

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Материалы I Всероссийской конференции
(г. Махачкала, 3–5 февраля 2020 г.)**

Махачкала
Издательство ДГУ
2020

УДК 517.9

Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы Всероссийской конференции (г. Махачкала, 3–5 февраля 2020 г.). – Махачкала: Издательство ДГУ, 2020. – 207 с.

ISBN 978-5-9913-0196-1

Редакционная коллегия:

д. ф.-м. н., проф. Магомедов А.М.

к. ф.-м. н., доцент Бейбалаев В.Д.

к. ф.-м. н., доцент Якубов А.З.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Дагестанского государственного университета.

© Издательство ДГУ, 2020

Оглавление

Абдулвагабов М.Ш, Рабазанов А.К.Расчет энергетической зонной структуры ${}^3\text{C}-\text{SiC}$	7
Абдурагимов Э.И.Априорная оценка положительного решения двухточечной краевой задачи для одного класса нелинейных ОДУ второго порядка со степенным ростом....	10
Аджиева Х.И. Проверка условий существования решений ФДУ второго порядка, исчезающих на полуоси на конкретном примере.....	15
Алейдаров С.М.Об одном скалярном уравнении с отклоняющимся аргументом в пространствах со степенным весом.....	20
Амучиева Т.С.О задачах по теме «решение (прямоугольного) треугольника»	24
Алиев М.С.Обобщенные системы Маркова	29
Анкилов А.В., Вельмисов П.А.Об устойчивости решений одной нелинейной начально-краевой задачи в аэрогидроупругости.....	35
Асхабов С.Н.Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки второго порядка со степенной нелинейностью	39
Балкизов Ж.А.Краевая задача со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с производной второго порядка в граничных условиях	43
Бейбалаев В.Д., Эмиров С.Н., Аливердиев А.А.Расчет теплопроводности гранулитов в зависимости от давления и температуры.....	46
Боташева Ф.Ю. Исследование и разработка информационной системы принятия решений.....	51
Бутенков С.А., Кривша В.В., Кривша Н.С., Семененко А.В.Математические основы гранулирующего подхода к моделированию процессов обработки данных на супервычислительных системах.....	54

Вагабов А.И., Абдусаламов Х.А.2n-кратная формула разложения по корневым функциям дифференциального пучка с двумя n-кратными характеристиками.....	59
Воронина А. В.Численное моделирование ламинарной свободной конвекции вдоль поверхности неизотермической пластины.....	62
Ганичева А.В., Ганичев А.В.Процессно-ситуационный анализ явлений.....	65
Герева Т. Р., Сиражудинов М. М., Чубанов И. А.Оценки погрешности усреднения задачи Пуанкаре для уравнения типа Бельтрами	69
Глущенко С.В.Об информационном подходе к исследованию конфликта.....	72
Зайченко П.А.Анализ радиационных характеристик тепловыделяющих сборок исследовательского реактора по результатам моделирования их облучения в активной зоне	77
ИбавовТ.И.Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с дробным производным по времени	79
Исраилов С.В, Танкиев И.А.Случай порождения трех простых и двух асимптотических нулей решения системы ОДУ точкой сингулярности	82
Исраилов С.В.,Танкиев И.А.Система ОДУ с точками сингулярностей двух видов и асимптотическими нулями в решениях	88
Кадиев Р.И.К вопросу об устойчивости решений одной гибридной системы Ито относительно начальных значений.....	94
Киржинов Р.А.Об одной внутреннекраевой задаче для уравнения смешанного параболо–гиперболического типа второго порядка	96
Ковалев А. В. Представление решений для системы Ламе первого порядка	98
Ковалева Л.А.Об одной краевой задаче	102

Кузнецова Н.Н. Некоторые аспекты исследования автоколебаний заблокированных колес в процессе торможения автомобиля	105
Литвинов В.Л., Анисимов В.Н., Корпен И.В., Косинова С.Н. Исследование продольных колебаний каната грузоподъемной установки	108
Магомедов А.М. Графический подход к решению задачи о выпуклой оболочке	114
Магомедов А.М. Головоломки как поиск цепей в графе....	117
Магомедова Е. С., Раджабова М. Т. Защита информации методами теории статических решений	121
Магомедов Р. И., Магомедов И. И. Математическая модель динамики изменения мощности физического объекта	123
Наталуха И.А. Моделирование и анализ эффективности инструментов регулирования промышленных выбросов предприятий	126
Некрасова Н.Н. Пространство Гёльдера на сфере Римана .	130
Нечаев В.Н., Шуба А.В. Спектр времен релаксации в ансамбле суперпараэлектрических частиц	134
Паровик Р.И. Вынужденные колебания дробного осциллятора Эйри	137
Рагимханов В.Р. Включение Гаммерштейна с запаздывающим аргументом	140
Ризаев М.К. Исследование спектральных свойств одного дифференциального оператора методом теории малых стационарных возмущений	143
Рыбаков К.А. О расчете спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара	146
Сапронов И.В. Линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода	149
Сиражудинов М. М., Амаева М. Л. Оценки погрешности усреднения задачи Римана-Гильберта для системы уравнений Бельтрами	152

Сиражудинов М.М., Ибрагимова С.Х.Оценки усреднения одной задачи Пуанкаре для обобщенного уравнения типа Бельтрами	156
Хаиров А.Р.Параметрические преобразования и ортогональные многочлены	159
Хайиткулов Б.Х.Задача оптимального размещения источников тепла на стержне при заданных условиях на его концах	163
Хвостов А.А., Иванов А.В., Журавлев А.А.Синтез математической модели основного теплообменника воздухоподразделительной установки	167
К.У. ХубиевО краевых задачах со смещением для гиперболо-параболического уравнения с нагруженным слагаемым на характеристике.....	170
Чернова О.В.Оценки интегралов типа потенциалов в весовых пространствах	173
Шалагин С.В.Представление квантового преобразования Фурье на основе дискретной модели квантово-механической системы.....	177
Шалагин С.В., Кириллов Е.М.Проектирование базовых IP-ядер для выполнения быстрого преобразования Фурье.....	186
Шихиев Ш. Б., Шихиев Ф. Ш.Автоматная грамматика естественного языка	193
Эмирова И.С.Оценка характеристического показателя решения уравнения n-го порядка с отклонением аргумента в гильбертовом пространстве	204
Якубов Р.А., Бейбалаев В.Д.Исследование нелокальной математической модели динамической системы Ресслера	207

