных этапах исследования) позволили сделать следующие выводы:

1. Научные разработки, соответствующие тематике исследования, предполагают использование аналитических моделей для обоснования относительно простых структур технологических процессов морских воинских перевозок и обладают относительно невысокой практической значимостью ввиду трудности обеспечения адекватности получаемых результатов.

2. Применяемые на сегодняшний день технологические схемы транспортировки ГЕ единиц в прибрежную зону во внепортовых условиях предполагают применение воздушного транспорта и потому обладают относительно невысокой эффективностью с точки зрения суммарных операционных затрат

Вышеперечисленные выводы определили целесообразность разработки альтернативных вариантов технологических схем транспортировки ГЕ в прибрежную зону во внепортовых условиях. Каждый из указанных вариантов предполагает предварительную обработку ГЕ с использованием судовых стреловых кранов, а также определяется комбинацией отдельных разновидностей технологических ресурсов в разрезе следующих основных категорий:

– транспортировка ГЕ от судна к прибрежной зоне: буксируемая плавплатформа; плашкоут; катер на воздушной подушке; канатная дорога; трос-блочные устройства;

– обеспечение доступа для захвата ГЕ в прибрежной зоне: плавпричал, перегрузочная площадка канатной дороги;

– транспортировка грузовых единиц от прибрежной зоны к месту назначения: ричстакер, автомобильный кран, грузовой автомобиль (для неприводных ГЕ) [2–5].

Вышеуказанные альтернативные варианты существующих схемы являются более эффективными по сравнению с применяемыми на данными момент, поскольку определяются значительно меньшим значением суммарных операционных затрат.

Учет дополнительных вариантов технологических схем транспортировки ГЕ в прибрежную зону во внепортовых условиях обуславливает многовариантность структуры технологического процесса морских воинских перевозок в целом. Данное обстоятельство определило целесообразность разработки оптимизационной модели обоснования характеристик транспортно-технологической системы воинских перевозок во внепортовых условиях.

## Авторский подход к решению проблемы

Основными положениями разработанной оптимизационной модели являются следующие:

1. Объектом исследования является транспортно-технологическая система воинских перевозок во внепортовых условиях, предполагающая транспортировку заданных объемов партий

ГЕ различных категорий – контейнеров, единиц техники категорий 1 и 2 – морским транспортом – грузовым судном – из порта отправления в некоторое количество локаций назначения с применением в каждой из указанных локаций определенной технологической схемы перемещения ГЕ из трюма судна в место назначения (в прибрежной зоне), предполагающей использование определенных категорий технологических ресурсов.

2. Морской транспорт – грузовое судно – в процессе выполнения маршрута последовательно и единократно посещает каждую из локаций назначения, в рамках которой производится транспортировка в место назначения всех назначенных категорий ГЕ в полном объеме.

3. Каждая локация назначения определяется ограниченным набором возможных к применению технологических схем перемещения ГЕ из трюма судна в место назначения.

4. Из ограниченного набора альтернативных технологических схем перемещения ГЕ из трюма судна в место назначения в рамках каждой отдельной локации назначения в рамках маршрута грузового судна одновременно и единократно может быть реализована только одна технологическая схема.

5. Ввиду наличия ограничений на длительность выполнения грузовым судном технологического маршрута при прогнозируемой длительности магистральных перемещений судна между портом отправления и локациями назначения суммарная длительность реализации технологических схем по перемещению ГЕ из трюма судна в места назначения так же является ограниченной.

6. Необходимо определить наиболее предпочтительные для применения технологические схемы в заданных локациях назначения, предусмотренных в рамках маршрута грузового судна, при которых обеспечиваются минимальные суммарные затраты на обеспечение непрерывной работы технологических ресурсов, где значения суммарной длительности реализации технологических схем, а также среднего и средневзвешенного (по удельным затратам) коэффициентов загрузки технологических ресурсов находится в пределах диапазонов допустимых значений.

Исходные данные и неизвестные переменные оптимизационной модели представлены в табл. 1.

Таблица 1

*Исходные данные и неизвестные переменные разработанной оптимизационной модели*

| № п.п. | Наименование элемента исходных данных | Ед. изм. | Обозначение / выражение |
|---|---|---|---|
| *1* | *2* | *3* | *4* |
| **1** | **Общие исходные данные** | | |
| 1.1 | Количество локаций назначения | ед. | $h$ |
| 1.2 | Максимальное количество рассматриваемых технологических схем | ед. | $z$ |
| 1.3 | Минимально допустимое значение суммарной длительности технологических процессов перегрузки в рамках технологических схем | ч | $T^{\Sigma \text{gen min}}$ |
| 1.4 | Максимально допустимое значение суммарной длительности технологических процессов перегрузки в рамках технологических схем | ч | $T^{\Sigma \text{gen max}}$ |
| 1.5 | Минимально допустимое значение обобщенного среднего коэффициента загрузки технологических ресурсов при реализации технологических схем | – | $\overline{k}^{\text{gen min}}$ |
| 1.6 | Максимально допустимое значение обобщенного среднего коэффициента загрузки технологических ресурсов при реализации технологических схем | – | $\overline{k}^{\text{gen max}}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1.7 | Минимально допустимое значение обобщенного средневзвешенного (по удельным затратам) коэффициента загрузки технологических ресурсов при реализации технологических схем | – | $\tilde{k}^{\text{gen min}}$ |
| 1.8 | Максимально допустимое значение обобщенного средневзвешенного (по удельным затратам) коэффициента загрузки технологических ресурсов при реализации технологических схем | – | $\tilde{k}^{\text{gen max}}$ |
| **2** | **Индексы** | | |
| 2.1 | Индекс локации назначения | – | $l = 1, 2, \ldots, h$ |
| 2.2 | Индекс технологической схемы | – | $r = 1, 2, \ldots, z$ |
| **3** | **Исходные данные для каждой отдельной локации назначения $\boldsymbol{l}$ $(\boldsymbol{l} = 1,\ 2, \ldots, \boldsymbol{h})$** | | |
| 3.1 | Наименование локации назначения | – | – |
| 3.2 | Минимально допустимое значение общей длительности технологического процесса перегрузки ГЕ | ч | $T_l^{\Sigma \min}$ |
| 3.3 | Минимально допустимое значение общей длительности технологического процесса перегрузки ГЕ | ч | $T_l^{\Sigma \max}$ |
| 3.4 | Минимально допустимое значение среднего коэффициента загрузки технологических ресурсов | – | $\bar{k}_l^{\min}$ |
| 3.5 | Максимально допустимое значение среднего коэффициента загрузки технологических ресурсов | – | $\bar{k}_l^{\max}$ |
| 3.6 | Минимально допустимое значение средневзвешенного (по удельным затратам) коэффициента загрузки технологических ресурсов | – | $\tilde{k}_l^{\min}$ |
| 3.7 | Максимально допустимое значение средневзвешенного (по удельным затратам) коэффициента загрузки технологических ресурсов | – | $\tilde{k}_l^{\max}$ |
| **4** | **Исходные данные для каждой отдельной локации назначения $\boldsymbol{l}$ $(\boldsymbol{l} = 1,\ 2, \ldots, \boldsymbol{h})$ и каждой отдельной технологической схемы $\boldsymbol{r}$ $(\boldsymbol{r} = 1,\ 2, \ldots, \boldsymbol{z})$** | | |
| 4.1 | Значение суммарных затрат на обеспечение непрерывной работы технологических ресурсов | д.е. | $C_l^{\Sigma r}$ |
| 4.2 | Значение общей длительности технологического процесса | ч | $T_l^{\Sigma r}$ |
| 4.3 | Значение среднего коэффициента загрузки технологических ресурсов | – | $\bar{k}_l^r$ |
| 4.4 | Значение средневзвешенного (по удельным затратам) коэффициента загрузки технологических ресурсов | – | $\tilde{k}_l^r$ |
| 4.5 | Индикатор возможности применения технологической схемы в рамках рассматриваемой локации назначения | – | $y_{lr}^{\max}$ |
| **5** | **Неизвестные переменные** | | |
| 5.1 | Индикатор целесообразности применения технологической схемы $r$ $(r = 1, 2, \ldots, z)$ в рамках локации назначения $l$ $(l = 1, 2, \ldots, h)$ | – | $y_{lr}$ |

Структура оптимизационной модели имеет вид:

$$
\begin{cases}
\sum_{l=1}^{h}\sum_{r=1}^{z} C_l^r \cdot y_{lr} \to \min; & (1)\\
y_{lr} \in \{0;1\},\ l=1,2,...,h;\ r=1,2,...,z; & (2)\\
y_{lr} \le y_{lr}^{\max},\ l=1,2,...,h;\ r=1,2,...,z; & (3)\\
\sum_{r=1}^{z} y_{lr} = 1,\ l=1,2,...,h; & (4)\\
T_l^{\Sigma\min} \le \sum_{r=1}^{z} T_l^{\Sigma r} \cdot y_{lr} \le T_l^{\Sigma\max},\ l=1,2,...,h; & (5)\\
\bar{k}_l^{\min} \le \sum_{r=1}^{z} \bar{k}_l^{r} \cdot y_{lr} \le \bar{k}_l^{\max},\ l=1,2,...,h; & (6)\\
\tilde{k}_l^{\min} \le \sum_{r=1}^{z} \tilde{k}_l^{r} \cdot y_{lr} \le \tilde{k}_l^{\max},\ l=1,2,...,h; & (7)\\
T^{\Sigma\,\mathrm{gen\,min}} \le \sum_{l=1}^{h}\sum_{r=1}^{z} T_l^{r} \cdot y_{lr} \le T^{\Sigma\,\mathrm{gen\,min}}; & (8)\\
\bar{k}^{\mathrm{gen\,min}} \le \dfrac{\sum_{l=1}^{h}\sum_{r=1}^{z} \bar{k}_l^{r} \cdot y_{lr}}{h \cdot z} \le \bar{k}^{\mathrm{gen\,min}}; & (9)\\
\tilde{k}^{\mathrm{gen\,min}} \le \dfrac{\sum_{l=1}^{h}\sum_{r=1}^{z} \tilde{k}_l^{r} \cdot y_{lr}}{h \cdot z} \le \tilde{k}^{\mathrm{gen\,min}}. & (10)
\end{cases}
$$

Как видно из вышеприведенных выражений, разработанная математическая модель соответствует процедуре целочисленной линейной оптимизации и потому может быть эффективно реализована с использованием симплекс-метода совместно с методом ветвей и границ в таких средах оптимизационного моделирования, как «Microsoft Excel» (надстройка «Поиск решения»), «Matlab» (надстройка «Optimization toolbox») и др.

На заключительном этапе исследования разработанная оптимизационная модель была реализована на практическом примере — для решения задачи определения наиболее предпочтительных технологических схем транспортировки ГЕ из трюма судна в прибрежную зону для 10 локаций назначения в рамках маршрута «порт Мурманск — Новосибирские острова». Построение модели выполнялось с использованием программы «Microsoft Excel», реализация модели — с использованием «Solver» add-in. Соответствующие результаты представлены на рис. 1.

Наличие наиболее предпочтительной технологической схемы в каждой локации назначения в оптимальном решении, полученном в результате реализации вычислительного алгоритма позволяет сделать вывод о непротиворечивости исходных данных, корректности структуры оптимизационной модели и, как следствие, о ее высокой практической значимости.

Полученные результаты позволили предложить авторский подход к обеспечению процесса доставки и выгрузки грузов плавсредствами, сосредоточив их длительное хранение на побережье в местах наиболее вероятной выгрузки грузов [6]. На рис. 2 представлен общий вид обеспечения длительного хранения понтонного парка НЖМ-56, использование которого возможно в интересах обеспечения доставки грузов водным транспортом.

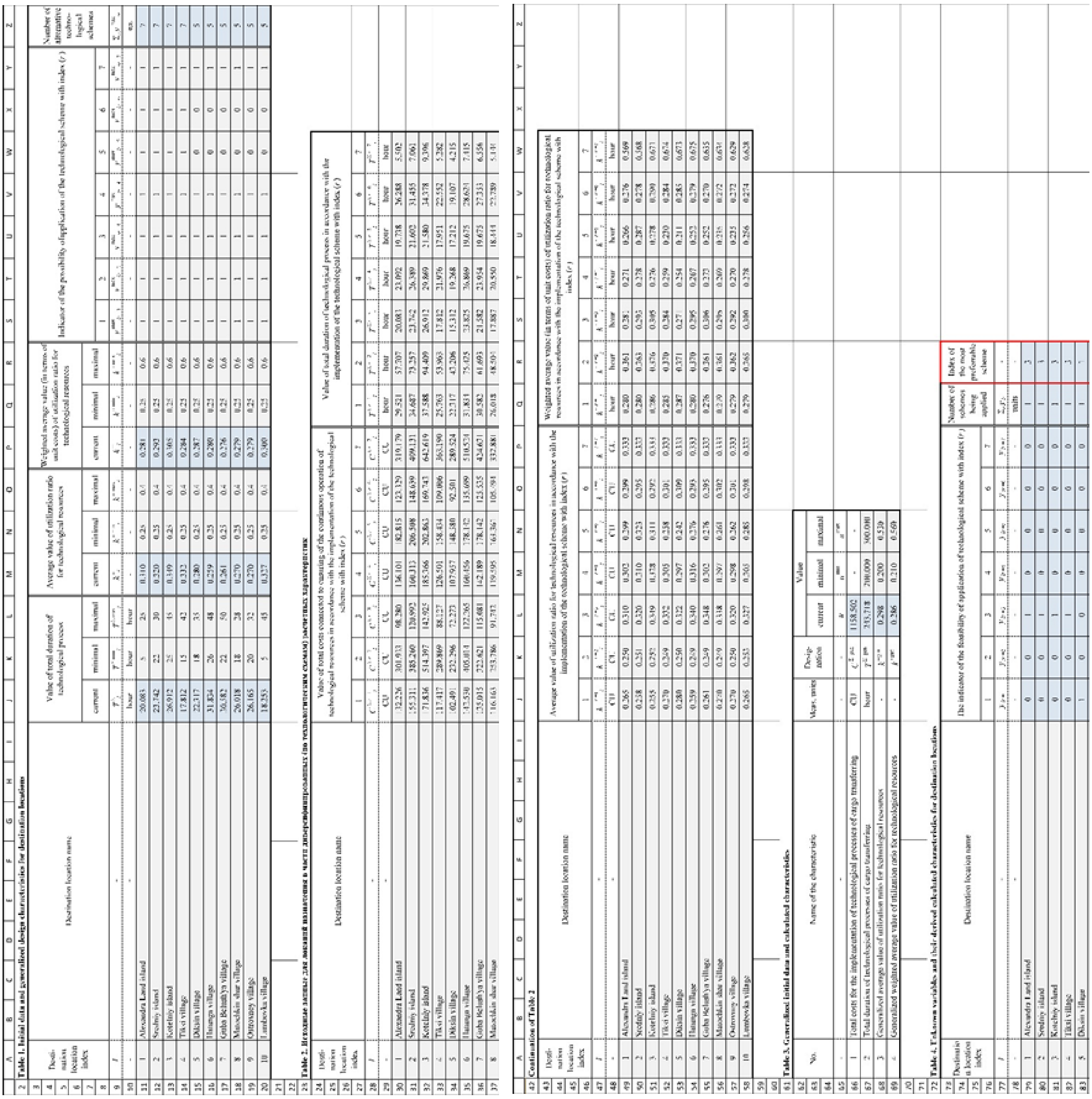


*Рис. 1. Общий вид листа программы «Microsoft Excel» при реализации модели на практическом примере*

**Основные научные выводы**

На основе результатов проведенного исследования сделаны следующие выводы:

1. Выполнен анализ научных работ и практических аспектов реализации процедур транспортировки ГЕ из трюма судна в прибрежную зону в рамках морских воинских перевозок. По результатам выполнения процедуры сделан вывод об относительно невысокой адекватности существующих инструментальных средств для обоснования характеристик соответствующих технологических процессов.

2. Разработана оптимизационная модель обоснования характеристик транспортно-технологической системы воинских перевозок во внепортовых условиях. Модель реализована на практическом примере, на основе полученных результатов сделан вывод о высокой практической значимости разработанного инструментального средства.

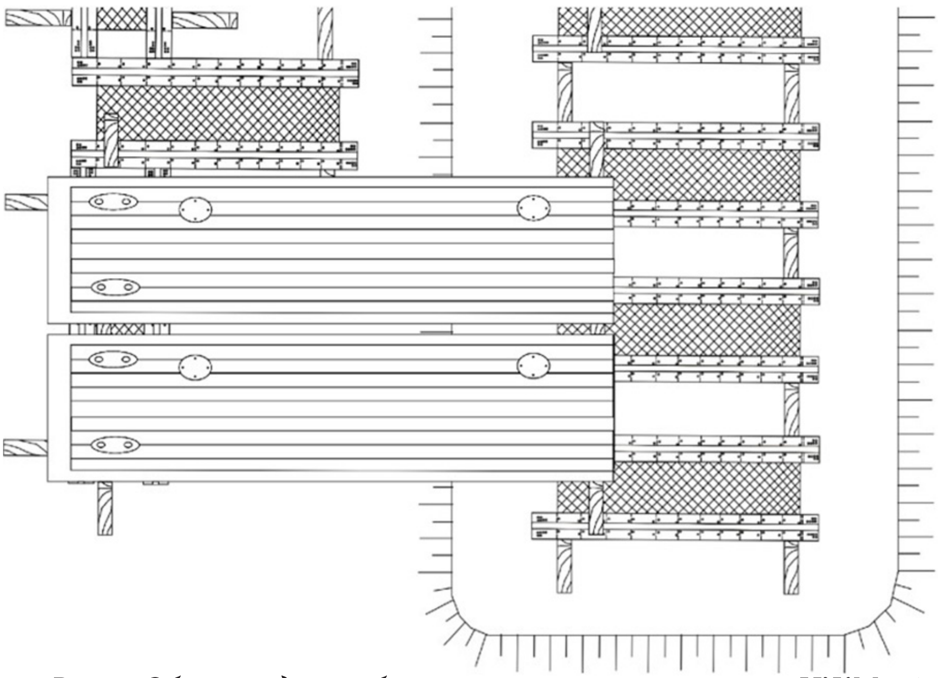


*Рис. 2. Общий вид способа хранения понтонного парка НЖМ-56*

3. Обоснована необходимость подготовки побережья в вопросе организации хранения плавсредств. Предложенный способ длительного хранения плавсредств позволяет существенно повысить эффективность воинских перевозок водным транспортом.

**Литература**

1. *Горенькова, В. С.* Технология комплексного подхода к планированию перевозок и выгрузки колесной и гусеничной техники в Арктической зоне Российской Федерации / В. С. Горенькова, Ю.Д. Кравец// Транспорт: наука, техника, управление. – 2020. – № 8. – С. 42–50.

2. Пат. 2716381 Российская Федерация, B63B 35/36, B63B 35/44, B65G 67/60. Способ формирования плавпричала на необорудованном побережье при помощи саморазборных понтонов / Кравец Ю. Д., Шувалов Д. В., Кравец Д. Ю., Кириченко А. В., Кузнецов А. Л.; патентообладатель Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А.В. Хрулёва. – № 2019122002; заявл. 09.07.2019; опубл. 11.03.2020, Бюл. № 8.

3. Пат. 2732689 Российская Федерация, B63B 35/00, B63B 27/30. Способ транспортировки несамоходных плавсредств на необорудованное побережье / Кравец Ю. Д., Кравец Д. Ю., Кириченко А. В., Кузнецов А. Л.; патентообладатель Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва. – № 2019135417; заявл. 05.11.2019; опубл. 21.09.2020, Бюл. № 27.

4. Пат. 2724196 Российская Федерация, B65G 9/00, B61B 7/00. Способ доставки грузов на необорудованное побережье при помощи канатной дороги / Кравец Ю. Д., Кравец Д. Ю., Щербаков К. А., Джиоев А. З., Кокорин И. И., Летин Е. В., Стрельчук Т. Е., Никитенков Б. М.; патентообладатель Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва. – № 2019133447; заявл. 21.10.2019; опубл. 22.06.2020, Бюл. № 18.

5. Пат. 2734660 Российская Федерация, IPC E 01 D 15/14 (2006.01), B65B 35/00 (2006.01), B65G 1/00 (2006.01). Метод раздельного длительного хранения комплекта наплавного железнодорожного моста НЖМ-56 / Шувалов Д. В.; патентообладатель Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва. – № 2019133400; заявл. 19.10.2019; опубл. 21.10.2020, Бюл. № 30.

УДК 004.658

# АНАЛИЗ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ В ГРАФОВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ БАЗАМИ ДАННЫХ

**О. В. Огородникова[1], А. С. Дубровин[1], Е. Г. Царькова[2], Е. А. Андреева[3], Т. Н. Куликова[1]**

*[1]Воронежский институт ФСИН России*
*[2]НИИИТ ФСИН России*
*[3]Тверской государственный университет*

**Аннотация.** Рассмотрены следующие вопросы визуальной интерпретации данных в графовых моделях данных на примере графовой СУБД Neo4j: исследование характерных возможностей графовых СУБД на примере СУБД Neo4j; подтверждение удобства визуализации данных в виде графических изображений по сравнению с электронными таблицами; выявление высокой связанности данных СУБД Neo4j. Используются алгоритмы из библиотеки СУБД Neo4j. Применяется кластеризация для оценки качества нахождения сходства заданных наборов данных. Используется метод силуэтной оценки. На основе проведенных экспериментальных исследований сделан вывод о качественности нахождения сходства заданных наборов данных с помощью графовой СУБД Neo4j.

**Ключевые слова:** графовая база данных, визуализация, связанность данных, кластеризация.

## 1. Введение

В последнее время использование реляционных баз приводит к трудностям при разработке моделей данных, а также при работе с большим объемом данных реляционные СУБД не справляются. Замена устоявшихся и уже ставших понятными и привычными для многих пользователей и специалистов реляционных СУБД необходима в связи с постоянно ускоряющимся ростом объема данных в сферах широкого применения баз данных. В качестве подходящей для этой цели альтернативы пользователи баз данных все чаще выбирают графовые СУБД. В качестве моделей данных графовые СУБД используют графовые модели данных. Использование графовых моделей данных и графовых СУБД позволяет увеличить производительность СУБД, создавать при работе с ними сложные и гибкие запросы. В рамках исследования графовых моделей данных серьезный интерес представляют задачи анализа и визуализации данных, постановка и методологические подходы к решению которых содержатся в [2]. Визуализация — это преобразование невидимых и слабо структурированных данных с помощью компьютерной программы СУБД в видимые визуально с целью дальнейшего их понимания и анализа. Визуализация данных ускоряет и облегчает их интерпретацию. Как правило, графический вид обрабатываемых данных позволяет получить тот результат, который требуется специалистам предметных областей от использования баз данных. Вопросы анализа и визуализации данных в графовых СУБД рассмотрим в данной работе на примере их типичного представителя — СУБД Neo4j.

Для решения указанных задач анализа и визуализации данных в СУБД Neo4j имеются все необходимые средства. В частности, подходящие для графовых моделей данных алгоритмы обработки данных объединены в библиотеку графовых алгоритмов СУБД Neo4j. Одним из таких графовых алгоритмов в составе данной библиотеки является алгоритм сходства косинусов. Он позволяет качественно определять сходство заданных наборов данных при использовании больших объемов этих наборов данных. Алгоритм сходства косинусов является типичным представителем средств анализа и визуализации данных в СУБД Neo4j.

Цель данной работы состоит в рассмотрении следующих вопросов визуальной интерпретации данных в графовых моделях данных на примере графовой СУБД Neo4j:

– исследование характерных возможностей графовых СУБД на примере СУБД Neo4j;

– подтверждение удобства визуализации данных в виде графических изображений по сравнению с электронными таблицами;

– выявление высокой связанности данных СУБД Neo4j.

## 2. Родственные работы

В статье [1] предложены решения для создания нового поколения систем обнаружения мошенничества с использованием графовых моделей данных и графовых СУБД. Обнаружение мошенничества в таких перспективных системах основано на том, что из сведений о транзакциях и пользователях обычно выводятся данные о связях между ними. С помощью методов индексирования в работе [6] проведен сравнительный анализ эффективности наиболее распространенных графовых СУБД. Целью этой работы явился выбор кандидата на механизм хранения графовой структуры. Было отмечено, что индекс ускорил поисковые запросы, существенно сократив число узлов в графе. В статье [2] представлен обзор наиболее популярных задач на графовых базах данных из раздела глубинный анализ данных. Вопрос кластеризации документов на основе сходства фраз и отдельных терминов с использованием СУБД Neo4j поднимается в работе[5]. Сходство документов можно использовать для автоматического сопоставления резюме с описанием работы. В результате экспериментов выявлено, что гибридное сходство дает большую степень точности сходства.

На Международной научно-технической и научно-методической конференции[4] была рассмотрена задача оценки качества структуры кластеров, полученных в процессе кластерного анализа.

## 3. Визуализация и оценка сходства

Основными областями применения графовых моделей данных являются социальные системы, геопространственные системы, системы по обнаружению мошенничества, поисковые системы [1]. Графовая база данных хранит данные в виде интеллектуальной схемы, что позволяет достаточно быстро найти и построить любые отношения в виде графа с узлами и ребрами. Интеллектуальная схема использует вместо текста, состоящего из предложений, наглядные рисунки, графики, схемы, анимацию. Для наглядности используются разные цвета, шрифты. Графовые базы данных обеспечивают высокосвязанность хранимых данных. Степень связанности данных во многих задачах их обработки оказывается даже более ценной, чем непосредственно сами исходные данные.

Изучение возможностей графовых СУБД по визуализации и анализу данных удобно производить на примере популярной графовой СУБД Neo4j, так как она располагает весьма характерными для графовой модели данных средствами в виде соответствующих графовых алгоритмов, объединенных в единую библиотеку. СУБД Neo4j имеет средства визуализации данных в виде графических изображений. Такой способ визуализации отличается значительно большим удобством и наглядностью по сравнению с табличным способом визуализации данных, характерным для электронных таблиц реляционной модели данных.

Для выявления высокой связанности данных СУБД Neo4j проведем соответствующий анализ. Исходным пунктом такого анализа является задание ключевых значений. Для простоты и в то же время для достижения достаточной представительности ключевого множества зададим два ключевых значения. Присвоим этим ключевым значениям разные цвета. Вообще в графовой модели данных цвета используются для наглядности визуализации данных, для удобного зрительного восприятия пользователями и эффективного изучения результатов разнообразных вычислений, производимых по соответствующим запросам от графовых СУБД. В качестве первого ключевого значения зададим значение «абонент» и присвоим ему некоторый хорошо подходящий для визуального восприятия цвет, например, фиолетовый. В качестве второго ключевого значения зададим значение «сообщество» и присвоим ему какой-нибудь другой цвет, хорошо контрастирующий с цветом первого ключевого значения при их визуальном восприятии, например, желтый. В результате строится соответствующий граф, каждая вершина которого раскрашена в один из двух выбранных цветов: фиолетовый и желтый.

В графовых моделях данных важную роль играет понятие «сущность» в качестве одного из базовых ее понятий. Множество всех сущностей конкретной графовой модели данных образует некоторую иерархическую структуру, в которой каждая сущность относится ко вполне определенному уровню. Количество уровней не регламентируется и может различаться для разных конкретных графовых моделей данных. Самым низким уровнем считается первый. Сущности первого уровня не определяются через какие-либо другие сущности. Сущности любого другого уровня определяются через сущности более низких уровней. Каждая сущность вне зависимости от ее уровня имеет несколько своих собственных атрибутов. В качестве одного из таких атрибутов может выступать цвет сущности.

В рассмотренном выше примере ключевые значения «абонент» и «сообщество» являются сущностями первого уровня и обладают фиолетовым и желтым цветами соответственно, как двумя разными значениями своих атрибутов, которые имеют смысл цвета. Тем самым, ключевое значение «абонент» идентифицируется, как фиолетовая сущность, а ключевое значение «сообщество» — как желтая сущность.

Одной из характерных возможностей графовых СУБД является качественное определение сходства больших наборов данных. Исследуем эту возможность на примере СУБД Neo4j. Для этого после загрузки исходных данных необходимо исследовать идентичных абонентов. Создадим граф сходств пар абонентов, имеющих одинаковые значения «высказывание». Данное значение выбирается в качестве ключевого. По нему осуществляется выборка и выявляется сходство. Используем алгоритм сходства косинусов из библиотеки графов алгоритмов Neo4j[3].

Два сравниваемых на сходство набора данных представляются векторами $\mathbf{A} = (A_i)$ и $\mathbf{B} = (B_i)$, где $i = \overline{1,n}$, одинаковой размерности $n \in N$, где $n \geq 2$, наделенными евклидовой (гельдеровой с параметром 2) нормой

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}; \qquad \|\mathbf{B}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2}. \tag{1}$$

При этом отдельные элементы данных, объединяемые в наборы, представляются компонентами $A_i \geq 0$ и $B_i \geq 0$ векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно.

Одинаковая размерность векторов и обладание ими общей евклидовой нормой позволяет интерпретировать их элементами единого евклидова пространства размерности $n$ со скалярным произведением

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i. \tag{2}$$

Порождаемая скалярным произведением (2) естественная норма

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}; \qquad \|\mathbf{B}\| = \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}} \tag{3}$$

совпадает с нормой (1).

В данном евклидовом пространстве скалярное произведение (2) определяет косинус между векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ следующим образом:

$$simiarity(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|}. \tag{4}$$

С учетом (1)–(3) равенство (4) в компонентах $A_i$ и $B_i$ векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеет следующий вид:

$$simiarity(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i B_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} A_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} B_i^2\right)}}. \tag{5}$$

Интерпретация наборов данных $\mathbf{A} = (A_i)$ и $\mathbf{B} = (B_i)$, как векторных элементов единого евклидова пространства, позволяет рассматривать норму (1), (3), скалярное произведение (2) и косинус (4), (5) в качестве операций над векторами, инвариантными относительно линейных преобразований координат этого пространства.

Алгоритм сходства косинусов из библиотеки графов алгоритмов Neo4j использует формулу (5). При этом информационное сходство наборов данных $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ оценивается косинусом угла между соответствующими векторами (5). Вообще для произвольных элементов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ евклидова пространства имеет место равенство

$$-1 \le simiarity(\mathbf{A},\mathbf{B}) \le 1 \quad . \tag{6}$$

Однако для реальных наборов данных $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ при информационном поиске неравенство (6) заменяется неравенством

$$0 \le simiarity(\mathbf{A},\mathbf{B}) \le 1 \tag{7}$$

в силу равенства (5) и неравенств $A_i \ge 0$ и $B_i \ge 0$. Неравенство (7) означает, что в случае информационного поиска, косинусное сходство изменяется в диапазоне от 0 до 1.

Проведем вычислительный эксперимент для оценки качества определения сходства больших наборов данных. Для этого используем 550 абонентов в открытом доступе одной из социальных сетей. Применим процедуру для обнаружения пар идентичных абонентов. В результате для 550 абонентов было обнаружено сходство для 10 012 пар (рис. 1).

Затем применим процедуру [3] для создания аналогичных отношений между теми узлами, которые имеют сходство, равное единице. На рис. 2 изображен пример данного графа. Созданы отношения между парами абонентов, имеющих единый образ (на основе значения «высказывание»).

| Таблица | Запись | Сходство | ЗаписьОтношениеТип | ЗаписьСходств |
|---|---|---|---|---|
| | 550 | 10012 | Пары | Верно |
| | Начать потоковую передачу 1 записи через 48 мсек и завершить через | | | |

*Рис. 1. Результаты процедуры для обнаружения пар идентичных абонентов*

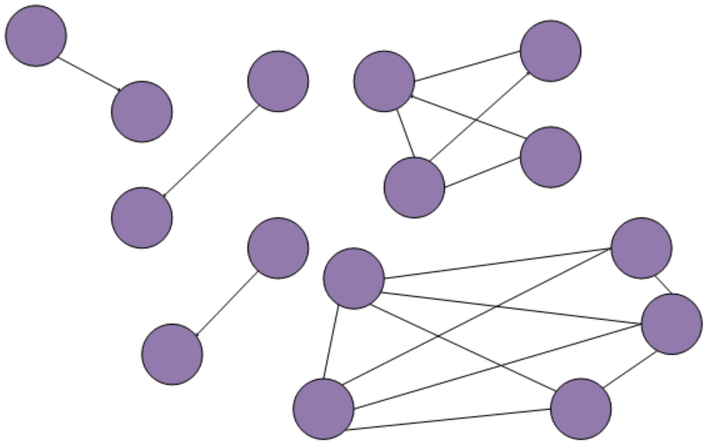


*Рис. 2. Граф пар сходств*

Запустим алгоритм слабосвязанных компонентов Weakly Connected Components (WCC) algorithm из библиотеки алгоритмов Neo4j [3] над этим графом сходств. Этот алгоритм находит наборы связанных узлов в неориентированном графе. Он часто используется на ранних этапах анализа графа для того, чтобы понять его структуру. Используем потоковую версию алгоритма, в которой запрос возвращает поток пар. В результате работы алгоритма создается связь между каждым узлом графа и его соответствующим сообществом. На рис. 3 представлено группирование абонентов, согласно ключевому значению «высказывание».

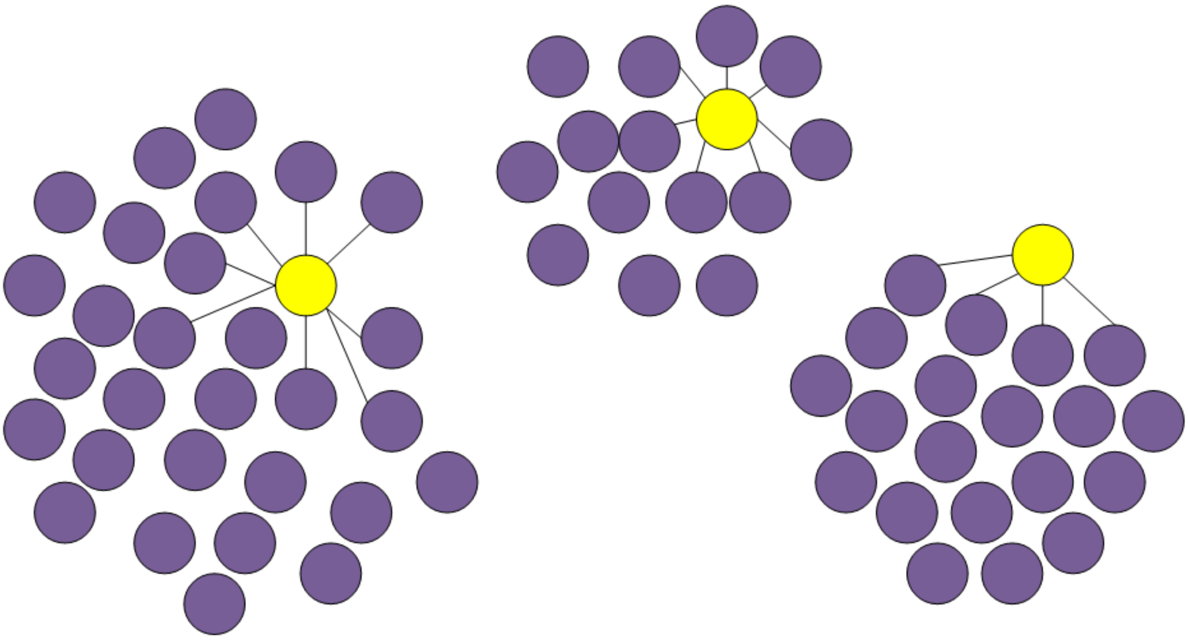


*Рис. 3. Сообщество абонентов*

**4. Оценка качества нахождения сходства**

Для оценки качества нахождения сходства используем кластеризацию. Однако особо отметим то обстоятельство, что в настоящее время оценка качества кластеризации исследована в меньшей степени, чем кластерный анализ.

Кластеризация группирует множество точек данных в группы. Основная цель кластеризации — повышение сходства и различия в группе. Запустим алгоритм кластеризации DBSKAN (Density-based spatial clustering of applications with noise). Он использует два параметра: радиус окрестности $\varepsilon$ и минимальное количество точек, необходимых для создания кластера.

Для непосредственной оценки качества нахождения сходства применим метод оценки силуэта, реализованный в алгоритме DBSKAN. Силуэтная оценка используется для оценки качества нахождения кластера, которому принадлежит данный объект. Для этого производится оценка того, насколько похож данный объект на другие объекты своего кластера по сравнению с объектами других кластеров[5]. С помощью силуэтной оценки может также измеряться расстояние разделения между полученными кластерами. Диапазон значений силуэта находится в пределах [–1; 1]. Если вычисленное значение силуэта близко к значению –1, то делается вывод о том, что объект неверно классифицирован по принадлежности к своему кластеру и находится сравнительно близко к соседнему кластеру. Если же значение силуэта оказалось близким к значению 0, то это указывает на то, что объект может быть назначен другому соседнему кластеру, и на то, что объект лежит одинаково далеко от обоих кластеров. Если значение силуэта близко к единице, то это означает, что объект находится далеко от соседнего кластера и сравнительно близко к назначенному кластеру, то есть объект хорошо кластеризован (отнесен к своему кластеру). Коэффициент силуэта рассчитывается с помощью равенства

$$S(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max\left(a(i); b(i)\right)}, \tag{8}$$

где $a(i)$ — среднее расстояние от $i$-го объекта до всех других объектов в том же кластере;

$b(i)$ — наименьшее среди всех кластеров среднее расстояние от $i$-го объекта до всех других объектов данного кластера или, иначе говоря, среднее расстояние от $i$-го объекта до всех других объектов ближайшего кластера.

Оценка силуэта — это значение коэффициента силуэта (8), усредненное по всем выборкам.

Эксперимент проводится на 550 абонентах в социальной сети. Параметр: фраза (какое-либо высказывание абонента в социальной сети). Эффективность гибридного сходства проверяется с помощью оценки силуэта на основе алгоритма DBSCAN. Силуэтная оценка используется для измерения фразы (высказывания) похожего на свой собственный кластер по сравнению с другими кластерами.

Результаты проведенных экспериментов по оценке силуэта сведены в табл. 1.

Таблица 1

*Результаты оценки силуэта*

| Эксперимент | Оценка |
|---|---|
| Тест 1 | 0,76 |
| Тест 2 | 0,78 |
| Тест 3 | 0,77 |

Из табл. 1 видно, что во всех трех тестах оценка силуэта близка к единице, что указывает на верное отнесение объекта к своему кластеру. Высказывание (фраза) находится далеко от соседнего кластера и очень близко к назначенному кластеру. Это означает, что образец хорошо кластеризован.

В качестве метода оценки качества нахождения сходства, альтернативного методу оценки силуэта, применим также метод Adjusted Mutual Information (AMI). Он основан на вычислении меры Mutual Information сходства двух разбиений, которая учитывает вероятности отнесения объектов к определенным кластерам [4]. Мера Mutual Information выражается следующей формулой:

$$\mathrm{AMI}(U,V) = \frac{MI - \mathrm{E}[MI]}{\max\left(\mathrm{H}(U), \mathrm{H}(V)\right) - \mathrm{E}[MI]}, \tag{9}$$

где $\mathrm{E}[MI]$ — ожидаемое значение меры Mutual Information;

$\mathrm{H}(U)$ и $\mathrm{H}(V)$ – энтропия разбиений $U$ и $V$, которая вычисляется следующим образом:

$$\mathrm{H}(U)=\sum_{i=1}^{|U|}\mathrm{P}(i)\ln(\mathrm{P}(i));$$
$$\mathrm{H}(V)=\sum_{i=|U|+1}^{|U|+|V|}\mathrm{P}(i)\ln(\mathrm{P}(i)). \tag{10}$$

Для любых разбиений $U$ и $V$ выполнено следующее неравенство [4]:

$$0\le \mathrm{AMI}\left(U,V\right)\le 1.$$

При этом близость величины $\mathrm{AMI}\left(U,V\right)$ к единице означает качественное нахождение сходства, а к нулю — некачественное.

Результаты проведенных с использованием пробных данных экспериментов по оценке меры сходства разбиений по формулам (9), (10) сведены в табл. 2.

Таблица 2

*Результаты оценки меры сходства разбиений*

| Эксперимент | Оценка |
|---|---|
| Тест 1 | 0,78 |
| Тест 2 | 0,81 |
| Тест 3 | 0,76 |

Из табл. 2 видно, что во всех трех тестах оценка меры сходства разбиений близка к единице, что указывает на верную классификацию объекта.

Таким образом, применение обоих методов (метод оценки силуэта и метод оценки меры сходства разбиений) позволяет сделать общий вывод о том, что с помощью графовой СУБД Neo4j сходство найдено качественно.

## 5. Заключение

В результате проведенных экспериментальных исследований выявлено, что графовая СУБД Neo4jкачественно визуально интерпретирует данные. Визуализация данных в виде графических изображений удобна для восприятия и интерпретации. Использование несложных алгоритмов в графовой СУБД Neo4j дает возможность получить связанные данные. Оценка тестов в графовой СУБД Neo4j демонстрирует хорошую связанность данных и высокое качество сходства. Для достижения того же результата с помощью реляционной СУБД требуется больше запросов и больше сортировок. В своих дальнейших исследованиях мы планируем провести соответствующий сравнительный анализ.

## Литература

1. *Бочкарёв П. В., Кононова М. В.* Графовые модели данных // Международный научно-технический журнал «Теория. Практика. Инновации», декабрь 2016.

2. *Гуральник Р. И.* Некоторые задачи на графовых базах данных // Труды ИСП РАН. – 2016. – Т. 28, вып. 4. – С. 193–216.

3. https://neo4j.com/

4. *Литвинов В. Л., Ребковец И. В., Яковлев И. В.* Оценка качества алгоритмов кластерного анализа данных // VI Международная научно-техническая и научно-методическая конференция, март 2017. – С. 321.

5. Preeti K., Harshal A. Document Clustering based on Phrase and ingle Term Similarity using Neo4j // International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE) January 2020. – V. 9, Issue 3. – P. 3188–3192.

6. Steve Ataky Tsham Mpinda, Lucas Cesar Ferreira, Marcela Xavier Ribeiro, Marilde Terezinha Prado Santos. Evaluation Of Graph Databases Performance Through Indexing Techniques // International Journal of Artificial Intelligence & Applications (IJAIA), September 2015. – V. 6, No. 5. – P. 87–98.

УДК 51

# МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

**М. А. Пересыпкина**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Данная работа посвящена одному из самых перспективных направлений машинного обучения — обучению с подкреплением (Reinforcement learning). Его основное отличие от классического машинного обучения состоит в том, что обучение происходит в процессе взаимодействия со средой, а не с готовыми данными. В статье представлено описание структуры Марковского процесса принятия решений, которая может использоваться для формализации широкого спектра задач с последовательным принятием решения и для моделирования многих реальных проблем.
**Ключевые слова:** машинное обучение, обучение с подкреплением, последовательное принятие решений, марковский процесс принятия решений, Марковское свойство, динамическое программирование, Reinforcement learning, Markov Decision Process, MDP.

## Введение

Для формализации широкого спектра задач с последовательным принятием решений может использоваться структура *марковского процесса принятия решений* (*Markov Decision Process* или *MDP*). Она может быть полезна для моделирования многих реальных проблем.

В данной статье описаны формализация марковского процесса принятия решения и алгоритмы для решения его основных задач.

## 1. Формализация марковского процесса принятия решений

Обучение с подкреплением (Reinforcement learning) — один из способов машинного обучения, в котором происходит обучения агента путем его взаимодействия с некоторой средой. Откликом среды на действия агента являются сигналы подкрепления, поэтому такое обучение можно назвать обучением с учителем, только в роли учителя в данном случае выступает среда или ее модель.

В реальных ситуациях не каждое выбранное действие может быть оптимально. Но действия, которые агент выбирает сейчас, влияют на сумму вознаграждения, которое можно получить в будущем. Такие ситуации можно представить в виде *марковского процесса принятия решений* (*Markov Decision Process*).

Марковский процесс принятия решений можно формализовать следующим образом (рис. 1).

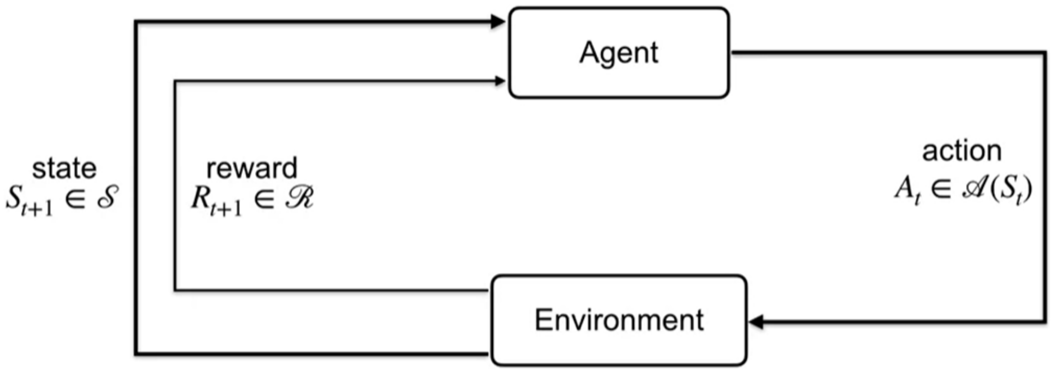



*Рис. 1. Формализация марковского процесса принятия решений*

Данная диаграмма представляет собой взаимодействие *агента* (*Agent*) и *среды* (*Environment*) в структуре MDP. Агент и среда взаимодействуют с дискретными временными шагами. Каждый раз агент получает из среды *состояние* (*state*) $S_t$ из набора возможных состояний $S$. Основываясь на этом состоянии, агент выбирает *действие* (*action*) $A_t$ из набора возможных действий $A$. Далее агент оказывается в новом состоянии $S_{t+1}$. Среда также предоставляет *вознаграждение* (*reward*) $R_{t+1}$. Взаимодействие агента со средой генерирует траекторию опыта, состоящую из состояний, действий и наград. Действия влияют на немедленные награды, а также на будущие состояния, и через них на будущие награды.

Когда агент совершает действие $a$ в состоянии $s$, для него существует множество новых состояний и наград. Именно $P$ говорит о вероятности перехода в конкретное состояние $s'$. Поскольку $P$ — это распределение вероятностей, оно должно быть неотрицательным, и его сумма по всем возможным следующим состояниям и вознаграждениям должна равняться единице. Вероятность перехода в новое состояние можно определить формулой (1.1)

$$P_{ss'} = P[S_{t+1} = s' \mid S_t = s], \tag{1.1}$$

где $S[t]$ — текущее состояние агента, а $S[t+1]$ — следующее состояние.

Вероятность перехода в новое состояние можно представить в виде матрицы (1.2)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Каждая строка в матрице представляет вероятность перехода из текущего состояния агента в одно из новых состояний. Сумма каждой строки равна 1.

Будущее состояние и награда зависят только от текущего состояния и выбранного действия, поэтому нынешнее состояние является достаточным, и запоминание более ранних состояний не улучшит предсказание о будущем. Это называется *Марковским свойством* (*Markov property*). Оно определяется формулой (1.3)

$$P[S_{t+1} \mid S_t] = P[S_{t+1} \mid S_1, \ldots, S_t], \tag{1.3}$$

где $S[t]$ – текущее состояние агента, а $S[t+1]$ – следующее состояние.

Таким образом, MDP обеспечивает общую основу для последовательного принятия решений, а динамика MDP определяется распределением вероятностей.

Цель агента — максимизировать будущее вознаграждение. Награды могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от действия агента. В Reinforcement learning важно не немедленное вознаграждение (вознаграждение, которое агент получает из текущего состояния), а важна максимизация совокупного вознаграждения. Эта сумма вознаграждений называется *Returns*. Ее можно определить по формуле (1.4)

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} = R_{t+1} + \gamma G_{t+1}, \tag{1.4}$$

где $R[t+1]$ — награда, полученная агентом на временном этапе $t$ при выполнении действия $a$ для перехода из одного состояния в другое. Аналогично, $R[t+2]$ — это награда, полученная агентом на временном этапе $t+1$ при выполнении действия для перехода из одного состояния в другое. А $\gamma$ (*gamma*) — это *коэффициент дисконтирования* (*Discount factor*).

Коэффициент дисконтирования определяет, насколько важно получить немедленное или будущие вознаграждения. В основном, этот коэффициент помогает избежать бесконечности в непрерывных задачах — задачах, в которых нет *конечного состояния* (*terminal state*). Он имеет значения от 0 до 1. Значение 0 — это просто награда на следующем временном шаге, то есть агент заботится только о немедленном вознаграждении.

Если $\gamma = 1,$ то для агента важнее будущие вознаграждения. Но на практике значения 0 и 1 не используются, так как первый учитывает только немедленные вознаграждения, а второй будет действовать только для будущих вознаграждений, которые могут привести к бесконечности. Поэтому оптимальное значение коэффициента дисконтирования лежит в диапазоне от 0,2 до 0,9.

Таким образом, роль агента заключается в выборе на каждом временном шаге действия, которое оказывает непосредственное влияние как на немедленное вознаграждение, так и на следующее состояние. Поведение агента определяется *политикой* (*Policy*). В простейшем случае политику можно выразить формулой (1.5)

$$\pi(s) = a. (1.5)$$

Такая политика называется *детерминированной* и представляет собой действие $a,$ выбранное в состоянии $s$ политикой $\pi.$

*Стохастическая политика* — это политика, в которой могут быть выбраны несколько действий с ненулевой вероятностью. Ее можно выразить формулой (1.6)

$$\pi(a \mid s) = P[A_t = a \mid S_t = s]. \tag{1.6}$$

Из формулы видно, что политика может зависеть только от текущего состояния. Так же сумма по всем вероятностям действия должна быть равна 1 для каждого состояния, и каждая вероятность действия должна быть неотрицательной.

*Оптимальная политика* $\pi_*$ – это политика, которая так же хороша или лучше, чем все другие политики, то есть оптимальная политика будет иметь максимально возможную ценность в каждом состоянии. Найти ее помогает *функция ценности состояния* (*State-value function*).

Грубо говоря, State-value function —это будущая награда, которую агент может получить, начиная с определенного состояния. Поведение агента также будет определять, сколько общего вознаграждения он может получить. Данная функция определяется формулой (1.7)

$$v_\pi(s) = E_\pi[G_t \mid S_t = s]. \tag{1.7}$$

Индекс $\pi$ указывает, что значение функции зависит от выбранных агентом действий в соответствии с политикой $\pi.$

Другая функция — *функция ценности действия* (*Action-value function*). Она описывает, что происходит, когда агент выбирает конкретное действие. Другими словами, ценностью действия состояния $s$ является ожидаемый returns, при условии, что агент выбирает действие $a,$ а затем следует политике $\pi.$ Ее можно выразить формулой (1.8)

$$q_\pi(s,a) = E_\pi[G_t \mid S_t = s, A_t = a]. \tag{1.8}$$

Функции ценности имеют решающее значение в Reinforcement learning, они позволяют агенту запрашивать качество своего текущего состояния, а не ждать возможности увидеть долгосрочный результат. Но преимущество двоякое. Во-первых, *return* не доступен сразу, а во-вторых, доход может быть случайным из-за стохастичности политики и динамики среды. Однако основная цель — изучении правильной политики. И именно функции ценности позволяют судить о качестве различных политик.

Связь значения текущего состояния со значениями его возможных будущих состояний определяет *уравнение Беллмана* (*Bellman equation*). Уравнение Беллмана для функции ценности состояния имеет вид (1.9)

$$v_\pi(s) = \sum_a \pi(a \mid s) \sum_{s'} \sum_r p(s', r \mid s, a)[r + \gamma v_\pi(s')]. \tag{1.9}$$

Функция ценности для оптимальной политики имеет максимально возможное значение в каждом состоянии. Ее можно выразить с помощью формулы (1.10)

$$v_*(s) = v_{\pi_*}(s) = \max_\pi v_\pi(s) = \max_a \sum_{s'} \sum_r (s', r \mid s, a)[r + \gamma v_*(s')]. \tag{1.10}$$

А для функции ценности действия уравнение Беллмана можно определить следующим образом (1.11)

$$q_{\pi}(s,a) = \sum_{s'}\sum_{r}(s',r \mid s,a)[r + \gamma \sum_{a} \pi(a' \mid s') q_{\pi}(s',a')]. \quad (1.11)$$

Тогда функция ценности действия для оптимальной политики будет иметь вид (1.12)

$$q_{*}(s,a) = q_{\pi_*}(s,a) = \max_{\pi} q_{\pi}(s,a) = \sum_{s'}\sum_{r} p(s',r \mid s,a)[r + \gamma \max_{a'} q_{*}(s',a')]. \quad (1.12)$$

Функции ценности состояний и ценности действий могут быть связаны следующим образом. Если есть лишь $v(s)$, то должны перебираться все возможные действия $a$ для перехода в следующее состояние. Однако, имея $q$, можно выбрать лучшее из всех действий (1.13)

$$v_{*}(s) = \max_{a} q_{*}(s,a). \quad (1.13)$$

## 2. Выявление основных задач марковского процесса принятия решений и описание алгоритмов для их решения

Оценка политики — это задача определения функции значения для конкретной политики.

Задача управления — это задача поиска политики, которая дает возможность получить как можно больше вознаграждений, то есть поиск политики, которая максимизирует функцию значения.

Задача управления является конечной целью обучения подкреплению. Но задача оценки политики обычно является необходимым первым шагом. Для решений этих задач используются алгоритмы динамического программирования, которые получаются путем превращения уравнений Беллмана в правила обновления.

Динамическое программирование не предполагает взаимодействия со средой. Вместо этого методы динамического программирования используются для вычисления функций значений и оптимальных политик с учетом модели MDP.

*Итеративная оценка политики* (*Iterative policy evaluation*) — алгоритм, использующийся в качестве части алгоритмов, описанных далее. Его идея состоит в том, что в качестве правила обновления напрямую используется уравнение Беллмана (1.9). Теперь это процедура, которая применяется для итеративного уточнения оценки функции ценности (2.1)

$$v_{k+1}(s) \leftarrow \sum_{a} \pi(s,a) \sum_{s'}\sum_{r} p(s',r \mid s,a)[r + \gamma v_{*}(s')]. \quad (2.1)$$

Это дает последовательность лучших и лучших приближений к функции ценности.

Для реализации итеративной оценки политики хранятся два массива, каждый из которых имеет одну запись для каждого состояния. Они инициализируются произвольными значениями. В одном из массивов хранятся текущие приблизительные значения функции ценности состояния. В другом массиве хранятся обновленные значения. Используя два массива, можно вычислять новые значения из старого состояния за один раз без изменения старых значений в процессе. В конце полного цикла можно записать все новые значения в первый массив и начать следующую итерацию.

Каждая итерация будет давать лучшее приближение к функции ценности состояния $v_{\pi}$, используя правило обновления (1.13). Если $v_{k+1}$ равно $v_k$ для всех состояний, то $v_k$ — это искомая функция ценности состояния $v_{\pi}$.

В качестве завершения алгоритма можно использовать условие, когда максимальное изменение функции значения за полный цикл меньше некоторого небольшого значения $\theta$.

С учетом $v_*$ можно найти оптимальную политику $\pi_*$, выбирая *жадное* (*greedy*) действие (2.2)

$$\pi_{*}(s) = \arg\max_{a} \sum_{s'}\sum_{r} p(s',r \mid s,a)[r + \gamma v_{*}(s')]. \quad (2.2)$$

Такое действие максимизирует уравнение оптимальности Беллмана в каждом состоянии.

Одним из алгоритмов, использующихся для решения задач оценки политики и задач управления, является *итерация политики* (*Policy Iteration*). Он состоит из двух отдельных шагов, повторяющихся снова и снова, — *оценки* (*evaluation*) и *улучшения* (*improvement*). Сначала оценивается текущая политика $\pi_1$, которая дает новую функцию ценности $v(\pi_1)$, точно отражающую значение $\pi_1$. Затем на шаге улучшения используется $v(\pi_1)$ для создания жадной политики $\pi_2$. На этом этапе $\pi_2$ является жадной по отношению к функции значения $\pi_1$, но $v(\pi_1)$ больше не отражает точное значение $\pi_2$. Следующий шаг оценки делает функцию ценности точной по отношению к политике $\pi_2$. И так далее, пока не будет получена единственная политика, которая является жадной в отношении своей собственной функции ценности. Это и будет оптимальная политика. Это можно визуализировать следующим образом (рис. 2.1)

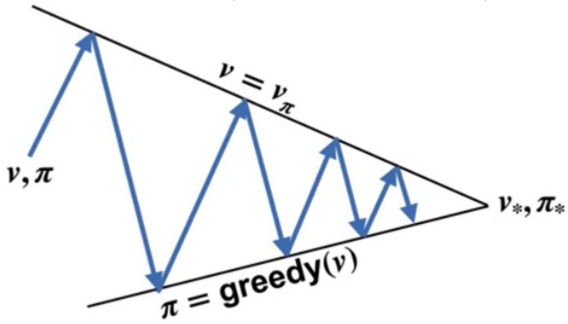



*Рис. 2.1. Получение оптимальной функции значения и оптимальной политики*

То есть получение оптимальной функции ценности и оптимальной политики представляет собой перемещение между одной линией, где функция значения точна, и другой, где политика жадная. Эти две линии пересекаются только при достижении оптимальной политики и функции ценности. Конечно, реальная геометрия пространства политик и функций ценности намного сложнее, но суть остается той же.

Другой алгоритм — *итерация значений* (*Value iteration*). Он очень похож на алгоритм итеративной оценки политики. По-прежнему перебираются все состояния, но обновление значения происходит в соответствии с действием, которое максимизирует оценку текущего значения (2.3)

$$v(s) = \max_a \sum_{s'} \sum_r p(s', r \mid s, a)[r + \gamma v(s')]. \tag{2.3}$$

В качестве условия завершения алгоритма можно использовать то же условие, которое используется для итеративной оценки политики. То есть работа завершается, когда максимальное изменение функции ценности за полный цикл меньше некоторого небольшого значения $\theta$.

Итерация значений охватывает все пространство состояний на каждой итерации, как и итерация политики.

В результате было принято решение использовать алгоритм итерации значений, поскольку он позволяет комбинировать оценку и улучшение политики за один шаг.

**Литература**


1. Markov Decision Process with their applications / Qiying Hu, Wuyi Yue – New York : Springer Science+Business Media, LLC, 2008. – 297 p.

2. Обучение с подкреплением [сайт.] // URL: https://www.coursera.org/specializations/reinforcement-learning (дата обращения: 10.08.2020). – Режим доступа: по подписке.

3. Markov decision process: официальнй сайт // URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_decision_process (дата обращения: 20.08.2020).

4. Markov decision process [Электронный ресурс] // URL: https://colab.research.google.com/drive/1ffM_4BhiktpTR1nPowlkhBO1z6aW5CbB (дата обращения: 3.09.2020).

УДК 519.248

# ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ШКАЛИРОВАНИЯ В ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНКАХ

**Н. В. Персичкина, В. Н. Худенко**

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта*

**Аннотация.** Данная работа посвящена обзору наиболее известных методов шкалирования. Представлена специфика измерений на примере шкал Лайкерта, Гуттмана, Терстоуна, Богардуса и Осгуда. Также рассмотрены отдельные проблемные аспекты в применении каждой шкалы, в том числе основанных на предварительной оценки набора суждений, отражающих различную степень выраженности характеристик респондентов.
**Ключевые слова:** шкала Лайкерта, коэффициентом репродуктивности по Гуттману, равнокажущиеся интервалы Терстоуна, шкала социальной дистанции Богардуса, метод семантического дифференциала Осгуда.

## Введение

Все чаще мы становимся участниками различных опросов, где предлагается серия вопросов, по каждому из которых требуется высказаться — согласен, не согласен и другие варианты. На основе собранной информации проводится анализ, строятся прогнозы. В данной статье стоит задача рассмотреть известные шкалы, то есть отображения эмпирической системы в совокупность математических систем, и с учетом выявленных временем недостатков рекомендовать их для использования в современных исследованиях.

Как известно еще в XVIII-XIX начали проводить статистические обследования, переписи населения, главной целью которых было изучение условий и уровня жизни и т.п. Именно тогда были применены измерения, которые в начале XX века уже стали использовать с целью выявления мнения респондентов.

Так в 1932 году Ренсис Лайкерт предложил метод суммарных оценок. В соответствии с этой методикой каждому респонденту предъявляется серия утверждений. Испытуемый оценивает степень своего согласия или несогласия с каждым суждением, от «полностью согласен» до «полностью не согласен». Каждому ответу приписывается определенная числовая оценка, например, в диапазоне от 5 до 1 (5 — «полностью согласен», 1 — «полностью не согласен», 3 — «не имею определенного мнения»). Сумма оценок каждого отдельного суждения была положена в оценку установки испытуемого по изучаемому вопросу.

Здесь следует обратить внимание на то, каким способом определяется суммарная (средняя) оценка. Если обратить внимание на ответы («полностью согласен», «согласен» и т. д.), то очевидно, что они представляют измерение на порядковом уровне. Например, если кодировать числами от 1 до 5 ответы на вопросы, то кроме равенства, можно судить и о некотором порядке, $3 < 5$ значит один респондент больше согласен с некоторым утверждением, чем другой. И разница между «полностью согласен» и «согласен» не может быть одинаковой, касается ли это разных пунктов шкалы или разных респондентов. Следовательно, некорректно складывать эти числа друг с другом, не говоря уже о том, чтобы их усреднять. Более правильная процедура состоит в вычислении на основании ответов каждого респондента средней величины другого вида — медианы, — которая затем приписывается респонденту в качестве оценки шкалы.

Само построение Лайкерта осуществляется в виде таблицы, где в строках записаны наблюдаемые переменные, а столбцы — значения этих переменных. В процессе построения шкалы каждое суждение сравнивается с остальными, для чего строится таблица сопряженности, на основе которой рассчитывается коэффициент корреляции. В основе таблицы лежат два показателя: балл респондента по данному суждению (от 1 до 5); разность между общим баллом респондента и баллом проверяемого суждения. Высчитывается коэффициент корреляции между баллом и разностью для каждого суждения, значения которого колеблются от –1 до +1. Знак «+» указывает на прямую связь, знак «–» показывает обратную.

Таким образом, методика Лайкерта проста и эффективна, а для исключения ошибочных суждений достаточно заменить среднюю арифметическую на медиану.

Более сложную методику, известную как шкала Луи Гуттмана, можно проиллюстрировать на примере: тот, кто умеет возводить в степень, непременно умеет умножать и складывать. Но кто умеет складывать, вовсе не обязательно умеет умножать (не говоря о возведении в степень). Зная максимальные возможности некоего человека, можно надежно предсказать его возможности в менее ответственном испытании. На практике подобные допущения оказываются верными не всегда, но очень часто.

Процедура схожа с шкалированием по Лайкерту, и состоит в том, что респондентов просят ответить, согласны они или нет с каждым пунктом (утверждением) из некоторой серии. Тому ответу, который в большей степени отражает измеряемое свойство, приписывается знак «+», а альтернативным ответам — знак «–». Все, ответившие положительно по отношению к главному вопросу, будут расположены в начале шкалы, а отрицательно — в конце. Сами утверждения связаны между собой таким образом, что различные ответы на них отражают степень предубежденности (или свободы от таковой) респондента. Это значит, что между пунктами шкалы существует вполне логичное отношение порядка, отсутствующее в шкале Лайкерта. Основное допущение заключается в том, что число плюсов должно уменьшаться по мере возрастания трудности следования определенному типу поведения или отношения. Все, ответившие положительно по отношению к главному вопросу, будут расположены в начале шкалы, а отрицательно — в конце. Такое упорядочение совпадает с нашими ожиданиями в том смысле, что наблюдаемое упорядочение соответствует нашему изначальному упорядочению. Однако так бывает далеко не всегда. Оценка риска требует определить величину общей ошибки, т. е. оценить — то ли она относительно мала и потому ей можно пренебречь, то ли настолько велика, что делает недействительной саму шкалу. Ответить на этот вопрос позволяет вычисление статистики, называемое коэффициентом репродуктивности по Гуттману и определяемое по следующей формуле: $\mathrm{Re} = 1 - \frac{\text{\textit{число ошибок}}}{\text{\textit{число ответов}}}$.

Дробь в этой формуле показывает, какая доля всех возможных ошибок имела место в действительности. Вычитая эту долю ошибок из единицы, мы устанавливаем долю тех элементов (вхождений) шкалы, которые свободны от ошибок. Принято считать обоснованной любую шкалу Гуттмана с коэффициентом $\mathrm{Re} > 0{,}90$ и выше; шкалы с более низким коэффициентом рассматриваются как сомнительные и обычно в аналитических целях не используются. Можно повысить коэффициент, убрав суждения, которые дают много (+) или (–).

Таким образом, мы видим, что применительно к пунктам, поддающимся естественному упорядочению по степени трудности, шкалирование по Гуттману является сильным средством, с помощью которого возможно объединять несколько показателей в единую суммарную величину, адекватно отображающую какое-то более общее свойство (признак) респондента.

Еще один способ вычисления суммарных оценок — это равномерное интервальное шкалирование по Терстоуну. Основной смысл построения шкалы Терстоуна состоит в том, что подбираются оценочные суждения, определяется их «вес» (значение), и по выбранным респондентом суждениям определяется «вес» самих респондентов, который равен среднему значению «весов» суждений. Исследование Луи Терстоуна проводится в несколько этапов: Первый этап — этап формирования суждений, их отбор. Исследователь составляет максимально широкий список утверждений от негативного до позитивного, которые выражают отношение респондентов к объекту. Так, Терстоун собирал мнения коллег, студентов, высказывания из публикаций, касающихся церкви. Далее идёт первичный отбор. Исследователь исключает двусмысленные суждения, например, относящиеся скорее к прошлому, чем к настоящему, слишком длинные, содержащие специальные термины и т. п. В результате исходный список суждений сокращается.

Вторым этапом является экспертная процедура, позволяющая определить значение для каждого суждения и провести среди них окончательный отбор. Терстоун разделил всю сумму положительного — отрицательного отношения на 11 категорий (от «А» до «К»), разделенных субъективно равными интервалами. Каждое из утверждений раздаются экспертам в области исследования, задача которых — распределить суждения по 11 рубрикам по степени выраженного в них положительного или отрицательного отношения к объекту остановки. Подчеркнем, что экспертов не просят высказать их собственное мнение, они должны лишь рассортировать высказывания.

Началом третьего этапа (собственно построения шкалы) является подсчет процента экспертов, положивших высказывание в определенную рубрику. Балл каждого из высказываний определяется распределением оценок. Далее подсчитывается суммарный (кумулятивный) процент экспертов, отнесших суждение к данной градации и предшествующим градациям. Терстоун присваивал использовавшимся градациям числовые значения от 1 (градация «А», максимально благожелательное отношение) до 11 (градация «К»).

Распределение кумулятивных (накопленных) процентов позволяет вычислить значения медианы и размах вариации. Медиана=50 в распределении накопленных частот есть значение на шкале «А» — «К», относительно которого половина судей дала большие, а другая половина — меньшие оценки данного утверждения. Вычислить медиану мы можем по следующей формуле:

$$Md = \begin{pmatrix} \textit{нижняя граница} \\ \textit{интервала медианы} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{ширина} \\ \textit{интервала} \end{pmatrix} * \frac{50 - \begin{pmatrix} \textit{кумулятивный процент} \\ \textit{для нижней границы} \\ \textit{интервала медианы} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \textit{процент} \\ \textit{интервала медианы} \end{pmatrix}}.$$

В методе Терстоуна ширина интервала между соседними численными градациями по определению равна 1 (равнокажущиеся интервалы). Значение медианы и принимается за шкальный балл «цену» суждения.

Однако, не все суждения, получившие экспертную оценку, в равной мере пригодны для шкалы: некоторые из суждений получат весьма согласованные и единодушные оценки экспертов, тогда как другие вызовут разнобой во мнениях. Для оценки внутренней согласованности отдельных высказываний шкалы Терстоун применил меру разброса оценок экспертов — междуквартильный размах.

Четвертый этап — отбор качественных суждений в шкалу, в анкету. Сначала выбираются суждения со значением медианы около 1 и сравнивают их квартильные размахи: суждения с большим квартильным размахом отбрасывают, а с минимальным включают в шкалу. Квартильный размах, равный (Q3-Q1) — это расстояние между первым (Q1) и третьим (Q3) квартилем распределения. (Q1) задается точкой на оси, до которой лежит 25 % полученных оценок суждения, а третий ((Q3) — точкой, выше которой лежит 25 % оценок. Для вычисления квартильного размаха сначала устанавливаются значения, соответствующие (Q1) и (Q3)

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \textit{нижняя граница интер-} \\ \textit{вала первого квартиля} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{ширина} \\ \textit{интервала} \end{pmatrix} * \frac{50 - \begin{pmatrix} \textit{кумулятивный процент} \\ \textit{для нижней границы} \\ \textit{интервала первого квартиля} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \textit{процент интервала,} \\ \textit{где первый квартиль} \end{pmatrix}}.$$

Те суждения, для которых разброс оценок, измеренный через междуквартильный размах, оказывается слишком велик, исключаются из шкалы Терстоуна. Предполагается, что высказывание, получившее столь разные оценки, воспринимается слишком неоднозначно. Так, Терстоун исключил из первоначально списка 90 высказываний из 130. В результирующей шкале оставляют одно-два высказывания для каждого деления шкалы, чтобы все градации предполагаемого установочного континуума оказались в равной мере представлены.

Если получившуюся шкалу предъявить теперь группе респондентов, то индивидуальным баллом каждого субъекта, выражающим меру «благожелательность» его установки, можно считать медиану (или средний балл) всех суждений, с которыми он согласился.

В качестве недостатка шкалы Терстоуна, несвязанного с качеством заложенной в ней модели, чаще всего отмечают её неэкономичность: «Недостаток шкалы Терстоуна состоит в длительности и сложности необходимых операций: собрать сто или более судей-экспертов для того, чтобы распределить по одиннадцати категориям несколько сотен утверждений, - это трудная и дорогостоящая операция».

Еще одно шкала, построенная на оценках экспертов - это шкала социальной дистанции Богардуса. Суть методики заключается в том, что респондента просят отметить те типы социальных контактов, в которые он охотно вступил бы с представителями той или иной социальной группы. Для этого был составлен перечень различного рода социальных контактов (связей), в которых люди могут находиться друг с другом, проживая в одной стране. Эмори Богардус предложил ряд индексов, которые можно вычислять на основании ответов респондентов: Индекс качества социальных контактов, Индекс дистанции социальных контактов, Индекс ранга социальных контактов.

Богардус сформулировал список из семи суждений, отражающих различную степень социальной дистанции. Набор ответов, предлагаемых респонденту, был сформирован на основании результатов предварительной экспертной процедуры. Первоначально довольно обширный список утверждений был предложен шестидесяти экспертам с просьбой оценить каждый из видов социальных связей по семибалльной шкале. В итоге было отобрано семь вариантов социальных контактов, различающихся по степени близости/отдаленности.

В основу методики положена идея о том, что одни и те же качества, приписываемые как себе, так и другим людям (группе), могут интерпретироваться по-разному: положительные качества своей группы (например, «мы — экономны, бережливы») могут восприниматься как отрицательные у другой («они — жадны, скупы»). По этому принципу были составлены пары качеств, полюса которых различаются по коннотативным (аффективным) параметрам, в то время как их смысловые значения могут расцениваться как достаточно близкие. При опросе респонденты отмечали то суждение, которое соответствовало допускаемой ими близости с членами заданной группы. Номер утверждения на шкале отражает величину социальной дистанции (1 — минимальная, 7 — максимальная). Социальная дистанция членов одной группы (респондентов) по отношению к другим группам вычисляется как среднее арифметическое индивидуальных ответов. Соответственно, чем меньше этот показатель, тем короче социальная дистанция между двумя группами и тем сильнее выражены позитивные чувства одной группы по отношению к другой. Возможна также оценка каждого пункта шкалы как отдельного утверждения, например, в диапазоне: абсолютно согласен (1) — абсолютно не согласен (7), что предполагает соответствующую обработку результатов.

Шкала Богардуса является удобным инструментом для изучения того, насколько близко респондент чувствует себя к какой либо этнической группе, и потому часто используется для исследования этнических стереотипов, этнической толерантности и ксенофобии.

И последний рассматриваемый здесь способ шкалирования, предложен Чарльзом Осгудом в 1952 году. Основное предназначение данного метода — измерение смысла понятий и слов, отражающих эмоциональную сторону установки респондента. Метод Осгуда — семантический дифференциал строится на противопоставлении оценочных суждений, и позволяет измерять реакции индивидов на стимулы с помощью применения биполярных шкал. Шкалы чаще всего задаются понятиями, противоположными по смыслу (антонимами), как прилагательными, так и наречиями. Респондент должен дать оценку дифференцируемому объекту по каждой из предложенных биполярных семибалльных шкал. При этом в каждом случае выбирается одно из семи возможных значений, характеризующих объект. Особенность данной методики — отсутствие прямых характеристик у оцениваемого объекта, за которые бы респонденты ставили балл.

При сравнении различий в групповых оценках различных стимулов можно рассматривать оценку обычно отрезок от –3 до +3 как отдельное измерение. При таком рассмотрении существует возможность попарного сравнения (первая групповая оценка и вторая групповая оценка) по каждой шкале с применением известных статистических критериев и программ.

Можно сравнивать средние оценки первого и второго измерений по каждой шкале по критерию Стьюдента. Критерий является параметрическим, но параметры измерений (среднее, среднеквадратичное отклонение и др.) при использовании шкалированных (но биполярных) бланков всегда представлены. Такое сравнение не более ошибочно, чем сравнение на основе непараметрических критериев, но подвержено критике, так как измерение проводится не в абсолютной метрической шкале.

Для определения мерности семантического пространства Ч. Осгуд предложил метод факторного анализа, с помощью которого можно установить минимальное количество ортогональных измерений (или осей). Следовательно, семантическое дифференцирование предполагает последовательное расположение понятия в многомерном семантическом пространстве при помощи выбора определенного значения между полюсами шкал (оценки).

Анализ данных кроме процедуры факторного анализа, может проводиться по специальной формуле, предложенной Чарльзом Осгудом. По данной формуле вычисляется расстояние между объектами шкалирования — двумя точками в семантическом пространстве. Здесь шкалируемые объекты представляются в виде семантических профилей: ломаных линий, соединяющих выборы испытуемых на каждой биполярной шкале. Так, степень сходства или различия профилей можно вычислить по формуле: $D(x, y) = \sqrt{\sum d(x_i y_i)^2}$, где $D(x, y)$ семантическое расстояние между объектами $x$ и $y$, $x_i y_i$ — разность между координатами двух точек, которые представляют значения объектов X и У по данному фактору.

Формула позволяет оценить расстояния между значениями различных понятий у одного и того же индивида или группы индивидов, сравнивать оценки одного и того же объекта респондентами. Также с помощью формулы выявляются изменения в оценках какого-либо объекта у одного испытуемого или группы испытуемых.

В целом метод семантического дифференциала дает возможность получить необходимую информацию, не используя стандартные объекты и стандартные шкалы. В качестве преимуществ метода семантического дифференциала исследователи называют: его компактность, возможность бланковой работы с большими группами испытуемых, стандартизацию результатов и процедуру сравнения результатов, работу разных испытуемых и групп испытуемых, снятие речевых штампов заданными экспериментатором шкалами.

К недостаткам семантического дифференциала относят, прежде всего: ограниченность возможного набора оценочных шкал, возможное наличие незначимых для испытуемого оценочных шкал, возможное отсутствие значимых для испытуемого оценочных шкал.

И таким образом, метод семантического дифференциала выполняет в исследовательском процессе несколько иную и более фундаментальную задачу, чем методы Лайкерта, Гуттмана и Терстоуна, а именно помогает формированию и оцениванию дефиниций тех или иных понятий. Следует отметить, что существуют и другие методы шкалирования, используемые в опросных исследованиях.

## Заключение

Рассмотренные методы измерений Лайкерта, Гуттмана, Терстоуна, Богардуса и Осгуда в совокупности обеспечивают исследователя доступными вариантами выбора и критериями, которыми можно руководствоваться при формировании ограниченных мер для основных понятий. Предварительная оценка набора суждений востребована как в гуманитарных, так и в естественнонаучных исследованиях, и проведенное сопоставление нескольких подходов к шкалированию будет полезно исследователям.

## Литература

1. *Толстова, Ю. Н.* Измерение в социологии: учебное пособие / Ю. Н. Толстова. – М. : КДУ, 2007. – 288 с.

2. *Мангейм, Дж. Б.* Политология. Методы исследования / Дж. Б. Мангейм, Р. К. Рич. Пер. с англ. / Предисл. А.К. Соколова. – М. : Издательство «Весь Мир», 1997. – 544 с.

УДК 519.7

# СЖАТИЕ ИНФОРМАЦИИ В ТЕСТОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ БИНАРНОЙ МАТРИЦЫ

**Г. В. Петрухнова**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Объект исследования — тестовые последовательности для цифровых устройств. Модель цифрового устройства — серый ящик. Тест представляет собой бинарную матрицу. Рассматриваемые неисправности — «константная» и «перемычка». Определяется мера симметричности бинарной матрицы. На основе полученной меры вводится критерий, позволяющий вычислить полезность очередного тестового воздействия на цифровую схему. Предлагаемый подход позволяет исключить из тестовой последовательности воздействия, не несущие полезную информацию. Анализ экспериментальных данных позволяет сделать вывод о целесообразности использования предлагаемого критерия в теории и практике тестирования цифровых устройств.
**Ключевые слова:** цифровое устройство, тест, входное воздействие, реакция устройства на входное воздействие, бинарная матрица, генератор псевдослучайных чисел, симметрия, мера симметричности бинарной матрицы, автоморфизм, константная неисправность, неисправность типа «перемычка».

## Введение

Реальные сообщения при одинаковой информативности обладают определенной избыточностью в элементах по сравнению с оптимальными сообщениями. Избыточность информации в одних случаях может быть вредна, в других — полезна. При функциональном тестировании цифровых устройств определенная избыточность входных воздействий полезна. При тестировании цифрового устройства с целью обнаружения неисправностей типа «константная» и типа «короткое замыкание» входные воздействия, несущие одинаковую информацию в контрольных точках, обычно исключаются из теста.

Под ***сжатием теста*** будем понимать алгоритмическое преобразование теста, при котором за счет уменьшения избыточности тестовых воздействий сокращается длина теста. В данной статье основой для рассмотрения этой задачи являются принципы симметрии, что представляет новизну подхода.

В общем случае под ***симметрией*** понимают категорию, обозначающую сохранение определенных признаков объекта относительно изменений [1]. Использование принципов симметрии предполагает наличие некоторого правила разбиения теста на структурные единицы, выделение преобразований, работающих на основе этих структурных единиц и сохраняющих тест, а также наличие критерия качества, позволяющего ранжировать тестовые воздействия. Преобразованиями, сохраняющими тест, являются перестановки одинаковых структурных единиц. На основе числа таких преобразований будет рассмотрена мера симметричности теста и введен критерий, согласно которому входные воздействия, не несущие полезную информацию, будут исключены из тестовой последовательности.

## 1. Постановка задачи

Под ***мерой симметричности*** объекта будем понимать количество его ***автоморфизмов*** (преобразований, сохраняющими структуру) [2].

Пусть имеется бинарная матрица, состоящая из $K$ столбцов и $N$ строк:

$$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1K} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{N1} & y_{N2} & \cdots & y_{NK} \end{matrix} \qquad (1)$$

Матрица представляет собой реакцию цифрового устройства на входные тестовые воздействия. Будем считать, что ее структурными единицами являются строки, столбцы, элементы строк матрицы, элементы столбцов. В качестве автоморфизмов бинарной матрицы рассмотрим перестановки одинаковых элементов строки матрицы между собой, перестановки одинаковых элементов столбца матрицы между собой, перестановки одинаковых строк между собой, перестановки одинаковых столбцов между собой. Необходимо на основе меры симметричности бинарной матрицы разработать критерий, позволяющий удалять из теста воздействия, не несущие полезную информацию

### 2. Мера симметричности матрицы

Меру симметричности матрицы на основе указанных выше автоморфизмов можно выразить [3–5] как

$$S=\left(\prod_{i=1}^{N}(K-m_i)!\cdot m_i!\right)^{\alpha}\cdot\left(\prod_{i=1}^{K}(N-n_i)!\cdot n_i!\right)^{\beta}\cdot\left(\prod_{i=1}^{R}l_i!\right)^{\gamma}\cdot\left(\prod_{i=1}^{s}k_i!\right)^{\mu}, \qquad (2)$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\mu$ — коэффициенты, определяющие способ разбиения бинарной матрицы, $\alpha,\beta,\gamma,\mu\in\{0,1\}$; $m_i$ — число единиц в $i$-й строке; $n_i$ — число единиц в $i$-м столбце; $l_i$ — число строк $i$-го типа; $s$ — количество встречающихся в матрице типов столбцов; $k_i$ — число столбцов бинарной матрицы $i$-го типа; $N$ — количество строк бинарной матрицы (длина теста); $K$ — количество столбцов бинарной матрицы (число контрольных точек); $R$ — возможное число различных строк, $R=2^K$.

Под типом строки бинарной матрицы будем понимать упорядоченную последовательность нулей и единиц. Если количество элементов строки — $K$, то число различных типов строк будет $R=2^K$.

Под типом столбца бинарной матрицы будем понимать упорядоченную последовательность нулей и единиц. Если количество элементов столбца — $N$, то число различных типов столбцов будет $R=2^N$.

Коэффициент α предполагает разбиение бинарной матрицы (1), которая представляет собой реакцию объекта тестирования на тестовые воздействия, на строки и саму строку на элементы. Автоморфизмами в этом случае являются перестановки единиц между собой и перестановки нулей между собой.

Коэффициент $\beta$ предполагает разбиение бинарной матрицы (1) на столбцы и сами столбцы на элементы. Автоморфизмами в этом случае являются перестановки единиц между собой и перестановки нулей между собой.

Коэффициент $\gamma$ предполагает разбиение бинарной матрицы (1) на строки. Автоморфизмами в этом случае являются перестановки одинаковых строк между собой.

Коэффициент $\mu$ предполагает разбиение бинарной матрицы (1) на столбцы. Автоморфизмами в этом случае являются перестановки одинаковых столбцов между собой.

### 3. Методика сжатия

Если прологарифмировать выражение (2), то получим энтропийный критерий [3–5], определяемый формулой (3):

$$H=\frac{\alpha}{N}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\left(w_i\cdot\ln w_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\left(\left(1-w_i\right)\cdot\ln\left(1-w_i\right)\right)\right)+\frac{\beta}{K}\cdot\left(\sum_{i=1}^{K}\left(q_i\cdot\ln q_i\right)+\sum_{i=1}^{K}\left(\left(1-q_i\right)\cdot\ln\left(1-q_i\right)\right)\right)+$$
$$+\frac{\nu}{K}\cdot\sum_{i=1}^{R}\left(p_i\cdot\ln p_i\right)+\frac{\mu}{N\cdot K}\cdot\sum_{i=1}^{s}\left(k_i\cdot\ln k_i\right),\qquad(3)$$

где $w_i$ — вероятность, с которой логическая единица встречается в $i$-й строке матрицы (1); $q_i$ — вероятность, с которой логическая единица встречается в $i$-м столбце матрицы (1); $p_i$ — вероятность, с которой строка типа $i$ встречается в матрице (1); $K$ — число столбцов бинарной матрицы; $k_i$ — число столбцов бинарной матрицы $i$-го типа; $N$ — число строк бинарной матрицы; $R$ — общее число возможных типов строк бинарной матрицы, $R=2^K$; $s$ — количество встречающихся в матрице типов столбцов; $\alpha,\beta,\gamma,\mu$ — коэффициенты, определяющие способ разбиения бинарной матрицы, $\alpha,\beta,\gamma,\mu\in\{0,1\}$.

При этом выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{R}p_i=1,$$
$$\sum_{i=1}^{s}k_i=K.$$

Критерии, определяемые на основе выражения (3), используются для оценки качества тестов и оптимизации их структуры. Для определения избыточных кодовых наборов необходимо коэффициент μ приравнять единице и проверить условие (4):

$$\left|H\left(L\right)-H\left(L+1\right)\right|<\varepsilon,\qquad(4)$$

где $L$ — шаг тестирования (на его основании определяется количество строк матрицы (1), другими словами, это – длина фрагмента теста); $H\left(L\right)$ и $H\left(L+1\right)$ — значение критерия (3) на шагах тестирования $L$ и $L+1$, $L=1,N$; $\varepsilon$ — наперед заданная достаточно малая величина.