УДК 621.315.592

Абдулвагабов М.Ш.¹, Рабазанов А.К.^{1,2}

Abdulvagabov M.Sh.¹, Rabazanov A.K.^{1,2}

¹Дагестанский Государственный Университет, Махачкала

²Институт физики им. Х.И. Амирханова, Дагестанского федерального исследовательского центра РАН, Махачкала

¹Dagestan State University, Makhachkala

²Institute of Physics of the Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences. Makhachkala

E-mail: abdulmsh@mail.ru, rabazanov@mail.ru

Расчет энергетической зонной структуры 3C–SiC

Calculation of the energy band structure 3C–SiC

Аннотация. Рассчитана зонная структура 3C–SiC по всей зоне Бриллюэна с использованием интерполяционной схемы, основанной на представлении зоны проводимости с помощью ортогонализированных плоских волн и P–зоны линейной комбинации атомных орбиталей.

The band structure was calculated over the entire Brillouin zone using an interpolation scheme based on the representation of the conduction band using orthogonalized plane waves and the linear combination zone of atomic orbitals.

Ключевые слова: Карбид кремния, зонная структура, зоны Бриллюэна.

Keywords: Silicon carbide, band structure, Brillouin zones

Выбор кубического карбида кремния в качестве объекта исследования зонной структуры был связан с рядом интересных свойств, отличающих его от других политипов, а также с тем, что 3C–SiC являющихся основной структурой SiC, на базе которой происходит образование других политипов.

В связи с расхождениями между теоретическими расчетами и существующими экспериментальными данными, представляется актуальным уточнение зонной структуры 3C–SiC по всей приведенной зоне Бриллюэна.

Для расчета зонной структуры 3C–SiC использовалась интерполяционная схема предложенная для никеля [1]. Уравнение для собственных значений зонного гамильтониана имеет вид:

$$H\Psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) = \varepsilon_n(\vec{k})\Psi_{n\vec{k}}(\vec{r}).$$

Блоховские волновые функции $\Psi_{n\vec{k}}(\vec{r})$ берут как сумму линейной комбинации четырех ортогонализированных плоских волн (ЛКОПВ) и линейной комбинации атомных орбиталей (ЛКАО)

$$\Psi_{n\vec{k}}(\vec{k}, \vec{r}) = \sum_{\vec{k}} a_{n\vec{k}}(\vec{k}) b_{\vec{k}\vec{K}}(\vec{r}) + \sum_{\mu=1}^3 a_{n\mu}(\vec{k}) b_{\vec{k}\mu}(\vec{r}).$$

Суммирование ведется по вектору обратной решетки K и по всем заполненным состояниям

$$(K_1 = (0,0,0), K_2 = \frac{2\pi}{a}(0, \bar{2}, 0), K_3 = \frac{2\pi}{a}(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) \text{ и } K_4 = \frac{2\pi}{a}(\bar{1}, \bar{1}, 1)).$$

Зонный гамильтониан, имеющий размерность 7×7 , состоял из $S-S$, $P-P$ и $S-P$ гибридационных блоков. Метричные элементы псевдопотенциала поля ионов берутся из вычисленных Ли Хуаном и др. параметров сильной связи Слэтера-Костера зонного гамильтониана кубической решетки с учетом кристаллической структуры (структура сфалерита). Соответствующие матричные элементам двухцентровые интервалы как интерполяционные параметры, выбирались методом подгонки в точках высокой симметрии из негибридизованных S и P -уровней по оптическим переходам [3].

$$E(X_{1c} - \Gamma_{15v}) = 2,4 \text{ эВ}, \quad E(\Gamma_{15v} - X_{5v}) = 3,4 \text{ эВ}, \quad E(\Gamma_{1c} - \Gamma_{15v}) = 4,1 \text{ эВ}$$

$$E(L_{1c} - \Gamma_{15v}) = 3,4 \text{ эВ}, \quad E(X_{1c} - X_{3v}) = 10 \text{ эВ}, \quad E(\Gamma_{1c} - \Gamma_{3v}) = 4,6 \text{ эВ}.$$

Секулярное уравнение решали численным моделированием в $1/48$ части зоны Бриллюэна для области $k_y \geq k_x \geq k_z \geq 0$.

Пользуясь свойствами симметрии зоны Бриллюэна, определена связь волнового вектора и других параметров энергетической зонной структуры рассматриваемой $1/48$ части с двумя соседними $1/48$ частями зоны Бриллюэна и восстановлена энергетическая зонная структура в интервале изменения сферических углов $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