Для реализации сжатия необходимо определить $\varepsilon$. Можно показать на основе критерия (3), что

$$\left|A+B+C+D\right|\le\varepsilon,\qquad(5)$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ определяются как:

$$A=-\left(\beta\cdot\frac{K-1}{K}+\frac{\gamma}{K}\right)\cdot\ln\frac{1}{K-1},$$
$$B=\left(\frac{\gamma}{K}+2\cdot\beta\cdot\frac{K-1}{K}\right)\cdot\ln\frac{1}{K-2},$$
$$C=-\beta\cdot\frac{K-3}{K}\cdot\ln\frac{1}{K-3},$$
$$D=\frac{2\cdot\ln 2}{K\cdot\left(K-2\right)}.$$

Представленная методика предполагает итерационное вычисление критерия (3) для каждой совокупности последовательных реакций эталонного объекта тестирования на входные воздействия (начиная с первого воздействия и т. д). Если условие, определяемое выражением (4), на каком-то шаге не выполняется, то это означает, что соответствующее тестовое воздействие на объект и реакция на него не несут полезную информацию.

### 4. Результаты исследования

Для исследования были выбраны различные тесты: тесты, построенные с помощью генератора псевдослучайных чисел; тесты, разработанные специально для выбранных схем и взятые из различных литературных источников; стандартные тесты [6] (типа «бегущая единица», «логарифмический», «шахматный»). Исследования проводились для каждого из девяти критериев, определяемых разбиением бинарной матрицы и коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma$. В табл. 1 представлены восемь последовательностей, которые были использованы в экспериментах. Эти последовательности представляют собой реакции эталонных объектов на входные воздействия. Тестовые последовательности, несущие полезную информацию, выделены жирным шрифтом.

Таблица 1

Реакции объектов тестирования на тестовые воздействия

| Посл. 1 | Посл. 2 | Посл. 3 | Посл. 4 | Посл. 5 | Посл. 6 | Посл. 7 | Посл. 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **010101**<br>**101010**<br>010101<br>101010 | **000111**<br>**001101**<br>**011100** | **111111**<br>**000000**<br>111111<br>000000<br>111111<br>000000<br>111111 | **101010**<br>101010<br>101010<br>101010<br>101010 | **111000**<br>**100101**<br>**010011**<br>000111<br>011010<br>101100<br>101010<br>010101 | **010111**<br>**101101**<br>**011100**<br>111100<br>**110011**<br>101011 | **100000**<br>**010000**<br>**001000**<br>**000100**<br>**000010**<br>**000001** | **111000**<br>**100101**<br>**010011** |

Исследования подтвердили целесообразность использования формулы (5), поскольку удалось существенно сократить длину теста или вовсе получить оптимальный тест (последовательность 5). Стоит отметить, что не все критерии чувствительны к покрытию тестом константных неисправностей. Таким свойством не обладает критерий, соответствующий условию $\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0, \ \mu = 1.$ К покрытию неисправности типа «перемычка» чувствительны все критерии.

Исследования также показали эффективность использования предлагаемой методики для тестов, не имеющих регулярной структуры, и возможность ее применения при работе с тестами с регулярной структурой.

## Заключение

Объектом исследования данной статьи являются тесты для цифровых устройств. Используемая модель цифрового устройства — серый ящик. Тест может быть как псевдослучайным так и детерминированным. Рассматриваемые неисправности — «константная» и «перемычка». Модель теста — бинарная матрица.

На основе меры симметричности теста был введен критерий, позволяющий определять полезность тестового воздействия на цифровую схему. Предлагаемый подход позволяет исключить из тестовой последовательности воздействия, не несущие полезную информацию. В процессе исследований установлено, что предлагаемый математический аппарат наиболее эффективен для тестов, имеющих нерегулярную структуру.

Анализ экспериментальных данных позволяет сделать вывод о целесообразности использования предлагаемой методики в теории и практике тестирования объектов, которые можно представить в виде бинарной матрицы.

## Литература

1. *Weyl, H.* Symmetry / H. Weyl. – Princeton : Princeton Science Library, Princeton University Press, 1989. – 168 p.

2. *Шрейдер, Ю. А.* Системы и модели / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров. – Москва : Радио и связь, 1982. – 151 с.

3. *Petrukhnova, G. V.* Quality evaluation formalization of the in-circuit control test based on the maximum entropy principle / G. V. Petrurhnova // Proc. IEEE 14th Int. ScientificTechnical Conf. APEIE – 44894. (Novosibirsk : Novosibirsk State Technical University). October 2–6. – 2018. – V. 1, Part 4. – P. 413–415.

4. *Petrukhnova, G. V.* The analysis of binary matrix symmetry properties in the tasks concerned with test control of digital devices / G.V. Petrurhnova // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – P. 012051

5. *Петрухнова, Г. В.* Оценка качества теста внутрисхемного контроля цифровых схем / Г. В. Петрухнова // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2019. – Т. 15, № 4. С. 30–35.

6. *Лихтциндер, Б. Я.* Внутрисхемное диагностирование узлов радиоэлектронной аппаратуры / Б. Я. Лихтциндер. – Киев : Тэхника, 1989. – 167 с.

УДК 517.97, 681.5

# ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА ВАРИАНТА РАЗВИТИЯ СИСТЕМ ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ

**С. Л. Подвальный, О. А. Сотникова, Я. А. Золотухина, Е. Е. Прокшиц, Д. Н. Васенин**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** К настоящему времени разработано большое число математических моделей, описывающих производственно-технологическую сторону экономики и предназначенных для принятия эффективных решений. Значительная часть построенных моделей в той или иной мере используется на практике. Однако, несмотря на значительные достигнутые успехи остается немало проблем, требующих своего решения. Так, многие модели осуществляют лишь первичную обработку информации и ее хранение, но не предоставляют лицу, принимающему решение (ЛПР), средств для анализа ситуации и принятия решений.
**Ключевые слова:** теплоснабжение, системный подход, вариантный предпроектный анализ, экономико-математическое моделирование, многокритериальные методы.

## Введение

Выбор экономически целесообразного варианта системы теплоснабжения района (СТСР) требует рассмотрения и учета большого количества факторов и условий функционирования системы.

Наиболее эффективным будет являться воздействие на итоговые показатели работы СТСР еще на стадии проектирования, в процессе многовариантного предпроектного анализа систем теплоснабжения комплексной жилой застройки или реконструкции кварталов.

В то же время для практической хозяйственной деятельности характерным является наличие не одного, а нескольких факторов (показателей), влияющих на эффективность принимаемого решения о развитии СТСР. При этом необходимым является использование многокритериальных методов.

## Особенности математического моделирования экономики СТСР

В основу разрабатываемой модели, положен принцип системного подхода, то есть объект проектирования рассматривается как система, взаимодействующая со смежными системами и окружающей ее средой. Разработку вопросов развития СТСР предлагается осуществить по трем основным этапам: I этап — формулировка проблемы; II этап — реализация экономико-математической модели развития СТСР (ЭММР СТСР); III этап —анализ модели [5, 7, 12].

При математическом моделировании трубопроводных систем, к которым относятся системы теплоснабжения, чаще всего используется понятие гидравлической цепи (совокупности устройств и соединяющих их трубопроводов, закрытых или открытых каналов, осуществляющих транспортировку сжимаемых и несжимаемых жидкостей — воды, нефти, газа, мазута, воздуха и др.). Гидравлическая цепь в этом случае понимается как математический объект — математическая модель, включающая в себя две составные части:

– расчетную схему цепи, геометрически отображающую структуру (конфигурацию) изучаемой системы и картину возможных направлений, смешения и разделения потоков транспортируемой среды;

– совокупность математических соотношений, описывающих взаимозависимость количественных характеристик элементов данной схемы.

В любой гидравлической системе как материальном объекте различают три ее основные подсистемы:

– источники расхода или давления (например, котельные, насосные и компрессорные станции и др.), обеспечивающие притоки транспортируемой среды и привносящие энергию в систему;

– трубопроводную или гидравлическую сеть (в виде совокупности взаимосвязанных трубопроводов, воздуховодов и открытых каналов), соединяющую источники со множеством потребителей и доставляющую им эту среду;

– абонентские подсистемы (или просто - потребители).

При математическом моделировании все подсистемы находят соответствующее отражение в расчетной схеме цепи [12, 13]. Среди параметров узлов (источников теплоснабжения, источников расхода или потребителей) и ветвей (участков сети, включающих арматуру, другие местные сопротивления, а также источники давления) гидравлической цепи впоследствии будем различать: технические характеристики, гидравлические параметры, граничные условия.

Условная схема гидравлической цепи — графическое изображение моделируемой системы — представляется нами как совокупность двух упо рядоченных множеств: множества узлов $l$ и $j$, $l=\{l: l=1,...,E\}$, $j=\{j: j=1,...,J\}$, состоящих из подмножеств потребителей и подмножеств источников; множества ветвей, отображающих заданные связи (соединения) между узлами; множества условных знаков, характеризующих тип и специфические особенности элементов. Количество узлов и ветвей являются параметрами гидравлической цепи [1, 8, 9].

Движение транспортируемой среды будем считать одномерным, усредняя по сечению трубы или канала скорость, плотность и давление потока. При этом будет рассматриваться стационарный гидравлический режим, отвечающий некоторому установившемуся в системе процессу течения.

Кроме требований экономичности систем теплоснабжения районов необходимо наложить следующие связи и выполнить ограничения на развитие и функционирование объектов СТСР: балансовые; топливные; технологические; экологические; условия надежности.

При оптимизации необходимо также учесть дискретность параметров теплоэнергетических объектов, нелинейные зависимости технико-экономических показателей объектов от их установленной тепловой мощности, динамику процесса развития СТСР, многорежимность работы объектов и надежность теплоснабжения.

Математическая постановка такой задачи комплексной оптимизации развития СТСР является детерминированной — в ней отсутствует неоднозначность исходной информации о будущих условиях развития системы теплоснабжения.

Целевая функция оптимизации развития СТСР формулируется следующим образом: требуется определить:

$$З(x,q)=\min_{x,q}\sum_{i=1}^{I}\sum_{h=1}^{H}З_{ih}(x_{i(h-1)},x_{ih},q_{ih}). \quad (1)$$

При следующих связях и ограничениях:

а) по балансам тепловой мощности и энергии в узлах потребителей районов

$$W_h(D_h,Q_h,q_h)=0 \quad (2)$$

б) по балансам потребления топлива, устанавливающим связь с топливно-энергетическим балансов района проектирования и строительства СТСР

$$V_h(x_h,Q_h,B_h)=0 \quad (3)$$

в) по пределам развития установленных мощностей объектов

$$x_{h,\min}\le x_h\le x_{h,\max} \quad (4)$$

г) по пределам тепловых нагрузок объектов

$$q_h\le q_{h,\max} \quad (5)$$

д) по объемам потребления топлива различного вида

$$B_h \le B_{h,\max} \tag{6}$$

е) по выбросам вредных веществ в окружающую среду

$$Y_h \le Y_{h,\max} \tag{7}$$

Для всех $h = 1 \ldots H$.

В формулах (1)–(7) $З_{ih}$ приведенные к $h$-му шагу расчетного периода затраты в $i$-й объект; $x_h = [x_{ih}]$, $i = 1,\ldots,I$ — вектор состояний объектов на $h$-м шаге расчетного периода; $q_h = [q_{ish}]$, $i = 1,\ldots,I$; $s = 1,\ldots,S$ — вектор тепловых нагрузок объектов на $h$-м шаге расчететного периода в зоне $s$ графика нагрузок; $H$ — число шагов (этапов) расчетного периода; $S$ — число зон графика нагрузки; $D$ — детерминированный вектор исходных данных; $B_h = [B_{Th}]$ — вектор расхода $T$-го вида топлива на $h$-м шаге расчетного периода; $Q_h = [Q_{ih}]$ — вектор выработки и отпуска тепловой энергии объектами (источниками, узлами) на $h$-м шаге расчета; $x_{h,\min}, x_{h,\max}$ — соответственно нижний и верхний пределы вектора состояний $x_h$; $q_h(x_h)$ — верхний предел тепловой мощности при векторе состояний $x_h$, определяющий максимальную тепловую нагрузку объектов в зависимости от установленного на него оборудования; $Y_h = [Y_{mh}]$ — количество выбросов m-того вредного вещества на $h$-м шаге расчетного периода; $Y_{h,\max}$ — предельные уровни выбросов вредных веществ на $h$-м шаге расчетного периода.

При составлении исходной математической модели комплексной оптимизации развития СТСР реализованы следующие основные принципы описания территориальных, технологических и экологических связей и условий:

– балансовые условия едины для всех энергетических объектов (узлов, источников теплоснабжения), производящих тепловую энергию;

– модель должна быть способна учитывать развитие системы топливоснабжения;

– для описания в модели экологических условий вводятся переменные, определяющие объемы выбросов вредных веществ при сжигании различных видов органического топлива (при этом в данной работе внимание уделено главным образом газообразному топливу как наиболее экологичному и технологичному).

На рис. 1 приведена структура математической модели оптимизации развития СТСР.

На адекватность экономико-математических моделей, и, следовательно, на надежность полученных с их применением прогнозов существенное отрицательное влияние оказывают неполнота и неточность имеющейся исходной информации [2–4]. На стадии выполнения технико-экономических обоснований вариантов развития СТСР ряд исходных показателей принимается с некоторыми допущениями или характеризуется некоторой неопределенностью. Под неопределенностью, в данном случае, понимается неполнота или неточность информации об условиях реализации проекта, в том числе о связанных с ним затратах и результатах.

Для учета фактора неопределенности при оценке эффективности проекта в соответствии предлагается метод проверки его устойчивости (чувствительности проекта к изменению внешних факторов) [6, 10, 11]. Он предусматривает разработку сценариев реализации проекта в наиболее вероятных или наиболее «опасных» условиях.

Системный подход позволяет учесть все существенные моменты изучаемой проблемы, в том числе плохо формализуемые, анализировать все возможные воздействия на изучаемый объект с целью выбора наиболее эффективного (оптимального) решения. С целью поиска оптимального решения в данной работе предлагается применить экстремально-вариантный метод. В этом выборе непосредственно участвует лицо, принимающее решение (ЛПР). Такой подход находит свое практическое воплощение в создании человеко-машинных имитационных систем принятия решений.

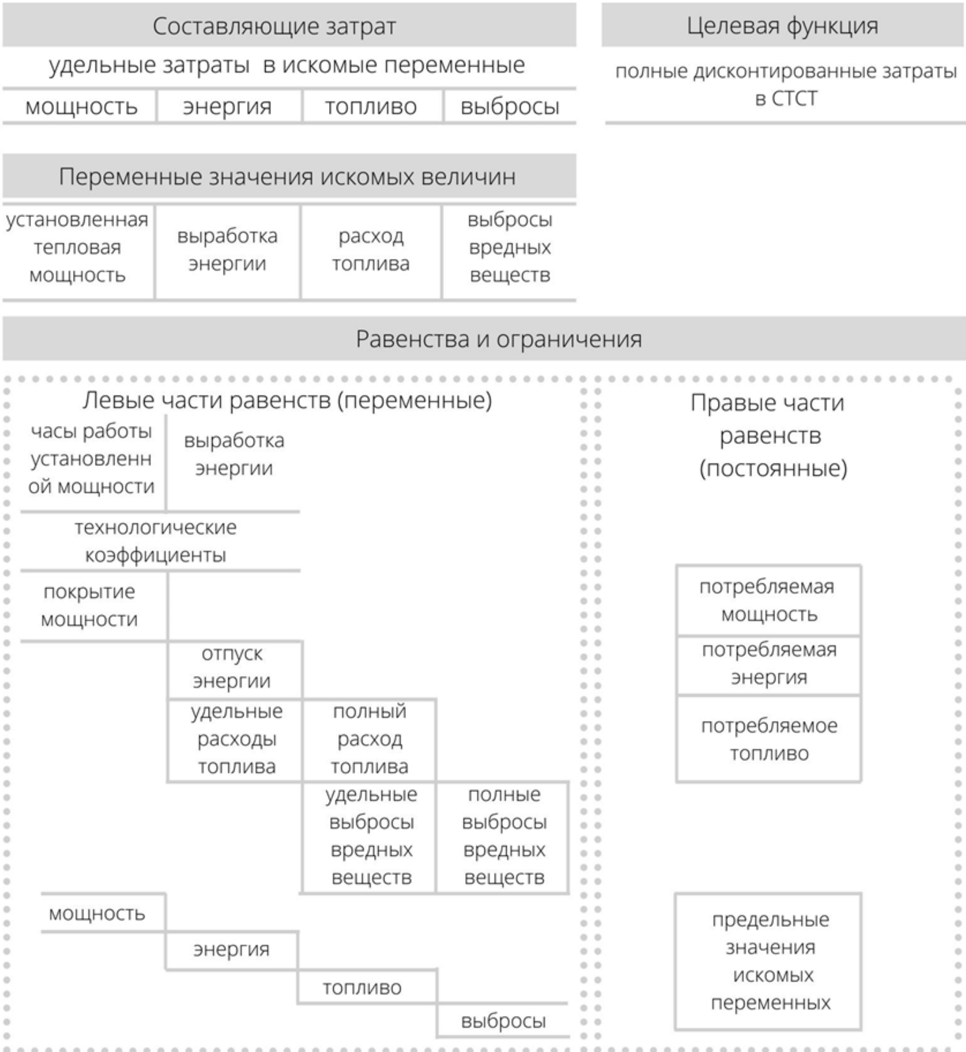



*Рис. 1 Структура математической модели оптимизации развития СТСР*

## Заключение

Таким образом, в результате проведенных исследований обоснована процедура разработки и выбора эффективного варианта развития системы теплоснабжения районов как последовательность следующих этапов: постановка проблемы; выделение системы исследования; формирование совокупности факторов, характеризующих состояние и развитие выделенной системы; разработка экономико-математической модели СТСР; формирование информационной базы (базы данных) решения проблемы; разработка программы расчетов на ЭВМ; проведение многовариантных машинных расчетов; многокритериальная оценка вариантов решений и выбор наилучшего (оптимального).

## Литература

1. *Збараз Л. И., Павлова В. Г.* Математическое моделирование и оптимизация работы тепловых сетей с учётом тепловых потерь // Вісник ПДАБА. – 2016. – №8 (221).

2. *Карев Д. С., Мельников В. М.* Математическое моделирование тепловых сетей закрытых систем централизованного теплоснабжения // Вестник МГСУ. – 2011. – № 7.

3. *Penkovskii A. V., Stennikov V. A.* Mathematical Modeling of the Heat Energy Market on a Single Heat Supplier Basis // Thermal Engineering. – 2018. – V.65, No.7. – P. 443–452. DOI: 10.1134/S0040601518070078

4. Development and experimental verification of the mathematical model of thermal inertia for a branched heat supply system (naslov ne postoji na srpskom)/Batukhtin Andrey, Batukhtina Irina, Bass Maxim, Batukhtin Sergey, Kobylkin Mihail, Baranovskaya Marina, Baranovskaya Alena Journal of Applied Engineering Science. – 2019. – V. 17, br. 3. – P. 413–424.

5. *Глухов С. В., Чичерин С. В.* Методика оптимизации распределительной тепловой сети // Вестник ЧГУ. – 2017. – № 3.

6. *Жак С. В., Мирская С. Ю.* Системный анализ, система моделей и многокритериальные задачи в экономике // Системный анализ в экономике. Материалы 2 межвузовской конференции. – Таганрог, 2001. – С. 20–25.

7. *Сидельников В. И.* Методология построения и анализа математических моделей систем теплоснабжения: дис. д-ра технических наук: 05.13.18 / Сидельников Владимир Иванович; РГПУ-Ростов-на-Дону, 2004. – 286 с.

8. *Сотникова О. А.* Разработка методологических основ комплексного анализа и многоцелевой оптимизации систем теплоснабжения: дис. д-ра технических наук:05.23.03 / Сотникова Ольга Анатольевна; ВГАСА-Воронеж, 2000. – 463 с.

9. *Маркина М. В.* Многокритериальные задачи оптимизации в экономике // Вестник ННГУ. – 2014. – №4-1.

10. *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 144 с.

11. *Винокуров, А. Ф.* Ранжирование и выбор наиболее важных критериев для решения многокритериальной задачи / А. Ф. Винокуров, А. Ю. Машуров, А. И. Левочко. – Текст : непосредственный // Молодой ученый. – 2019. – № 17 (255). – С. 8–13.

12. Исследование операций в экономике : учебник для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ;под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 438 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

13. Принципы многоальтернативности в управлении тепловыми процессами / Подвальный С. Л., Васильев Е. М. // В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016). Сборник трудов IX международной конференции. – 2016. – С. 274–277.

УДК 681.5

# ДЕМПФИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ СРЕДСТВАМИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Е. А. Сердечная**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Работа посвящена проблеме демпфирования систем с дифференцирующим наблюдателем, использование которого приводит к колебательности регулируемой величины при отработке ступенчатых воздействий. Предложен метод решения этой проблемы, основанный на синтезе модального регулятора таким образом, чтобы собственные значения характеристической матрицы замкнутой части системы компенсировали нули наблюдателя. Представлен числовой пример, подтверждающий эффективность предложенного метода.

**Ключевые слова:** Модальный регулятор, следящая система, наблюдатель.

## Введение

Для повышения точности следящих систем широко используются модели задающих воздействий [1]. Примерами таких моделей могут служить так называемые дифференцирующие наблюдатели, формирующие производные сигнала задания [1, 2]. Применение таких наблюдателей для обеспечения точности отработки входных сигналов приводит, как правило, к появлению колебаний в переходных процессах системы, и при синтезе систем автоматического регулирования возникает попутная задача демпфирования этих колебаний [2–4]. При этом существенной особенностью синтеза является необходимость совместного обеспечения показателей точности и качества переходных процессов. Однако практическая возможность реализации упомянутой особенности, как будет показана ниже, не является очевидной. В данной работе рассмотрено решение указанной задачи средствами модального управления.

## 1.Формулировка проблемы

Рассмотрим объект:

$$y^{(n)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u; \quad m < n, \tag{1}$$

где $u$ — управляющее воздействие, $y$ — регулируемая величина, $a_0,\ldots,a_{n-1}$, $b_0,\ldots,b_m$ — постоянные коэффициенты.

В результате построения модального регулятора уравнение замкнутой системы примет вид:

$$y^{(n)} + \ldots + a_{1,\text{м}}\dot{y} + a_{0,\text{м}} y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1\dot{u} + b_0 u, \tag{2}$$

в котором коэффициенты $a_{0,\text{м}},\ldots,a_{n-1,\text{м}}$ определяют собою желаемое расположение $n$ корней характеристического полинома системы. В общем случае можно принять, что некоторая часть $S_1$ этих корней формирует требуемый характер переходного процесса и время регулирования, другая часть $S_2$ используется для компенсации доминирующих нулей полинома $b_m u^{(m)} + \ldots + b_1\dot{u} + b_0 u$, а оставшиеся $|S|$ свободных корней ($|S| = n - |S_1| - |S_2|$) могут быть расположены на достаточном удалении от $S_1$ и $S_2$ так, чтобы корни $S$ не оказывали существенного влияния на показатели качества переходного процесса.

Допустим теперь, что в системе реализован наблюдатель первой производной задающего воздействия, т. е. в правой части уравнения (2) появляется множитель $c_1 s + c_0 = a_{1,\text{м}} s + a_{0,\text{м}}$. Если нуль $(-c_0 / c_1)$ окажется доминирующим по отношению к полюсам замкнутой системы, то при отработке ступенчатого входного воздействия будет возникать колебательность регулируемой величины $y(t)$. Для устранения колебательности необходимо скомпенсировать нуль $(-c_0 / c_1)$, т. е. ввести дополнительный полюс $s_3 = (-c_0 / c_1)$ в желаемый полином системы.

При этом возникает неопределённость задачи синтеза следящей системы: для построения модального регулятора нужно знать параметры канала задания $c_1$ и $c_0$, а для построения канала задания нужно знать характеристический полином замкнутой системы: в данном примере — два младших коэффициента $a_{1,\text{м}}$ и $a_{0,\text{м}}$, то есть знать параметры регулятора.

Требуется найти метод разрешения указанной неопределенности.

## 2. Предлагаемый способ решения

Используя типовую методику синтеза модального регулятора по желаемому характеристическому полиному, расположим систему его корней следующим образом:

$$\begin{gathered} s_3 = -\frac{c_0}{c_1};\ s_3 \notin S; \\ \max(S) << \min(S_1, S_2, s_3); \\ |S| + |S_1| + |S_2| + |s_3| = n. \end{gathered} \tag{3}$$

Выполнение условия (3) гарантирует:

компенсацию нуля наблюдателя полюсом $s_3$ замкнутой части системы;

компенсацию доминирующих нулей объекта $(S_2)$;

монотонный характер переходного процесса с заданным временем регулирования $(S_1)$;

удалённость незначимых корней $S$ от группы доминирующих полюсов $S_1$, $S_2$, $s_3$.

В результате перерегулирование в системе будет устранено и переходный процесс примет желаемый характер с сохранением показателей точности

## 3. Проверка работоспособности метода

В качестве примера возьмём объект пятого порядка (электропривод с упругой связью):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + Nu; \\ y &= Ax, \end{aligned} \tag{4}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 25000 & -25000 & -50000 & 1800 & 0 \\ -22 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 & -1600 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -660 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,019 & \mathbf{0} \end{bmatrix};\quad d = \begin{bmatrix} 0,019 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix};\quad N = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 26000 \end{bmatrix},$$

где $d$ — матрица датчиков; $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^{\text{T}}$ — координаты состояния.

Введём в систему модальный регулятор $R = [r_1\ r_2\ r_3\ r_4\ r_5]$. Характеристический полином системы $P(s, R)$ будет иметь вид:

$$P(s,R) = \left| sE - B + NRd \right| = s^5 + a_{4,\text{м}}(R)s^4 + \ldots + a_{1,\text{м}}(R)s + a_{0,\text{м}}(R), \tag{5}$$

коэффициенты $a_{i,\text{м}}$ которого зависят от коэффициентов регулятора $R$: $a_{4,\text{м}} = 27264 + 26000 \cdot r_5$; $a_{3,\text{м}} = 5,9 \cdot 10^7 + 130000 \cdot r_4 + 6,917 \cdot 10^8 \cdot r5;\ \ldots$ .

Для желаемого характеристического полинома известны корни: $s_1 = -30$ — из требования ко времени регулирования, $t_{\text{р}} = 0{,}1$ с; $s_2 = -44$ — полюс для компенсации нуля объекта, $s_3 = -0{,}1$ — полюс для компенсации нуля наблюдателя, $s_4 = -300$ — произвольный удалённый корень, $s_5 = s_{\text{об}} = -24944{,}48$, где $s_{\text{об}}$ — самый удалённый корень объекта. При указанных условиях желаемый полином получает вид:

$$T(s) = s^5 + 2{,}53 \cdot 10^4\ s^4 + 9{,}35 \cdot 10^6\ s^3 + 5{,}88 \cdot 10^8\ s^2 + 9{,}93 \cdot 10^9\ s + 9{,}88 \cdot 10^8. \quad (6)$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях $s$ полиномов $P(s, R)$ и $T(s)$, получим систему четырёх уравнений:

$$\begin{gathered} 27264 + 26000\, r_5 = 25318{,}58; \\ \ldots \\ 5{,}9 \cdot 10^7 + 6{,}92 \cdot 10^8 r_5 + 130000\, r_4 = 9{,}36 \cdot 10^6, \end{gathered} \quad (7)$$

Получено решение: $r_1 = 112$; $r_2 = -0{,}14$; $r_3 = -4{,}38$; $r_4 = 16{,}04$; $r_5 = -0{,}075$; при этом $s_3 = -0{,}0999$; $a_{0,\text{м}} = 9{,}88 \cdot 10^8$; $a_{1,\text{м}} = 9{,}93 \cdot 10^9$. Нуль наблюдателя $(-a_{0,\text{м}} / a_{1,\text{м}}) = -0{,}0994$. Корень $s_3$ близок к нулю наблюдателя и выполняет функцию компенсации, что показано на рис. 1.

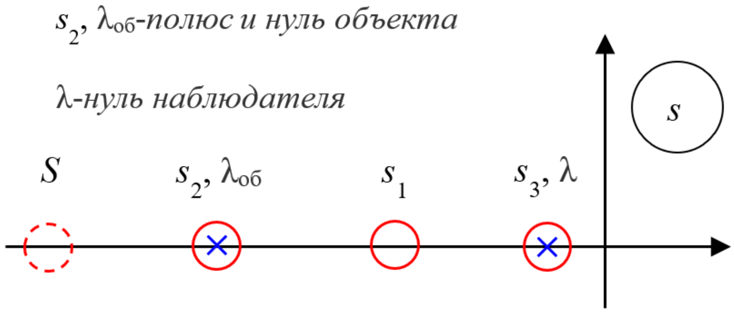



*Рис. 1. Полученное расположение нулей и полюсов системы*

На рис. 2 показаны переходные процессы в системе, синтезированной с выполнением условия компенсации и без этого условия.

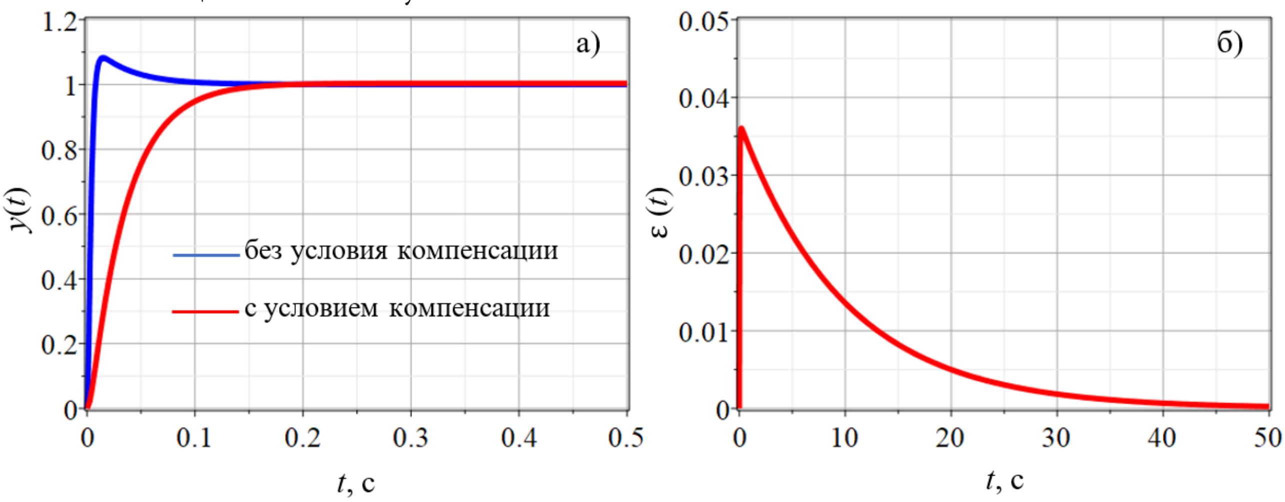



*Рис. 2. а) Переходные процессы при ступенчатом задающем воздействии,*
*б) график ошибки при скоростном воздействии*

При анализе рис. 2а, видно, что в результате применения предложенного метода синтеза происходит практически полная компенсация нуля наблюдателя корнем замкнутой части системы и, вследствие этого, колебательность в системе при отработке ступенчатого задающего воздействия снижается в 25 раз (с 8 % до 0,34 %). Вместе с этим обеспечиваются требуемые показатели качества переходного процесса: заданное время регулирования и нулевая установившаяся ошибка при постоянном и линейно нарастающем воздействии, т. е. в системе реализован второй порядок астатизма без использования интеграторов, рис. 2б. Полученные результаты подтверждают эффективность предложенного метода.

### Заключение

Синтез систем управления с высоким порядком астатизма сталкивается с проблемой колебательности регулируемой величины, обусловленной использованием в таких системах дифференцирующего наблюдателя сигнала задания. Для решения этой проблемы предложена компенсация нулей наблюдателя путём синтеза модального управления, обеспечивающего такое расположение системы полюсов замкнутой части системы, которое отвечает совместному выполнению требований к характеристикам переходного процесса и к показателям её точности.

### Литература

1. *Никифоров, В. О.* Следящая система комбинированного управления / В. О. Никифоров, Г. В. Лукьянова // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2011. – № 6 (76). – С. 39–43.

2. *Ермоленко, А. И.* Повышение динамической точности цифровых следящих систем АСУТП с помощью комбинированного управления. Ч. 1. Низкий темп вычисления рассогласования / А. И. Ермоленко, А. И. Коршунов// Изв. вузов. Приборостроение. – 2018. –Т. 61, № 4. – С. 309–316.

3. *Коршунов, А. И.* Коррекция свойств системы автоматического управления путём преобразования задающего воздействия / А. И. Коршунов// Изв. вузов. Приборостроение. – 2016. – Т. 59, № 10. – С. 813–821.

4. *Ryadchikov, I.* Differentiator-based velocity observer with sensor bias estimation: an inverted pendulum case study / I. Ryadchikov, S. Aranovskiy, E. Nikulchev, J. Wang, D. Sokolov// IFAC-PapersOnLine. – 2019. – V. 52, No 16. – P. 436–441.

УДК 007.51

# АДАПТИВНЫЙ БЕГОВОЙ ТРЕНАЖЕРНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И РЕАБИЛИТАЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ

**А. А. Сиухин[1], С. В. Карпушкин[1], А.В. Калач[1,2]**

*1Тамбовский государственный технический университет*
*[2]Воронежский институт ФСИН России*

**Аннотация.** Рассмотрены вопросы создания бегового тренажерного комплекса для промышленных, медицинских и спортивных организаций, обеспечивающего минимальное программно-аппаратное запаздывание системы автоматического управления. Предложена структурная схема, в которой выделены основные программно-аппаратные блоки. Выявлены недостатки существующего программно-аппаратного обеспечения и предложены методы минимизации их влияния, в том числе, использование исторических данных для формирования шаблонов поведения пользователя.
**Ключевые слова:** беговой тренажер, системы автоматического управления, системный анализ, адаптивное управление, прогнозирование, запаздывание, прототип.

## Введение

Использование беговых тренажерных комплексов как с автоматическим, так и с ручным управлением, актуально для промышленности, медицины и спорта. Существенным недостатком используемых аппаратов является запаздывание между считыванием сигнала пользователя и реакцией объекта управления. Предлагается реализовать адаптивную систему автоматического управления с компенсацией запаздывания, необходимой для адекватной подготовки и реабилитации пользователей. Это позволит осуществить управление аппаратной частью тренажера в реальном времени.

## 1. Особенности использования беговых тренажеров

Использование беговых тренажерных систем в промышленности связано с отработкой навыков перемещения на большие расстояния и оперативной эвакуации. В медицине — для восстановления мышечной памяти и реабилитации после травм опорно-двигательного аппарата. В спорте — для развития у пользователей навыков правильного дыхания при ходьбе и беге, укрепления сердечно-сосудистой системы. В каждой из областей используются различные модификации беговых тренажеров с необходимыми ограничениями и дополнениями. Минимальные ограничения присутствуют у спортивного бегового тренажера, обеспечивающего свободное перемещение пользователя с самостоятельно выбранной скоростью. Для медицинских тренажеров характерны повышенные требования безопасности. Они ограничивают свободу перемещения пользователя с помощью подвесных страховочных систем или экзоскелетов, способствующих равномерному распределению нагрузки при ходьбе, а также существенного снижения максимальной скорости бегового полотна по сравнению со спортивными. Промышленные тренажёры могут использоваться со средствами визуального сопровождения, такими как шлемы виртуальной реальности, блокирующие восприятие пользователем окружающей реальности. Пользователь не может даже держаться за поручни, а единственным внешним влиянием, на которое он может ориентироваться, является скорость бегового полотна. Важным отличием медицинских и промышленных тренажеров является адаптация скорости бегового полотна под скорость пользователя [1–4].

## 2. Алгоритм адаптации скорости

Алгоритм адаптации скорости бегового полотна, используемый в современных тренажерных комплексах, основан на отклонении координат пользователя от нулевой точки бегового полотна. Координаты пользователя рассчитываются от фиксированной точки, расположенной, например, на страховочном подвесе, а нулевая точка бегового полотна — это пространственная метка, находящаяся на фиксированном расстоянии от стационарного объекта, например, поручня или задней стенки тренажера. Отклонение пользователя от нулевой точки рассчитывается системой обработки информациии передается системе автоматического управления (САУ) для формирования реакции бегового полотна. Величина реакции по модулю равна скорости пользователя, но противоположна по направлению.

Подобные подходы к созданию управляющего воздействия САУ приемлемы при равномерной ходьбе пользователя, когда в течение больших периодов времени скорость ходьбы пользователя либо не изменяется, либо ее изменения являются плавными. При этом беговое полотно также движется с минимальными изменениями скорости. Такой подход используется при реабилитации, когда пользователь может двигаться с постоянной скоростью, держась за поручни.

САУ промышленных беговых тренажеров, использующих такой способ управления скоростью, реагирует на изменение скорости пользователя с существенным запаздыванием, что препятствует погружению в виртуальное пространство [5, 6].

## 3. Классический подход к управлению беговыми тренажерами

Рассмотрим классическую схему работы бегового тренажера с системой автоматического управления (рис. 1). Вертикальная ось — скорость (м/с), горизонтальная — время (с), синяя кривая — скорость пользователя ($V_U(t)$), оранжевая кривая — скорость бегового полотна ($V_B(t)$).

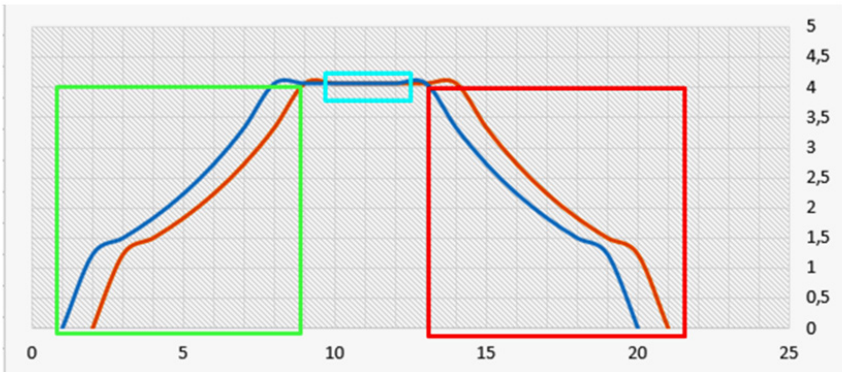



*Рис. 1. График функционирования беговой платформы с запаздыванием*

На графике, рис. 1, можно выделить 3 основных фрагмента:

1) набор скорости пользователя и бегового полотна с момента остановки до постоянной скорости (отмечен зеленой рамкой):

$$\begin{cases} V_U(t) > V_B(t) \\ V_U{}'(t) > 0 \end{cases}, \tag{1}$$

2) движение пользователя с постоянной, удобной ему скоростью, скорость бегового полотна равна скорости пользователя(отмечен голубой рамкой):

$$\begin{cases} V_U(t) = V_B(t) \\ V_U{}'(t) \approx 0 \end{cases}, \tag{2}$$

3) снижение скорости пользователя до остановки (отмечен красной рамкой):

$$\begin{cases} V_U(t) < V_B(t) \\ V_U{}'(t) < 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Расстояние между графиками $V_U(t)$ и $V_B(t)$ представляет собой программно-аппаратное запаздывание $(\tau)$ САУ при изменении скорости пользователя: на горизонтальном участке графики практически совпадают $(V_U'(t) \approx 0)$; на участках $V_U'(t) \neq 0$ расстояние между ними по оси времени равно $\tau$.

При значительном запаздывании $\tau$ использование такого тренажера практически невозможно по причине неадекватных скачков скоростей полотна, которые влияют на проприоцептивные ощущения и вестибулярный аппарат пользователя. При блокировке восприятия пользователем окружающей реальности его вестибулярный аппарат не сможет адекватно воспринять неестественное изменение скорости бегового полотна и будет сконцентрирован не на выполнении задания, а только на удержании равновесия [5–8].

Для решения проблемы запаздывания САУ, препятствующего естественному перемещению пользователя, требуется разработка системы адаптивного прогнозирования положения пользователя относительно бегового полотна [3, 4].

## 4. Постановка задачи

Целью исследования является минимизация программно-аппаратного запаздывания системы автоматического управления:

$$\tau \to \min. \qquad (4)$$

Для достижения цели используется прогнозирование положения пользователя через заданный промежуток времени $\theta \geq \tau$. Для прогнозирования скорости пользователя $V_U(\theta)$ используются исторические данные (шаблоны) о моделях его поведения:

$$\bigcup_{t=0}^{\tau} V_U(t) \to V_U(\theta) \mid \theta > \tau. \qquad (5)$$

## 5. Прототип

Предлагаемая структурная схема прототипа беговой платформы представлена на рис. 2.

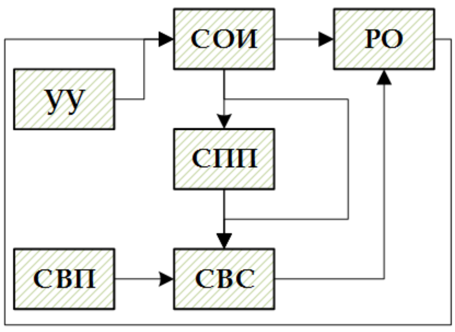



*Рис. 2. Структурная схема беговой платформы*

Беговая платформа (БП) разделена на следующие системы, состоящие из программно-аппаратных блоков, модульная разработка и модернизация которых осуществлялась согласно ограничениям на область применения [9]:

УУ — система, объединяющая несколько управляющих устройств, посредством которых осуществляется контроль работы БП и изменение режима функционирования с учетом ограничений;

СОИ — система обработки информации, осуществляющая сборку, обработку и синхронизацию информации о командах, получаемых от УУ и автоматических блоков БП. СОИ осуществляет контроль порядка выполнения управляющих воздействий согласно времени получения, задает порядок выполнения команд исполнительными элементами, а также дублирует их на все УУ;

СПП — система процесса подготовки, которая осуществляет хранение и подключение моделей управления БП, подключение моделей визуального сопровождения, а также шаблонов действий пользователя;

СВП – система визуального позиционирования, осуществляющая обработку данных, полученных с камер позиционирования (потоковую обработку видеопотока для снижения нагрузки на СВС);

СВС — система вычисления смещения пользователя относительно нулевой точки бегового полотна тренажера. Система выбирает шаблон максимально реалистичного перемещения пользователя по рабочей области БП с учетом инертности системы и определяет требуемое смещение исполнительных элементов, осуществляет контроль текущего положения и создает управляющее воздействие с учетом ограничений, внесенных с пультов управления, и требований безопасности;

РО — рабочая область беговой платформы, дополненная устройствами контроля изменения положения исполнительных элементов, которая определяет величину управляющих воздействий на силовую часть БП. Расчет изменения положения осуществляется с учетом ограничений системы и требований безопасности использования оборудования.