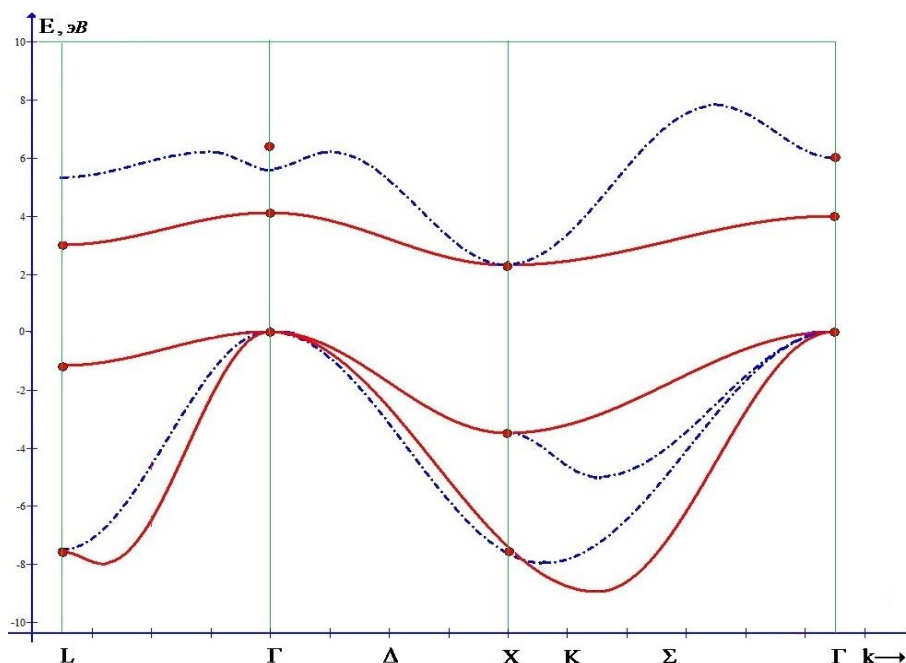


Рис.1. Зонная структура 3C – SiC .

Рассчитанная зонная структура для кубического карбида кремния представлена на рис.1. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными и теоретическими данными других авторов [3,4].

Литература

1. Абдурахманов А.А., Гаврилов Э.С., Расулов А.Р. Интерполяционная модель аномального эффекта Нернста-Эттингсгаузена энергетической зонной структуры ферромагнитного никеля. Известия вузов МВ и ССО СССР, Физика, №6, 1984, с.78-83.
2. Соболев В.В. структура зон карбида кремния. Изв. АН СССР, Неорганические материалы, 1970, Т.5. 11, С.2073.
3. Didier Chaussende, Noboru Ohtani. Single Crystals of Electronic Materials Growth and Properties// Woodhead Publishing Series in Electronic and Optical Materials, 2019, P. 129-179.
4. Абдулвагабов М.Ш., Загиров М.Ю. Расчет зонной структуры Si, C и 3C-SiC методом псевдопотенциала// Материалы XXVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов -2019". С МГУ, г. Москва. 8-12 апреля 2019г. С.40-41.

УДК 517.927

Абдурагимов Э.И.

Abduragimov E.I.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: abduragimov42@mail.ru

Априорная оценка положительного решения двухточечной краевой задачи для одного класса нелинейных ОДУ второго порядка со степенным ростом

A priori estimation of a positive solution of a two-point boundary value problem for a class of second-order nonlinear odes with power growth

Аннотация. Получена априорная оценка положительного решения двухточечной краевой задачи для одного класса нелинейных ОДУ второго порядка со степенным ростом.

A priori estimation of a positive solution of a two-point boundary value problem for a class of second-order nonlinear odes with power growth is obtained.

Ключевые слова: положительное решение, априорная оценка, краевая задача.

Keywords: positive decision, a priori estimation, boundary value problem.

1. Введение. Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$y'' + \sum_{i=1}^k a_i(x)|y|^{p_i} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где $p_i \equiv \text{const} > 1, i = 1, 2, \dots, k, a_i(x)$ – неотрицательные непрерывные функции, тождественно не равные нулю на $[0, 1]$, $k \geq 1$.

Очевидно, $y \equiv 0$ – тривиальное решение этой задачи. Под *положительным решением* задачи (1), (2) понимается функция $y \in C^2[0, 1]$, положительная при $x \in (0, 1)$ и удовлетворяющая граничным условиям (2).

Существованию, единственности, оценкам и другим свойствам положительных решений нелинейных

дифференциальных уравнений посвящено много работ отечественных и зарубежных математиков (см., например, [1-8] и цитированную в них литературу). Данная работа посвящена априорным оценкам положительного решения задачи (1), (2). Полученная оценка может быть использована в дальнейшем при доказательстве существования и единственности. Работ, посвященных априорной оценке положительного решения двухточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального оду сравнительно мало. Данная работа в некоторой степени восполняет указанный пробел. Получена оценка положительного решения задачи (1), (2) снизу и сверху.

2. Априорная оценка положительного решения. Предположим, что при $x \in [0,1]$ в уравнении (1)

$$a_0 \leq a_i(x) \leq A_0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3)$$

где a_0, A_0 – положительные константы.

Обозначим

$$p_0 = \min_{1 \leq i \leq k} p_i, \quad P = \max_{1 \leq i \leq k} p_i, \quad I_p = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (1-t^{p_i+1})}} dt. \quad (4)$$

Справедлива

Теорема. Если $a_i(x)$ положительные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям (3), то для положительного решения задачи (1), (2) справедливы оценки

$$M_1 \equiv \left(\frac{4}{kA_0} \right)^{\frac{1}{P-1}} \leq \|y\| \leq M_2 \equiv \max \left(1, \left[\frac{2(P+1)}{ka_0} \right]^{\frac{1}{p_0-1}} I_p^{\frac{2}{p_0-1}} \right), \quad (5)$$

где

$$I_p = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (1-t^{p_i+1})}} dt, \quad \|y\| = \max_{0 \leq x \leq 1} y(x).$$

Доказательство. Решение задачи (1), (2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = \int_0^1 G(x, t) \sum_{i=1}^k a_i(t) |y(t)|^{p_i} dt, \quad (6)$$

где $G(x, t)$ – функция Грина

$$G(x, t) = \begin{cases} x(1-t), & \text{если } 0 \leq x \leq t, \\ t(1-x), & \text{если } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В силу (3) и обозначений (4) из равенства (6) имеем $M \leq A_0 k M^P \int_0^1 G(x, t) dt \leq \frac{A_0 k M^P}{4}$, (7)

где $M = \|y\|$.

Отсюда следует левая часть неравенства (5).

Из уравнения (1) следует, что положительное решение задачи (1), (2) выпукло вверх, поэтому существует единственная точка x_0 такая, что $y'(x_0) = 0$ и, следовательно, $M = y(x_0)$. Тогда $y'(x) \geq 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $y'(x) \leq 0$ при $x \in [x_0, 1]$.