Согласно представленной структурной схеме, информация о пользователе поступает с СВП и далее анализируется, а управляющее воздействие на беговое полотно создает РО. Представленные структурные элементы являются программно-аппаратными компонентами, изменение параметров в каждом из них создает соответствующее запаздывание, поэтому запаздывание системы:

$$\tau = \sum_{i=1}^{6} \tau_i, \qquad (6)$$

где $i$ — номер структурного компонента (1 — УУ, 2 — СОИ, 3 — СПП, 4 — СВП, 5 — СВС, 6 — РО). Численное значение $\tau_i$ является индивидуальным для каждого комплекта программно-аппаратного обеспечения, и для расчетов необходимо использовать данные, полученные экспериментально.

В ходе исследований был создан прототип БП (рис. 3), согласно представленной структурной схеме. Этот прототип является аналогом бегового тренажера, используемого в промышленности.

С его помощью экспериментально доказано наличие программно-аппаратного запаздывания $\tau$ даже при минимальных вычислительных процессах. Наибольшее влияние на величину $\tau$ оказывает действие исполнительных элементов. Это связано с изменениями мгновенной скорости пользователей: при начале ходьбы после остановки контрольная точка пользователя приобретает большое ускорение, которое передается в САУ; САУ передает величину ускорения в исполнительный элемент, который не может мгновенно придать ожидаемую скорость беговому полотну. Пока САУ наращивает ускорение бегового полотна, пользователь достигает постоянной скорости. В период, когда пользователь движется с постоянной скоростью, САУ все еще изменяет ускорение. Момент изменения ускорения ощущает вестибулярный аппарат пользователя, что заставляет его концентрироваться на удержании равновесия и замедляться или останавливаться. Беговое полотно по инерции возвращает пользователя в нулевую точку, и САУ передает сигнал остановки исполнительных элементов. Пользователь ощущает остановку, вестибулярный аппарат успокаивается, и пользователь снова начинает процесс перемещения.

*Рис. 3. Прототип беговой платформы*

## 6. Исследования

Экспериментальные исследования показали:

– использование в качестве контрольной точки, метки, расположенной на поясе обучающегося, не позволяют построить не только прогноз [10, 11], но и шаблоны действий, обеспечивающие точную классификацию поведения;

– при большом весе пользователя сила трения, возникающая на приводных валах меньше силы трения, возникающей на рабочей области, т.е. пусковой крутящий момент на валах должен адаптироваться не только исходя из конструкции, но и веса пользователя;

– перемещение пользователя на низкой скорости способствует возникновению проскальзывания компонентов «приводной вал-беговое полотно». Это создает периодические импульсы, ощущаемые пользователем проприоцептивно, что препятствует не только подготовке и реабилитации, но и анализу состояний пользователя;

– для формирования шаблонов поведения пользователя недостаточно использования координат одной точки, расположенной на страховочном поясе.

## 7. Перспективы исследования

Для формирования шаблонов поведения пользователя перспективно использовать костюм захвата движения для виртуальной реальности (рис. 4). Представленный костюм содержит комплект датчиков для определения пространственных координат в трех плоскостях, также автоматически собирает данные об ускорениях и изменениях углов наклона контрольных точек.

Контрольные точки костюма представляют собой датчики, расположенные на ремнях, жестко закрепленых на пользователе. Датчики позволяют сформировать скелет пользователя (рис. 5), для последующего формирования шаблонов поведения. Точками A-N представлены контрольные точки костюма захвата движения. Ребрами, соединяющими точки – кости скелета пользователя. Для формирования костей и зависимостей между контрольными точками, оправдано использование нейронных сетей, как и для последующего формирования и классификации шаблонов поведения пользователей.

*Рис. 4. Костюм захвата движения*

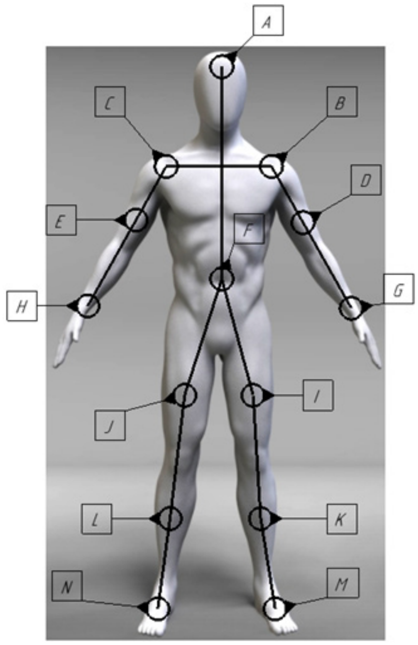



*Рис. 5. Скелет пользователя*

## Заключение

Создание системы автоматического управления беговой платформой — сложный процесс, требующий большого количества исследований человеко-машинных систем, учета не только точности исполнения действий автоматикой, но и индивидуальных действий разных пользователей. При взаимодействиях с беговыми платформами, в которых пользователь прямо влияет на систему, а система косвенно влияет на пользователя, необходимо учитывать не только влияние и реакции в текущий момент времени, но и программно-аппаратное запаздывание компонентов, а также влияние сил инерции и свободу действий пользователя (возмущающее воздействие, помехи). Использование исторических данных перемещения пользователя по беговому полотну позволит классифицировать модель поведения пользователя и рассмотреть его динамику и даже сформировать прогноз. Для повышения точности прогноза, необходимо учитывать не только движение страховочного пояса (центра масс) пользователя, но и динамику движения его конечностей.

## Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта: договор № 20-37-90041\20 от 20.08.2020

## Литература

1. *Schofield, D.* The use of virtual simulators for emergency response training in the mining industry / D. Schofield // Journal of Emergency Management. – 2010. – V. 8, No. 2. – P. 45–56.

2. *Трухин, А. В.* Анализ существующих в РФ тренажерно-обучающих систем / А. В. Трухин // Открытое и дистанционное образование. – 2008. – №. 1. – С. 32–39.

3. *Garrett, M.* Indirect measures of learning transfer between real and virtual environments / M. Garrett, M. McMahon //Australasian Journal of Educational Technology. – 2013. – V. 29, No. 6.

4. *Lin, F.* Developing virtual environments for industrial training / F. Lin //Information Sciences. – 2002. – V. 140, No. 1-2. – P. 153–170.

5. *Frissen, I.* Enabling unconstrained omnidirectional walking through virtual environments: an overview of the CyberWalk project / I. Frissen, J. L. Campos, M. Sreenivasa, M. O. Ernst // Human walking in virtual environments. –2013. – P. 113–144.

6. *Fung, J.* A treadmill and motion coupled virtual reality system for gait training post-stroke / J. Fung, C. L. Richards, F. Malouin, B. J. McFadyen, A. Lamontagne // Cyber Psychology & behavior. –2006. – V. 9, No. 2. – P. 157–162.

7. *Obukhov, A. D.* Algorithm for Data Collection and Processing about Learning Process on Training Complexes / A. D.Obukhov, A. O. Sidorchuk, A. A. Arkhipov// In 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). – 2019. – P. 1–5.

8. *Aminian, K.* Estimation of speed and incline of walking using neural network / K.Aminian, P.Robert, E.Jequier, Y. Schutz // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. –1995. – V. 44, No. 3. – P. 743–746.

9. Structural model of software and hardware platform for the training complex based on a controlled treadmill / S. Karpushkin, D. Dedov, A. Siukhin et al.//International Multidisciplinary Scientific GeoConference: SGEM. – 2019. – V. 19, No. 1.3. – P. 613–620.

10. Modeling of the learning process in adaptive training complexes / M. Krasnyanskiy, A. Obukhov, D. Dedov et al. //Journal of Applied Engineering Science. – 2018. – V. 16, No. 4. – P. 487–493.

11. *Obukhov A. D.* Neural network architecture of information systems / A. D. Obukhov, M. N. Krasnyansky // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyeNauki. – 2019. – V. 29, No. 3. – P. 438–455.

УДК 519.81

# НОВЫЕ ПОДХОДЫ К МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОМУ ОЦЕНИВАНИЮ АЛЬТЕРНАТИВ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

**О. А. Соколова[1], Д. Ю. Чураков[2], А. К. Беляев[2], А. В. Калач[3], И. Н. Татаркин[4]**

*[1]Воронежский государственный технический университет*
*[2]НИИИТ ФСИН России*
*[3]Воронежский институт ФСИН России*
*[4]Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России*

**Аннотация.** В статье приводятся математические модели получения интегральной оценки альтернатив при принятии решений в условиях определенности. Разработанные модели основываются на теории нечетких множеств и на теории латентных переменных. Описаны вычислительные эксперименты, которые обосновывают адекватность полученных оценок и их качество.
**Ключевые слова:** принятие решений, многокритериальное оценивание, альтернативы, критерии, нечеткие множества, латентные переменные.

## Введение

В любой сфере профессиональной деятельности, а особенно в сфере менеджмента и управления, ключевую роль играет качество принятых решений. Именно от процесса принятия решений во многом зависит результат профессиональной деятельности лица принимающего решения (ЛПР), и как следствие, эффективность работы управляемого им подразделения.

Принятие решений — это процесс, с одной стороны крайне важный и необходимый для каждого человека, а с другой это очень сложный процесс, который в большинстве случаев зависит от множества внешних факторов и внутренних условий. Активно развивающиеся в настоящее время системы поддержки принятия решений, основанные на технологиях искусственного интеллекта, позволяют проводить автоматизацию принятия решений оказывая существенную помощь ЛПР.

Однако, данные технологии требуют разработки новых и совершенствованию имеющихся моделей поддержки принятия решений, отражающих реалии функционирования предметной области. Это подчеркивает важность и актуальность любых научных исследований, связанных с разработкой математических моделей в сфере моделирования систем поддержки принятия решений.

## Цели и задачи исследования

Несмотря на важность совершенствования систем поддержки принятия решений, данное направление с точки зрения математического моделирования достаточно сложное, что связано с тем, что на процесс принятия решений обычно оказывает влияние огромное число как внешних, так и внутренних факторов, большинство из которых имеют стохастический характер. Данный факт позволяет сделать заключение о том, что процедура принятия решений является субъективной и вероятностной. Это приводит к тому, что результат от деятельности ЛПР по принятию решений во многом зависит от его личностных характеристик и от степени влияния случайных факторов, воздействующих на этот результат.

Однако, имеется одно направление теории принятия решений, когда результат от принятого решения можно с достаточной точностью рассчитать, когда влияние субъективных и случайных факторов минимизировано или практически отсутствует. Такая ситуация возникает в случаях, когда имеется максимально полная информация об альтернативах и критериях, что позволяет получать достаточно объективную оценку привлекательности альтернатив и выбрать с высокой точностью оптимальную альтернативу. Такую ситуацию называют моделью принятия решений в условиях определенности [1].

Математическая модель принятия решений в условиях определенности имеет ряд требований для ее применимости. Опишем кратко эти требования.

1. Необходимо точно определить цели и задачи принятия решений, выявить конечное множество альтернатив.

2. Выделить конечное число оценочных критериев, описать методы получения оценок альтернатив по этим критериям с точки зрения их привлекательности для ЛПР. С учетом того, что критерии могут быть не только количественными, привлекательность альтернатив по которым может быть объективно измерена, но и качественными, атрибутивными и иными, не позволяющими получать объективные оценки, то для таких критериев должны быть прописаны однозначные процедуры получения числовых оценок по заданной шкале.

3. Должны иметься числовые оценки важностей или весов для каждого критерия.

4. Необходимо на основании частных многокритериальных оценок, описать процедуру получения числовой интегральной оценки привлекательности всех альтернатив с учетом весов, что позволит ЛПР при принятии решений выбрать оптимальную альтернативу.

Модель поддержки принятия решений в условиях определенности позволит объективно выбрать ЛПР оптимальную альтернативу, однако и здесь существуют проблемы в практическом использовании модели, которые связаны с субъективности и неопределенности.

Первая такая проблема связана с получением количественных оценок альтернатив по качественным критериям. Обычно эта проблема решается методами экспертного оценивания, которые сегодня интенсивно развиваются.

Вторая проблема заключается в неоднозначности получения оценок интегрального показателя привлекательности альтернативы, который принято называть функцией полезности [1, 2]. Функция полезности альтернатив является субъективной, что связано с особенностью математических методов обработки частных многокритериальных оценок альтернатив.

На сегодняшний день на практике применяется метод получения интегральных оценок привлекательности альтернатив, который принято называть аддитивным. Несмотря на свою простоту, этот метод имеет ряд недостатков.

В данной работе будут рассмотрены эти недостатки и будут предложены математические модели, позволяющие в той или иной степени эти недостатки устранить. Кроме того, будут описаны вычислительные эксперименты, которые позволять обосновать адекватность полученных интегральных оценок альтернатив и количественных оценок по качественным критериям.

Таким образом, целью данной работы является разработка математических методов и моделей, позволяющих получать объективные интегральные оценки привлекательности альтернатив для ЛПР при многокритериальном оценивании, а также получать количественные оценки альтернатив по качественным критериям.

Для этого, для задачи получении количественных оценок альтернатив по качественным критериям будет использована теория нечетких множеств, а для задачи получения интегрального показателя привлекательности альтернатив — модель Раша оценивания латентных переменных.

## Классический подход к принятию решений в условиях определенности

Рассмотрим сначала классический метод, который традиционно используется при принятии решений в условиях определенности.

Возьмем $n$ альтернатив, обозначим их: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Альтернативы оцениваются по $m$ критериям, которые обозначим как: $K_1, K_2, \ldots K_m$. Вес критериев обозначим через $w_j$. Определим через $U_{ij}$ частную оценку $i$-й альтернативы по критерию $K_j$. Будем считать, что частные оценки альтернатив по критериям могут измеряться по разным шкалам: числовым, дихотомическими, политомическими, атрибутивным или иными, важно то, чтобы они были количественными. Если критерий качественный, то необходимо получить оценки по нему в количественном виде, применяя методы экспертного оценивания [2, 3].

Необходимым условием для определения функций полезности альтернатив является то, чтобы все частные критериальные оценки измерялись по единой шкале. Ввиду этого, с помощью линейных преобразований, полученные оценки $U_{ij}$ необходимо нормировать на единую шкалу.

В качестве такой шкалы обычно выбирают единичную. Можно использовать следующее линейное преобразование измерений $U_{ij}$ к нормализованным оценкам $u_{ij}$ альтернатив:

$$u_{ij} = \begin{cases} \dfrac{U_{ij} - \min\limits_i(U_{ij})}{\max\limits_i(U_{ij}) - \min\limits_i(U_{ij})}, & \text{рост качества;} \\ \dfrac{\max\limits_i(U_{ij}) - U_{ij}}{\max\limits_i(U_{ij}) - \min\limits_i(U_{ij})}, & \text{уменьшение.} \end{cases} \tag{1}$$

В классическом подходе, для каждой альтернативы рассчитывается некоторая функция полезности $F_i = F(u_{ij}, w_j)$, которую можно использовать в качестве интегральной оценки привлекательности альтернатив:

$$F_i = \sum_{j=1}^{m} w_j u_{ij}. \tag{2}$$

Рассчитав функцию полезности (2) ЛПР выбирает ту альтернативу, для которой значение функции наибольшее.

Аддитивный метод часто используют на практике из-за его простоты, однако он имеет ряд недостатков.

1. При нахождении функции полезности не учитывается то, как строго, или наоборот лояльно оцениваются альтернативы по каждому критерию. В частности, когда основная часть альтернатив имеют высокие оценки по критерию и лишь малая часть низкие, что характерно для лояльного критерия, то такой критерий будет давать больший вклад в интегральный показатель альтернативы, чем строгий критерий, для которого основная часть альтернатив имеют низкие оценки.

Отсутствие учета степени влияния критерия на альтернативы может привести к нелинейности функции полезности.

2. В результате нормализации оценок альтернатив, теряется часть первоначальной информации.

3. Оценки альтернатив по качественным и атрибутивным критериям субъективны, так как получены экспертными методами, что вносит субъективность в интегральную оценку альтернативы.

4. Интегральная оценка альтернативы зависит от состава и количества оцениваемых альтернатив и от множества оценочных критериев.

Рассмотрим альтернативные математические методы получения интегральной оценки альтернатив и частных оценок для неколичественных критериев.

### Индикаторный метод, основанный на нечетких множествах

Он позволяет достаточно объективно получать частную оценку альтернативы по качественному критерию по единичной шкале, что позволяет не проводить процедуру нормализации. Идея такого подхода заключается в нахождении для критерия одного или нескольких числовых индикаторов, которые для каждой альтернативы имеют разное значение, при этом от значения индикатора зависит привлекательность альтернативы. Например, оценивая возможные проекты по критерию «привлекательность проекта» в качестве таких индикаторов могут выступать такие объективные параметры, как стоимость проекта, время реализации, рентабельность и тому подобные.

Возьмем сначала случай, когда для некоторого критерия имеется один индикатор, и его значение для $i$-й альтернативы равно $x_i$. Степень влияния индикатора на привлекательность альтернативы можно вычислить с помощью методов теории нечетких множеств.

Предположим, что для $j$-го критерия задано нечеткое множество элементов в категории «привлекательность альтернативы» с функцией принадлежности к этому множеству $\mu_j(x)$. Тогда частный показатель привлекательности альтернативы по критерию $u_{ij}$ можно записать в виде:

$$u_{ij} = \mu_j(x_i). \tag{3}$$

Интегральная оценка альтернативы в соответствии с (2) при этом будет равна:

$$F_i = \sum_{j=1}^{m} w_j \mu_j(x_i). \tag{4}$$

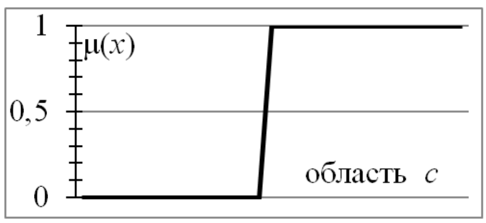
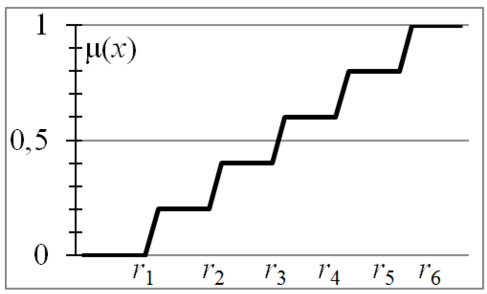
В случае присутствия нескольких индикаторов для критерия, частная оценка рассчитывается с помощью дизъюнкции или усреднения функции принадлежности для каждого индикатора.

Важную роль в предложенной модели оценивания занимает выбор функций принадлежности для описания влияния индикатора на привлекательность.

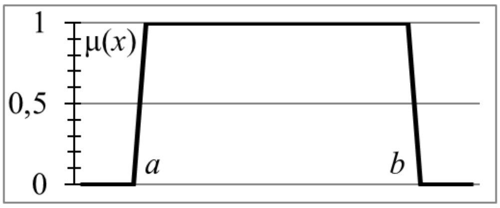
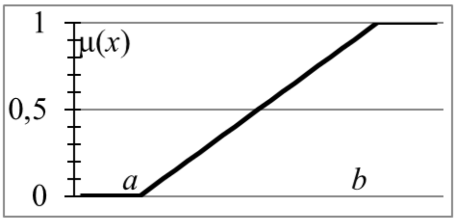
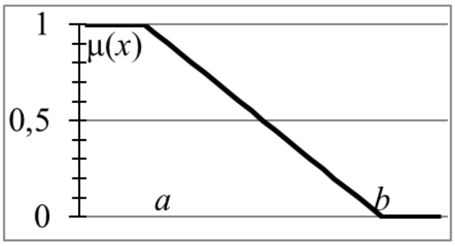
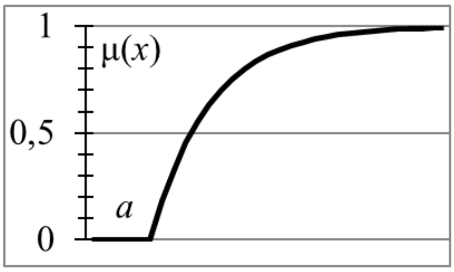
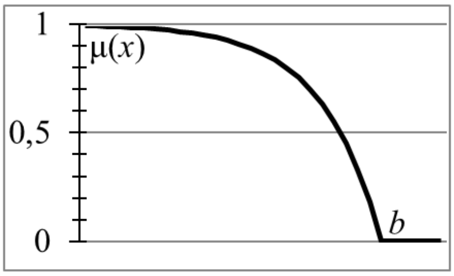
В табл. 1 представлены основные виды возможных функций принадлежности, которые могут быть использованы для оценивания альтернатив.

Таблица 1

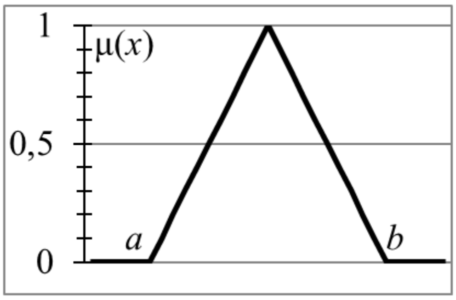
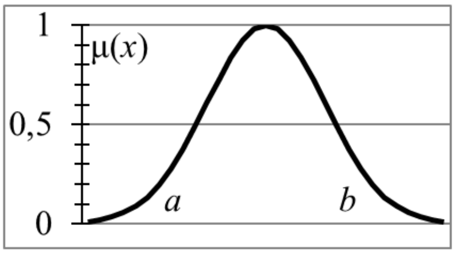
*Типы функций принадлежности $\mu(x)$*

<table>
<tr><td colspan="2">Дихотомическая функция. Имеется атрибут $c$ и привлекательность — элемент четкого множества принадлежит ему, если признак выполняется.</td></tr>
<tr><td>$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = c; \\ 0, & \text{при } x \neq c. \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Политомическая функция. Имеется атрибутивный индикатор, но с $k$, разными по степени соответствия $r(x)$ атрибутами.</td></tr>
<tr><td>$\mu(x) = \varphi(r(x))$,<br>$r(x) = 1, 2, \ldots, k$,<br>$0 \le \varphi(r) \le 1$,<br>При равномерном законе:<br>$\mu(x) = \dfrac{r-1}{k-1}, \; r = 1, 2, \ldots, k.$</td><td>
</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 1

| | |
|---|---|
| Равномерная функция. Индикатор $x$ должен попасть в интервал от $a$ до $b$. | |
| $$\mu(x)=\begin{cases}1,\ \text{при}\ \ x\in[a;b];\\0,\ \text{при}\ \ x\notin[a;b].\end{cases}$$ |  |
| *Функция с оптимальным и минимальным значением*. Индикатор $x$ желательно чтобы был более $b$, но не менее *à*. | |
| $$\mu(x)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ \ x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a},\ \text{при}\ \ x\in[a;b];\\1,\ \text{при}\ \ x>b.\end{cases}$$ |  |
| *Функция с оптимальным и максимальным значением*. Индикатор $x$ должен быть менее $a$, но не более $b$. | |
| $$\mu(x)=\begin{cases}1,\ \text{при}\ \ x<a;\\ \dfrac{b-x}{b-a},\ \text{при}\ \ x\in[a;b];\\0,\ \text{при}\ \ x>b.\end{cases}$$ |  |
| *Прямая показательная функция*. Необходимо чтобы индикатор $x$ был не меньше $a$ и чем больше, тем лучше. | |
| $$\mu(x)=\begin{cases}1-\exp\left(-\dfrac{x-a}{a}\right),\ \ x>a;\\0,\ \ x\le a.\end{cases}$$ |  |
| *Обратная показательная функция*. Необходимо чтобы индикатор $x$ был не больше $b$ и чем меньше, тем лучше. Для практических расчетах наиболее приемлемым является значение параметра $p=2$, хотя для некоторых оценок необходимы меньшие значения параметра $p$. | |
| $$\mu(x)=\begin{cases}1-\exp\left(\dfrac{x-b}{b^{1/p}}\right),\ \ x\le b;\\0,\ \ x>b.\end{cases}$$ |  |

Продолжение таблицы 1

| | |
|---|---|
| Треугольная функция. Индикатор $x$ должен попасть в интервал от $a$ до $b$, но оптимален в середине этого интервала. | |
| $\mu(x)=\begin{cases}1-2\dfrac{\lvert(a+b)/2-x\rvert}{b-a}, \text{ при } x\in[a;b];\\ 0, \text{ при } x\notin[a;b].\end{cases}$ |   |
| Функция, распределенная по закону Гаусса. Те индикаторы, которые формируются в результате воздействия большого числа факторов, представляют из себя случайные величины, которые распределены по нормальному закону. В таком случае вместо треугольной функции лучше использовать функцию, основанное на нормальном законе. | |
| $\mu(x)=\exp\left[-8\dfrac{\left(x-(a+b)/2\right)^2}{(b-a)^2}\right]$ |   |

Описанная здесь методика позволяет объективно получать оценки привлекательности альтернатив по неколичественным критериям, но она не исправляет недостатки, связанные с расчетом интегральной оценки привлекательности альтернатив для ЛПР. Рассмотрим методику получения независимых интегральных оценок привлекательности альтернатив, по линейной интервальной шкале.

Получение интегральных оценок привлекательности альтернатив на основе теории латентных переменных

В основе предлагаемого метода лежит модель Раша оценивания латентных переменных [4]. Основные положения этой модели описаны в работах [5, 6].

Обозначим через $u_{ij}$ нормализованную частную оценку $i$-й альтернативы по $j$-му критерию, которая может быть найдена и индикаторным методом.

Введем латентные переменные следующего вида:

$F_i$ — интегральная оценка степени привлекательности для ЛПР $i$-й альтернативы или функция полезности;

$Q_j$ — латентная характеристика строгости либо лояльности $j$-го критерия, причем чем больше эта характеристика, тем критерий считается более лояльным. В таком подходе вероятность $p_{ij}$ того, что $j$-й критерий даст оценку привлекательности $i$-й альтернативы выше, чем его оценка его лояльности, определяется выражением вида [4]:

$$p_{ij}=\frac{e^{F_i-Q_j}}{1+e^{F_i-Q_j}}. \qquad (5)$$

Для получения числовых оценок латентных переменных $\theta_i$ и $\beta_j$, которые вычисляются на основании модели Раша, будем использовать модификацию этой модели, с математическим ядром основанным на методе наименьших квадратов [7–9]. Согласно этой модели, необходимо решить задачу оптимизации следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_j \left( u_{ij} - \frac{e^{F_i - Q_j}}{1+e^{F_i - Q_j}} \right)^2 \to \min,$$
$$F_i \ge 0;\; Q_j \ge 0;\; i=1,2,\ldots,n;\quad j=1,2,\ldots,m. \qquad (6)$$

Полученный оценки функции принадлежности и выполнимости критериев будут лишены описанных выше недостатков при получении оценок альтернатив по классическому аддитивному методу, и обладать следующими преимуществами, которые следуют из теоретических основ оценок, полученных по модели Раша [10]:

1. Полученные интегральные оценки функции полезности для альтернатив являются их уникальными характеристиками и не будут завесить от количества альтернатив и множества критериев.

2. Интегральные оценки привлекательности альтернатив измеряются по линейной шкале, учитывающей влияние на функцию полезности влияние критериальных оценок.

3. Кроме оценок степени привлекательности для альтернатив, модель позволяет получить оценки степени строгости либо лояльности критериев.

В качестве недостатка метода является то, что вычислить функции полезности аналитически не представляется возможным и для решения оптимизационной задачи (6) необходимо применять численные методы.

Для проверки адекватности предлагаемой модели были проведены вычислительные эксперименты, суть которых заключалась в генерации матриц частных оценок альтернатив для разного количества альтернатив и критериев и сравнения интегральных оценок альтернатив, полученных разными методами. Один из типичных примеров для данных из табл. 2 представлен на рисунке (оценки нормированы на единичную сумму).

Таблица 2

*Данные оценок 8 альтернатив по 7 критериям*

| Альтернатива | Критерий | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $K_5$ | $K_6$ | $K_7$ |
| $A_1$ | 0,872 | 0,961 | 0,746 | 0,655 | 0,075 | 0,242 | 0,199 |
| $A_2$ | 0,182 | 0,408 | 0,613 | 0,310 | 0,175 | 0,609 | 0,127 |
| $A_3$ | 0,404 | 0,199 | 0,482 | 0,288 | 0,127 | 0,531 | 0,318 |
| $A_4$ | 0,688 | 0,291 | 0,414 | 0,304 | 0,295 | 0,732 | 0,543 |
| $A_5$ | 0,877 | 0,149 | 0,266 | 0,495 | 0,292 | 0,431 | 0,436 |
| $A_6$ | 0,155 | 0,634 | 0,806 | 0,813 | 0,522 | 0,499 | 0,541 |
| $A_7$ | 0,473 | 0,054 | 0,268 | 0,094 | 0,058 | 0,418 | 0,329 |
| $A_8$ | 0,927 | 0,247 | 0,123 | 0,209 | 0,964 | 0,331 | 0,178 |
| Вес $\boldsymbol{w_j}$ | 0,345 | 0,582 | 0,149 | 0,831 | 0,379 | 0,765 | 0,535 |

На рисунке видна хорошая согласованность оценок альтернатив, полученных по классическому аддитивному методу и методу, основанному на теории латентных переменных. Похожие результаты были получены и во всех вычислительных экспериментах, коэффициент корреляции между результатами оценивания в среднем составлял 0,98.

Согласованность результата оценивания по предлагаемой модели, с оценками по апробированному аддитивному методу подтверждает адекватность полученных оценок.

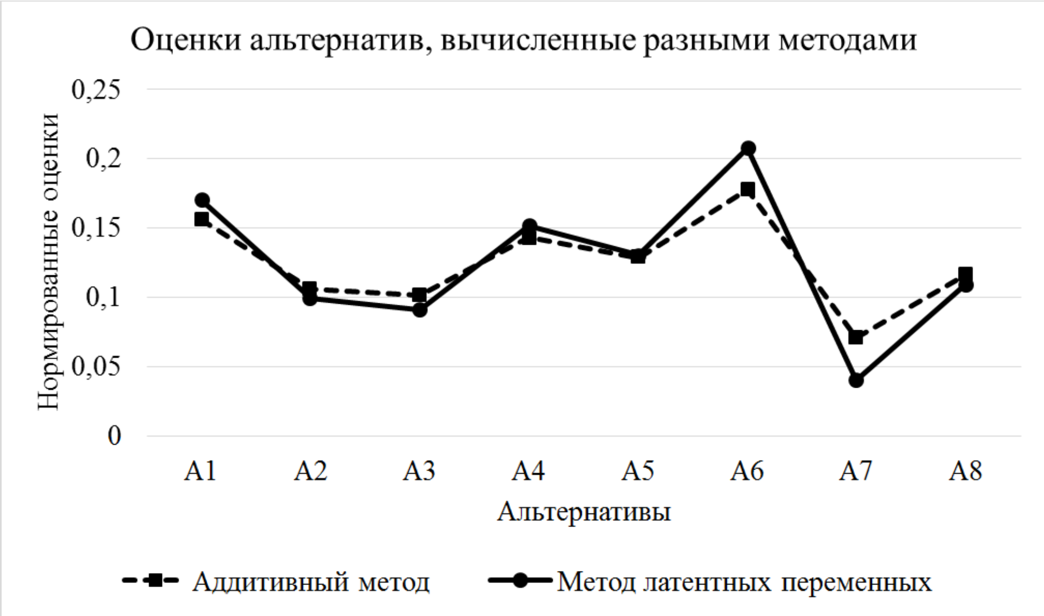



*Рис. Сравнение оценок функций полезности*

## Заключение

Таким образом, в работе описаны новые методы получения оценок альтернатив при принятии решений в условиях определенности. Рассмотрен классический аддитивный метод, отмечены его достоинства и недостатки. Для устранения недостатков предложены два метода:

1. Индикаторный метод, основанный на теории нечетких множеств, который позволяет получать объективные частные оценки привлекательности альтернатив по неколичественным критериям на основании определения одного или группы числовых индикаторов, связанных со степенью привлекательности альтернатив по критерию. Приведены основные типы функций принадлежности альтернатив с точки зрения их привлекательности.
2. Метод расчета функции полезности при многокритериальном оценивании, который можно интерпретировать как интегральную оценку альтернатив. Метод использует модель Раша оценивания латентных переменных, в результате чего удается получать независимые оценки альтернатив по линейной шкале и оценивать свойства критериев.

Вычислительные эксперименты показали, что модели дают адекватные оценки и их можно использовать при принятии решений в различных сферах деятельности и использовать при разработке систем поддержки принятия решений.

## Литература


1. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах: учебник. – М. : Логос, 2000. – 296 с.
2. *Triantaphyllou, E.* Multi-criteria decision making methods: a comparative study. Applied optimization. – 2000. – 44. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. – 320 p.
3. *Ларичев О. И.* Качественные методы принятия решений / О. И. Ларичев, Е. М. Мошкович. – М. : Наука, 1996. – 208 с.
4. *Rasch G.* Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests / G. Rasch. – Copenhagen, Denmark: Danish Institute for Educational Research, 1960. – 160 p.
5. *Маслак А. А.* Измерение латентных переменных в социально-экономических системах: Монография. – Славянск-на-Кубани : Изд. Центр СГПИ, 2006. – 411 с.

6. *Маслак А. А.* Модель Раша оценки латентных переменных и ее свойства. Монография / А. А. Маслак, С. И. Моисеев. – Воронеж : НПЦ «Научная книга», 2016. – 177 с.

7. *Моисеев С. И.* Модель Раша оценки латентных переменных, основанная на методе наименьших квадратов / Моисеев С. И. // Экономика и менеджмент систем управления. Научно-практический журнал. – 2015. – № 2.1 (16). – С. 166–172.

8. *Kuzmenko R. V., Moiseev S. I. and Stepanov L. V.* Method for Measuring of Latent Indicators of Continuous Sets of Original Information Data Proceedings 2nd International Ural Conference on Measurements (UralCon) 211. – 2017.

9. *Barkalov S. A., Moiseev S. I. and Bekirova O. N.* Models for processing expert information, based on the theory of latent variables Proceedings of 2018 11th International Conference Management of Large-Scale System Development, Moscow, MLSD 2018.

10. *Maslak A. A., Moiseev S. I., Osipov S. A. and Pozdnyakov S. A.* Investigation of Measurement Precision of Latent Variable Depending on the Range of Variation of Indicators Set Radio Electronics, Computer Science, Control 1 40. – 2017.

УДК 336.1

# ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА ЗАКАЗЧИКОВ И ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАКАЗОВ ДЛЯ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ КОМПАНИИ

**М. С. Солонкина, Д. К. Солонкин**

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Для компаний, осуществляющих логистическую деятельность, актуальными являются задачи выбора контрагентов и организации процесса обеспечения их заказов. От рационального выполнения данных задач напрямую зависит эффективность, результативность деятельности и конкурентоспособность логистических компаний. Современным, и в тоже время хорошо апробированным инструментом решения подобных задач является математическое моделирование. По своей природе данные задачи носят оптимизационный характер, в качестве критериев оптимизации могут рассматриваться: максимизация прибыли, минимизация издержек, оперативность выполнения заказов и т. д. В рамках данной статьи рассматриваемые задачи формализуются в виде моделей о ранце и трехиндексной транспортной задачи. Для решения полученных оптимизационных моделей разработано соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение.

**Ключевые слова:** логистическая компания, оптимизационная модель, задача о ранце, транспортная задача, метод ветвей и границ, метод потенциалов.

## Введение

Для крупных логистических компаний, занимающихся поставками со своих складов, возникает многофакторная проблема оптимального выбора партнеров, с которыми будут заключены договоры о поставках. Ключевыми факторами являются: величина дохода, который будет получен при сотрудничестве, и размер затрат, которые появятся в процессе работы выбранными предприятиями-партнерами.

С позиции организации работы с партнерами возникает проблема оптимизации плана перевозок. Отсутствие оптимального плана перевозок может привести к нерациональным расходам на доставку, которые не будут покрыты даже самым высоким доходом от продаж.

На рис. 1 приведено схематичное представление работы предприятия-поставщика.

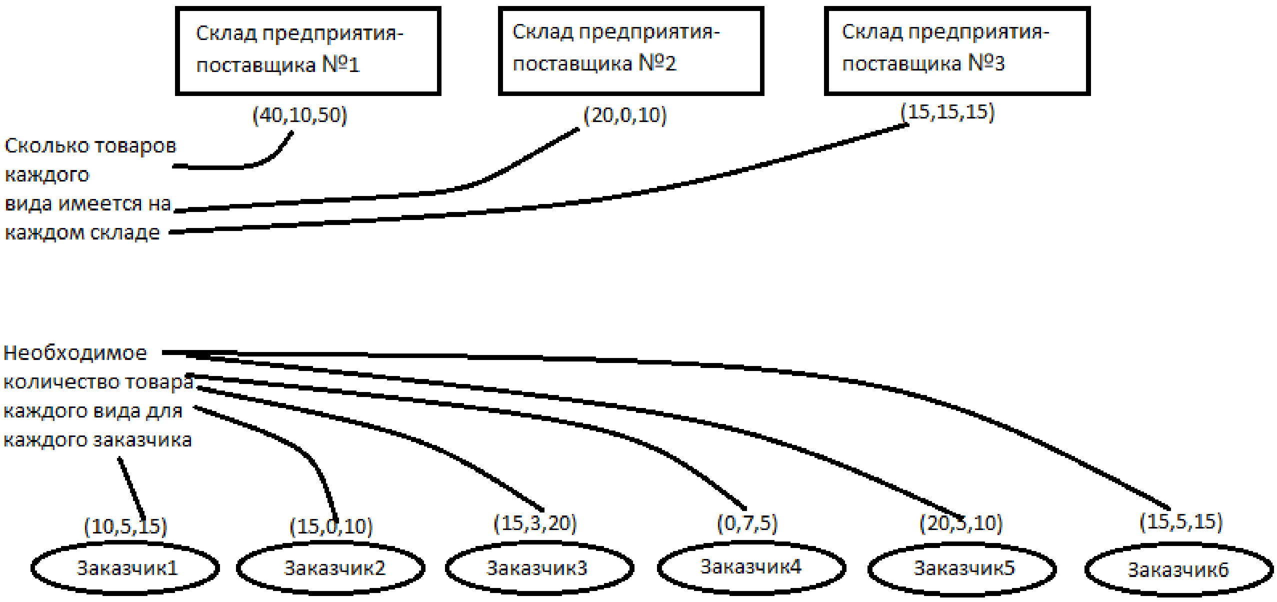



*Рис. 1. Схематичное представление работы предприятия-поставщика*

Задачи оптимального выбора контрагентов и планирования поставок должны решаться комплексно. Рассмотрим возможные варианты решения анализируемых задач, базирующиеся на методах дискретной оптимизации.

### 1. Формализованное описание задач в виде математических моделей

Задача оптимального выбора контрагентов представляет собой классическую задачу о ранце [1].

Необходимо выбрать такое множество заказчиков, которое будет обеспечивать максимальную прибыль предприятию-поставщику, соблюдая при этом ограничения на суммарные затраты по перевозкам.

Для формализации данной проблемы вводятся следующие обозначения [6]:

– $a_j$ — затраты предприятия-поставщика при наличии связи с $j$-м заказчиком, $j = 1,\ldots,N$;

– $c_j$ — доход, получаемый предприятием-поставщиком при наличии связи с $j$-м партнером, $j = 1,\ldots,N$;

– $P$ — ограничение на суммарные затраты.

Вводятся переменные:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ если выбран для сотрудничества } j\text{-й заказчик,} \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где $j = 1,\ldots,N$.

В соответствии с описанными выше переменными и обозначениями, целевая функция будет иметь вид:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j.$$

Данная функция отражает доход, который будет получать предприятие-поставщик.

Ограничения обеспечивают некий предел максимальных затрат, превышать который предприятию нельзя.

При этом, их можно описать с помощью неравенства вида

$$\sum_{j=1}^{N} a_j x_j \le P.$$

Задача формализуется в виде следующей модели.

$$\sum_{j=1}^{N} c_j x_j \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_j x_j \le P \tag{2}$$

$$x_j = 0 \mathrm{v} 1, \forall j = 1,\ldots,N \tag{3}$$

$$c_j, a_j, P > 0, j = 1,\ldots,N \tag{4}$$

Решения данной задачи позволяет сформировать множество заказчиков, с которыми будет сотрудничать предприятие поставщик. Для этого множества будет формироваться задача оптимизации плана перевозок:

$$J = \left\{ j : x_j > 0 \right\} = \left\{ 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Задача оптимизации плана перевозок имеет вид трехиндексной транспортной задачи с фиксированными доплатами [3].

Вводятся следующие обозначения:

– $i=1,\dots,m$ — номера складов предприятия-поставщика;

– $k=1,\dots,K$ — номер вида продукции, имеющийся на складе предприятия поставщика и требующийся заказчику;

– $j=1,\dots,n$ — номера заказчиков, с которыми заключен договор поставки;

– $c_{ij}^k$ — стоимость перевозки единицы объема $k$-го продукта с $i$-го склада $j$-му заказчику. Она зависит как от дальности транспортировки, так и от вида продукции, $i=1,\dots,m$, $k=1,\dots,K$, $j=1,\dots,n$;

– $a_i^k$ — количество продукта $k$, находящегося на $i$-м складе, $i=1,\dots,m$, $k=1,\dots,K$;

– $b_j^k$ — количество продукта $k$, необходимое $j$-му заказчику, $k=1,\dots,K$, $j=1,\dots,n$;

– $d_{ij}$ — доплата, которая может быть связана, например, с платой за аренду транспортных средств, не зависящую от нагрузки, либо с затратами на проезд по платным дорогам. Доплата будет возникать только при наличии ненулевых перевозок с $i$-го склада $j$-му заказчику, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.

Для формализации задачи вводятся переменные следующим образом:

– $x_{ij}^k$ — планируемый объем поставок $k$-го продукта $i$-м складом $j$-му заказчику, $i=1,\dots,m$, $k=1,\dots,K$, $j=1,\dots,n$.