Умножая уравнение (1) на $2y'$, получим

$$-2y'y'' = 2y' \sum_{i=1}^k a_i(x) y^{p_i}. \quad (8)$$

Отсюда при $x \in [0, x_0]$ в силу (3) и обозначений (4) имеем

$$-(y'^2)' \geq \frac{2a_0}{P+1} \sum_{i=1}^k (y^{p_i+1})'.$$

Интегрируя это неравенство от x до x_0 ($0 \leq x \leq x_0$), получим

$$y'^2(x) \geq \frac{2a_0}{P+1} \sum_{i=1}^k (M^{p_i+1} - y^{p_i+1}).$$

Отсюда имеем

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (M^{p_i+1} - y^{p_i+1})}} \geq \sqrt{\frac{2a_0}{P+1}}.$$

Проинтегрируем полученное неравенство от 0 до x_0 :

$$\int_0^M \frac{dy}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (M^{p_i+1} - y^{p_i+1})}} \geq \sqrt{\frac{2a_0}{P+1}} x_0.$$

Производя в интеграле замену $y = Mt$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^k M^{p_i-1}}} I_p \geq \sqrt{\frac{2a_0}{P+1}} x_0.$$

Отсюда, полагая $M \geq 1$ и учитывая, что при этом

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k M^{p_i-1}} \geq \sqrt{k} M^{\frac{p_0-1}{2}}, \text{ имеем } \frac{1}{\sqrt{k} M^{\frac{p_0-1}{2}}} I_p \geq \sqrt{\frac{2a_0}{P+1}} x_0. \quad (9)$$

При $x \in [x_0, 1]$ из (8) в силу (3) имеем

$$2y'y'' = -2y' \sum_{i=1}^k a_i(x) y^{p_i} \geq \frac{2a_0}{P+1} \sum_{i=1}^k (y^{p_i+1})'.$$

Проинтегрируем это равенство от x_0 до x ($x_0 \leq x \leq 1$):

$$y'^2(x) \geq \frac{2a_0}{P+1} \sum_{i=1}^k (M^{p_i+1} - y^{p_i+1})$$

Отсюда, учитывая, что $y'(x) \leq 0$ при $x \in [x_0, 1]$, имеем

$$\frac{-y'(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (M^{p_i+1} - y^{p_i+1})}} \geq \sqrt{\frac{2a_0}{P+1}}.$$

Интегрируя это неравенство от x_0 до 1, получим

$$\int_0^M \frac{dy}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (M^{p_i+1} - y^{p_i+1})}} \geq \sqrt{\frac{2a_0}{P+1}} (1 - x_0).$$

Отсюда, так же, как в случае отрезка $[0, x_0]$, получим неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{k} M^{\frac{p_0-1}{2}}} I_p \geq \sqrt{\frac{2a_0}{P+1}} (1 - x_0).$$

Складывая полученное неравенство с неравенством (9), получим

$$\frac{1}{\sqrt{k}} I_p \geq \sqrt{\frac{a_0}{2(P+1)}} M^{\frac{p_0-1}{2}}.$$

Отсюда следует и правая часть неравенства (7). Теорема доказана.

В некоторых случаях полученная оценка положительного решения сверху достаточно близка к точному значению максимума положительного решения. Например, в частном случае краевой задачи (1), (2) с уравнением $y'' + y^2 = 0$ вместе уравнения (1) имеем $k=1, a_i(x) \equiv 1, p_i=2$. Максимальное значение положительного решения этой задачи непосредственно вычисляется, используя метод стрельбы, и

оно равно $11,79668793900\dots$. Его оценка M_2 сверху, вычисленная по формуле (7) дает $11,79668793896\dots$. Разность не превосходит по модулю числа $5 \cdot 10^{-11}$.

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа, Наука, М., 1975, 511 с.
2. Похожаев С.И. Ободной задаче Овсянникова. // ПМТФ, 1989, №2, с. 5–10.
3. Kuo-Shung Cheng and Jenn-Tsann Lin. On the elliptic equations $\Delta u = K(x)u^\alpha$ и $\Delta u = K(x)e^{2u}$. // Transactions of American mathematical society, 1987, v. 304, p. 633–668.
4. Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения. // Математические заметки, 2005, т. 78, № 2, с. 202–211.
5. Абдурагимов Э.И. О единственности положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи. // Изв. вузов. Математика, 2002, т. 481, №6, с. 3–6.
6. Абдурагимов Э.И. Единственность положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи и численный метод его построения. // Изв. вузов. Математика, 1998, т. 438, № 11, с. 3–7.
7. Абдурагимов Э.И. Единственность положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. // Вестник ДГУ, выпуск 1, 2007, с. 86-89.
8. Абдурагимов Э.И. О единственности положительного радиально-симметричного решения в шаре задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, Изв. вузов. Математика.-2008, № 12, с. 3-6.

УДК 517.929

Аджиева Х.И.

Adzhieva H.I.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: haljat935@gmail.com

Проверка условий существования решений ФДУ второго порядка, исчезающих на полуоси на конкретном примере

Checking the existence conditions of solutions of functional differential equations of the second order, disappearing on the semi-axis on the specific example.

Аннотация. В статье приводится пример обыкновенного дифференциального уравнения, для которого проверяют условия существования единственного решения. Для приведенного примера обыкновенного дифференциального уравнения составляется резольвента и проверяются условия ее ограниченности, регулярности и проводится доказательство существования и единственности решения рассматриваемого уравнения.

The example of an ordinary differential equation, for which conditions of existence of the unique solution are checked, is given in the paper. For the given example of ordinary differential equation the resolvent is built and the conditions of its boundedness and regularity are checked. After checking the conditions for so-called resolvent operator, the proof of existence and uniqueness of solution of the considered equation is proved.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, резольвента, существование и единственность решения.

Keywords: Hilbert spaces, resolvent, existence and uniqueness of the solution.

Неограниченно расширяющийся круг приложений теории ФДУ к самым разнообразным разделам науки и техники стимулировал ее бурное развитие. Эта теория привлекла к себе внимание большого числа исследователей, интересующихся как самой теорией, так и ее приложениями.

Среди них отметим книги Хейла Дж [9], Колмановского В.П. и Носова В.Р. [8], Алиева Р.Г.[2,3], Азбелева Н.В., Култышева С.Ю., Цалюк В.З.[1], Хермандера А.[10], Бекларяна Л.А. [4].

Предварительно введем некоторые вспомогательные обозначения и понятия. X, Y -гильбертовы пространства, $X \subset Y, \|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y$. $X_{\Delta}^{2,\alpha}$ -пополнение множества функций $u(t), u(t) = 0, t \leq t_0$, с компактными носителями из X , имеющих почти всюду сильно непрерывные производные $u'(t)$ в Y по норме $\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \exp(2\alpha t) (\|u(t)\|_X^2 + \|u'(t)\|_Y^2 + \|u''(t)\|_Y^2) dt \right)^{1/2}$,

$$\alpha = \text{const} \in R$$

$Y_{\Delta}^{0,\alpha}$ -пополнение множества сильно непрерывных функций $u(t), u(t) = 0, t \leq t_0$, с компактными носителями из Y по норме

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \exp(2\alpha t) (\|u(t)\|_Y^2) dt \right)^{1/2}, \Delta \equiv (t_0, +\infty).$$

$L_0(X, Y)$ –множество линейных замкнутых операторов из X в Y .

$L_{\infty}(X, Y)$ –множество линейных вполне непрерывных операторов из X в Y .

$L^2(\Delta, X)$ –пополнение множества сильно непрерывных функций с компактными носителями и со значениями в X по норме

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} (\|u(t)\|_X^2) dt \right)^{1/2}.$$

Носителем определенной и непрерывной на открытом множестве, $G \subset R$ функции $u(t)$ называется множество $\overline{\{t: u(t) \neq 0\}} \cap G$.

$L_2(I)$ –пространство суммируемых с квадратом на множестве $I \subset R$ скалярных функций.

$$L_0 \equiv D_t^2 - \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t) S_{h_{kj}(t)} D_t^k, h_{00}(t) \equiv h_{10} = 0.$$

$$S_{h_{kj}(t)} u(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t - h_{kj}(t)). D_t^k \equiv \frac{1}{i^k} \cdot \frac{d^k}{dt^k}.$$

HJ -множество абсолютно непрерывных в $I \subset R$ скалярных функций $h(t)$, у которых в точках существования производной $h'(t) \leq r \leq 1, t \in I$.

$A_{kj}(t)$ -неограниченные операторные коэффициенты, область определения которых принадлежит X , а область значений- Y . Доказаны

Теорема [6]. Пусть выполнены условия:

а) $A_{kj}(t) \in L_\infty(X, Y), j \geq 1, k = 0, 1, A_{kj}(t)$ сильно непрерывны по $t \in \Delta, j \geq 0, k = 0, 1$;

б) резольвенты $R_0(\lambda, t)$ регулярны, $\|\lambda R_0(\lambda, t)\|_X = O(1), \|\lambda^2 R_0(\lambda, t)\|_Y = O(1), \text{Im} \lambda \leq \alpha, t \geq t_0, |\lambda| \rightarrow \infty$;

в) $f(t) \in Y_\Delta^{0, \alpha}$, при любом компактном $\Delta_1 \subset \Delta, h_{kj}(t) \in HR, h_{kj}(t) \geq 0, h_{kj}(t)$ равномерно непрерывно зависят от $t \in \Delta, j \geq 1, k = 0, 1$.

Тогда уравнение $L_0 u(t) = f(t)$ имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u^{(k)}(t) = 0$ при $t \leq t_0, k = 0, 1$.

Лемма [7]. Если $u(t) \in X_\Delta^{2, \alpha}$ и $u(t), u'(t)$ -непрерывны, то $e^{\alpha t} (\|u(t)\|_Y + \|u'(t)\|_Y) \leq C$ для $t > t_0$, где C зависит от $\alpha, u(t), u'(t)$.

Рассмотрим пример обыкновенного дифференциального уравнения

$u''(t) + au(t) = f(t),$ где $e^{\alpha t} f(t) \in L_2(R), X = Y = R, Y_R^{0, \alpha} = L_2(R)$ с весом $e^{2\alpha t}$, который хорошо иллюстрирует главную идею, лежащую в основе данной теоремы. Резольвента $R_p(\lambda) \equiv (-\lambda^2 + a)^{-1}$ имеет два полюса $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a} \text{Im} \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a}$, если $a < 0$ и $\text{Im} \lambda_{1,2} = 0$, если $a > 0$.

Из равенств

$$\|R_p(\lambda)\|_X = \left| \frac{1}{-\lambda^2+a} \right| = \frac{1}{|\sigma^2-\alpha^2+2i\sigma\alpha-a|} = \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2-\alpha^2-a)^2+4\sigma^2\alpha^2}} \rightarrow 0 \text{ при}$$

$$|\sigma| \rightarrow \infty, |\alpha| \leq C,$$

$$\|\lambda R_p(\lambda)\|_X = \left| \frac{\lambda}{-\lambda^2+a} \right| = \frac{\sqrt{\sigma^2+\alpha^2}}{\sqrt{(\sigma^2-\alpha^2-a)^2+4\sigma^2\alpha^2}} \rightarrow 0 \text{ при}$$

$$|\sigma| \rightarrow \infty, |\alpha| \leq C,$$

$$\|\lambda^2 R_p(\lambda)\|_X = \left| \frac{\lambda^2}{-\lambda^2+a} \right| = \frac{\sigma^2+\alpha^2}{\sqrt{(\sigma^2-\alpha^2-a)^2+4\sigma^2\alpha^2}} \rightarrow 1 \text{ при}$$

$|\sigma| \rightarrow \infty, |\alpha| \leq C$, следуют условия на резольвенту.