Функция минимизации затрат на перевозки при введенных обозначениях и переменных будет иметь вид

$$L_1\left(x\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^k(x_{ij}^k),$$

где

$$c_{ij}^k\left(x_{ij}^k\right)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{K}c_{ij}^k x_{ij}^k+d_{ij}, & \text{если } \sum\limits_{k=1}^{K}c_{ij}^k x_{ij}^k>0,\\ 0, & \text{если} \sum\limits_{k=1}^{K}c_{ij}^k x_{ij}^k=0.\end{cases}$$

Предполагается, что выполняется условие баланса, то есть суммарные запасы на складах предприятия-поставщика равны суммарным запросам заказчиков по каждому из видов товаров.

Предположение о выполнении условия баланса позволяет записать следующие ограничения в виде равенств:

$$\sum_{j=1}^{n}b_j^k=\sum_{i=1}^{m}a_i^k,\ \ k=1,\dots,K.$$

Суммарное количество товаров, направляемое с каждого склада должно быть равно запасу товара в данном пункте. Это можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^k=a_i^k,\ i=1,\dots,m,\ k=1,\dots,K.$$

Суммарное количество товара, доставляемое каждому заказчику, должно быть равно потребности в этом товаре у этого заказчика:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^k=b_j^k,\ k=1,\dots,K,\ j=1,\dots,n.$$

Объемы перевозок всегда неотрицательны, так как невозможны перевозки со складов заказчиков на склады предприятия-поставщика:

$$x_{ij}^k\geq 0,\ \ i=1,\dots,m,\ \ k=1,\dots,K,\ \ j=1,\dots,n.$$

Требуется составить такой план перевозок, который будет обеспечивать при минимальных суммарных затратах удовлетворение всех заказчиков за счет имеющегося на складах товара [7]:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^{k}(x_{ij}^{k}) \to \min \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{k} = a_i^k,\ i=1,\dots,m,\ k=1,\dots,K \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^{k} = b_j^k,\ k=1,\dots,K,\ j=1,\dots,n \tag{7}$$

$$x_{ij}^{k} \ge 0,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,K, \tag{8}$$

где

$$c_{ij}^{k}\left(x_{ij}^{k}\right) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K}c_{ij}^{k}x_{ij}^{k} + d_{ij}, & \text{если } \sum_{k=1}^{K}c_{ij}^{k}x_{ij}^{k} > 0, \\ 0, & \text{если } \sum_{k=1}^{K}c_{ij}^{k}x_{ij}^{k} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

## 2. Алгоритм решения задачи выбора контрагентов

Задача оптимального выбора контрагентов относится к задаче о ранце. Для ее решения используется метод ветвей и границ [5].

Общая схема метода ветвей и границ включает в себя также решение оценочных задач [9].

Алгоритм решения оценочной задачи.

1. Упорядочить отношения $\dfrac{c_{jk}}{a_{jk}},\ k=1,\dots,n$ по невозрастанию значений:

$$\frac{c_{j1}}{a_{j1}} \ge \frac{c_{j2}}{a_{j2}} \ge \dots \ge \frac{c_{jn}}{a_{jn}}.$$

2. Положить $k=1$.

3. Проверить, если соотношение $a_{jk} \le D$ выполнено, то перейти к пункту 5.

Иначе к пункту 7.

4. Положить $x_{jk}=1,\ D=D-a_{jk}$.

5. Положить $k=k+1$. Перейти к пункту 4.

6. Положить $x_{jk}=\dfrac{D}{a_{jk}}$.

7. Положить $x_k=0,\ \ k=k+1,\dots,n.$

8. Зафиксировать результат — вектор $x^0$, т. е.

$$x^0 = \left( x_{j1} = x_{j2} = \dots = x_{jk-1} = 1,\quad x_{jk} = \frac{D}{a_{jk}}, x_{jk+1} = x_{jk+2} = \dots = x_{jn} = 0 \right).$$

Вычислить оценку $\xi = f(x^0)$.

Вычислительная схема алгоритма решения одномерной задачи о ранце [10].

1. Положить $k=0$.

2. Решить оценочную задачу на множестве $\Omega_k$ с целью получения начального рекорда.

3. Если полученная точка $x^0$ целочисленная, то $x^0$ является решением. Иначе вычислить рекорд, т. е. $f(x^R)=Record$, где $x^R$ — точка, полученная из точки $x^0$ заменой дробной координаты $x_{jk}$ нулем, т. е. $x^R=(x_{j1}=x_{j2}=\dots=x_{jk-1}=1,\ \ x_{jk}=x_{jk+1}=\dots=x_{jn}=0)$.

4. Выбрать нецелую координату $x_{jk}$ точки $x^0$. Зафиксировать ее индекс $j$.

5. Осуществить ветвление множества $\Omega_k$:

$$\Omega_{k1}=\left\{x\in\Omega_k, x_j=1\right\},\quad \Omega_{k2}=\left\{x\in\Omega_k, x_j=0\right\}.$$

6. Решить оценочную задачу согласно алгоритму решения оценочных задач, приведенному выше. Вычислить оценки $\xi(\Omega_{k1})$, $\xi(\Omega_{jk2})$. Если какая-то из полученных оптимальных точек целочисленная, то переход к пункту 8.

7. Выбрать перспективное подмножество $\Omega_k$. Перейти к пункту 3.

8. Проверить, возможна ли смена рекорда и сокращение перебора за счет отбрасывания неперспективных множеств.

9. Проверить критерий оптимальности. Если он выполнен ($\xi_{max}\le R$), то происходит останов. Найденная точка — решение. Иначе перейти к пункту 7.

## 3. Алгоритм решения задачи оптимизации плана перевозок

Задача оптимизации плана перевозок может быть отнесена к одному из видов оптимизационных задач — трехиндексной транспортной задаче с фиксированными доплатами [8].

Алгоритм ее решения выглядит следующим образом.

Шаг 1. Упорядочить продукты по следующему правилу:

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,n\\ b_j^1>0}}1\ge\sum_{\substack{j=1,\dots,n\\ b_j^2>0}}1\ge\dots\ge\sum_{\substack{j=1,\dots,n\\ b_j^K>0}}1 \tag{10}$$

Шаг 2. Зафиксировать $k=1$.

Обозначить $M_{ij}^1=\min\left\{a_i^1,b_j^1\right\}$.

Шаг 3. Решить транспортную задачу методом потенциалов

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}^1+d_{ij}/M_{ij}^1)x_{ij}^1\to\min \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^1=a_i^1,\ \ i=1,\dots,m \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^1=b_i^1,\ \ j=1,\dots,n \tag{13}$$

$$x_{ij}^1\ge 0\ \ \text{для}\ \ \forall i=1,\dots,m,\ \forall j=1,\dots,n. \tag{14}$$

В результате будет получено множество $I_1\times J_1=\{(i,j):x_{ij}^1>0\}$.

Шаг 4. Зафиксировать $k$.

Обозначить $M_{ij}^k=\min(a_i^k,b_j^k)$.

Затраты на перевозку продукта $k$-го вида с $i$-го склада $j$-му заказчику будут представлены в виде

$$c_{ij}^k\left(x_{ij}^k\right)=\begin{cases}c_{ij}^k x_{ij}^k,\ \left(i,j\right)\in I_{k-1}\times J_{k-1},\\ \left(c_{ij}^k+\dfrac{d_{ij}}{M_{ij}^k}+P^k\right)x_{ij}^k,\ \left(i,j\right)\notin I_{k-1}\times J_{k-1}.\end{cases} \tag{15}$$

$P^k$ — некоторое число, играющее роль штрафа.

Шаг 5. Методом потенциалов решается транспортная задача [2].

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^k(x_{ij}^k)\to\min \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^k=a_i^k,\ \ i=1,\dots,m \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{k} = b_i^k, \quad j = 1, \ldots, n \tag{18}$$

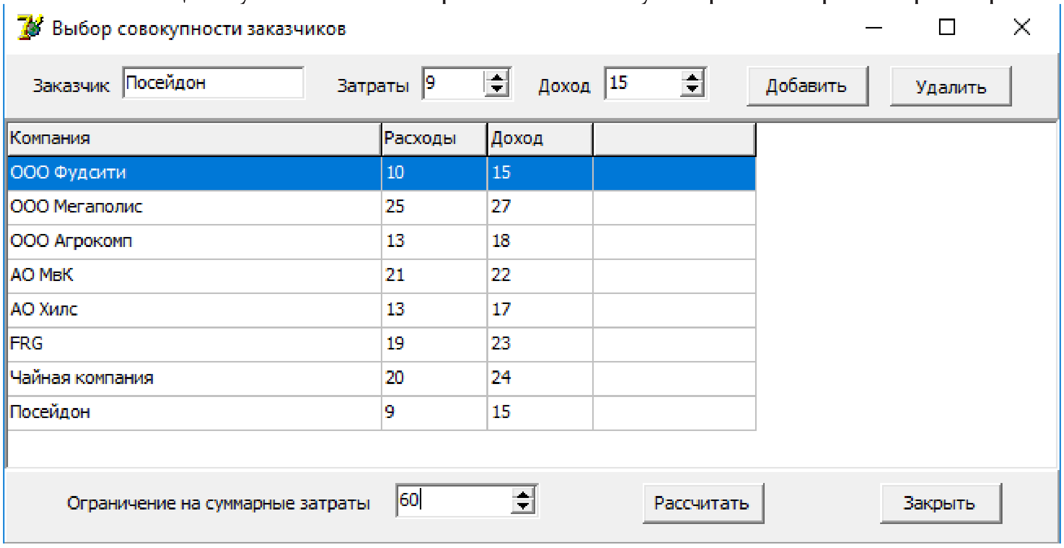
$$x_{ij}^{k} \geq 0 \quad \text{для} \quad \forall i = 1, \ldots, m, \quad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

В результате будет получено множество $I_k \times J_k = \{(i, j) : x_{ij}^k > 0\}$.

Шаг 6. Останов при $k = K$.

## 4. Практические расчеты по моделям

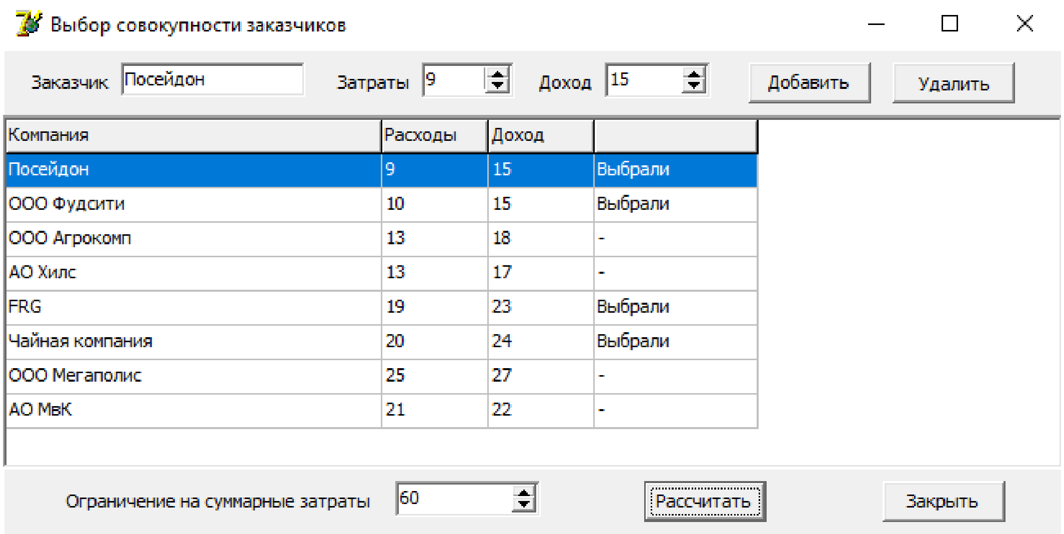
Предположим, что у поставщика есть выбор из 8 заказчиков. Затраты и доходы предприятия-поставщика от сотрудничества с конкретным заказчиком приведены на рис. 2. Кроме того, у предприятия-поставщика установлены ограничения на суммарные затраты в размере 60 единиц.




| Компания | Расходы | Доход | |
|---|---|---|---|
| ООО Фудсити | 10 | 15 | |
| ООО Мегаполис | 25 | 27 | |
| ООО Агрокомп | 13 | 18 | |
| АО МвК | 21 | 22 | |
| АО Хилс | 13 | 17 | |
| FRG | 19 | 23 | |
| Чайная компания | 20 | 24 | |
| Посейдон | 9 | 15 | |

*Рис. 2. Входные данные задачи*

При решении задачи методом ветвей и границ были получены следующие результаты (рис. 3), которые можно интерпретировать следующим образом: для сотрудничества и дальнейшего формирования оптимального плана перевозок были выбраны 4 компании-заказчика. Суммарный доход предприятия-поставщика составит 77 единиц, при этом соблюдено ограничение на суммарные затраты (в данном случае, затраты составляют 58 единиц, 58 < 60).




| Компания | Расходы | Доход | |
|---|---|---|---|
| Посейдон | 9 | 15 | Выбрали |
| ООО Фудсити | 10 | 15 | Выбрали |
| ООО Агрокомп | 13 | 18 | - |
| АО Хилс | 13 | 17 | - |
| FRG | 19 | 23 | Выбрали |
| Чайная компания | 20 | 24 | Выбрали |
| ООО Мегаполис | 25 | 27 | - |
| АО МвК | 21 | 22 | - |

*Рис. 3. Результаты вычислений*

Далее, на основании выбранного в первой задаче подмножества заказчиков решается задача оптимизации плана перевозок.

Число заказчиков — 4 компании — было определено в рамках решения задачи выбора заказчиков. Предполагается, что у предприятия-поставщика имеется 3 склада, на которых хранится его продукция — 3 вида товаров. Условия задачи для каждого вида товаров приведены на рис. 4–6.

Так, например, для первого вида товаров задано следующее условие: на первом складе имеется 11 единиц товара, на втором — 11 единиц и на третьем складе — 8 единиц. Потребности заказчиков при этом следующие: первому заказчику требуется 5 единиц продукта первого вида, второму и третьему заказчику — 9 единиц и четвертому заказчику — 7 единиц. Матрица затрат и матрица фиксированных доплат представлены на рис. 4–6.

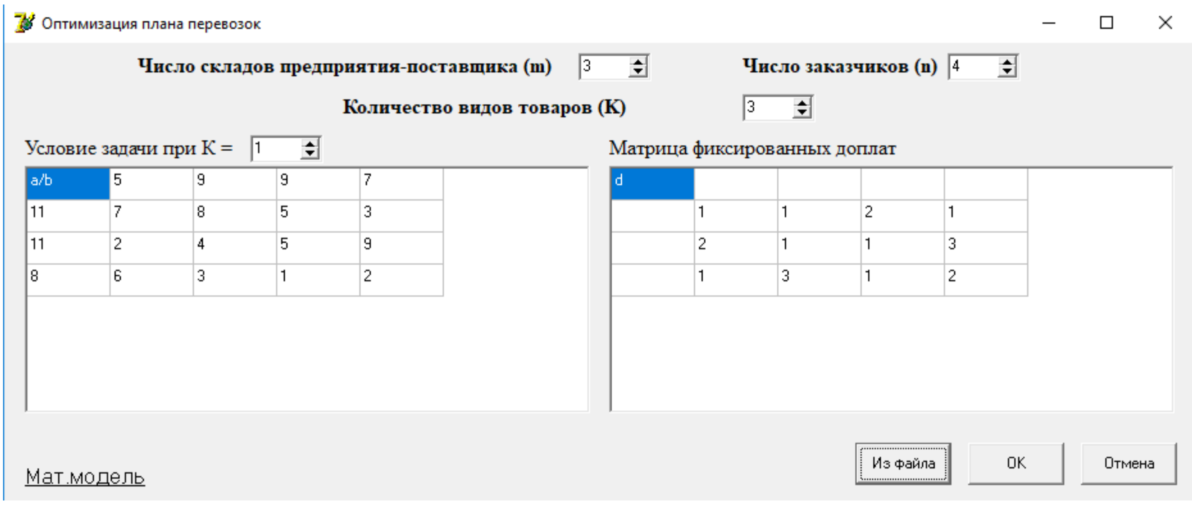



*Рис. 4. Входные данные задачи для 1 вида товаров*

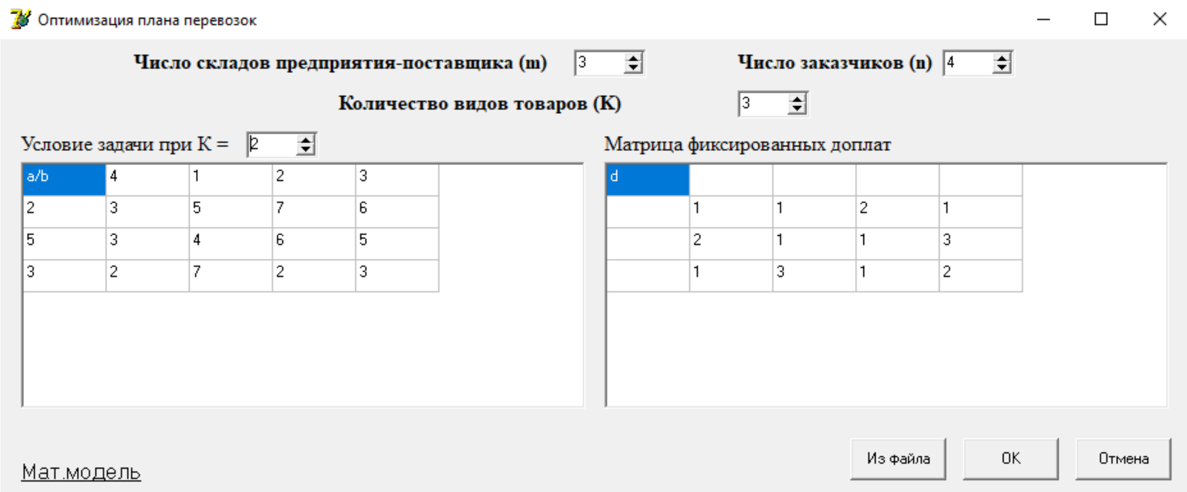



*Рис. 5. Входные данные задачи для 2 вида товаров*

Задача решается с использованием метода потенциалов, опорный план находится с помощью метода северо-западного угла [4].

В результате решения задачи было найдено значение целевой функции — минимальные суммарные затраты в размере 170 единиц, а также оптимальный план перевозок в части перевозки 3 видов товаров со склада предприятия-поставщика компаниям-заказчикам (рис. 7–9).

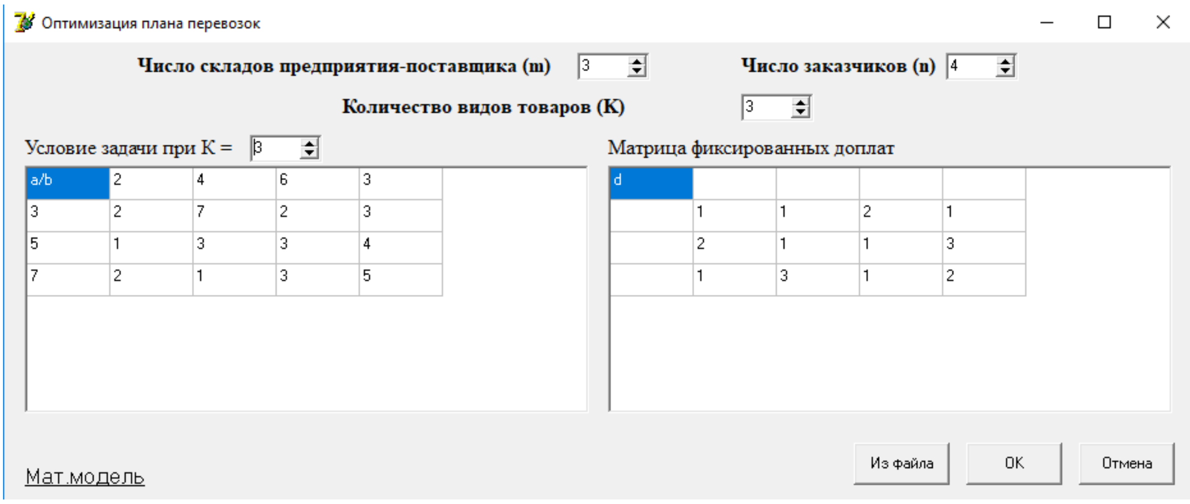


Рис. 6. Входные данные задачи для 3 вида товаров

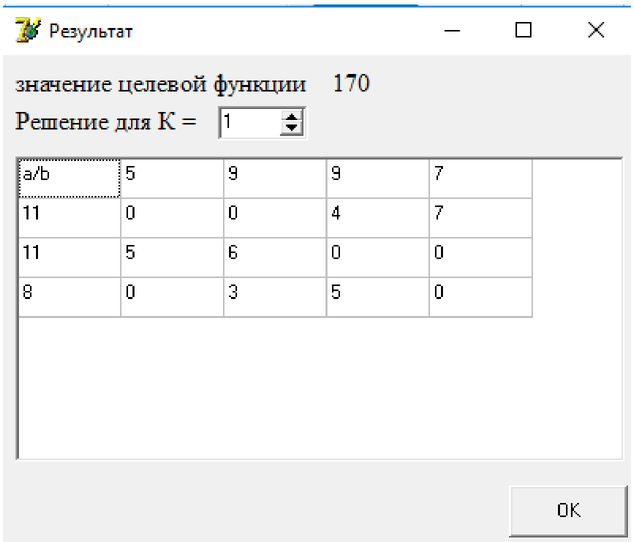


Рис. 7. Решение задачи для первого вида товаров

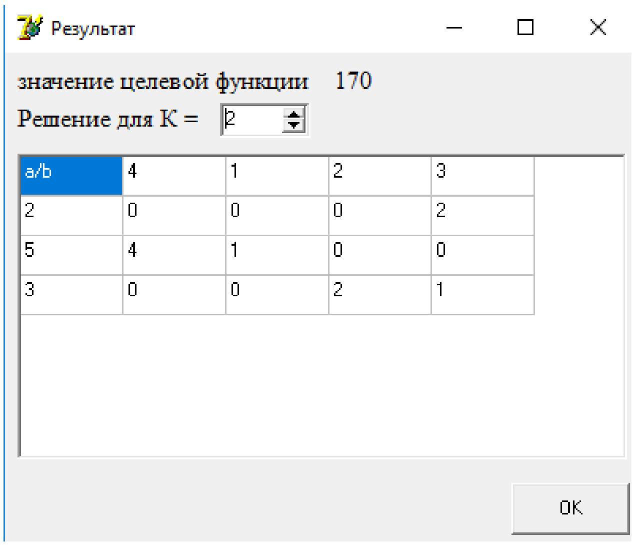


Рис. 8. Решение задачи для второго вида товаров

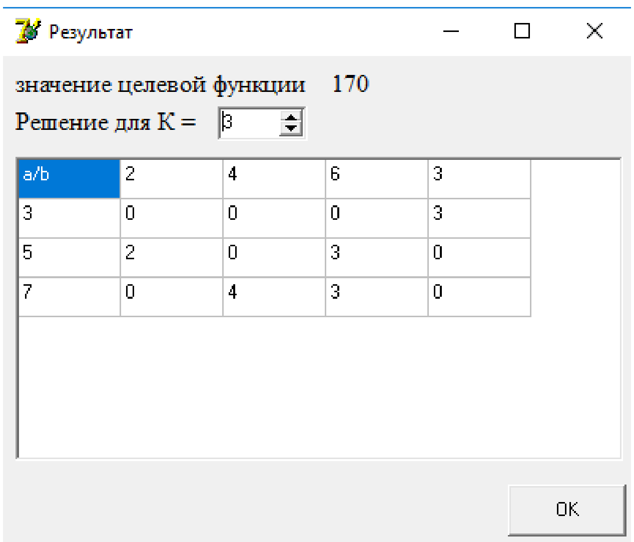


Рис. 9. Решение задачи для третьего вида товаров

## Заключение

В рамках исследования задача выбора и оптимального обеспечения заказчиков была разделена на две подзадачи: выбора контрагентов и оптимизации плана перевозок. Для решения задачи выбора контрагентов был предложен алгоритм на основе метода ветвей и границ. Задача оптимизации плана перевозок решается с использованием приближенного метода решения трехиндексной транспортной задачи с фиксированными доплатами.

Эффективность применения метода ветвей и границ зависит от того, насколько трудоемким является процесс вычисления оценок, и насколько точными являются оценки, получаемые на каждом шаге. Для облегчения этого процесса обычно ветвление организуют так, чтобы нахождение оценки для всего множества и для его подмножеств было однотипным. Структура метода достаточно универсальна и может быть использована для решения широкого класса задач. Кроме того, метод обладает потенциальными возможностями для сокращения перебора, а также присутствует возможность формирования различных приближенных алгоритмов.

В статье рассмотрен один из приближенных методов решения транспортной задачи с фиксированными доплатами, состоящий в том, что путем введения дополнительных целочисленных переменных транспортную задачу с фиксированными доплатами удается свести к частично целочисленной задаче линейного программирования, что позволяет упростить решение сложной трехиндексной транспортной задачи с фиксированными доплатами без существенной потери точности.

## Литература


1. *Азарнова, Т. В.* Теория и методы оптимизации: Учебное пособие / Т. В. Азарнова, И. Л. Каширина, Г. Д. Чернышова. – Воронеж : Научная книга, 2014. – 147 с.

2. *Алексеев, О. Г.* Комплексное применение методов дискретной оптимизации / О. Г. Алексеев. – М. : Наука, 1987. – 248 с.

3. *Бахтин, А. Е.* Дискретные задачи транспортного типа / А. Е. Бахтин, А. А. Колоколов, З. В. Коробкова. – М. : Наука, 1978. – 160 с.

4. *Гольштейн, Е. Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1969. – 304 с.

5. *Корбут, А. А.* Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн; Под ред. Д. Б. Юдина. – М. : Наука, 1969. — 368 с.

6. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М. : Наука, 1983. – 384 с.

7. *Раскин, Л. Г.* Многоиндексные задачи линейного программирования / Л. Г. Раскин, И. О. Кириченко. – М. : Радио и связь, 1982. – 240 с.

8. *Триус, Е. Б.* Задачи математического программирования транспортного типа / Е. Б. Триус. – М. : Советское Радио, 1967. – 208 с.

9. *Чернышова, Г. Д.* Дискретная оптимизация: Методическое пособие к курсам «Модели и методы дискретной оптимизации», «Исследование операций» / Г. Д. Чернышова, И. Н. Булгакова. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2007. – 42 с.

10. *Чернышова, Г. Д.* Дискретные и вероятностные модели (Модели. Алгоритмы): Методическое пособие для вузов / Г. Д. Чернышова, И. Н. Булгакова. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2014. – 49 с.

УДК 681.5

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**А. В. Таволжанский**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Рассматривается проблема обеспечения точности по постоянному и гармоническому входным воздействиям в системах с модальным управлением. Предложен аналитический метод совместного формирования как параметров качества, так и характера переходного процесса. На числовом примере показывается эффективность предлагаемого метода решения проблемы.
**Ключевые слова:** модальное управление, обеспечение точности, многокомпонентные воздействия.

## Введение

Проблема выполнения требований к показателям точности систем модального управления в настоящее время выделилась в самостоятельную задачу в силу того, что собственно модальный регулятор не обладает средствами для формирования этих показателей [1–3].

В связи с этим, основным способом построения высокоточных систем с модальным управлением является введение в систему наблюдателя задающего воздействия в виде внутренней модели, использующей, в частности, производные входного сигнала [4].

Тем не менее независимый синтез модального регулятора и внутренней модели входного сигнала зачастую приводит к нежелательным изменениям в переходных режимах системы. В частности, в системе может возникнуть колебательность при отработке ступенчатых воздействий [5].

Еще одним методом обеспечения заданного значения ошибки является введение масштабирующего коэффициента.

Стоит обратить внимание на тот факт, что оба этих метода не в состоянии обеспечить требуемое значение статизма как для воздействий различного рода: например, для постоянного и гармонического воздействий, так и для гармонических сигналов с различными частотами и т. д.

Устранить вышеназванные недостатки позволяет предложенный метод, в котором обеспечение требуемых показателей качества достигается введением дополнительной обратной связи по выходу и свободных параметров, необходимых для физической реализации указанного условия совместности, без использования наблюдающих устройств.

## 1. Постановка задачи и способ её решения

Ставится задача синтеза системы модального управления с заданным характером переходного процесса и показателями точности, определяемыми: расположением собственных чисел характеристической матрицы; астатизмом первого порядка относительно задающего воздействия с добротностью $D_v$ по скорости; максимальными допустимыми относительными ошибками $\delta_1$ и $\delta_2$ воспроизведения амплитуды гармонических воздействий на частотах $\omega_{1,g}$, $\omega_{2,g}$.

Для решения поставленной задачи формируется система со структурой, показанной на рис. 1, в которой модальный регулятор обеспечивает требуемый вид кривой переходного процесса, а дополнительная отрицательная обратная связь с интегрирующим звеном в прямом канале позволяет реализовать в системе астатизм первого порядка.

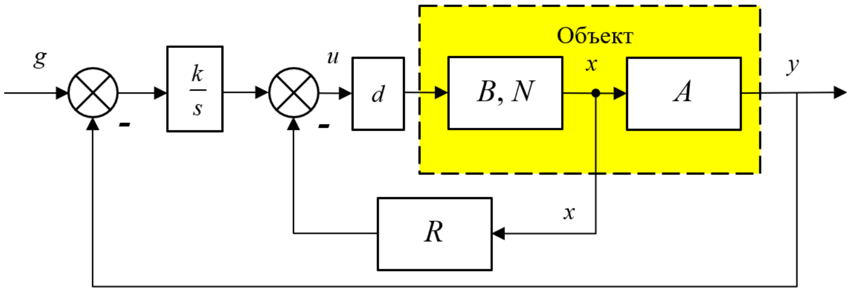



*Рис. 1. Структурная схема синтезируемой системы*

где $B$ — характеристическая матрица, $N$, $A$ — матрицы управления и выхода, $R$ — регулятор, $x$ — вектор координат состояния, $u$ — управление, $y$ — выходная координата, $d$ и $k$ дополнительные параметры, $g$ — задающее воздействие.

Начнем решать поставленную задачу с нахождения корней характеристического полинома. Для этого, пользуясь представленной структурой, опишем систему в изображениях по Лапласу:

$$y(s) = A \cdot \left( s \cdot E - B + N \cdot d \cdot R + N \cdot d \cdot A \cdot \frac{k}{s} \right)^{-1} \cdot N \cdot d \cdot \frac{k}{s} \cdot g(s). \quad (1)$$

Определим характеристический полином:

$$\left| s \cdot E - B + N \cdot d \cdot R + N \cdot A \cdot \frac{k}{s} \right| = s^n + s^{n-1} \cdot (a_{n-2} + d \cdot r_{n-1}) + \dots + s \cdot (a_0 + d \cdot r_1) + k \cdot d. \quad (2)$$

Искомые корни полученного полинома (2) зависят от переменных $r_1, \cdots, r_n$, $k$, $d$: $s_1(r_1, \cdots, r_n, k, d), \cdots, s_n(r_1, \cdots, r_n, k, d)$.

Составим неравенства, отражающие требования к точности для различных входных воздействий и характеру переходного процесса.

Найдем $n$ неравенств исходя из требований ко времени регулирования.

Так как время регулирования, зависящее от найденных корней, может быть значительно меньше требуемого, что негативно скажется на исполнительных механизмах, будем использовать двустороннее неравенство:

$$\begin{cases} 1{,}2 \cdot (-\Omega) < s_1(r_1, \cdots, r_n, k, d) < -\Omega; \\ \cdots \\ s_n(r_1, \cdots, r_n, k, d) < q \cdot (-\Omega), \end{cases} \quad (3)$$

где $\Omega$ — желаемый среднегеометрический корень, определяемый заданным временем регулирования; $n$ — порядок системы, $q$ — мера удаленности корней.

Целесообразно расположить часть корней на достаточном удалении от доминирующих полюсов, чтобы они не оказывали влияния время регулирования.

Для воспроизведения задающего воздействия на частоте $\omega_{z,g}$ с заданным значением статической ошибки $\delta_z$ введём неравенства:

$$\delta_z > 1 - W(\omega_{z,g}), \quad (4)$$

где $z$ — порядковый номер воздействия; $W(\omega_{z,g})$ – модуль частотной функции $W(j\omega)$ на частоте $\omega_{z,g}$.

Объединив (3) и (4) получим систему неравенств, решение которой даст нам искомые значения $r_1$, …, $r_n$, $k$, $d$, обеспечивающие требуемые показатели качества синтезируемой системы управления.

Таким образом, решение задачи обеспечения точности по гармоническому и монотонному задающим воздействиям с одновременным выполнением требований к характеру переходного процесса и времени регулирования удалось свести к выполнению системы ограничений. При этом допускается получение множества приемлемых решений, из которых может быть сделан последующий выбор.

## 2. Пример применения метода

Рассмотрим объект:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,2 & -3 \end{bmatrix};\quad N=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Для $g(t)=\text{const}$ — необходимо обеспечить астатизм первого порядка с добротностью $D_v \geq 30\ c^{-1}$ по скорости; гармонический сигнал $g(t)=0,5\sin(3t)$ требуется отработать со статической ошибкой $\delta_1=0,01$; $g(t)=0,5\sin(30t)$ — со статической ошибкой $\delta_2=0,1$. Для времени регулирования $t_\text{р}=0,05$ с среднегеометрический корень $\Omega$ определим как:

$$\Omega=\frac{T}{t_\text{р}}=\frac{4,8}{0,05}=96, \tag{6}$$

где $T$ — постоянная, зависящая от порядка желаемого полинома.

К искомой системе неравенств добавим требование к добротности по скорости, выражение для которой получим из (2):

$$D_v=\frac{k\cdot d}{d\cdot r_1+0,2}. \tag{7}$$

С учётом (3), (4) и (7) система неравенств для $z=1,2$ примет вид:

$$\begin{cases} -115,2\leq s_1\leq -96; \\ -115,2\leq s_2\leq -96; \\ s_3\leq -480; \\ D_v\geq 30; \\ \delta_z\geq 1-W(\omega_{z,g}). \end{cases} \tag{8}$$

В результате получим решение (9):

$$R=\begin{bmatrix} 650,722 & 3,167 \end{bmatrix};\ k=34559;\ d=836,129. \tag{9}$$

Заданные и фактические показатели качества системы управления приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Сравнение показателей качества*

| Значение | Показатель качества | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $t_\text{р}$, с | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $D_v$, с$^{-1}$ |
| Заданное | 0,05 | 0,01 | 0,1 | 30 |
| Фактическое | 0,044 | 0,001 | 0,07 | 53 |

Требования к показателям качества синтезированной системы выполнены, что подтверждает эффективность предложенного метода. Обеспечение требований к точности для различных задающих воздействий иллюстрируется также на рис. 2.

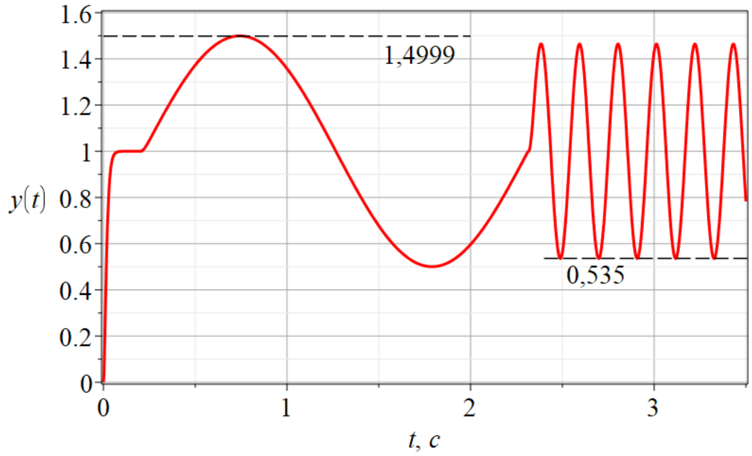



*Рис. 2. Переходные процессы при различных задающих воздействиях*

## Заключение

В данной работе предложен аналитический метод обеспечения точности систем модального управления, использующий структуру с дополнительной обратной связью по выходу. При этом заданные показатели точности обеспечиваются одновременно для постоянных задающих воздействий, скоростных воздействий, а также для гармонических сигналов.

Отличительной особенностью метода является согласованность - совместимость требований к точности регулирования и к характеру переходного процесса. Указанная совместимость достигается общим решением системы алгебраических неравенств, отражающих перечисленные требования.

## Литература

1. *Александров, А. Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты / А. Г. Александров // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 5. – С. 27–42.

2. *Stein, G. L.* Design of Modal Filters Exact on Maximal Spaces of Functions/ G. L. Stein, U. Konigorski // IFAC Proceedings Volumes. 2012. – V. 45, I. 2. – P. 130–135.

3. *Тютиков, В. В.* Синтез дискретных систем модального управления заданной статической точности / В. В. Тютиков, С. В. Тарарыкин, Е. А. Варков // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2003. – № 3. –С. 136–144.

4. *Никифоров, В. О.* Следящая система комбинированного управления / В. О. Никифоров, Г. В. Лукьянова // научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий. механики и оптики. – 2011. – № 6(76). – С. 39–43.

5. *Ермоленко, А. И.* Повышение динамической точности цифровых следящих систем АСУТП с помощью комбинированного управления. Ч.1. Низкий темп выявления рассогласования / А. И. Ермоленко, А. И. Коршунов // Известия вузов. Приборостроение. – 2018. –Т. 61, № 4. – С. 309–316.

УДК 681.5

# МОДАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ В СПЕЦИАЛЬНОМ БАЗИСЕ

**А. В. Таволжанский**

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** Рассматривается синтез модального управления в специальной системе координат, выбранной по критерию компактного размещения коэффициентов регулятора и матрицы линейного преобразования на множестве вещественных чисел. Предложена формальная постановка задачи и способ построения оптимального базиса и регулятора. На числовом примере показана эффективность предложенного способа синтеза.

**Ключевые слова:** модальное управление, преобразование регулятора, оптимальный базис.

## Введение

Синтез модального управления в собственном базисе координат объекта не всегда может быть удобным в практических приложениях [1–3]. В частности, встречаются ситуации, когда коэффициенты регулятора располагаются в широком диапазоне вещественных чисел, занимающем несколько десятичных порядков. При этом может произойти выход мантиссы числа за разрядную сетку контроллера, и приходится прибегать к аппаратному или программному усложнению регулятора [4, 5]. Таким образом, возникает практическая задача построения модального управления с компактным расположением числовых значений коэффициентов регулятора.

В работе предлагается метод решения этой задачи путём проведения модального синтеза в специальном базисе, оптимальном по критерию компактности.

## 1. Метод решения

Идея метода построения регулятора с компактным расположением коэффициентов состоит в том, что от исходной системы координат x, осуществляется переход к другой системе $\tilde{x}$, в которой значения коэффициентов регулятора будут локализованы в малой области вещественных чисел.

Рассмотрим объект:

$$\begin{cases} \dot{x} = B \cdot x + N \cdot u; \\ y = A \cdot x, \end{cases} \tag{1}$$

где $B$ — характеристическая матрица, $N$ — матрица управления, $A$ — матрица выхода, $x$ — вектор координат состояния, $u$ — управление, $y$ — выходная координата.

После введения регулятора $R$ в систему с исходным объектом уравнения движения примут вид (2):

$$\begin{cases} \dot{x} = B \cdot x + N \cdot u; \\ y = A \cdot x; \\ u = g - \varphi, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi = R \cdot x$.

С помощью линейного преобразования $T$ перейдем к системе координат $\tilde{x}$: $\tilde{x} = T \cdot x$. Тогда описание объекта (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{B} \cdot \tilde{x} + \tilde{N} \cdot u; \\ y = \tilde{A} \cdot \tilde{x}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\dot{\tilde{x}} = T \cdot \dot{x}$, $\tilde{B} = T \cdot B \cdot T^{-1}$, $\tilde{N} = T \cdot N$, $\tilde{A} = A \cdot T^{-1}$.

Уравнения движения для замкнутой системы в координатах $\tilde{x}$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{B} \cdot \tilde{x} + \tilde{N} \cdot u; \\ y = \tilde{A} \cdot \tilde{x}; \\ u = g - \varphi, \end{cases} \tag{4}$$

где $\varphi = \tilde{R} \cdot \tilde{x}$.

Так как нам необходимо обеспечить совпадение выходов регуляторов, т. е. равенство φ в обеих системах координат $x$ и $\tilde{x}$ то:

$$R \cdot x = \tilde{R} \cdot T \cdot x. \tag{5}$$

Анализ уравнения (5) показывает, что для произвольных значений коэффициентов регулятора $R$ можно подобрать такие матрицы $\tilde{R}$ и $T$, соответствующие (5), элементы которых располагаются компактно.

Из (5) получим взаимосвязь между $R$ и $\tilde{R}$:

$$R = \tilde{R} \cdot T, \tag{6}$$

и структура системы в новой системе координат приобретает вид, показанный на рис. 1.

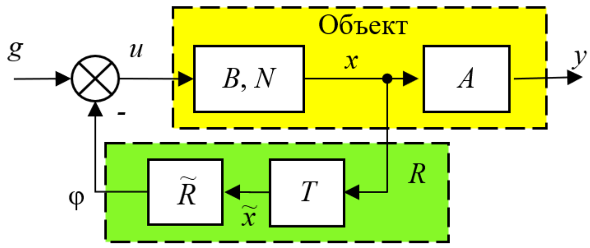



*Рис. 1. Модель системы с преобразованным регулятором*

Поскольку элементы $\tilde{R}$ можно задать желаемым для нас образом, т. е. заведомо компактно, то для обеспечения равенства (5) необходимо найти $n^2$ элементов матрицы $T$, т. е. составить систему из $n^2$ уравнений. Так как размер матрицы $R = 1 \times n$, то из условия (5) мы получаем только $n$ уравнений. Найдем недостающие $n^2 - n$ уравнений из равенства характеристических полиномов систем:

$$\left| s \cdot E - B + N \cdot R \right| = \left| s \cdot E - \tilde{B} + \tilde{N} \cdot \tilde{R} \right|, \tag{7}$$

или

$$B - N \cdot R = \tilde{B} - \tilde{N} \cdot \tilde{R}. \tag{8}$$

Таким образом, синтез регулятора $\tilde{R}$ с заданным расположением его элементов удалось свести к задаче решения системы уравнений:

$$\begin{cases} R = \tilde{R} \cdot T; \\ B - N \cdot R = \tilde{B} - \tilde{N} \cdot \tilde{R}. \end{cases} \tag{9}$$

## 2. Числовой пример синтеза

Рассмотрим объект:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2,25 & -1,5 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

для которого найден регулятор $R$:

$$R = \begin{bmatrix} 15 & 0{,}00316 & 0{,}000221 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

обеспечивающий монотонный переходный процесс, но имеющий кратность значений коэффициентов около 70000, т. е. занимающий примерно пять $(0{,}7 \cdot 10^5)$ десятичных порядков на вещественной оси.