Рассматривая различные варианты константы a в уравнении $u''(t) - au(t) = f(t)$, получены следующие выводы:

1) если $\alpha \neq \pm 1$, то существует единственное решение $u(t)$ уравнения, принадлежащее $L_2(R)$ с весом $e^{2\alpha t}$ вместе со своими производными первого и второго порядков.

2) если $\alpha < -1$ и $f(t) = 0, t \leq t_0$, то существует единственное решение $u(t)$ уравнения, принадлежащее $L_2(\Delta)$ с весом $e^{2\alpha t}$ вместе со своими производными первого и второго порядков и обладающее свойством $u(t) = 0, t \leq t_0$.

3) если $\alpha = \pm 1$, то не имеет место утверждение теоремы [6] для данного уравнения.

Таким образом, теория разработанная для ФДУ второго порядка полностью применима и к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Литература

1. Азбелев Н.В., Култышев С.Ю., Цалюк В.З. Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи//2006, С.122.

2. Алиев Р.Г. О разрешимости ФДУ, содержащих производные дробного порядка//ДУ, т.36, №10,2000. – С.1-9.

3. Алиев Р.Г. Функционально-дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве//Учебное пособие для студентов математических специальностей университетов. Махачкала.2001.-С.250.

4. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход//Факториал Пресс, Москва, 2007,- С. 287.

5. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения//«Наука», Москва, 1996.-С.480

6. Дыдымова Х.И. О разрешимости уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве //Наука и социальный прогресс Дагестана.1997.- С. 66-70.

7. Дыдымова Х.И. О разрешимости ФДУ второго порядка в гильбертовом пространстве //ФДУ и их приложения (выпуск 3).1997.- С. 93-107.

8. Колмановский В.П., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием//Наука , Москва, 1981, С. 448.

9. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений//Мир, Москва, 1984,- С.422.

10. Хермандер А. Линейные дифференциальные операторы с частными производными//Мир, Москва, 1984, - С. 380.

УДК 517.929

Алейдаров С.М.

Aleydarov S.M.

Дагестанский Государственный Университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: seydullaaley@mail.ru

Об одном скалярном уравнении с отклоняющимся аргументом в пространствах со степенным весом

About one scalar equation with a deflection argument in spaces with power weight

Аннотация. В статье получены достаточные условия разрешимости скалярного уравнения с отклоняющимся аргументом в пространствах со степенным весом.

We obtain sufficient conditions for the solvability of the scalar equation in a space with the power weight.

Ключевые слова: разрешимость, степенной вес, пространство, скаляр, аргумент.

Keywords: solvability, power-law, weight, space, scalar, argument.

Рассмотрим скалярное уравнение:

$$L(t)u(t) = u'(t) + a * u(t) + b(t) * u(t - \frac{t}{\alpha} * e^{-|t|}) = f(t), \quad (1)$$

где $a > 0, b(t), f(t)$ - ограниченные на всей оси непрерывные функции.

Изучим уравнение (1) в пространствах:

$$X^{1,1} = \{u(t), (\|u(t)\|^{1,1})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)(|u(t)|^2 + |u'(t)|^2) dt < \infty\},$$

$$Y^{0,1} = \{f(t), (\|f(t)\|^{0,1})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)|f(t)|^2 dt < +\infty\}.$$

Соответствующее уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$Lu(t) \equiv u'(t) + a * u(t) = f(t).$$

Резольвента этого уравнения

$$R(\lambda) = \frac{1}{i\lambda + a}$$

регулярна на $\text{Im}\lambda = 0$ и

$$|R(\lambda)| = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}} \leq \frac{1}{a}, \quad |\lambda R(\lambda)| = \frac{|\lambda|}{\sqrt{|\lambda|^2 + a^2}} \leq 1,$$

$$|R'(\lambda)| = \left| -\frac{i}{(i\lambda + a)^2} \right| \leq \frac{1}{a}, \quad |\lambda R'(\lambda)| \leq 1.$$

Для уравнения (2) выполнены все условия
существенности решения в пространстве $X^{1,1}$ при любой
правой части из $Y^{0,1}$. Это решение имеет вид

$$u(t) = \int_{-\infty}^t e^{a(s-t)} f(s) ds$$

Этот несобственный интеграл существует. В самом деле

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \int_{-\infty}^t e^{a(s-t)} |f(s)| ds = \int_{-\infty}^t \frac{e^{a(s-t)}}{\sqrt{1+s^2}} \sqrt{1+s^2} |f(s)| ds \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^t \frac{e^{a(s-t)}}{1+s^2} ds \right)^{1/2} * \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Докажем, что решение

$u(t) \in X^{1,1}$ при любом $f(t) \in Y^{0,1}$

$$\begin{aligned} &\left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) \left| \int_{-\infty}^0 e^{a(s-t)} f(s) ds \right|^2 dt \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) \left| \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} f(\tau+t) d\tau \right|^2 dt \right]^{1/2} \\ &\leq \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) |f(\tau+t)|^2 dt \right)^{1/2} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+(s-\tau)^2) |f(s)|^2 ds \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq \sqrt{2} \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} * \sqrt{1+\tau^2} d\tau * \|f(t)\|^{0,1} < +\infty \end{aligned}$$

$u(t) \in X^{1,1}$ при $\forall f(t) \in Y^{0,1}$. Переменное отклонение $h(t) = \frac{t}{\alpha} e^{-|t|}$ удовлетворяет условию: $|[t - h(t)]^{-1}| \leq C * |t|$, где $C > 0$.

В самом деле

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq \frac{1}{\alpha}; \quad t - h(t) = t * \left(1 - \frac{1}{\alpha} e^{-|t|} \right) \rightarrow \pm\infty, \quad h'(t) \leq \frac{1}{\alpha} \\ &< C \text{ при условии, что } \alpha > 1; \end{aligned}$$

$$|[t - h(t)]^{-1}| = \left| \left[t \left(1 - \frac{1}{\alpha} e^{-|t|} \right) \right] \right|^{-1} \leq 1,5 * |t|$$

Теперь левую часть уравнения (1)

представим в виде суммы двух выражений

$$Lu(t) + L_1 u'(t) = f(t), \quad \text{где}$$

$$Lu(t) = u'(t) + a * u(t), \quad L_1 u'(t) = b(t) * u \left(t - \frac{t}{\alpha} e^{-|t|} \right)$$

и докажем, что

$$\|L_1\|_{R^{0,1}} < \left(\|L^{-1}\|_{R^{1,1}} \right)^{-1},$$

при определенных условиях на $a, \alpha, b(t)$. Имеем:

$$Lu = f \Rightarrow u = L^{-1}f,$$

$$L^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^t e^{a(s-t)} f(s) \bar{d}s.$$

Оценим норму обратного оператора

$$\begin{aligned} \left(\|L^{-1}f(t)\|_{R^{1,1}} \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) (|L^{-1}f(t)|^2 + \\ &|(L^{-1}f(t))'|^2) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) \left(\left| \int_{-\infty}^t e^{a(s-t)} f(s) ds \right|^2 + \left| - \right. \right. \\ &a \int_{-\infty}^t e^{a(s-t)} f(s) ds + f(t) \left. \right|^2) dt \leq 2 * \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) |f(t)|^2 dt + \\ &(1+2a^2) \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) \left(\int_{-\infty}^t e^{a(s-t)} |f(s)| ds \right)^2 dt \leq 2(1+ \\ &(1+2a^2) \left(\int_{-\infty}^0 e^{at} * \sqrt{1+t^2} \right)^2) * (\|f(t)\|_{0,1})^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|L^{-1}\|_{Y^{0,1} \rightarrow X^{1,1}} \leq \left\{ 2 * (1 + (1 + 2a^2) \left(\int_{-\infty}^0 e^{at} * \sqrt{1+t^2} \right)^2) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим норму оператора $L_1: X^{1,1} \rightarrow Y^{0,1}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) |b(t)|^2 * \left| u \left(t - \frac{t}{\alpha} e^{-|t|} \right) \right|^2 \bar{d}t &\leq (\max_t |b(t)|)^2 * \\ \int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2) \left| u \left(t - \frac{t}{\alpha} e^{-|t|} \right) \right|^2 dt &\leq \frac{a}{a-1} * (\max_{t \in R} |b(t)|)^2 * \\ \int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2) |u(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Значит,

$$\|L_1\|_{X^{1,1} \rightarrow Y^{0,1}} * \leq \sqrt{\frac{a}{a-1} * \max_t |b(t)|}.$$

Оценим произведение норм операторов L^{-1} и L_1

$$\|L_1\|_{X^{1,1} \rightarrow Y^{0,1}} * \|L^{-1}\|_{Y^{0,1} \rightarrow X^{1,1}} \leq \sqrt{\frac{a}{a-1}} * \max_{t \in \mathbb{R}} |b(t)| * \{2 + 2(1 + 2a^2) \left(\int_{-\infty}^0 e^{at} * \sqrt{1 + t^2} dt \right)^2\}^{-\frac{1}{2}} < 1.$$

Последнее неравенство справедливо, если

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |b(t)| < \left\{ \frac{2(a-1)}{a} [1 + (1 + 2a^2) \left(\int_{-\infty}^0 e^{at} * \sqrt{1 + t^2} dt \right)^2] \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

При этом условии уравнение с отклоняющим аргументом (I.3.3) имеет единственное решение в пространстве $X_{\mathbb{R}}^{1,1}$ при любой правой части из пространства $Y_{\mathbb{R}}^{0,1}$.

Литература

1. Алиев Р.Г. Функционально Дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве – Махачкала, 2001, 348 с
2. Колмогоров А.И., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва, “Наука”, 1981, 544 с.

УДК 510.20

Амучиева Т.С.

Amuchieva T.S.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: amuchieva@rambler.ru

О задачах по теме «решение (прямоугольного) треугольника»

On problems on the topic «solution of a (right-angled) triangle»

Аннотация. Геометрия в школе - это не только основная математическая дисциплина, но и один из компонентов общечеловеческой культуры. Геометрические образы сопровождают человека в течение всей его жизни, начиная с первых лет. Именно поэтому главную роль в процессе развития геометрии играют практические задачи. К таким относятся и задачи по теме «Решение треугольника».

Geometry in school is not only the main mathematical discipline, but also one of the components of universal culture. Geometric images accompany a person throughout his life, starting from the first years. That is why the main role in the development of geometry is played by practical problems. These include problems on the topic "Solving the triangle".

Ключевые слова: прямоугольный треугольник, решение задач по геометрии в школьном курсе, решение треугольников.

Keywords: right triangle, solution of problems in geometry in a school course, the solution of triangles.

Знание определений основных тригонометрических функций и, как следствие, правил:

1) катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего угла;

2) катет равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего угла;

3) катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего угла;

4) катет равен другому катету, умноженному на котангенс прилежащего угла;

5) гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего угла;

6) гипотенуза равна катету, деленному на косинус прилежащего угла, позволяет успешно рассмотреть учащимся решение задачи по этой теме. Однако запоминание этих правил вызывает определенные трудности у учащихся. Если же ограничиться запоминанием лишь четырех определений тригонометрических функций острого угла, то перед учащимися возникает проблема выбора нужной функции в условиях конкретной задачи. Этих трудностей можно избежать, если ввести понятие единичного прямоугольного треугольника. Назовем этим термином прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной единице.

В дальнейшем будем называть его просто единичным треугольником. Пусть один из его острых углов равен α . Тогда очевидно, что длина его противолежащего катета равна $\sin \alpha$, а прилежащего - $\cos \alpha$.