Зададимся регулятором $\tilde{R}$ с компактным расположением элементов кратным степени двух:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Подставив (10), (11), (12) в (9) получим искомую матрицу T:

$$T = \begin{bmatrix} -0{,}315 & -0{,}360 & 0{,}090 \\ -0{,}766 & -0{,}518 & -0{,}495 \\ 4{,}212 & 0{,}350 & 0{,}225 \end{bmatrix},$$

со значениями элементов, занимающими примерно два $(0{,}5 \cdot 10^2)$ десятичных порядка, т. е. расположение всех элементов матриц $\tilde{R}$ и $T$ стало компактным. Однако использование $n^2$ уравнений с $n^2$ неизвестными приводят к единственному решению для $T$, которое в общем случае имеет непредсказуемый разброс значений элементов. Чтобы получить возможность располагать элементы матрицы $T$ желаемым образом, необходимо ввести свободные переменные, т. е. поставить задачу поиска решения, наилучшего по некоторому критерию. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что мы можем не задавать матрицу $\tilde{R}$ заранее и включить её элементы в число неизвестных переменных задачи.

Для наилучшего расположения элементов матриц $T$ и $\tilde{R}$ сформируем критерий:

$$F(T, \tilde{R}) = \sum_{i=1}^{n^2+n} (Q_i - \Omega)^2 , \tag{13}$$

где $Q$ — вектор с элементами матрицы $T$ и $\tilde{R}$, $\Omega$ — среднегеометрический корень:

$$\Omega = \sqrt[2(n^2+n)]{\left( \prod_{i=1}^{n^2+n} Q_i \right)^2} . \tag{14}$$

Поставим задачу поиска оптимальной системы координат:

$$\begin{cases} F(T, \tilde{R}) = \sum_{i=1}^{n^2+n} (Q_i - \Omega)^2 \to \min; \\ R = \tilde{R} \cdot T; \\ B \cdot T - N \cdot R \cdot T = T \cdot B - T \cdot N \cdot R. \end{cases} \tag{15}$$

Решение задачи (15):

$$T = \begin{bmatrix} 2{,}185 & -1{,}126 & -0{,}451 \\ 3{,}836 & 3{,}302 & -0{,}449 \\ 3{,}819 & 4{,}848 & 3{,}876 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 4{,}588 & 0{,}688 & 0{,}614 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Значения элементов матриц $T$ в (16) и $\tilde{R}$ в (17), найденные для оптимальной системы координат, находятся практически в пределах одного порядка $(1 \cdot 10^1)$, в то время как элементы исходной матрицы $R$ в (11) занимают пять десятичных порядков.

## Заключение

Предложенный подход к синтезу модального регулятора основан на построении последнего в специально выбранной системе координат. Выбор указанной системы координат осуществляется решением оптимизационной задачи по критерию компактного размещения элементов регулятора и матрицы линейного преобразования. Такой подход позволяет в ряде случаев решить проблему физической реализации регулятора без необходимости расширения разрядности контроллера и усложнения вычислительных алгоритмов.

## Литература


1. *Балонин Н. А.* Новый курс теории управления движением / Н. А. Балонин. – СПб. : Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2000. – 160 с.

2. *Helói F. G.* A reconfigurable damage-tolerant controller based on a modal double-loop framework / F. G. Helói //Mechanical Systems and Signal Processing. – 2017. – V. 88. – P. 334–353.

3. *Погорелов М. Г.* Эталонная модель для синтеза модального регулятора системы автоматического управления / М. Г. Погорелов, Е. И. Понитков, П. Р. Добаринов, Д. В. Федоров, И. А. Филин // Известия ТулГУ. – 2019. – № 8. – С. 173–197.

4. *Rony P.* Design and Implementation of Double Precision Floating Point Comparator/ P. Rony // Procedia Technology. – 2016. – V. 25. – P. 528–535.

5. *Тен И. Г.* Информатика: системы с плавающей запятой ограниченной разрядности / И. Г. Тен, И. Р. Мусина, М. Ю. Люлюзов // Проблемы современной науки и образования. – 2017. – № 13(95). – С. 43–46.

УДК 004.032.26:678.027

# СИСТЕМА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КАЧЕСТВА ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК

**М. А. Тетерин, Т. Б. Чистякова**

*Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)*

**Аннотация.** Описана компьютерная система интеллектуального анализа данных для прогнозирования качества полимерных пленок на международных, крупнотоннажных и многоассортиментных производствах. В данной статье представлена библиотека методов интеллектуального анализа данных, которая позволяет прогнозировать качество полимерных пленочных материалов для различных конфигураций линий и различных типов пленки и включает следующие методы: рекуррентные нейронные сети, нейронную сеть с долгой краткосрочной памятью и сверточную нейронную сеть. Проведен анализ методов прогнозирования качества полимерных пленок и разработан алгоритм, позволяющий выбрать наиболее подходящий метод прогнозирования качества полимерных пленок на основании типа пленки, конфигурации линии и требований, предъявляемых к качеству пленки. Система включает интерфейсы, которые отображают тренды технологических характеристик процесса. Система протестирована на примере промышленных данных корпорации по производству полимерной пленки на заводах России и Германии.
**Ключевые слова:** системный анализ, программный комплекс, прогнозирование, нейронные сети, сверточные нейронные сети, рекуррентные нейронные сети, полимерные пленки.

## Введение

В современном мире на производствах полимерных пленок одной из ключевых проблем является прогнозирование качества полимерной пленки в режиме реального времени Производства полимерных пленок для пищевой и фармацевтической промышленности являются многоассортиментными системами [1]. Они характеризуются типом линии (экструзионная, каландровая), высокой производительностью (более 1000 кг/ч), энергоемкостью, большим количеством контролируемой информацией, критериями эффективности процесса, различными дефектами (каждый тип линии имеет свои нештатные ситуации и отклонения на поверхности пленки). Многоассортиментность обусловлена множеством рецептур, различными диапазонами толщины (0.025–1.20 мм) и ширины (до 6200 мм). Перенастройка линии на новое задание по типу полимерной пленки происходит в среднем один раз в сутки. Каждое уникальное задание, рецептура, тип линии имеет свои нештатные ситуации на производстве, допустимые значения показателей качества пленки. Для каждого из этих ассортиментов необходимо уметь принимать решения в режиме реального времен. Поэтому для поддержки принятия решений управленческого производственного персонала требуется разработка системы прогнозирования качества полимерной пленки, базирующихся на нейросетевых подходах, где для каждого уникального ассортимента необходимо построить свою собственную модель или одну общую метамодель анализ которых позволил бы обеспечивать требуемые потребительские характеристики полимерных пленок.

Таким образом для производства полимерных пленок актуальна разработка компьютерной системы, которая бы позволяла прогнозировать качество полимерных пленок, используя нейросетевые подходы [2].

Целью работы является создание компьютерной системы для прогнозирования качества полимерных пленок, которая содержит базу данных типов линии, базу данных рецептур, базу данных контролируемых и рассчитываемых характеристик процесса производства полимерных пленок, библиотеку математических моделей для прогнозирования качества полимерных пленок [3].

Анализ рецептур, конфигураций и режимных параметров производственных линий, показателей качества полимерной пленки позволил разработать информационное описание экструзионно-каландрового производства (ЭКП) полимерной пленки (ПП) как объекта управления, которое представлено на рис. 1 в виде совокупности векторов входных параметров $X$, управляющих $U$ и возмущающих $F$ воздействий и выходных параметров $Y$. Полимерная пленка типа $T_{film} = \{R_f, Q_f^{\ 0}\}$ изготавливается на линии типа $L_{type}$, имеющей конфигурацию $C_{line} = \{T_{extrud}, C_{extrud}, \Gamma_{extrud}, C_{calend}, \Gamma_{calend}, n_{take}, \Gamma_{take}, C_{cool}, \Gamma_{cool}\}$, с заданной производительностью $G_0$. Тип полимерной пленки определяется ее рецептурой $R_f$ и требованиями к качеству $Q_f^{\ 0} = \{\delta_{f0}, \Delta\delta_f^{\max}, D_\delta^{\max}, n_{black}^{\max}, n_{destr}^{\max}, n_{umelt}^{\max}, n_{gel}^{\max}, n_{bubbl}^{\max}, n_{hol}^{\max}, S_{fl0}, \Delta S_{fl}^{\max}, S_{fc0}, \Delta S_{fc}^{\max}, L_f^*, a_f^*, b_f^*, \Delta E_f^{\max}\}$. Основными требованиями к качеству полимерной пленки являются: $\delta_{f0}$ — заданная толщина, м; $\Delta\delta_f^{\max}$ — максимально допустимое отклонение толщины от заданного значения, м; $D_\delta^{\max}$ — максимально допустимая разнотолщинность, м; $n_{black}^{\max}, n_{destr}^{\max}, n_{umelt}^{\max}, n_{gel}^{\max}, n_{air}^{\max}$, $n_{hol}^{\max}$ — максимально допустимое число поверхностных дефектов — черных точек, деструкционных полос, включений нерасплавленного полимера, геликов, трещин и дырок соответственно — на заданной площади полотна.

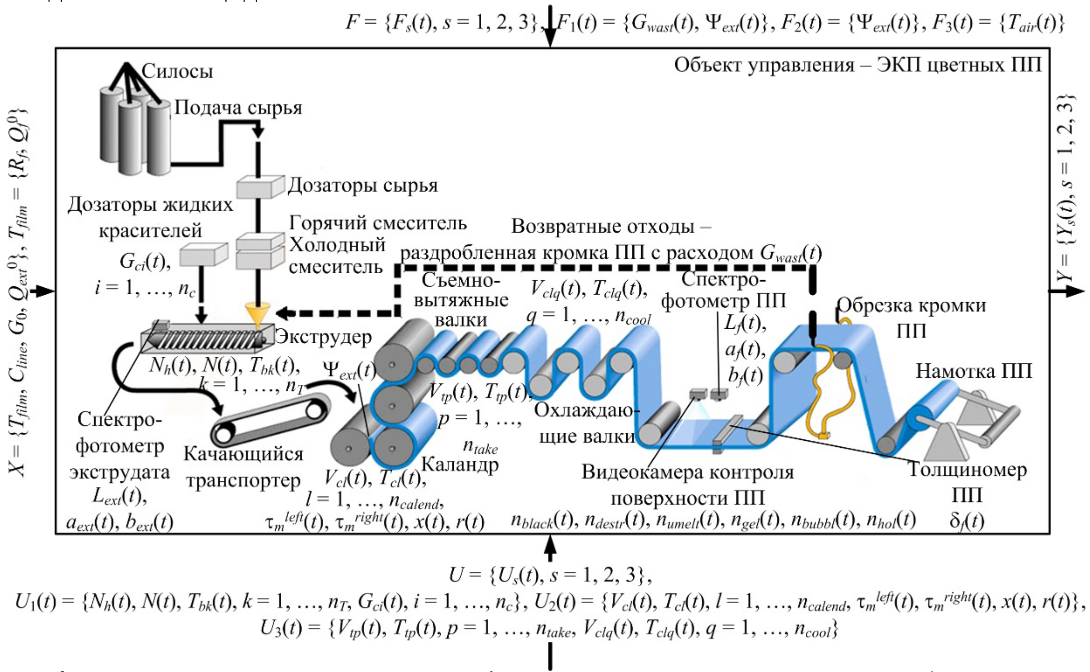



*Рис. 1. Информационное описание производства полимерных пленок как объекта управления*

Аппаратурное оформление ключевых стадий производственной линии включает экструдер (стадия $s = 1$ — подготовка экструдата), каландр (стадия $s = 2$ — формование экструдата в полимерной пленке), съемно-вытяжные и охлаждающие валки (стадия $s = 3$ — съем и охлаждение полимерной пленки.

Экструдер имеет тип $T_{extrud}$, определяемый числом шнеков $n_{scr}$ и характером их движения (одношнековый, осциллирующий, двухшнековый с односторонним или встречным вращением зацепляющихся шнеков).

Каландр имеет конфигурацию $C_{calend}$, определяемую числом $n_{calend}$ и схемой взаимного расположения (L-образная, Г-образная и др.) валков, и геометрические параметры $\Gamma_{calend}$. Управляющими воздействиями на стадии каландрования $U_2(t)$ являются: $V_{cl}(t)$, $T_{cl}(t)$, $l = 1, \ldots, n_{calend}$ — окружные скорости (м/с) и температуры наружных поверхностей (°С) валков каландра; $\tau_m^{left}(t)$, $\tau_m^{right}(t)$ — время работы левого и правого электродвигателей, перемещающих (поднимающих/опускающих) внешний калибрующий валок, что обеспечивает регулирование толщины полимерной пленки, с; $x(t)$, $r(t)$ — пространственный перекос (горизонтальное смещение оси) внутреннего калибрующего валка (м) и усилие контризгиба, приложенное к внешнему калибрующему валку (Н). Управляющие воздействия $x(t)$ и $r(t)$ применяются для обеспечения равнотолщинности полимерной пленки [4].

На стадиях каландрования, съема и охлаждения полимерной пленки возникают нештатные ситуации, связанные с дефектами толщины полимерной пленки (например, разнотолщинность), поверхностными дефектами полимерной пленки (например, черные точки, желто-коричневые деструкционные полосы, включения нерасплавленного полимера, дырки).

На основе информационного описания объекта управления была сформулированы основная задача, решаемая компьютерной системой: прогнозирование выходных параметров $Y_{1,i}(t)$ при заданных входных параметрах $X(t)$ и управляющих воздействиях $U(t)$.

Разрабатываемая компьютерная система (рис. 2) включает следующие компоненты: информационное обеспечение (база данных производственных расчетных характеристик процесса, база данных параметров оборудования, база данных параметров материала, база производственных данных, и база знаний нештатных ситуаций); подсистему визуализации данных; модуль редактирования баз данных и знаний; подсистему интеллектуального анализа данных; подсистему оценки показателей качества по математическим моделям [5, 6].

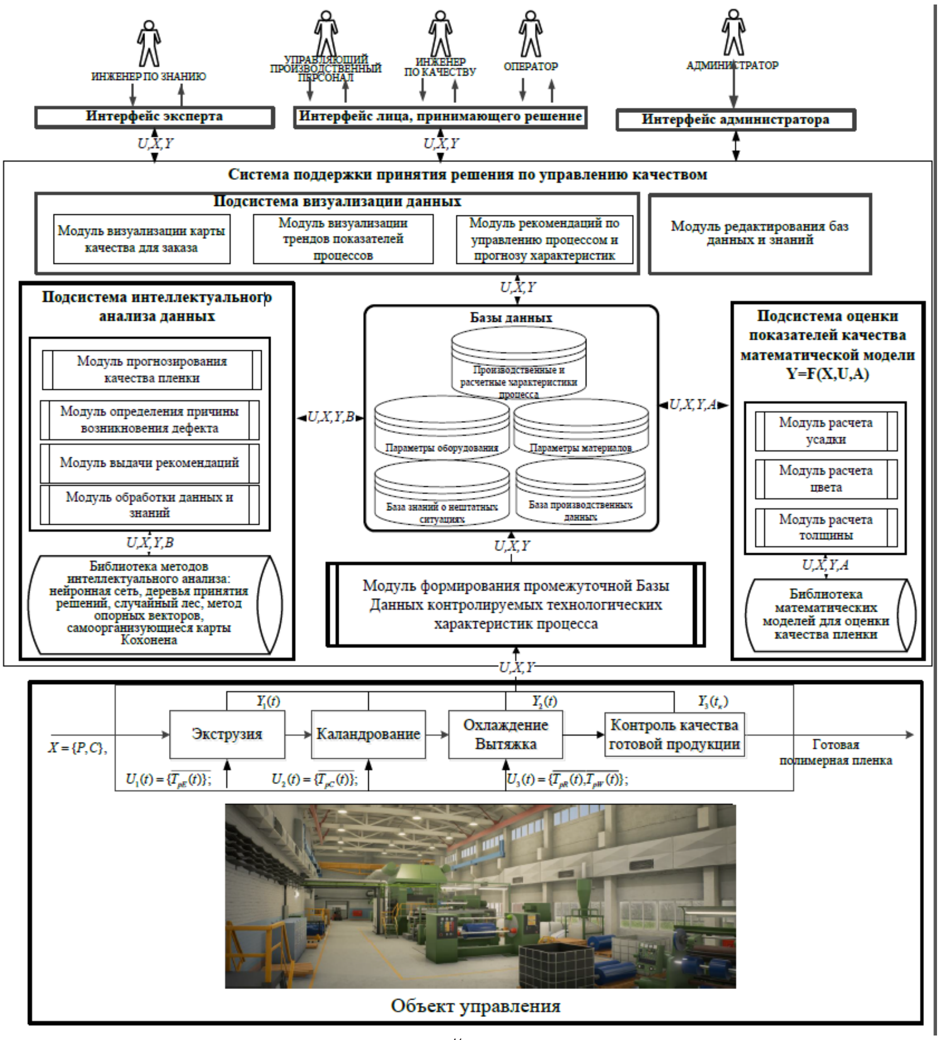



*Рис. 2. Функциональная схема компьютерной системы интеллектуального анализа данных для прогнозирования качества полимерных пленок*

Подсистема интеллектуального анализа данных содержит библиотеку методов интеллектуального анализа данных для прогнозирования качества полимерных пленок. Библиотека методов прогнозирования включает следующие математические модели и методы: классическую реализацию нейронной сети, рекуррентную нейронную сеть, нейронную сеть с долгой краткосрочной памятью (LSTM), сверточную нейронную сеть и нейронную сеть, которая объединяет в себе сверточный и LSTM подход.

Тестирование работоспособности компьютерной системы выполнено по большим промышленным данным фармацевтических и пищевых упаковочных полимерных пленок заданной рецептуры на основе жесткого поливинилхлорида, собранным на производственной линии, реализующей метод раздувной экструзии. Каждый массив данных, собранных за день производства, содержал около 500 тыс. измеренных значений 210 технологических параметров (управляющих воздействий, потребительских характеристик полимерной пленки).

В качестве примера рассмотрена работа компьютерной системы по обработке нештатных ситуаций, связанных с возникновением черных точек и дырок. Результаты работы системы прогнозирования представлены в табл. 1 и на рис. 3 и 4. Для дефекта «черные точки» рекуррентная нейронная сеть дала значение показателя прогнозирования AUC (площадь под кривой) [7], равное 0.675. Нейронная сеть с краткой долгосрочной памятью дала AUC, равный 0.943. Сверточная нейронная сеть дала AUC, равный 0.886. Интеграция краткой долгосрочной нейронной сети и сверточной сети дала AUC, равный 0.800. Для нештатной ситуации, связанной с дырками, рекуррентная нейронная сеть дала AUC, равный 0.576, нейронная сеть с долгой краткосрочной памятью дала результат 0.742, сверточная нейронная сеть дала результат 0.768, а интеграция краткой долгосрочной нейронной сети и сверточной сети дала AUC, равный 0.728. Особенностью нештатной ситуации, связанной с возникновением черных точек на пленке, является то, что это частая нештатная ситуация на производстве полимерных пленок и какое-то количество черных точек мы имеем постоянно, в то время как дырки — это более редкий дефект. Таким образом, если дефект на производстве возникает постоянно, то лучше использовать модель с долгой краткосрочной памятью, а если нештатная ситуация возникает редко, то лучше использовать сверточную сеть в задачах прогнозирования качества полимерной пленки. К сожалению, интеграция нейронной сети с долгой краткосрочной памятью и сверточной сети не принесла каких-либо улучшений в повышении точности модели. Вероятно, это связано с тем, что данный тип нейронной сети переобучается и необходим больший объем данных для моделей такого типа.

Таблица 1

*Результаты работы системы прогнозирования на производстве полимерных пленок*

| Модель | AUC «Черные точки» | AUC «Дырки» |
|---|---|---|
| RNN | 0.675 | 0.576 |
| LSTM | 0.943 | 0.742 |
| CNN | 0.886 | 0.768 |
| LSTM + CNN | 0.800 | 0.728 |

**Заключение**

Представлена архитектура системы интеллектуального анализа данных для прогнозирования качества полимерных пленок, которая включает библиотеку методов интеллектуального анализа данных, позволяющую протестировать систему интеллектуального анализа данных на различных конфигурациях линии, рецептурах и дефектах, характеризующихся различной частотой повторения. Результаты тестирования подтвердили работоспособность компьютер-

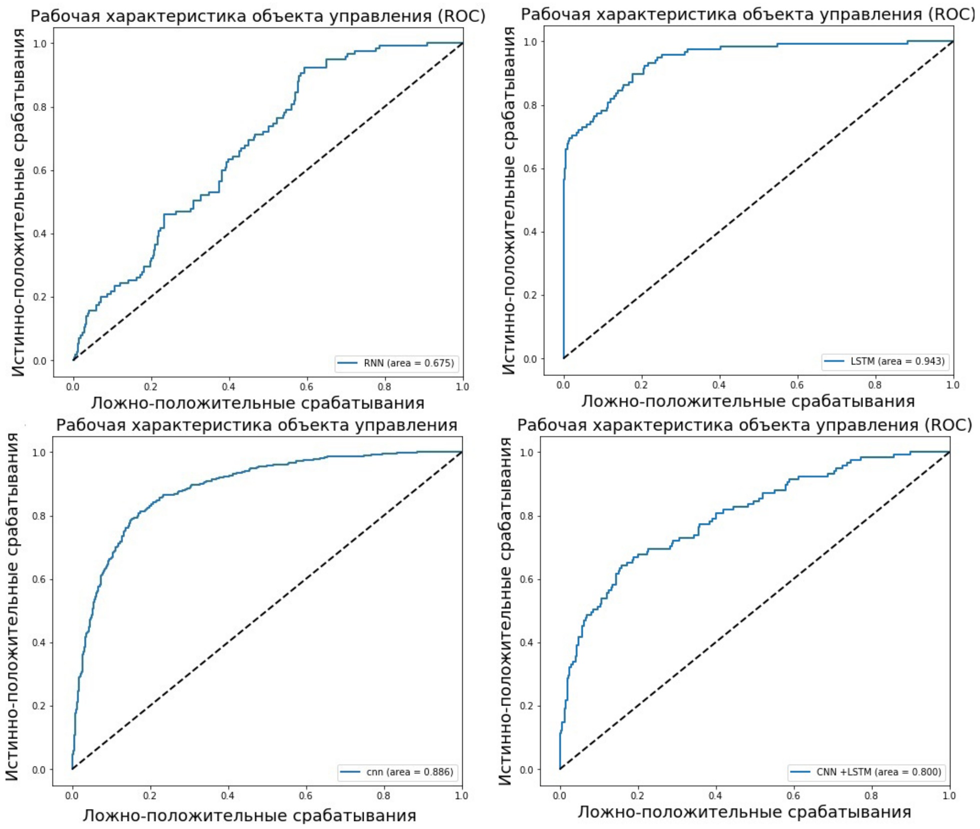



*Рис. 3. Результаты работы нейросетевых подходов для нештатной ситуации, связанной с черными точками на поверхности пленки*

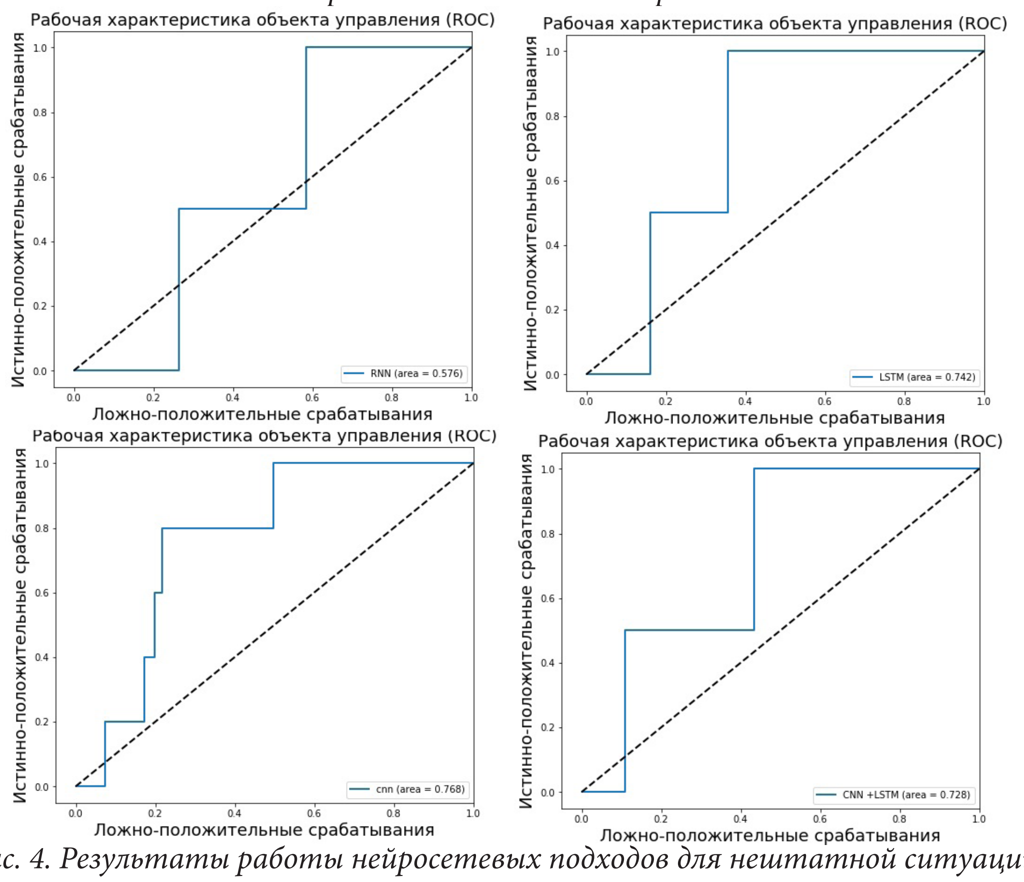



*Рис. 4. Результаты работы нейросетевых подходов для нештатной ситуации, связанной с дырками на поверхности пленки*

ной системы прогнозирования (библиотеки методов интеллектуального анализа данных) по обработке таких дефектов пленки, как черные точки и дырки. Система интеллектуального анализа данных позволила подобрать подходящий метод интеллектуального данных для каждого типа дефектов. Если важна точность модели и при этом нештатная ситуация имеет постоянный характер, то лучше использовать нейронную сеть с долгой краткосрочной памятью. Если же нештатная ситуация, связанная с данным типом дефекта, возникает редко, то необходимо использовать сверточную сеть.

## Литература


1. *Kohlert, C.* Mathematical Methods in Plastics Processing / C. Kohlert, S. Steinmeier, M. Kohlert // Математические методы в технике и технологиях : сборник трудов международной научной конференции. – В 12 т. Т. 8. – Санкт-Петербург : Изд-во Политехн. ун-та, 2017. – С. 14–21.

2. *Kohlert, M.* Applied Industry 4.0 in the Polymer Film Industry / M. Kohlert, O. Hissmann // Proceedings of the 16th TAPPI European PLACE conference. – Basel, 2017. – P. 183–190.

3. *Kohlert, M.* Advanced Polymeric Film Production Data Analysis and Process Optimization by Clustering and Classification Methods / M. Kohlert, A. König // Frontiers in artificial intelligence and applications. – 2012. – Vol. 243. – P. 1953–1961.

4. *Kohlert, M.* Advanced Process Data Analysis and On-Line Evaluation for Computer-Aided Monitoring in Polymer Film Industry / M. Kohlert, T. B. Chistyakova // Известия СПбГТИ(ТУ). – 2015. – № 29. – С. 83–88.

5. Intellectual Analysis System of Big Industrial Data for Quality Management of Polymeric Films / T. Chistyakova, M. Teterin, A. Razygraev, C. Kohlert C // Lecture notes in computer science. – 2016. – Vol. 9812. – P. 234–242.

6. Интеллектуальные системы технологического проектирования, управления и обучения в многоассортиментном производстве гранулированных пористых материалов из тонкодисперсных частиц / Т. Б. Чистякова, Ю. И. Шляго, И. В. Новожилова, Н. В. Мальцева. – Санкт-Петербург : Изд-во СПбГТИ(ТУ), 2012. – 324 с.

7. *Davis, J.* The Relationship between Precision-Recall and Roc Curves / J. Davis, M. Goadrich // Proceedings of the 23rd international conference on machine learning. – New York : Association for Computing Machinery, 2006. – P. 233–240.

УДК 004.891.3:678.027.3

# КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА ВИБРАЦИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ЭКСТРУЗИОННОГО ОБОРУДОВАНИЯ В ПРОИЗВОДСТВАХ МНОГОАССОРТИМЕНТНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК

**М. М. Фозилов, Т. Б. Чистякова, А. Н. Полосин**

*Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)*

**Аннотация.** Компьютерная система (КС) вибрационного анализа для оценки работоспособности экструзионного оборудования (ЭО) позволяет своевременно выявить нештатную ситуацию, связанную с повышенной вибрацией привода шнека экструдера, определить ее истинную причину, заключающуюся в неисправности соответствующего элемента привода, и сформировать совет производственному персоналу по устранению неисправности. КС настраивается на различные типы и геометрические параметры экструдеров, применяемых в экструзионных и экструзионно-каландровых производствах многоассортиментных полимерных пленок (ПП). Алгоритм анализа сигналов о вибрациях включает этапы получения спектра сигнала путем применения прямого дискретного преобразования Фурье и определения неисправного элемента привода в результате анализа тенденции изменения амплитуд гармоник сигнала на частотах, характерных для неисправных элементов различных типов. КС интегрирована в единую систему управления качеством многоассортиментных ПП. Результаты тестирования по данным экструдеров производств ПП на заводах в России и Германии подтвердили работоспособность КС. Применение КС позволяет сохранить ресурс ЭО, увеличить временные периоды между его остановками, сократить время ремонта.
**Ключевые слова:** компьютерная система, базы данных, база правил, прямое дискретное преобразование Фурье, анализ сигналов о вибрациях, работоспособность оборудования, неисправности элементов приводов, экструдеры, упорные подшипники, полимерные пленки.

## Введение

Ресурсосберегающее управление современными крупнотоннажными ($\geq 1000$ кг/ч), непрерывными экструзионными и экструзионно-каландровыми производствами многоассортиментных упаковочных ПП для фармацевтической и пищевой промышленности заключается в обеспечении как требуемых потребительских характеристик качества продукции (толщины, равнотолщинности, внешнего вида, цвета и др.), так и работоспособного состояния ЭО, которое определяет производительность процесса и сроки выполнения производственных заказов. Сложность обеспечения бесперебойной работы экструдеров обусловлена множеством их типов, отличающихся числом и характером движения шнеков (одношнековые, осциллирующие, двухшнековые), и марок, отличающихся геометрическими параметрами, широким ассортиментом производимых ПП, сложными связями между параметрами состояния и показателями надежности (безотказности, долговечности) ЭО, отсутствием системы мониторинга всех параметров состояния ЭО. В процессе эксплуатации происходит износ элементов ЭО, что требует проведения профилактического и корректирующего технического обслуживания для поддержания экструдеров в работоспособном состоянии и снижения вероятности их отказов, которые могут привести к остановке производства. «Узким» местом с точки зрения обеспечения работоспособности ЭО является привод шнека/шнеков, состоящий из электродвигателя (как правило, переменного тока), редуктора и блока упорных подшипников, воспринимающих осевое давление шнека, величина которого определяется давлением расплавленного полимера на входе в головку экструдера. Проблемы привода проявляются в изменении частоты вращения шнека/шнеков и/или в неспособности создания необходимого вращающего момента. Эти проблемы отрицательно сказываются на производительности экструдера и качестве экструдата. Основными неисправностями элементов привода, приводящими к остановке производственной линии, являются: неправильное соединение обмоток статора электродвигателя, неисправности ротора электродвигателя, дефекты редуктора и упорных подшипников. Статистический анализ неисправностей элементов привода показал, что около 40 % неисправностей приходится на упорные подшипники, до 40 % — на статор электродвигателя, 10 % — на ротор электродвигателя, а оставшиеся 10 % включают неисправности других элементов [1, 2]. Неисправности в подшипниковом узле и редукторе часто сопровождаются повышенной вибрацией корпуса привода, которая свидетельствует о механических неполадках, приводящих в итоге к отказу экструдера. Мониторинг состояния основных элементов привода (вращающихся деталей подшипников, находящихся в зацеплении зубьев шестерней редуктора) по результатам анализа сигналов о вибрациях позволяет предупредить производственный персонал о возможных проблемах с ними задолго до их разрушения, вызванного износом [3]. Так, проблема в зубчатой передаче может быть определена еще за месяц до выхода ее из строя. Это позволяет существенно снизить затраты на ремонт и простои ЭО. Одни сутки простоя каждой производственной линии приносят около 3 млн. рублей убытков из-за непроизведенной ПП массой ~ 24000 кг. С другой стороны, мониторинг вибраций позволяет проводить техническое обслуживание тогда, когда оно действительно необходимо, не тратя впустую время на разборку привода экструдера, в котором не требуется что-либо заменять. Поэтому одним из основных направлений инновационного развития промышленных производств ПП является модернизация систем компьютерной автоматизации, обработки информации и управления производством, которые основываются как на технологиях многометодного интеллектуального анализа больших производственных данных [4], так и на детерминированных математических моделях (ММ) физических процессов в ЭО, применяемых для расчета неконтролируемых на производстве параметров состояния процессов экструзии и показателей качества экструдата [5]. Эта модернизация состоит в разработке и интеграции в системы управления подсистем мониторинга вибраций ЭО, основными элементами которых являются датчик вибраций, закрепляемый на корпусе привода, и модуль анализа сигналов о вибрациях. Например, разработана подсистема мониторинга специально для зубчатых шестерней редуктора, которая, используя методику высокочастотного спектрального анализа вибраций, графически показывает, какой из зубьев шестерни имеет ямки, выкрошился или разрушился [6]. Однако более трети неисправностей приходится на подшипниковый узел. Если экструдер эксплуатируется при резких колебаниях давления или/и аномально высоких давлениях в головке (> 35 МПа), ресурс узла, несущего осевую нагрузку, значительно сокращается особенно при высоких частотах вращения шнека/шнеков ($\gg$ 100 об/мин). Соответствующая зависимость имеет степенной характер с показателем степени не менее трех (в зависимости от типа подшипника) [7]. В связи с этим необходимо осуществлять анализ сигналов о вибрациях, позволяющий своевременно определять и неисправности деталей подшипников для обеспечения требуемого срока службы подшипников.

Таким образом, актуальной задачей является разработка перенастраиваемой на характеристики объекта КС мониторинга вибраций и анализа работоспособности ЭО, которая позволяет своевременно определить наличие повышенной вибрации корпуса привода шнека экструдера, установить неисправность соответствующего элемента привода, приводящую к повышенной вибрации, и сформировать совет производственному персоналу по устранению неисправности. Применение такой КС для минимизации простоев ЭО является экономически целесообразным, учитывая высокую стоимость простоев промышленных экструдеров.

## 1. Постановка задачи вибрационного анализа. Архитектура компьютерной системы

Анализ характеристик экструдеров, применяемых в экструзионных и экструзионно-каландровых производствах плоских и рукавных упаковочных ПП различных типов, позволил построить информационное описание ЭО как объекта управления, которое представляется в виде совокупности входных параметров $X$, управляющих воздействий $U$ и выходных параметров $Y$ (рис. 1). К входным параметрам относятся: $T_{film}$ — тип производимой ПП; $\Gamma_{extrud} = \{M_{extrud}, D, d, \beta, d_b, n_b\}$ — геометрические параметры экструдера ($M_{extrud}$ — марка экструдера, определяемая его типом, диаметром и относительной длиной шнека; $D$ — диаметр внешнего кольца подшипника привода, м; $d$ — диаметр внутреннего кольца подшипника, м; $\beta$ — угол контакта, рад; $d_b$ — диаметр тела качения подшипника (например, шарика шарикового подшипника), м; $n_b$ — число тел качения); $U_{M0}$, $U_M$ — номинальное и текущее напряжение на электродвигателе привода, В; $N_{Ms}$, $S_{M0}$ — синхронная частота вращения ($с^{-1}$) ротора электродвигателя и номинальное скольжение, характеризующее величину отклонения рабочей частоты вращения от синхронной (%); $k_M$ — коэффициент загрузки электродвигателя. Управляющим воздействием на экструдер является частота вращения шнека/шнеков $N$ ($с^{-1}$). На выходе контролируется ускорение вибрации корпуса привода $a_{MD}$ ($м/с^2$).

На основе построенного описания сформулирована задача вибрационного анализа:

для заданных входных параметров $X$ и управляющих воздействий $U$ выполнить анализ сигнала об ускорении вибрации $a_{MD}$, получаемого на интервале времени $t_0 \le t \le t_K$, путем сравнения текущих значений ускорения $a_{MD}$ с предельно допустимым значением $a_{MD}{}^{\max}$ и идентифицировать нештатную ситуацию $St$, связанную с повышенной вибрацией корпуса привода, если выполняется условие $|a_{MD}| > a_{MD}{}^{\max}$;

при возникновении нештатной ситуации построить спектр сигнала об ускорении, который представляет распределение амплитуд гармоник, составляющих сигнал, по частотам;

рассчитать частоты, характерные для неисправных элементов привода всех типов;

выполнить анализ тенденции изменения амплитуд гармоник сигнала об ускорении вибрации на каждой частоте, соответствующей характеристической частоте, и определить элемент привода, неисправность которого является причиной $Rs$ повышенной вибрации;

сформировать совет $Rc$, содержащий последовательность действий производственного персонала по устранению неисправности.

Инструментом решения задачи является разработанная КС, архитектура которой представлена на рис. 1. Ключевыми компонентами КС являются датчик вибраций, позволяющий измерить ускорение вибрации корпуса привода экструдера, и программный комплекс (ПК), позволяющий выполнить анализ полученных сигналов. ПК включает подсистему анализа, информационную подсистему, библиотеку ММ для расчета характеристических частот, подсистему визуализации, модуль редактирования и пополнения баз данных, базы знаний (БЗ) и библиотеки ММ, интерфейсы оператора ЭО и администратора ПК. Подсистема анализа позволяет идентифицировать нештатную ситуацию, связанную с повышенной вибрацией, построить спектр сигнала, рассчитать частоты, характерные для неисправных элементов привода различных типов, определить неисправный элемент и сформировать совет по устранению неисправности. Для решения этих задач подсистема анализа взаимодействует с информационной подсистемой, включающей базу данных (БД) типов ПП, геометрических и электрических параметров экструдеров, БД контролируемых и рассчитываемых параметров состояния ЭО, в том числе параметров вибрации и электрических параметров, БЗ неисправностей элементов привода. Базы данных построены на основе реляционной модели производственных данных, БЗ — на основе продукционно-фреймовой модели сложно структурированных знаний экспертов производства о неисправностях элементов привода, являющихся причинами повышенной вибрации. Так, основными неисправностями упорных подшипников являются неисправности

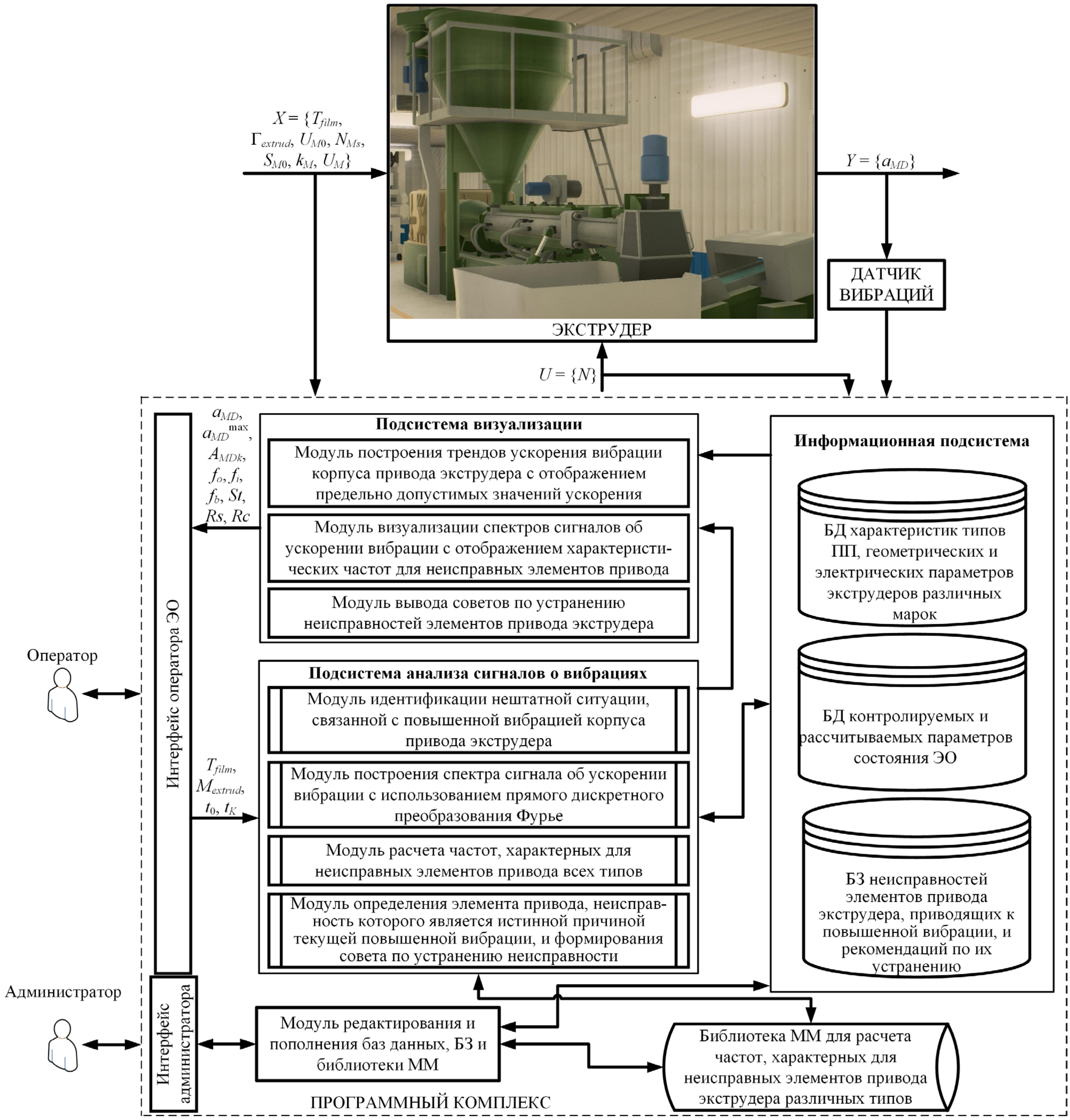



*Рис. 1. Архитектура КС вибрационного анализа экструдеров*

(дефекты, повреждения) деталей, из которых состоят подшипники: неисправность внешнего кольца, неисправность внутреннего кольца, неисправность тел качения (шариков или роликов в зависимости от типа подшипника), комбинация неисправностей деталей. Предметные знания о конкретных неисправностях и рекомендациях по устранению представляются в виде фреймов-примеров, полученных на основе фрейма-прототипа.

Спектр дискретизированного по времени сигнала об ускорении вибрации определяется путем применения прямого дискретного преобразования Фурье [8]:

$$\alpha_{MDk} = \sum_{r=0}^{R-1} a_{MDr} \exp\left(-i^* 2\pi f_k t_r\right) \overset{\text{Формула Эйлера}}{=} \sum_{r=0}^{R-1} a_{MDr}\left[\cos\left(2\pi f_k t_r\right) - i^* \sin\left(2\pi f_k t_r\right)\right], \quad k = \overline{0, R-1}, \quad (1)$$

где $\alpha_{MDk}$ — комплексная амплитуда $k$-й гармоники сигнала об ускорении вибрации, м/с$^2$; $R$ — число отсчетных значений ускорения вибрации за заданный период (длительность сигнала) $\Theta$; $a_{MDr}$ — значения (дискретные отсчеты) ускорения вибрации $a_{MD}$ в моменты времени $t_r = r\Delta t,\ r = \overline{0, R-1}$ ($\Delta t$ — интервал дискретизации аналогового сигнала о вибрации, зависящий от характера сигнала, требуемой точности его временной дискретизации и характеристик применяемого дискретизатора); $i^*$ — мнимая единица; $f_k = k/\Theta$ — частота $k$-й гармоники сигнала об ускорении, Гц.

Амплитуда $k$-й гармоники $A_{MDk}$ определяется как модуль комплексной амплитуды $\alpha_{MDk}$, выражаемой формулой (1):

$$A_{MDk} = \sqrt{\operatorname{Re}\alpha_{MDk}{}^2 + \operatorname{Im}\alpha_{MDk}{}^2} \Big/ R, \tag{2}$$

где действительная и мнимая части комплексной амплитуды соответственно равны

$$\operatorname{Re}\alpha_{MDk} = \sum_{r=0}^{R-1} a_{MDr} \cos\left(2\pi f_k t_r\right) = \sum_{r=0}^{R-1} a_{MDr} \cos\left(2\pi kr/R\right), \tag{3}$$

$$\operatorname{Im}\alpha_{MDk} = -\sum_{r=0}^{R-1} a_{MDr} \sin\left(2\pi f_k t_r\right) = -\sum_{r=0}^{R-1} a_{MDr} \sin\left(2\pi kr/R\right). \tag{4}$$

Каждый исправный элемент привода экструдера вибрирует со своей собственной частотой, которая характеризует работоспособное состояние привода. Когда возникает какая-либо неисправность, частотные компоненты в спектре изменяются и дают отчетливую картину колебаний. Каждый неисправный элемент привода имеет характерную для него частоту, которая зависит от геометрических параметров элемента. Например, каждая деталь упорного подшипника (внешнее и внутреннее кольцо, тела качения) имеет свою частоту вибрации, характеризующую ее неисправность. Поэтому для определения неисправного элемента привода по построенному на основе формул (2)–(4) распределению амплитуд гармоник $A_{MDk}$ по частотам $f_k$ необходимо рассчитать характеристические частоты. Для этого в КС интегрирована библиотека ММ, позволяющих оценить частоты вибраций элементов привода при возникновении в них неисправностей. Так, ММ для расчета характеристических частот неисправных деталей шарикоподшипников, внутреннее кольцо которых вращается, а внешнее кольцо неподвижно, имеет следующий вид [9–11]:

$$f_o = 0{,}5 n_b N_{MD} \left[1 - \left(d_b/D_m\right)\cos\beta\right], \tag{5}$$

$$f_i = 0{,}5 n_b N_{MD} \left[1 + \left(d_b/D_m\right)\cos\beta\right], \tag{6}$$

$$f_b = 0{,}5 N_{MD} \left[1 - \left(d_b/D_m\right)\cos\beta\right], \tag{7}$$

где $f_o$, $f_i$, $f_b$ — частоты, характерные для неисправностей соответственно внешнего кольца, внутреннего кольца и тела качения шарикоподшипника, Гц; $N_{MD}$ — частота вращения выходного вала привода (как правило, выходного вала редуктора), в точке прикрепления шнека к которому располагается подшипниковый узел, с$^{-1}$; $D_m = 0{,}5\left(D + d\right)$ — диаметр окружности, проходящей через оси всех тел качения (шариков), м.

Частота вращения выходного вала привода, используемая в ММ (5)–(7), определяется частотой вращения ротора электродвигателя $N_M$ с учетом коэффициента редукции. Зависимость частоты вращения ротора асинхронного электродвигателя от напряжения на электродвигателе $U_M$ рассчитывается по следующей формуле:

$$N_M = \left[1 - k_M \left(U_{M0}/U_M\right)^2 S_{M0}\right] N_{Ms}, \tag{8}$$

Определение элемента привода, требующего замены, осуществляется путем анализа рассчитанных амплитуд гармоник и характеристических частот с использованием управляющих знаний, представляемых в виде продукционных правил. Примеры правил:

ЕСЛИ (существует нештатная ситуация «Повышенная вибрация в приводе экструдера») $\wedge$ (амплитуды гармоник сигнала об ускорении вибрации $A_{MDl}$ с частотами $f_l = lf_o$, $l = \overline{1, m_o}$ возрастают), ТО (неисправным элементом привода является подшипниковый узел, в котором имеет место механический дефект внешнего кольца упорного подшипника);

ЕСЛИ (существует нештатная ситуация «Повышенная вибрация в приводе экструдера») $\wedge$ (амплитуды гармоник сигнала об ускорении вибрации $A_{MDq}$ с частотами $f_q = qf_i$, $q = \overline{1, m_i}$ возрастают), ТО (неисправным элементом привода является подшипниковый узел, в котором имеет место механический дефект внутреннего кольца упорного подшипника).

Продукционные правила применяются также для формирования советов производственному персоналу по устранению неисправностей. Например: ЕСЛИ (существует нештатная ситуация «Повышенная вибрация в приводе экструдера») $\wedge$ (причина «Механические дефекты деталей упорного подшипника» является истинной причиной возникновения нештатной ситуации), ТО (рекомендация по устранению неисправности имеет вид «Остановить работу экструдера, проверить и заменить неисправный упорный подшипник»).

Информационная подсистема позволяет настраивать КС на различные типы ПП $T_{film}$ и марки экструдеров $M_{extrud}$, отличающиеся геометрическими и электрическими параметрами.

Подсистема визуализации результатов вибрационного анализа позволяет отображать тренды ускорения вибрации за заданный интервал времени с предельно допустимыми значениями ускорения, спектры сигналов о вибрациях с характеристическими частотами, выводить сформированные советы операторам ЭО по устранению повышенной вибрации.

ПК КС разработан с учетом принципов системного единства, совместимости, развития и реализован на платформе .NET Framework с использованием объектно-ориентированного языка программирования C#. Информационное обеспечение ПК разработано в СУБД SQL Server. Это позволило обеспечить целостность ПК (за счет интеграции его компонентов на основе единого банка данных), открытость его архитектуры и интегрируемость КС в автоматизированную систему обработки больших производственных данных и управления качеством многоассортиментных ПП с учетом фактического состояния ЭО.

## 2. Результаты тестирования компьютерной системы

КС протестирована по данным ЭО промышленных производств плоских (на основе непластифицированного поливинилхлорида) и рукавных (на основе полиэтилена низкой плотности) ПП для упаковки фармацевтических препаратов и пищевых продуктов на заводах в России и Германии. Данные для тестирования собраны с помощью акселерометра MMA845X за три дня производства. На рис. 2 представлен построенный КС тренд ускорения вибрации корпуса привода экструдера с отображением различных предельно допустимых значений ускорения 1, 2, 3. Когда ускорение вибрации превышает предельно допустимое значение, КС идентифицирует нештатную ситуацию, связанную с повышенной вибрацией. Для определения истинной причины повышенной вибрации, связанной с неисправностью одного из элементов привода, КС осуществляет построение спектра сигнала о вибрации и рассчитывает характеристические частоты, на которых анализируются амплитуды (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что амплитуды гармоник сигнала о вибрации с частотами, равными $f_i$ и $2f_i$, увеличиваются с 0,23 м/с$^2$ (при $f_i$) до 0,33 м/с$^2$ (при $2f_i$). Это свидетельствует о наличии механического дефекта внутреннего кольца упорного подшипника, приводящего к повышенной вибрации. КС выводит оператору экструдера сообщение, содержащее лингвистическое и информационное описание нештатной ситуации и ее истинной причины, а также рекомендацию по устранению нештатной ситуации (рис. 4).

Результаты тестирования подтвердили работоспособность КС по обработке сигналов об ускорении вибрации, получаемых с ЭО, и экспертных знаний о неисправностях элементов приводов при решении задачи вибрационного анализа для оценки работоспособности ЭО.

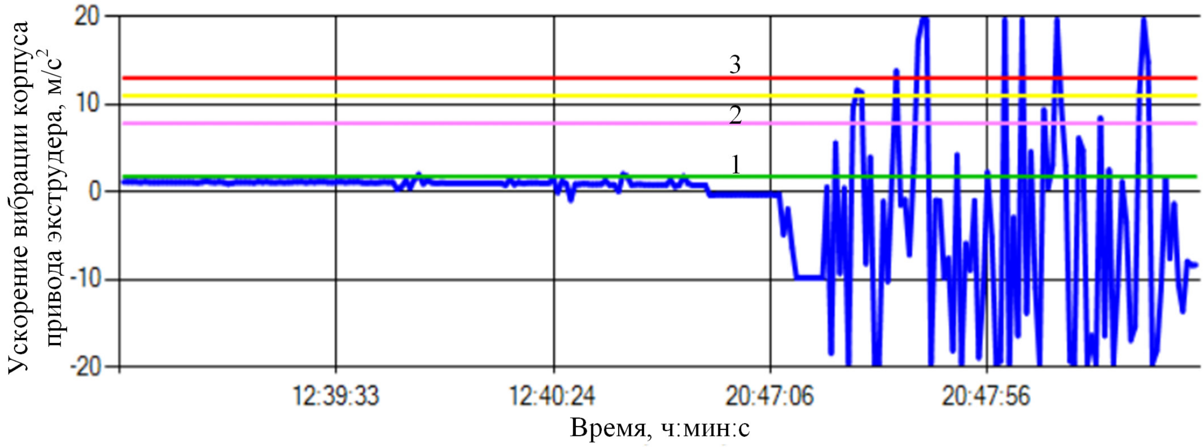



*Рис. 2. Тренд ускорения вибрации корпуса привода экструдера с пороговыми значениями*

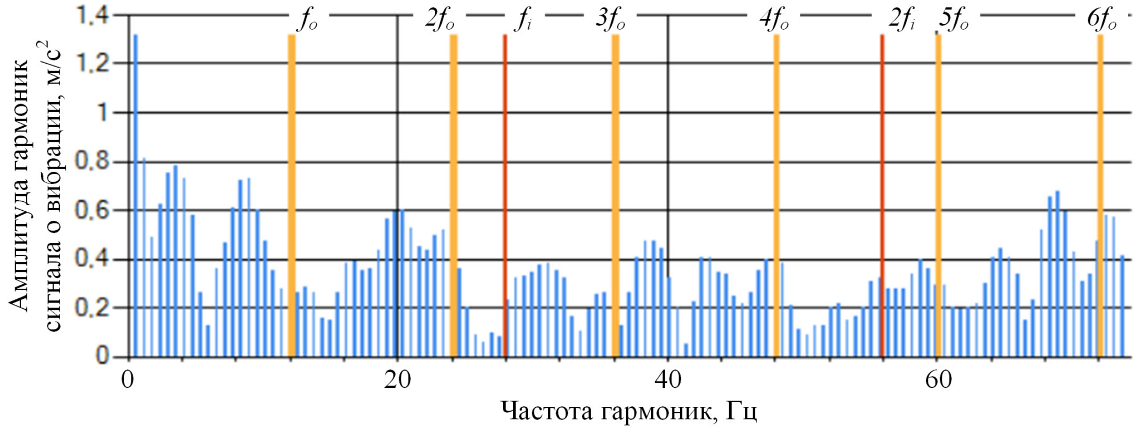
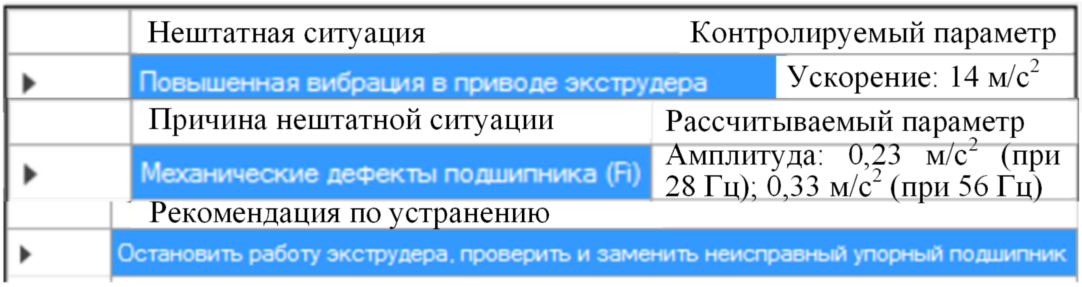



*Рис. 3. Спектр сигнала о вибрации и частоты, характерные для неисправностей внешнего и внутреннего подшипникового кольца*



| Нештатная ситуация | Контролируемый параметр |
|---|---|
| Повышенная вибрация в приводе экструдера | Ускорение: 14 м/с$^2$ |
| **Причина нештатной ситуации** | **Рассчитываемый параметр** |
| Механические дефекты подшипника (Fi) | Амплитуда: 0,23 м/с$^2$ (при 28 Гц); 0,33 м/с$^2$ (при 56 Гц) |
| **Рекомендация по устранению** | |
| Остановить работу экструдера, проверить и заменить неисправный упорный подшипник | |

*Рис. 4. Результат идентификации нештатной ситуации, определения истинной причины ее возникновения и формирования рекомендации по устранению*

## Заключение

Разработана перенастраиваемая на характеристики экструдеров проблемно-ориентированная КС вибрационного анализа для оценки работоспособности ЭО в производствах многоассортиментных ПП, которая позволяет выполнять спектральный анализ сигналов об ускорении вибрации, получаемых с экструдера, определять элемент привода экструдера, неисправность которого вызывает повышенную вибрацию, и формировать совет производственному персоналу по устранению неисправности. Результаты тестирования по данным экструдеров промышленных производств ПП на заводах в России и Германии подтвердили работоспособность КС. Интеграция КС в единую систему обработки больших производственных данных и управления качеством многоассортиментных ПП позволяет сохранить ресурс ЭО, увеличить временные периоды между остановками экструдеров и производительность линий по производству ПП, сократить время ремонта за счет своевременной диагностики неисправностей элементов приводов ЭО, приводящих к повышенной вибрации.

**Литература**


1. *Thomson, W. T.* On-Line Motor Current Signature Analysis Prevents Premature Failure of Large Induction Motor Drives / W. T. Thomson // ME – Maintenance & asset management. – 2009. – V. 24, No 5. – P. 30–35.

2. *Kar, C.* Monitoring Gear Vibrations Through Motor Current Signature Analysis and Wavelet Transform / C. Kar, A. R. Mohanty // Mechanical systems and signal processing. – 2006. – V. 20, iss. 1. – P. 158–187.

3. Condition Monitoring and Diagnostics of an Extruder Motor and Its Gearbox Vibration Problem / S. Noroozi, A. G. A. Rahman, M. Dupac [et al.] // Insight: Non-destructive testing and condition monitoring. – 2016. – V. 58, iss. 2. – P. 101–107.

4. *Kohlert, M.* Advanced Process Data Analysis and On-Line Evaluation for Computer-Aided Monitoring in Polymer Film Industry / M. Kohlert, T. B. Chistyakova // Известия СПбГТИ(ТУ). – 2015. – No 29. – С. 83–88.

5. *Polosin, A. N.* The Mathematical Models and Program Complex for Synthesis of Reciprocating Extruders with Adjustable Configurations / A. N. Polosin, T. B. Chistyakova // Journal of physics: Conference series. – 2019. – V. 1202, iss. 1. – 012007.

6. *Раувендааль, К.* Выявление и устранение проблем в экструзии / К. Раувендааль, М. д. Пилар Норьега Е., Х. Харрис. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Профессия, 2011. – 367 с.

7. *Rauwendaal, C.* Polymer extrusion / C. Rauwendaal. – 5th ed. – Munich : Hanser, 2014. – 950 p.

8. *Aherwar, A.* Vibration Analysis Techniques for Gearbox Diagnostic: A Review / A. Aherwar, S. Khalid // International journal of advanced engineering technology. – 2012. – V. 3, iss. 2. – P. 4–12.

9. Vibration Analysis of Rolling Element Bearings Defects / H. Saruhan, S. Sarıdemir, A. Çiçek A., İ. Uygur // Journal of applied research and technology. – 2014. – V. 12, No 3. – P. 384–395.

10. *Kumar, V. R.* Detection of Gear Fault Using Vibration Analysis / V. R. Kumar, P. V. Vara Prasad, G. Diwakar // International journal of research in engineering and science. – 2015. – V. 3, iss. 2. – P. 45–53.

11. *Kulkarni, S.* Experimental Investigation for Distributed Defects in Ball Bearing using Vibration Signature Analysis / S. Kulkarni, S. B. Wadkar // Procedia engineering. – 2016. – V. 144. – P. 781–789.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** – д-р физ.-мат. наук, проф., head of department, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, e-mail: durdiev65@mail.ru

**Nuriddinov Javlon Zafarovich** – Teacher, Бухарский государственный университет, e-mail: j.zafarovich@mail.ru

**Petrova Darya Michaiylovna** – Master Student, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, e-mail: trebelle@mail.ru

**Zhumaev Zhonibek Zamolovich** – PhD student, Бухарский государственный университет, e-mail: jonibekjj@mail.ru

**Zvolinsky Roman Evgenevich** – student, Воронежский государственный университет, e-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com

**Абдул Ахад Ариан** – аспирант, Белгородский государственный университет, e-mail: sitnik@bsu.edu.ru

**Абдурагимов Гусен Эльдерханович** – канд. физ.-мат. наук, доц., Доцент кафедры прикладной математики, Дагестанский государственный университет, e-mail: gusen_e@mail.ru

**Аблаев Фарид Мансурович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., Заведующий кафедрой теоретической кибернетики, Казанский приволжский федеральный университет

**Абрамов Геннадий Владимирович** – д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой МО ЭВМ, Воронежский государственный университет

**Абрамов Дмитрий Геннадьевич** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: Abram.abramov-dima@yandex.ru

**Авдеева Наталия Владимировна** – магистрант 2-го года обучения кафедры информационных систем и технологий, Северо-Кавказский федеральный университет

**Авдеева Татьяна Ивановна** – заведующий лабораторным комплексом, Северо-Кавказский федеральный университет, e-mail: tavdeeva@ncfu.ru

**Авхимович Николь Вадимовна** – студентка, Тверской государственный университет, e-mail: nicoleavkhimovich@mail.ru

**Агафонцев Михаил Владимирович** – инженер, Томский государственный университет

**Азарнова Татьяна Васильевна** – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, Воронежский государственный университет, e-mail: ivdas92@mail.ru

**Азиз Аммар Имад** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: azeez548@gmail.com

**Алашеева Елена Александровна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры ВМ, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, e-mail: allena_81@mail.ru

**Александрова Екатерина Евгеньевна** – аспирант 1-го года обучения кафедры механики и математического моделирования, Воронежский государственный университет

**Алехин Роман Юрьевич** – Аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: chevron19941@gmail.com

**Алкади Хамса Мохамад** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: hamsaphd.hassan44@gmail.com

**Ананьев Александр Владиславович** – д-р техн. наук, старший научный сотрудник, ОАО «Научно-производственное предприятие «Полет», г. Нижний Новгород, e-mail: sasha303_75@mail.ru

**Анахаев Кайсын Кошкинбаевич** – аспирант, Кабардино - Балкарский государственный аграрный университет, Нальчик, Россия., e-mail: k.anahaev.k @mail.ru

**Анахаев Кошкинбай Назирович** – д-р техн. наук, проф., главный научный сотрудник, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук. Нальчик, Россия., e-mail: anaha13@mail.ru

**Андреева Елена Аркадьевна** – канд. физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры компьютерной безопасности и математических методов управления, Тверской государственный университет, e-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru

**Андрусенко Юлия Алексеевна** – документовед, Северо-Кавказский федеральный университет, e-mail: yulihka85@mail.ru

**Аннакулова Гулсара Кучкаровна** – канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Институт Механики и сейсмостойкости сооружений Академии Наук Республики Узбекистан, e-mail: annaqulova_g@mail.ru

**Антошкин Александр Денисович** – Магистрант, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, e-mail: antoshkin.alexandr@gmail.com

**Арахов Никита Денисович** – студент, Воронежский государственный университет

**Арзамасцев Александр Анатольевич** – д-р техн. наук, проф., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: arz_sci@mail.ru

**Аристова Екатерина Михайловна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: pmim@yandex.ru

**Архипов Алексей Евгениевич** – аспирант, Тамбовский государственный технический университет, e-mail: alexeiarh@gmail.com

**Астапов Юрий Владимирович** – аспирант, Тульский государственный университет, e-mail: ast3x3@gmail.com

**Астахова Ирина Федоровна** – д-р техн. наук, проф., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: astachova@list.ru

**Асхабов Султан Нажмудинович** – д-р физ.-мат. наук, доц., профессор, Чеченский государственный университет, e-mail: askhabov@yandex.ru

**Атаян Ася Михайловна** – аспирант, Донской государственный технический университет, e-mail: atayan24@mail.ru

**Афанасова Мария Сергеевна** – младший научный сотрудник, Воронежский государственный педагогический университет, e-mail: marya.afanasowa@ya.ru

**Ахметьянова Альбина Ильшатовна** – аспирант, Башкирский государственный университет, e-mail: ai-albina@mail.ru

**Баглай Дмитрий Иванович** – студент кафедры систем автоматизированного проектирования и управления, Санкт-Петербургский государственный технологический институт, e-mail: dbaglay@list.ru

**Барановский Евгений Сергеевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: esbaranovskii@gmail.com

**Батаронов Игорь Леонидович** – канд. физ.-мат. наук, проф., профессор, Воронежский государственный технический университет, e-mail: ibat@mail.ru

**Батманова Анна Сергеевна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: anybat@yandex.ru

**Батуро Алексей Николаевич** – канд. техн. наук, заместитель начальника академии по научной работе – начальник научно-технического центра, Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России

**Бацких Анна Вадимовна** – адъюнкт института, Воронежский институт МВД России, e-mail: svatikova96@mail.ru

**Баядилов Тимур Валерьевич** – Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий

**Белов Сергей Павлович** – д-р техн. наук, проф., проф. кафедры, Белгородский университет кооперации, экономики и права, e-mail: belovssergei@gmail.com

**Белова Юлия Валериевна** – ассистент, Донской государственный технический университет, e-mail: yvbelova@yandex.ru

**Белозуб Владимир Антонович** – ассистент кафедры информатики, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, e-mail: disstroier@mail.ru

**Белокуров Владимир Петрович** – д-р техн. наук, проф., Профессор, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, e-mail: opbd_vglta@mail.ru

**Белокуров Сергей Владимирович** – д-р техн. наук, проф., Профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: opbd_vglta@mail.ru

**Беляев Александр Константинович** – старший научный сотрудник отдела разработки центра развития информационных технологий, Институт федеральной службы исполнения наказаний России, e-mail: AlexBel3101@gmail.com

**Беляева Александра Михайловна** – Бакалавр, Воронежский государственный университет, e-mail: ambelyaeva99@gmail.com

**Бирючинская Татьяна Яковлевна** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры экономического анализа, статистики и прикладной математики, Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, e-mail: bir_tat@mail.ru

**Богатов Андрей Владимирович** – аспирант, Самарский университет, e-mail: andrebogato@mail.ru

**Богачев Иван Викторович** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Южный федеральный университет, e-mail: bogachev89@yandex.ru

**Богачева Виктория Эдуардовна** – магистрант, Тульский государственный университет, e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

**Богданова Софья Борисовна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Московский авиационный институт, e-mail: sonjaf@list.ru

**Богер Андрей Александрович** – канд. техн. наук, доц., Доцент, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, e-mail: a-boger@yandex.ru

**Бокадаров Станислав Александрович** – канд. техн. наук, старший научный сотрудник организационно-научного и редакционного отдела, Институт федеральной службы исполнения наказаний России

**Болотова Светлана Юрьевна** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры МО ЭВМ, Воронежский государственный университет

**Бондаренко Олег Владимирович** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: oleg.bondarenko.2000@list.ru

**Бондаренко Юлия Валентиновна** – д-р техн. наук, доц., профессор кафедры математических методов исследования операций, Воронежского государственного университета, Воронежский государственный университет, e-mail: bond.julia@mail.ru

**Борисенко Арина Юрьевна** – студентка, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, e-mail: borisenko.viky@yandex.ru

Б**орисенков Дмитрий Васильевич** – канд. техн. наук, доц., главный специалист, ЗАО НПП РЕЛЭКС, e-mail: xuser@relex.ru

**Бородина Елена Александровна** – канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель, Воронежский государственный университет, e-mail: eaborodina@inbox.ru

**Брусенцев Иван Максимович** – магистрант, Воронежский государственный университет, e-mail: ivanbrusentsev@gmail.com

**Будкеева Екатерина Александровна** – аспирант 4-го года обучения, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, e-mail: katya_budkeeva@mail.ru

**Буланов Сергей Георгиевич** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедры информатики, Ростовский государственный экономический университет, e-mail: bulanovtgpi@mail.ru

**Булгакова Дарья Дмитриевна** – бакалавр кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий ПММ, Воронежский государственный университет

**Бунтов Алексей Евгеньеви**ч – канд. физ.-мат. наук, преподаватель кафедры Кадровой и организационной и мобилизационной работы, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, e-mail: alexey.buntov@mail.ru

**Бурлуцкая Мария Шаукатовна** – д-р. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: bmsh2001@mail.ru

**Бурируев Алексей Михайлович** – инженер, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

**Бусарин Эдуард Николаевич** – канд. техн. наук, доц., Доцент, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, e-mail: busarin.eduard@mail.ru

**Бухаров Евгений Олегович** – канд. техн. наук, начальник научно-исследовательского управления, Краснодарское высшее военное училище имени генерала армии С. М. Штеменко, e-mail: coster@list.ru

**Буховец Алексей Георгиевич** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры экономического анализа, статистики и прикладной математики, Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, e-mail: abuhovets@mail.ru

**Бушнева Марина Андреевна** – магистрант 1-го курса, Волгоградский государственный университет, e-mail: bushneva-marina@mail.ru

**Бушуева Татьяна Владимировна** – магистрант, Белгородский государственный технологический университет им. В.Г.Шухова, e-mail: tbushueva.y@yandex.ru

**Бырдин Аркадий Петрович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: sidorenko6302@mail.ru

**Васенин Дмитрий Николаевич** – аспирант 3-го курса кафедры проектирования зданий и сооружений им. Н.В. Троицкого, Воронежский государственный технический университет, e-mail: vasenindmitrij31@yandex.ru

**Васильев Владимир Борисович** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор, Белгородский государственный университет, e-mail: vbv57@inbox.ru

**Ватульян Александр Ованесович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой, Южный федеральный университет, e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

**Вдовин Роман Сергеевич** – старший преподаватель кафедры математики, физики, информатики, Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет им. В. М. Шукшина, e-mail: ronin_78@mail.ru

**Велиева Бахар Камал** – Гянджинский государственный университет,
e-mail: bahar.veliyeva.91@inbox.ru

**Викарчук Андрей Николаевич** – магистрант кафедры МО ЭВМ, Воронежский государственный университет, e-mail: vickarchuck@yandex.ru

**Виноградова Галина Анатольевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: vinog.g@yandex.ru

**Винокурский Дмитрий Леонидович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Северо-Кавказский федеральный университет, e-mail: tavdeeva@ncfu.ru

**Вирченко Юрий Петрович** – канд. физ.-мат. наук, проф., профессор, Белгородский государственный университет, e-mail: virch@bsu.edu.ru

**Вишняков Ренат Юрьевич** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедры вычислительной математики и информатики, Кубанский государственный университет

**Вишняков Юрий Муссович** – д-р техн. наук, проф., зав.кафедрой, Кубанский государственный университет, e-mail: jury.vishnyakov@gmail.com

**Власов Денис Юрьевич** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: den10pmm@mail.ru

**Володин Геннадий Тимофеевич** – д-р техн. наук, проф., Профессор кафедры ВММ, Тульский государственный университет, e-mail: g.volodin@yandex.ru

**Воронина Ирина Евгеньевна** – д-р техн. наук, доц., Профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: irina.voronina@gmail.com

**Воронков Борис Николаевич** – канд. техн. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: vrnkv@mail.ru

**Воронцов Сергей Сергеевич** – магистрант 2-го года обучения кафедры МО ЭВМ, Воронежский государственный университет, e-mail: aurum1997@gmail.com

**Воропаева Екатерина Сергеевна** – студент, Новосибирский государственный университет

**Воропаева Ольга Фалалеевна** – д-р. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, e-mail: vorop@ict.nsc.ru

**Гаврилова Ксения Сергеевна** – магистрант, Новосибирский государственный университет

**Гавриш Сергей Викторович** – д-р техн. наук, начальник отдела, ООО «НПП «Мелитта», г. Москва, e-mail: svgavr@list.ru

**Гагарин Юрий Евгеньевич** – канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, e-mail: g_ug@mail.ru

**Гайназаров Султан Маманазарович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Национальный университет Узбекистана, e-mail: gaynazarsm@mail.ru.

**Гальцев Олег Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, доц., д-р. физ.-мат. наук, Белгородский государственный университет, e-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru

**Гаркавенко Галина Валериевна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный педагогический университет, e-mail: g.garkavenko@mail.ru

**Гегерь Эмилия Владимировна** – д-р биол. наук, доц., Заведующая кабинетом статистики, ГАУЗ «Брянский клинико-диагностический центр», e-mail: emiliya_geger@mail.ru

**Гельдыева Айлара Мердановна** – магистрант, Воронежский государственный университет, e-mail: aylara9@icloud.com

**Гиззатова Эльвира Раисовна** – канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, e-mail: makella@rambler.ru

**Гладков Максим Алеексеевич** – магистрант 1-го года обучения, Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина, e-mail: Maxims884@gmail.com

**Гладков Сергей Октябринович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., Профессор, Московский авиационный институт, e-mail: sglad51@mail.ru

**Гладышев Юрий Александрович** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, e-mail: losh-elena@yandex.ru

**Глушаков Виталий Евгеньевич** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: vitalikgl@gmail.com

**Глушко Андрей Владимирович** – д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой, Воронежский государственный университет, e-mail: kuchp2@math.vsu.ru

**Глушков Сергей Валериевич** – канд. техн. наук, д-р. физ.-мат. наук, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королёва, e-mail: glushkovsergeyv@gmail.com

**Голованева Фаина Валентиновна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: gfainav@mail.ru

**Головко Николай Иванович** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа, Дальневосточный федеральный университет, e-mail: golovko.ni@dvfu.ru

**Голубев Василий Иванович** – канд. физ.-мат. наук, доц., в.н.с., доцент, Институт автоматизации проектирования РАН, e-mail: w.golubev@mail.ru

**Гольцова Мария Юрьевна** – студент, Первый Санкт-Петербургский государственный медицинский университет им. И.П. Павлова, e-mail: mgoltsova@mail.ru

**Горбенко Олег Данилович** – канд. физ.-мат. наук, доц., Доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: oleg_dan@mail.ru

**Гордон Владимир Александрович** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры технической физики и математики, Орловский Государственный Университет им. И.С. Тургенева

**Горшков Илья Борисович** – Аспирант, младший научный сотрудник, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, e-mail: GoshX3@mail.ru

**Горяйнов Виталий Валерьевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, e-mail: gorvit77@mail.ru

**Гоцев Дмитрий Викторович** – д-р физ.-мат. наук, доц., профессор кафедры Механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, e-mail: rbgotsev@mail.ru

**Грабчак Евгений Петрович** – канд. экон. наук, Заместитель Министра энергетики Российской Федерации, Министерство энергетики Российской Федерации,
e-mail: Grabchak.eug@gmail.com

**Градов Владимир Михайлович** – д-р техн. наук, проф., преподаватель, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: gradov@bmstu.ru

**Григорьев Юрий Всеволодович** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедры прикладной механики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

**Гриднев Сергей Юрьевич** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры строительной механики, Воронежский государственный технический университет

**Гринева Наталья Владимировна** – канд. экон. наук, доц., доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, e-mail: NGrineva@fa.ru

**Гришин Роман Сергеевич** – студент 4 курса нефтетехнологического факультета, Самарский государственный технический университет, e-mail: grishin655@gmail.com

**Гришков Александр Сергеевич** – магистрант, Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет им. В.М. Шукшина, e-mail: alterlex@inbox.ru

**Гусева Елена Юрьевна** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: elena.guseva.01.06@gmail.com

**Гуськов Александр Михайлович** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры прикладной механики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

**Гуськова Ольга Сергеевна** – аспирант 2-го года обучения кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет,
e-mail: guskovich95@gmail.com

**Данченко Владимир Ильич** – канд. физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник, Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых,
e-mail: vdanch2012@yandex.ru

**Дац Евгений Павлович** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Институт прикладной математики ДВО РАН Радио

**Дедков Виктор Павлович** – д-р биол. наук, проф., профессор-исследователь, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: vdedkov@kantiana.ru

**Дежин Виктор Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: viktor.dezhin@mail.ru

**Деменков Андрей Геннадьевич** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск, e-mail: demenkov@itp.nsc.ru

**Демидова Лилия Анатальевна** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры «Корпоративные информационные системы», Российский технологический университет – МИРЭА,
e-mail: liliya.demidova@rambler.ru

**Денисенко Андрей Игоревич** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: androwd@gmail.com

**Джанунц Гарик Апетович** – канд. техн. наук, доцент кафедры информатики, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), e-mail: janunts@inbox.ru

**Дмитриев Евгений Вячеславович** – адъюнкт, Институт федеральной службы исполнения наказаний России

**Додонов Артур Евгеньевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, e-mail: art-dodonov@mail.ru

**Домнич Анастасия Александровна** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: andomnich@inbox.ru

**Дрюченко Михаил Анатольевич** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедры технологий обработки и защиты информации, Воронежский государственный университет,
e-mail: m_dryuchenko@mail.ru

**Дубинец Анисия Олеговна** – студент 4-го курса кафедры физики конструкционных материалов, Московский авиационный институт, e-mail: dubinets.anisia@yandex.ru

**Дубовая Валерия Олеговна** – магистрант кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, e-mail: leratkachuk@yandex.ru

**Дубровин Анатолий Станиславович** – д-р техн. наук, доц., профессор кафедры информационной безопасности, Институт федеральной службы исполнения наказаний России,
e-mail: asd_kiziltash@mail.ru

**Дудаков Сергей Михайлович** – канд. физ.-мат. наук, доц., д-р. физ.-мат. наук, Тверской государственный университет, e-mail: sergeydudakov@yandex.ru

**Дударев Владимир Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, e-mail: dudarev_vv@mail.ru

**Дурнев Валерий Георгиевич** – канд. физ.-мат. наук, проф., Профессор кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, e-mail: durnev@uniyar.ac.ru

**Дышеков Азретали Хусейнович** – канд. с.-х. наук, доц., Заведующий кафедрой, Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет, Нальчик, e-mail: kmvazret@mail.ru

**Дьяченко Дарья Валерьевна** – магистрант 1-го года обучения, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова,
e-mail: DyachenkoDV1997@mail.ru

**Дьячков Денис Александрович** – студент, Северный Арктический федеральный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: artichoke.wic@gmail.com

**Дьячков Константин Александрович** – аспирант, Северный Арктический федеральный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: ollkorrectac@gmail.com

**Дяченко Иван Анатольевич** – Научный сотрудник, ООО Газпром Проектирование, e-mail: d.ivan.a@yandex.ru

**Евельсон Лев Игоревич** – канд. техн. наук, доц., Директор, ООО «Научно-инновационный центр информационных и дистанционных технологий», e-mail: levelmoscow@mail.ru

**Егоров Сергей Яковлевич** – д-р техн. наук, проф., профессор, Тамбовский государственный технический университет, e-mail: egorovsy@yandex.ru

**Елфимов Даниил Игоревич** – магистрант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий ПММ, Воронежский государственный университет, e-mail: unixacoola@gmail.com

**Ерёмин Александр Михайлович** – канд. физ.-мат. наук, доц., Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет им. В.М. Шукшина, e-mail: eam77@yandex.ru

**Еремина Ирина Ильинична** – канд. пед. наук, доц., д-р. физ.-мат. наук, Казанский приволжский федеральный университет, e-mail: ereminaii@yandex.ru

**Ерусалимский Яков Михайлович —** д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры алгебры и дискретной математики, Южный федеральный университет,
e-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

**Жабко Алексей Петрович** – канд. физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru

**Жангоразов Курман Гитчеевич** – начальник отдела, Центррегионводхоз, Владикавказ, e-mail: irbis1961@bk.ru

**Жахонгирова Рушана Жахонгир кизи** – студент, Ташкентский государственный технический университет им. И.Каримова, e-mail: rushanajahongirov515@gmail.com

**Железный Сергей Владимирович** – канд. техн. наук, доц., Начальник кафедры физики, Воронежский институт МВД России, e-mail: zhelezny@list.ru

**Жиляков Евгений Георгиевич** – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, e-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru

**Зайцева Наталья Владимировна** – старший преподаватель, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

**Заливин Александр Николаевич** – канд. техн. наук, доц. кафедры, Белгородский университет кооперации, экономики и права, e-mail: zalivin@bsu.edu.ru

**Замятин Игорь Викторович** – канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель, Воронежский государственный университет, e-mail: igor@zamyatiny.ru

**Запороцкова Ирина Владимировна** – д-р. физ.-мат. наук, проф., директор института приоритетных технологий, Волгоградский государственный университет

**Зарецкая Марина Валерьевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор, Кубанский государственный университет, e-mail: zarmv@mail.ru

**Зарубин Александр Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, e-mail: aleks_zarubin@mail.ru

**Затонский Андрей Владимирович** – д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой Автоматизации технологических процессов, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

**Захаров Павел Васильевич** – д-р. физ.-мат. наук, доц., профессор кафедры физики ИФНиТ, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, e-mail: zakharovpvl@rambler.ru

**Зволинский Александр Евгеньевич** – студент, Воронежский государственный университет

**Здоровцова Елена Александровна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: alena4729@gmail.com

**Зенкова Наталья Александровна** – канд. психол. наук, доц., доцент, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, e-mail: natulin@mail.ru

**Зеткина Алена Игоревна** – Аспирантка кафедры теоретической информатики, Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, e-mail: azeto4ka@mail.ru

**Зизганова Елена Сергеевна** – студентка, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: ktyf2010@gmail.com

**Зикиров Обиджан Салижонович** – канд. физ.-мат. наук, проф., декан математического факультета, Национальный университет Узбекистана

**Зимин Владимир Николаевич** – д-р техн. наук, заведующий кафедрой «Космические аппараты и ракеты-носители», Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: zimin@bmstu.ru

**Зиновьев Сергей Владимирович** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: servzin@gmail.com

**Зинченко Анастасия Эдуардовна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: z4444a@mail.ru

**Зо Аунг** – аспирант, Московский авиационный институт, e-mail: shwehtikeaung1993@gmail.com

**Золотухина Яна Алексеевна** – Старший преподаватель, Воронежский государственный технический университет, e-mail: yana_zolotuhiny@mail.ru

**Зубков Евгений Вячеславович** – Старший преподаватель, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: evgenyzubkov@mail.ru

**Иванищева Ольга Ивановна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: ivanischeva_oi@mail.ru

**Иванников Кирилл Сергеевич** – директор, НПК СПО АО «Радар ММС»

**Иванова Светлана Сергеевна** – студент, Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, e-mail: sweta.7644@mail.ru

**Иванычев Дмитрий Алексеевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Липецкий государственный технический университет, e-mail: Lsivdmal@mail.ru

**Ивкина Мария Сергеевна** – педагог дополнительного образования, Областного государственного автономного учреждения дополнительного образования «Центр цифрового образования», e-mail: maria.ivkina996@gmail.com

**Игнатьева Юлия Олеговна** – студент (магистр, 1 курс), Воронежский государственный университет, e-mail: igulol@mail.ru

**Икрамов Ахмат Маорипович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Национальный университет Узбекистана, e-mail: axmat3@yandex.ru

**Ильина Ольга Михайловна** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: shaspoteha@mail.ru

**Исмагилова Альбина Сабирьяновна** – д-р. физ.-мат. наук, доц., заведующий кафедрой управления информационной безопасностью, Башкирский государственный университет, e-mail: ismagilovaas@yandex.ru

**Ишанов Сергей Александрович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор института физико-математических наук и информационных технологий, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: SIshanov@kantiana.ru

**Ищенко Евгений Алексеевич** – студент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: kursk1998@yandex.ru

**Каднова Айжана Михайловна** – адъюнкт, Воронежский институт МВД России,
e-mail: aizhana_kadnova@mail.ru

**Казаков Назар Алексеевич** – аспирант 1-го года обучения, Воронежский государственный университет, e-mail: sonoflivegod@gmail.com

**Казаков Павел Вадимович** – аспирант, Тульский государственный университет, e-mail: pavvel071@yandex.ru

**Какорин Игорь Александрович** – студент, Волгоградский государственный университет

**Какорина Олеся Александровна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Волгоградский государственный университет, e-mail: olessya.08@mail.ru

**Калач Андрей Владимирович** – д-р хим. наук, проф., начальник кафедры, Институт федеральной службы исполнения наказаний России, e-mail: AVKalach@gmail.com

**Калманович Вероника Валерьевна** – старший преподаватель, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, e-mail: v572264@yandex.ru

**Канзеба Александра Сергеевна** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: aleksandrakanzeba@gmail.com

**Каплиева Наталья Алексеевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: kaplieva@amm.vsu.ru

**Капранчикова Алисия Александровна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: kapranchikova_al@mail.ru

**Каратаева Полина Михайловна** – Старший преподаватель, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: PKarataeva@kantiana.ru

**Каримов Камолиддин Туйчибоевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., д-р. физ.-мат. наук, Ферганский государственный университет, e-mail: karimovk80@mail.ru

**Каримов Шахобиддин Туйчибоевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., декан физико-математического факультета, Ферганский государственный университет, e-mail: shaxkarimov@gmail.com

**Карлов Борис Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информатики, Тверской государственный университет, e-mail: bnkarlov@gmail.com

**Карпов Сергей Леонидович –** старший преподаватель кафедры техносферной и пожарной безопасности, Воронежский государственный технический университет, e-mail: future3001@rambler.ru

**Карпушкин Сергей Викторович –** д-р техн. наук, проф., профессор кафедры Компьютерно-интегрированные системы в машиностроении, Тамбовский государственный технический университет, e-mail: karp@mail.gaps.tstu.ru

**Картанов Артем Алексеевич** – магистрант, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского, e-mail: kartanovartem@gmail.com

**Картвелишвили Татьяна Александровна** – соискатель, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, e-mail: tgs4972gmail.com

**Касымов Денис Петрович** – канд. физ.-мат. наук, Заведующий лабораторией, Томский государственный университет, e-mail: denkasymov@gmail.com

**Качурина Екатерина Сергеевна** – аспирант, Новосибирский Государственный Университет, e-mail: e.s.kachurina@mail.ru

**Каширина Дарья Андреевна** – аспирант кафедры строительной механики, Воронежский государственный технический университет

**Каширина Ирина Леонидовна** – д-р техн. наук, доц., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: kash.irina@mail.ru

**Каширская Ирина Ивановна** – преподаватель, Воронежский государственный университет, e-mail: irkashir@mail.ru

**Кащенко Николай Михайлович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор института физико-математических наук и информационных технологий, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: kaschtschenko@mail.ru

**Каюмов Шукур Каюмович** – доц., доцент, Ташкентский государственний технический университет, e-mail: tojiboy.xaitov.77@mail.ru

**Кисанов Юрий Алексеевич** – канд. техн. наук, нач. сектора, ИСС им. академика М. Ф. Решетнева, e-mail: yakis47@rambler.ru

**Киселев Денис Александрович** – студент, Курганский государственный университет, e-mail: kgu_sm@kgsu.ru

**Ковалев Алексей Викторович** – д-р физ.-мат. наук, доц., заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет

**Ковалева Елена Николаевна –** канд. техн. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: kovaleva.lena@gmail.com

**Ковалева Лидия Александровна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Белгородский государственный университет, e-mail: Kovaleva_L@bsu.edu.ru

**Козлов Алексей Владимирович** – ст. преподаватель, Воронежский государственный технический университет, e-mail: kozlov.a.v@inbox.ru

**Козлов Владимир Анатольевич** – д-р физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой строительной механики, Воронежский государственный технический университет, e-mail: v.a.kozlov1@yandex.ru

**Козлова Ирина Романовна** – аспирант, Брянский государственный технический университет, e-mail: kozlowa.iri2014@yandex.ru

**Козлова Маргарита Геннадьевна –** канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры информатики, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, e-mail: art-inf@mail.ru

**Колодежнов Владимир Николаевич –** д-р техн. наук, проф., профессор, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, e-mail: kvn117@mail.ru

**Комилова Зулхумор Хокимовна** – преподаватель, Ферганский государственный университет, e-mail: xumor851@mail/ru

**Кононов Михаил Николаевич** – студент 3-го курса кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности, Северо-Кавказский федеральный университет, e-mail: mikhail_kononov_2014@mail.ru

**Кононова Наталия Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Северо-Кавказский федеральный университет, e-mail: knv_fm@mail.ru

**Коптельцева Ольга Юрьевна** – аспирант, Тульский государственный университет, e-mail: olya_moshkina19@mail.ru

**Кораблев Руслан Александрович** – канд. с.-х. наук, доц., доцент, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, e-mail: korablev_ruslan@mail.ru

**Корзунина Вера Васильевна** – канд. техн. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: gord.lashan@mail.ru

**Коробова Людмила Анатольевна** – канд. техн. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: lyudmila_korobova@mail.ru

**Корольков Олег Геннадьевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: korolkov@amm.vsu.ru

**Костина Татьяна Ивановна** – канд. физ.-мат. наук, доцент ВГТУ, старший научный сотрудник ВГПУ, Воронежский государственный технический университет, e-mail: tata_st@rambler.ru

**Кострюкова Мария Игоревна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: masha.kostryukova.98@mail.ru

**Коткова Юлия Дмитриевна** – магистрант кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, e-mail: kotkowa.yu@yandex.ru

**Коток Игорь Дмитриевич** – магистрант, Воронежский государственный университет, e-mail: tigariskot@gmail.com

**Котолевский Павел Васильевич** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: pkotolevsky@gmail.com

**Кочергин Денис Сергеевич** – студент (аспирант), Тульский государственный университет, e-mail: sir.cod4@yandex.ru

**Кочергин Дмитрий Викторович** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: dkochergin17@gmail.com

**Кочкин Никита Сергеевич** – студент, Кубанский государственный университет, e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

**Кравец Юрий Дмитриевич** – канд. техн. наук, доц., докторант, Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулёва, e-mail: yurakravets1977@mail.ru

**Кравченко Кирилл Владимирович** – студент 4 курса, Воронежский государственный педагогический университет, e-mail: kravchenko12010@ya.ru

**Красиков Максим Эдуардович** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: krasmax97@mail.ru

**Красная Анастасия Андреевна** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: krasnaya@amm.vsu.ru

**Кретов Алексей Александрович** – д-р филол. наук, проф., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: kretov@rgph.vsu.ru

**Крылов Алексей Владимирович** – канд. техн. наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: kav1982@bmstu.ru

**Крыловецкий Александр Абрамович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: aakryl@sc.vsu.ru

**Кувшинникова Дарья Алексеевна** – аспирант, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: kuvshinnikovadasha@gmail.com

**Кувыркин Георгий Николаевич** – д-р. техн. наук, проф., зав. кафедрой «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: fn2@bmstu.ru

**Кугушев Дмитрий Николаевич** – зам. начальника лаборатории, ООО «НПП «Мелитта», г. Москва, e-mail: diamond030286@mail.ru

**Кузнецов Александр Владимирович** – д-р. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: avkuz@bk.ru

**Кузнецов Сергей Федорович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, e-mail: sfs134@mail.ru

**Кузнецова Инна Юрьевна** – старший преподаватель, Южный федеральный университет, e-mail: kuznet.i.u@gmail.com

**Кукуджанов Константин Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, e-mail: kconstantin@mail.ru

**Куликова Татьяна Николаевна** – адъюнкт, Институт федеральной службы исполнения наказаний России

**Курбатов Виталий Геннадьевич** – д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: kv51@inbox.ru

**Курбыко Инна Фёдоровна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, e-mail: e-mail: levizov@rambler.ru

**Курганский Сергей Иванович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: kurganskii@phys.vsu.ru

**Курченкова Татьяна Викторовна** – канд. техн. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: tatyana36136@mail.ru

**Кутаида Шабан Хасан** – аспирант, Белгородский государственный университет, e-mail: 1167542@bsu.edu.ru

**Лавлинская Оксана Юрьевна** – канд. техн. наук, доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: lavlin2010@yandex.ru

**Лактионова Мария Александровна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: laktionofs@yandex.ru

**Левина Любовь Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Липецкий государственный технический университет

**Левитин Александр Леонидович** – ведущий программист, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, e-mail: alex_lev@ipmnet.ru

**Леденев Максим Юрьевич** – магистр второго года обучения, Воронежский государственный университет, e-mail: maximledenyov@gmail.com

**Леденева Татьяна Михайловна** – д-р техн. наук, проф., зав. каф. вычислительной математики и прикладных информационных технологий, Воронежский государственный университет, e-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

**Лесных Алина Алексеевна** – магистр, Воронежский государственный университет, e-mail: alina.lesnyh1996@mail.ru

**Литвинов Владимир Николаевич** – канд. техн. наук, доц., и.о. заместителя директора по информатизации, Азово-Черноморская государственная аграрно-инженерная академия

**Литвинов Владислав Львович** – канд. техн. наук, доц., докторант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

**Литвинов Дмитрий Анатольевич** – ассистент кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет, e-mail: d77013378@yandex.ru

**Лихачев Евгений Робертович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: lih73@mail.ru

**Лобанова Наталья Ивановна** – педагог дополнительного образования, Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района, e-mail: lobantchik@yandex.ru

**Логинов Евгений Леонидович** – д-р экон. наук, проф., начальник экспертно-аналитической службы, Министерство энергетики Российской Федерации, e-mail: LoginovEL@minenergo.gov.ru

**Логинова Екатерина Александровна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: loginova@vsu.ru

**Лозовой Виктор Викторович** – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Южный научный центр РАН

**Ломец Мария Викторовна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: marusya.lomets@gmail.com

**Лошкарева Елена Анатольевна** – канд. техн. наук, доц., доцент, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского, e-mail: losh-elena@yandex.ru

**Лукин Марк Петрович** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: mark.lukin36@gmail.com

**Лукьяненко Владимир Андреевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры информатики, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, e-mail: art-inf@yandex.ru

**Лушников Никита Дмитриевич** – аспирант 1 курса, Башкирский государственный университет, e-mail: luschnikovnikita@yandex.ru

**Ляпунова Ирина Артуровна** – канд. техн. наук, доцент, Южный федеральный университет, e-mail: ialyapunova@sfedu.ru

**Ляшева Майя Михайловна** – студент, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, e-mail: LyashevaMM@stud.kai.ru

**Ляшева Стелла Альбертовна** – канд. техн. наук, доц., доцент, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, e-mail: SALyasheva@kai.ru

**Маковий Катерина Александровна** – старший преподаватель, Воронежский государственный технический университет, e-mail: makkatya@mail.ru

**Максименко Юлия Александровна** – студентка 4-го курса кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, e-mail: mailyulia@list.ru

**Максимова Елизавета Алексеевна** – магистрант кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: elizaveta.alekseevna.m@gmail.com

**Малыгин Евгений Николаевич** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры «Компьютерно-интегрированные системы в машиностроении, Тамбовский государственный технический университет, e-mail: malygin_com@mail.ru

**Малыгина Юлия Владимировна** – преподаватель, Воронежский государственный университет, e-mail: ymkahavren@gmail.com

**Мануковская Ольга Евгеньевна** – магистр, Воронежский государственный университет

**Марданов Арслон Пардаевич** – ассистент, Ташкентский государственный технический университет, e-mail: apardayevich@mail.ru

**Маркин Алексей Александрович** – канд. физ.-мат. наук, проф., профессор, Тульский государственный университет, e-mail: markin-nikram@yandex.ru

**Мартинович Николай Викторович** – начальник отдела прикладных исследовании и инновационных технологий, Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, e-mail: martin-nv@mail.ru

**Мартынов Павел Сергеевич** – младший научный сотрудник, Институт оптики атмосферы

**Мартьянов Евгений Игоревич** – аспирант, Тамбовский государственный технический университет, e-mail: martyanovei@gmail.com

**Марьясин Олег Юрьевич** – канд. техн. наук, доц., доцент, Ярославский государственный технический университет, e-mail: maryasin2003@list.ru

**Масаева Олеся Хажисмеловна** – Научный сотрудник, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Нальчик, e-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

**Матвеев Михаил Григорьевич** – д-р. техн. наук, проф., заведующий кафедрой, Воронежский государственный университет, e-mail: mgmatveev@yandex.ru

**Матвеева Мария Валерьевна** – преподаватель, Воронежский государственный университет, e-mail: marie.matveeva@gmail.com

**Матыцина Ирина Александровна** – канд. техн. наук, преподаватель, Воронежский государственный университет, e-mail: irina210390@mail.ru

**Мациевский Сергей Валентинович** – канд. физ.-мат. наук, доц., зав. даб., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: noekaterina@yandex.ru

**Мащенко Александр Евгеньевич** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: mashchenko-st@mail.ru

**Мегралиев Яшар Топуш** – д-р. физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой, Бакинский государственный университет, e-mail: yashar_aze@mail.ru

**Медведев Сергей Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий, Воронежский государственный университет, e-mail: s_n_medvedev@mail.ru

**Межуев Александр Михайлович** – канд. техн. наук, доц., Начальник кафедры передающих и приемных радиоустройств, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: multitenzor@mail.ru

**Мешковский Виталий Евгеньевич** – ст.преподаватель, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: vitevm@yandex.ru

**Минаева Надежда Витальевна** – д-р. физ.-мат. наук, профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: nminaeva@yandex.ru

**Минаков Виталий Игоревич** – студент, кафедра ПОиАИС, Воронежский государственный университет, e-mail: mindev97@gmail.com

**Мирзаев Азиз Ибрахимович** – 2 курс дорторант, Национальный университет Узбекистана, e-mail: mirzaevaziz@gmail.com

**Мирзаев Ибрахим Мирзаевич** – д-р. физ.-мат. наук, проф., в.н.с., Институт Механики и сейсмостойкости сооружений Академии Наук Республики Узбекистан, e-mail: ibrakhim.mir@mail.ru

**Миронова Мария Сергеевна** – канд. физ.-мат. наук, преподаватель, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: mmsams@rambler.ru

**Мифтахов Эльдар Наилевич** – канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник научно-инновационного управления, Башкирский государственный университет, e-mail: promif@mail.ru

**Михайлов Владимир Анатольевич** – Магистрант кафедры теоретической кибернетики, Казанский приволжский федеральный университет, e-mail: v.mikhailov23@gmail.com

**Михайлова Татьяна Анатольевна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Башкирский государственный университет, e-mail: t.a.mihailova@yandex.ru

**Михаханова Татьяна Сергеевна** – студент, Новосибирский государственный университет

**Момот Екатерина Александровна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: y-kate@ukr.net

**Мордакин Борис Юрьевич** – канд. воен. наук, докторант, Рязанское гвардейское высшее воздушно-десантное ордена Суворова дважды Краснознамённое командное училище имени генерала армии В. Ф. Маргелова, e-mail: mbour@mail.ru

**Морозов Кирилл Леонидович** – лаборант-исследователь, Южный федеральный университет, e-mail: morozovkl1996@gmail.com

**Морозова Наталия Николаевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., сотрудник, Академия ФСО России, e-mail: natalia_n_morozova@mail.ru

**Москалев Павел Валентинович** – д-р. физ.-мат. наук, доц., профессор кафедры математики и физики, Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I, e-mail: moskaleff@mail.ru

**Мурашкин Евгений Валерьевич** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, e-mail: evmurashkin@gmail.com

**Мустафина Светлана Анатольевна** – д-р. физ.-мат. наук, проф., проректор по научной и инновационной работе, Башкирский государственный университет, e-mail: mustafina_sa@mail.ru

**Наврузов Эркин Равшанович** – 1 курс дорторант, Национальный университет Узбекистана, e-mail: erkinbek0989@gmail.com

**Надеина Татьяна Анатольевна** – канд. физ.-мат. наук,, доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: nadtana@rambler.ru

**Назаров Александр Сергеевич** – старший научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, e-mail: alsnazarov@gmail.com

**Назаров Станислав Юрьевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры высшей математики, Липецкий государственный технический университет, e-mail: Tfolgalips@gmail.com

**Науменко Павел Сергеевич** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: naumenko.pvl.s@mail.ru

**Нестеров Сергей Анатольевич** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Южный математический институт, e-mail: 1079@list.ru

**Нестеров Тимофей Константинович** – инженер, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

**Никитенко Виталий Алексеевич** – слушатель, Воронежский институт МВД России, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com

**Никитенко Ульяна Вячеславовна** – ст. преподаватель, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

**Никитин Александр Дмитриевич** – канд. техн. наук, старший научный сотрудник, Институт Автоматизации Проектирования РАН, e-mail: nikitin_alex@bk.ru

**Никитин Илья Степанович** – д-р. физ.-мат. наук, директор, Институт автоматизации проектирования РАН, e-mail: i_nikitin@list.ru

**Никитина Алла Валерьевна** – д-р. техн. наук, доц., профессор, Южный федеральный университет, e-mail: nikitina.vm@gmail.com

**Никитина Светлана Анатольевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., Доцент, заместитель декана по учебной работе, Челябинский государственный университет, e-mail: sanik09@list.ru

**Никифорова Ольга Юрьевна** – старший преподаватель кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, e-mail: niki22@mail.ru

**Никульченко Максим Филиппович** – аспирант первого года обучения, Башкирский государственный университет

**Новиков Евгений Александрович** – аспирант, Липецкий государственный технический университет

**Новикова Нелля Михайловна** – д-р техн. наук, проф., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: nov.nelly@gmail.com

**Ноздрин Станислав Сергеевич** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: stas.nozdrin@bk.ru

**Обуховский Валерий Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник, Воронежский государственный педагогический университет, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

**Огородникова Ольга Викторовна** – адъюнкт, Институт федеральной службы исполнения наказаний России, e-mail: olga-ogorodnikova@yandex.ru

**Орлов Константин Евгеньевич** – студент, Томский государственный университет, e-mail: humermor@yandex.ru

**Павлова Алла Владимировна** – д-р. физ.-мат. наук, доц., профессор, Кубанский государственный университет, e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

**Палкина София Александровна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: mail.soffya@mail.ru

**Панченко Александра Николаевна** – студент, Волгоградский государственный университет, e-mail: alexandra1889@mail.ru

**Папкович Марина Викторовна** – аспирант кафедры математики и компьютерной безопасности, Полоцкий государственный университет, Беларусь, e-mail: mpapkovich@yandex.by

**Паршин Дмитрий Александрович** – канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, e-mail: parshin@ipmnet.ru

**Пасечников Иван Иванович** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, e-mail: pasechnikov_ivan@mail.ru

**Пасечников Ростислав Иванович** – ведущий разработчик, АО «Альфа банк», e-mail: rost.pasechnikov@gmail.com

**Пастернак Юрий Геннадьевич** – д-р техн. наук, проф., профессор, Воронежский государственный технический университет, e-mail: pasternakyg@mail.ru

**Пахомов Александр Сергеевич** – магистрант, Воронежский государственный университет, e-mail: apkhmv@gmail.com

**Пендюрин Владимир Андреевич** – генеральный директор, АО НПП «Автоматизированные системы связи», e-mail: infonpp-acc.ru@yandex.ru

**Пеньков Виктор Борисович** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры общей механики, Липецкий государственный технический университет

**Перельмутер Михаил Натанович** – д-р. физ.-мат. наук, в.н.с., Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, e-mail: perelm@ipmnet.ru

**Перепелкин Евгений Александрович** – д-р техн. наук, проф., профессор, Санкт-Петербургский университет аэрокосмического приборостроения, e-mail: eap@list.ru

**Пересыпкина Мария Анатольевна** – магистрант, Воронежский государственный университет, e-mail: peresypkina.ma@gmail.com

**Персичкина Наталья Витальевна** – Старший преподаватель института физико-математических наук и информационных технологий, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: persichkina@rambler.ru

**Петров Николай Ильич** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, e-mail: ni.petrov46@mail.ru

**Петросян Гарик Гагикович** – канд. физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник, Воронежский государственный университет, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

**Петрухнова Галина Викторовна** – канд. техн. наук, доц., доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: gvpetruhnova@mail.ru

**Пешков Никита Юрьевич** – аспирант, Тульский государственный университет, e-mail: nikita.peshkoff@yandex.ru

**Пешков Ярослав Анатольевич** – Аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: tangar77@mail.ru

**Плотников Дмитрий Константинович** – младший научный сотрудник, Южный математический институт, e-mail: dustheap@mail.ru

**Побережский Сергей Юрьевич** – канд. техн. наук, Доцент, Московский авиационный институт, e-mail: ps801801@yandex.ru

**Подвальная Екатерина Федоровна** – студент, Курганский государственный университет, e-mail: kgu_sm@kgsu.ru

**Подвальный Евгений Семенович** – д-р. техн. наук, проф., заведующий кафедрой математики и информационных технологий в управлении, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, e-mail: podvalniy-es@ranepa.ru

**Подвальный Семен Леонидович** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры автоматизированных и вычислительных систем, Воронежский государственный технический университет, e-mail: spodvalny@yandex.ru

**Поддубный Алексей Алексеевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Белорусский государственный университет транспорта, e-mail: aleksey-podd@yandex.by

**Поддубный Алексей Андреевич** – М.н.с, ИММиКН им. И.И.Воровича Южный федеральный университет, e-mail: poddubny_sfedu@mail.ru

**Подосенова Татьяна Борисовна** – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, e-mail: tpodos@yandex.ru

**Полатов Асхад Мухаммеджанович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор, Национальный университет Узбекистана, e-mail: asad3@efndex.ru

**Поликарпов Максим Владимирович** – младший научный сотрудник, Липецкий государственный технический университет, e-mail: messiah142@gmail.com

**Полицын Сергей Александрович** – канд. техн. наук,, доцент каф. 319, Московский авиационный институт, e-mail: pul_forever@mail.ru

**Полицына Екатерина Валерьевна –** канд. техн. наук, доцент каф. 319, Московский авиационный институт, e-mail: kathrin.beaver@mail.ru

**Половинкин Игорь Петрович** – д-р физ.-мат. наук, доц., профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет

**Половинкина Марина Васильевна –** канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

**Полосин Андрей Николаевич –** канд. техн. наук, доц., доцент, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), e-mail: polosin-1976@mail.ru

**Поляков Максим Сергеевич** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: max_polyakov.vrn@mail.ru

**Поминова Алена Андреевна** – магистрант, Воронежский государственный университет, e-mail: alena.pominova@gmail.com

**Попов Евгений Дмитриевич** – инженер-программист, Воронежский государственный университет, e-mail: 36furious@gmail.com

**Попов Иван Николаевич –** канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры высшей математики, Северный Арктический федеральный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: PopovIvanNik@yandex.ru

**Попов Михаил Иванович** – канд. физ.-мат. наук, д-р. физ.-мат. наук, Воронежский государственный университет, e-mail: mihail_semilov@mail.ru

**Попов Сергей Сергеевич –** студент, Челябинский государственный университет, e-mail: sergei.popov174@gmail.com

**Поречный Александр Сергеевич** – аспирант, Московский авиационный институт, e-mail: alex.porechny@mail.ru

**Потуданский Геннадий Павлович** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: potudanskiy@phys.vsu.ru

**Прибытков Юрий Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет

**Прицепов Михаил Юрьевич** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: mixxx_36@mail.ru

**Провоторов Вячеслав Васильевич –** канд. физ.-мат. наук, доц., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: wwprov@mail.ru

**Прокопьева Дина Борисовна** – доцент кафедры математики, Тихоокеанское высшее военно-морское училище им. С. О. Макарова, e-mail: prokopievad@yandex.ru

**Проскурин Дмитрий Константинович –** канд. физ.-мат. наук, доц., ВРИО ректора, Воронежский государственный технический университет, e-mail: rector@vorstu.ru

**Проскурякова Людмила Константиновна** – канд. пед. наук, доц., сотрудник, Академия ФСО России, e-mail: natalia_n_morozova@mail.ru

**Проценко Елена Анатольевна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета

**Проценко Софья Владимировна –** аспирант, Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, e-mail: rab55555@rambler.ru

**Пугачев Дмитрий Юрьевич** – зам. начальника цеха, ООО «НПП «Мелитта», г. Москва, e-mail: d.u.pugachev@gmail.com

**Пулатов Сухбат Исматуллаевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Национальный университет Узбекистана, e-mail: suhbat@yandex.com

**Пья Пьо Аунг** – аспирант 4-го года обучения кафедры прикладной механики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: pyaephyo88@mail.ru

**Радаев Антон Евгеньевич** – канд. техн. наук, доц., доцент, Высшая школа промышленно-гражданского и дорожного строительства Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, e-mail: tw-inc@ya.ru

**Радаев Юрий Николаевич** – д-р. физ.-мат. наук, проф., в.н.с., Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

**Радченко Владимир Павлович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., зав. каф. «ПМиИ», Самарский государственный технический университет, e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

**Ражабов Жалолиддин Шамсуддин угли** – преподаватель, Национальный университет Узбекистана, e-mail: jaloliddin.rajabov@mail.ru

**Ровба Евгений Алексеевич** – д-р. физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой фундаментальных и прикладных математических дисциплин, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, e-mail: rovba@grsu.by

**Рогова Наталья Вячеславовна** – канд. физ.-мат. наук, доц., декан факультета, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, e-mail: jacolio@list.ru

**Рогозин Евгений Алексеевич** – д-р техн. наук, проф., профессор, Воронежский государственный технический университет, e-mail: evgenirogozin@yandex.ru

**Родионов Д. В.** – младший научный сотрудник, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина

**Родионов Денис Владимирович** – младший научный сотрудник, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: doc-82@bk.ru

**Ромм Яков Евсеевич** – д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой информатики, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), e-mail: romm@list.ru

**Рубцов Сергей Евгеньевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Кубанский государственный университет, e-mail: rub_serg@mail.ru

**Рустам Русланович Исаев** – студент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: xzidkeyx@gmail.com

**Рыбаков Дмитрий Владимирович** – директор технопарка «Державинский», Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, e-mail: pasechnikov_ivan@mail.ru

**Рябов Сергей Владимирович** – канд. техн. наук, доцент, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: mg1.aka@mail.ru

**Сабах Салих Хайдер** – руководитель департамента, Министерство высшего образования и научных исследований Ирака

**Савельева Инга Юрьевна** – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: inga.savelyeva@gmail.com

**Сагдуллаева Манзура Муродуллаевна** – PHD 2-курс, Национальный университет Узбекистана, e-mail: sagdullayevam@mail.ru

**Саидов Сарвар Абдижалиловаич** – младший научный сотрудник, Институт механики и сейсмостойкости сооружений Академии Наук Республики Узбекистан,
e-mail: sarvar_said@mail.ru

**Сайко Дмитрий Сергеевич** – д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: dmsajko@mail.ru

**Санникова Елена Николаевна** – магистрант 2-го года обучения кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет

**Санникова Ирина Николаевна** – д-р техн. наук, проф., магистрант 2-го года обучения кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет

**Сдобников Анатолий Николаевич** – канд. техн. наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: ansdobnikov@mail.ru

**Северов Артём Олегович** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: fisaforyou@mail.ru

**Секорин Всеслав Станиславович** – аспирант, Тверской государственный университет, e-mail: vssekorin@gmail.com

**Сенотрусова Софья Дмитриевна** – аспират, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий

**Сердечная Евгения Александровна** – студент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: Serdechnaya.Evgeniya@yandex.ru

**Серегина Елена Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: evfs@yandex.ru

**Сеттиев Шамсуддин Ражабович** – канд. физ.-мат. наук, и.о. доцента кафедры, Ташкентский филиал РЭУ им. Г.В. Плеханова, e-mail: shamsis@rambler.ru

**Сидоренко Александр Алексеевич** – канд. техн. наук, доц., доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: sidorenko6302@mail.ru

**Силаева Марина Николаевна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: marinanebolsina@yandex.ru

**Сирота Александр Анатольевич** – д-р. техн. наук, проф., заведующий кафедры «Технологий обработки и защиты информации», Воронежский государственный университет, e-mail: sir@cs.vsu.ru

**Сирота Екатерина Александровна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: atoris@list.ru

**Ситник Сергей Михайлович** – д-р. физ.-мат. наук, доц., Профессор, Белгородский государственный университет, e-mail: sitnik@bsu.edu.ru

**Ситников Александр Иванович** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедры физики, Воронежский институт МВД России, e-mail: sitnikov_74@list.ru

**Сиухин Александр Андреевич** – аспирант, Тамбовский государственный технический университет, e-mail: mr.Siuhin@yandex.ru

**Скалько Юрий Иванович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры вычислительной физики, Московский физико-технический институт

**Скоромник Оксана Валерьевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры математики и компьютерной безопасности, Полоцкий государственный университет, Беларусь, e-mail: skoromnik@gmail.com

**Скороходов Владимир Александрович** – д-р физ.-мат. наук, доц., профессор, Южный федеральный университет, e-mail: pdvaskor@yandex.ru

**Слиденко Александр Михайлович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: E-mail: alexandr.slidenko@yandex.ru

**Слиденко Виктор Михайлович** – д-р техн. наук, доц., доцент, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского, e-mail: E-mail: viktorslidenko@gmail.com

**Смирнов Игорь Александрович** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедры систем автоматизированного проектирования и управления, Санкт-Петербургский государственный технологический институт

**Соколова Марина Юрьевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор, Тульский государственный университет, e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

**Соколова Ольга Анатольевна** – канд. техн. наук, доц., доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: sokolovaoa203@mail.ru

**Соловьев Александр Семенович** – д-р техн. наук, доц., профессор кафедры безопасности информации, Институт федеральной службы исполнения наказаний России, e-mail: asoloviev58@yandex.ru

**Сопин Сергей Владимирович** – аспирант, Новосибирский государственный университет, e-mail: sopin.serge@yandex.ru

**Сотникова Ольга Анатольевна** – д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой, Воронежский государственный технический университет, e-mail: hundred@vgasu.vrn.ru

**Спорыхин Анатолий Николаевич** – д-р физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, e-mail: anspor@mail.ru

**Ставицкая Екатерина Петровна** – ведущий менеджер, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: noekaterina@yandex.ru

**Стадник Никита Эдуардович** – м.н.с., Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

**Старожилова Ольга Владимировна** – канд. техн. наук, доц., доцент, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, e-mail: olgst@mail.ru

**Степович Михаил Адольфович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского

**Стратула Борис Андреевич** – младший научный сотрудник, Институт Автоматизации Проектирования РАН, e-mail: stratula@matway.net

**Струкова Ирина Игоревна** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Воронежский государственный университет, e-mail: irina.k.post@yandex.ru

**Стуров Дмитрий Леонидович** – канд. техн. наук, Преподаватель кафедры передающих и приемных радиоустройств, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: 777jordan777@mail.ru

**Сумин Александр Иванович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой математики, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: sumin_ai@mail.ru

**Сумин Виктор Александрович** – канд. физ.-мат. наук, доц., Доцент, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: vsum@rambler.ru

**Сухинов Александр Иванович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой, Донской государственный технический университет

**Сучкова Мария Михайловна** – магистрант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий, Воронежский государственный университет, e-mail: maria.13.13@yandex.ru

**Сычев Игорь Валерьевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., Доцент кафедры физики, Воронежский институт МВД России, e-mail: mail.r.1964@mail.ru

**Таволжанский Александр Валентинович** – студент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: tavolzhanskij.a@outlook.com

**Тарабанько Анастасия Александровна** – студент, Воронежский государственный университет

**Тарасов Иван Александрович** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: itarasov@neoflex.ru

**Татаркин Иван Николаевич** – научный сотрудник отдела прикладных исследований и инновационных технологий, Сибирская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России

**Текучев Олег Алексеевич** – магистрант 1-го года обучения кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронежский государственный университет, e-mail: hybriddodod@gmail.com

**Теммоева Светлана Анатольевна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет, Нальчик, e-mail: s.temm@mail.ru

**Тетерин Михаил Александрович** – старший преподаватель кафедры систем автоматизированного проектирования и управления, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), e-mail: michail.teterin92@gmail.com

**Тимашов Александр Сергеевич** – стажёр, Белгородский государственный университет, e-mail: sitnik@bsu.edu.ru

**Тихомирв Василий Васильевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: zedum@cs.msu.ru

**Тихомирова Оля Александровна** – магистрант 1-го года обучения кафедры программного обеспечения и администрирования информационных, Воронежский государственный университет, e-mail: gouvirus2468@gmail.com

**Ткаченко Ирина Александровна** – аспирант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: i.tkachenko-kld@yandex.ru

**Ткаченко Сергей Николаевич** – канд. техн. наук, доц., доцент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: tkasergey@yandex.ru

**Толстова Ирина Сернеевна** – Старший преподаватель, Воронежский государственный университет, e-mail: irin2102ka@mail.ru

**Толстых Андрей Андреевич** – Преподаватель, Московский университет МВД России им. В. Я. Кикотя, e-mail: sitnikov_74@list.ru

**Тростянский Сергей Николаевич** – д-р. техн. наук, доц., профессор, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: trost58@rambler.ru

**Трофименко Елена Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: evtrof@gmail.com

**Трофимов Виктор Григорьевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., ст. преподаватель кафедры математики, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: victor.trofimov@mail.ru

**Тураев Расул Нортожиевич** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, e-mail: rasul.turaev@mail.ru

**Тятяев Сергей Александрович** – начальник Центра инновационных разработок, Научно-производственное предприятие «Полет», г. Нижний Новгород

**Уринов Ахмаджон Кушакович** – канд. физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений при ФерГУ, Ферганский государственный университет, e-mail: urinovak@mail.ru

**Ускова Наталья Борисовна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: nat-uskova@mail.ru

**Ускова Ольга Федоровна** – канд. техн. наук, доц., профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: nat-uskova@mail.ru

**Уханов Алексей Алексеевич** – магистр первого года обучения, Воронежский государственный университет, e-mail: alexey-ukhanov@yandex.ru

**Ухлова Вера Владимировна** – канд. физ.-мат. наук,, доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: ukhlova@amm.vsu.ru

**Фаррухшина Танзиля Радиковна** – Студент, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, e-mail: tanzilya.farruhshina@yandex.ru

**Федоров Сергей Михайлович** – канд. техн. наук,, доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: fedorov_sm@mail.ru

**Федюшкин Алексей Иванович** – канд. физ.-мат. наук,, снс, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, e-mail: fai@ipmnet.ru

**Фелькер Мария Николаевна** – канд. техн. наук,, д-р. физ.-мат. наук, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

**Филина Алёна Александровна** – канд. техн. наук,, научный сотрудник, ООО «Научно-исследовательский центр супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров», e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru

**Фирюлина Мария Андреевна** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: mashafiryulina@mail.ru

**Фозилов Муким Мухторович** – Аспирант 4-го курса, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), e-mail: mukim.fozilov@yandex.ru

**Хаитов Тожибой Омонович** – ассистент, Ташкентский государственный технический университет, e-mail: tojiboy.xaitov.77@mail.ru

**Хамидуллина Зульфия Абударовна** – аспирант, Башкирский государственный университет, e-mail: shakirova111@mail.ru

**Харченко Евгения Андреевна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: evgesha97@bk.ru

**Хацкевич Владимир Львович** – д-р техн. наук, проф., Профессор, Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, e-mail: vlkhats@mail.ru

**Хицкова Юлия Владимировна** – канд. экон. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: prosvetovau@list.ru

**Хмелёва Ирина Владимировна** – канд. техн. наук, доцент, Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина, e-mail: Hmelevai@gmail.com

**Хохлов Николай Игоревич** – канд. физ.-мат. наук, доц., зав.каф., Московский физико-технический институт, e-mail: k_h@inbox.ru

**Христич Дмитрий Викторович** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор, Тульский государственный университет, e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

**Худенко Владимир Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., профессор института физико-математических наук и информационных технологий, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: VKHudenko@kantiana.ru

**Царькова Евгения Геннадьевна** – канд. физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, Институт федеральной службы исполнения наказаний России, e-mail: University69@mail.ru

**Цгоев Чермен Аланович** – аспирант, Новосибирский Государственный Университет

**Цыганкова Елизавета Игоревна** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: extraliz@yandex.ru

**Чаплыгина Елена Викторовна** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, e-mail: lena260581@yandex.ru

**Чередниченко Александр Всеволодович** – канд. техн. наук, доц., доцент кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: alexvche@bmstu.ru

**Черепанов Евгений Александрович** – старший преподаватель кафедры надзорной деятельности и права, Уральский институт ГПС МЧС России

**Черников Игорь Сергеевич** – канд. физ.-мат. наук, ассистент, Воронежский государственный университет, e-mail: ichernikov@yandex.ru

**Чернова Ольга Викторовна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Белгородский государственный университет, e-mail: chernova_olga@bsu.edu.ru

**Черных Геннадий Георгиевич** – д-р. физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, e-mail: chernykh@ict.nsc.ru

**Чернышевский Павел Андреевич** – ассистент, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, e-mail: pavelcomm@mail.ru

**Чернышов Александр Данилович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, e-mail: chernyshovad@mail.ru

**Чистяков Александр Евгеньевич** – д-р. физ.-мат. наук, профессор, Донской государственный технический университет, e-mail: Cheese_05@mail.ru

**Чистякова Тамара Балабековна** – д-р техн. наук, проф., заведующая кафедрой, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), e-mail: nov@technolog.edu.ru

**Чкалова Дарья Геннадьевна** – старший преподаватель, аспирант, Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, e-mail: darya.vasilchenkova@mail.ru

**Чураков Денис Юрьевич** – заместитель начальника института, Институт федеральной службы исполнения наказаний России, e-mail: University69@mail.ru

**Шабанов Артемий Олегович** – студент, Воронежский государственный университет, e-mail: artemshabanov7@mail.ru

**Шабров Сергей Александрович** – д-р. физ.-мат. наук, доц., доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: shaspoteha@mail.ru

**Шаброва Марина Вячеславовна** – аспирант, Воронежский государственный университет, e-mail: koshka445@mail.ru

**Шабунина Зоя Александровна** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет, e-mail: shabunina@amm.vsu.ru.

**Шахбазян Яна Арамаисовна** – магистр 1-го года обучения, Воронежский государственный педагогический университет, e-mail: shahbazyan-1998@mail.ru

**Шахвердов Артур Олегович** – инженер, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, e-mail: shuh@bmstu.ru

**Шашкин Александр Иванович** – д-р. физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный университет, e-mail: deanery@amm.vsu.ru

**Шевченко Алексей Владимирович** – студент, Московский физико-технический институт, e-mail: alexshevchenko@phystech.edu

**Шелковой Александр Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, e-mail: shelkovoj.aleksandr@mail.ru

**Шевченко Геннадий Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент кафедры высшей математики Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, e-mail: bbb@gmail.com

**Шепелева Риорита Петровна** – канд. физ.-мат. наук, проф., профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа, Дальневосточный федеральный университет, e-mail: shepeleva.rp@dvfu.ru

**Шишкин Дмитрий Михайлович** – аспирант каф. «ПМиИ», Самарский государственный технический университет, e-mail: shishkin.dim@yandex.ru

**Шишкина Кристина Сергеевна** – студент, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского, e-mail: klikklok2017@mail.ru

**Шишкина Элина Леонидовна** – д-р. физ.-мат. наук, доц., Профессор, Воронежский государственный университет, e-mail: ilina_dico@mail.ru

**Шлеймович Михаил Петрович** – канд. техн. наук, доц., заведующий кафедрой, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ, e-mail: MPShleymovich@kai.ru

**Шомуродов Жахонгир Фарходович** – ассистент, Ташкентского государственного транспортного университета Республики Узбекистан, e-mail: jakhongir_shf@mail.ru

**Шпилевая Светлана Геннадьевна** – канд. пед. наук, доц., доцент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: svetlana_shpil@mail.ru

**Штепа Алексей Анатольевич** – старший преподаватель, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, e-mail: alexei_shtepa@mail.ru

**Штука Виктор Игоревич** – канд. физ.-мат. наук, доцент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, e-mail: onslice@mail.ru

**Шувалов Денис Владимирович** – канд. техн. наук, старший преподаватель, Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулёва, e-mail: deonis.aphinsky@yandex.ru

**Щеголеватых Александр Сергеевич** – канд. техн. наук, ведущий инженер, АО «Концерн «Созвездие»

**Эгамов Альберт Исмаилович** – канд. физ.-мат. наук, д-р. физ.-мат. наук, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: albert810@yandex.ru

**Юмашев Михаил Владиславович** – канд. физ.-мат. наук, доц., доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: tgs497@gmail.com

**Юров Виктор Олегович** – аспирант, Южный федеральный университет, e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

**Юсупов Абдулкодир Зарипбой огли** – Институт механики и сейсмостойкости сооружений Академии наук Республики Узбекистан, e-mail: abdulkodir.yusupov@gmail.com

**Явруян Оксана Вячеславовна** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Южный математический институт, e-mail: yavruyan@mail.ru

**Яковлев Александр Юрьевич** – канд. физ.-мат. наук, доц., д-р. физ.-мат. наук, Воронежский государственный университет, e-mail: yakovlev@amm.vsu.ru

**Яцко Вячеслав Александрович** – д-р филол. наук, проф., профессор, Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова, e-mail: iatsko@gmail.com

**Содержание**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ, ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

## МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СТРУКТУР



## ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ВЫСШЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

**ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ**



**РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**



**СИСТЕМНЫЕ АНАЛИЗ И СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ**

Научное издание

# Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики

*Сборник трудов Международной научной конференции*

Воронеж,
7–9 декабря 2020 г.

Минимальные системные требования:
PC не ниже класса Pentium I, 32 Mb RAM,
свободное место на HDD 170 Mb,
Windows 95/98, Adobe Acrobat Reader,
дисковод CD-ROM 2-х, мышь.

Подписано к использованию 01.04.2021.
Объем данных 79,2 Мб. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
Тираж 350 экз. Заказ 211.

ООО «Вэлборн»
Издательство «Научно-исследовательские публикации»
394068, г. Воронеж, Московский пр-т, 98
Тел. +7 (930) 403-54-18
http://www.scirep.ru E-mail: publish@scirep.ru

Изготовлено фирмой «Большой формат» (ООО «Твой выбор»).
394018, г. Воронеж, ул. Кости Стрелюка, д. 11/13, офис 6
Тел. +7 (473) 238-26-38
http://big-format.ru E-mail: 382638@mail.ru