Эти сведения ученик должен запомнить, что в общем-то, несложно, так как всегда синус ассоциируется с противолежащим катетом, а косинус - с прилежащим. Кстати, такой подход обнаруживает эффективный способ вычисления синуса, косинуса и служит пропедевтикой к их определению с помощью единичной окружности.

Пусть теперь дан произвольный прямоугольный треугольник со сторонами k , l , m и острым углом α . Наряду с ним рассмотрим единичный треугольник с таким же углом α . Ясно, что единичный треугольник (пусть длины его сторон равны соответственно k_1 , l_1 , m_1) подобен данному.

Тогда $k:l = k_1:l_1$. Отсюда $k = l \cdot \frac{k_1}{l_1}$.

Получено правило нахождения любой стороны прямоугольного треугольника. Сформулируем его следующим образом.

Любая сторона прямоугольного треугольника равна другой его стороне, умноженной на отношение сходственных сторон единичного треугольника.

Это правило вобрало в себя все шесть правил, приведенных выше. Оно легко запоминается, в нем даже не упоминаются термины: «катет», «гипотенуза», «прилежащий и противолежащий катеты», «синус, косинус, тангенс угла».

Пусть дан треугольник, у которого катет равен x , а гипотенуза a . Соответствие сходственных сторон этого треугольника и единичного обозначим стрелками: $x \rightarrow \sin \alpha$, $a \rightarrow 1$. Тогда

$$x = a \cdot \frac{\sin \alpha}{1} = a \sin \alpha.$$

На первых порах, написав начало формулы:

$$x = a \cdot - ,$$

Следует задаться вопросом: какие стороны единичного треугольника сходственны с x и a ? И нужное отношение будет сразу составлено.

Рассмотрим теперь треугольник, у которого стороны равны b, d, f . Тогда

$$d \rightarrow \sin \alpha, \quad b \rightarrow \cos \alpha, \quad f \rightarrow 1 \text{ и}$$

$$b = d \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{или} \quad b = f \cdot \frac{\cos \alpha}{1};$$

$$d = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{или} \quad b = f \cdot \frac{\sin \alpha}{1};$$

$$f = d \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \quad \text{или} \quad f = b \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

Практика показывает, что даже слабые ученики легко и быстро привыкают к этому способу.

Применение единичного треугольника можно расширить, если в нем вычислить еще и другие элементы: высоту, проведенную к гипотенузе, проекции катетов.

Порой кажется, что эта тема несколько рутинна, поэтому полезно ее «разбавлять» такими задачами, где нет сложных вычислений, а есть пусть и небольшая, но исследовательская работа.

Пусть дана одна сторона треугольника и требуется узнать все остальные его элементы - линейные и угловые. Для правильных треугольников задача определена. Она определена также и для равнобедренного прямоугольного треугольника, но только во множестве иррациональных чисел и не имеет решения во множестве рациональных чисел. Для остальных треугольников задача не определена. Возникает вопрос: *можем ли мы из этого множества решений найти хотя бы одно?*

Этот вопрос можно рассмотреть с учащимися как пример творческой деятельности на уроке или вне его. Для косоугольных треугольников ответ прост: *да, можем, и не только одно, а сколько угодно.* Для этого берем произвольно два числа так, чтобы вместе сданным выполнялось условие - сумма любых двух чисел должна быть больше третьего.

Для прямоугольных треугольников задача усложняется. Во-первых, тем, что произвольные числа брать не можем, так как надо, чтобы выполнялась теорема Пифагора. Во-вторых, тем, что стороны прямо-угольного треугольника имеют названия и поэтому требуется рассмотреть три варианта: дан меньший катет; дан больший катет; дана гипотенуза. Подобрать числа при этих условиях, да еще так, чтобы они были рациональными, очень сложно.

Вот и возникла еще одна проблема: *как в обход теоремы Пифагора найти стороны прямоугольного треугольника?*

Предложим способ решения, основанный на древнем методе отношений. Из теории нам понадобится только третий признак подобия треугольников.

Пример. Пусть дана одна сторона прямоугольного треугольника, равная $\frac{2}{3}$. Найти хотя бы одно его решение во множестве рациональных чисел.

Решение. Берем треугольник со сторонами 3, 4, 5.

Первый вариант - пусть данная в примере сторона является меньшим катетом. Тогда отношение сторон нашего

треугольника и египетского равно $\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{9}$. Умножим $\frac{2}{9}$ на 3, 4, 5, получим треугольник со сторонами $\frac{6}{9}, \frac{8}{9}, \frac{10}{9}$.

Второй вариант - данная в примере сторона - это больший катет. Тогда

отношение сторон упомянутых треугольников: $\frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$.

Следовательно, получаем треугольник со сторонами $\frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$.

Третий вариант - гипотенуза равна $\frac{2}{3}$. Тогда отношение

сторон равно $\frac{2}{15}$. Следовательно, получится треугольник со

сторонами $\frac{6}{15}, \frac{8}{15}, \frac{10}{15}$.

Если мы возьмем за основу другой прямоугольный треугольник, например, тот стороны которого равны 8, 15, 17, то получим другие варианты решения своей задачи:

$$\frac{8}{12}, \frac{15}{12}, \frac{17}{12}; \quad \frac{16}{45}, \frac{30}{45}, \frac{34}{45}; \quad \frac{16}{51}, \frac{30}{51}, \frac{34}{51}.$$

Литература

1.Цейтен Г.Г. История математики в древности и средние века. М.;Л., 1932.

2.Сборник задач по математике для поступающих во втузы/ Под ред. М.И.Сканави.- М.:Столетие. МИЧ, 1997.

УДК 517 512.

Алиев М.С.

Aliev M.S.

Дагестанский государственный университет, Махачкала.

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: Aliev mingazhudin @ eandex. Ru.

Обобщенные системы Маркова

The generalized system Markov

Аннотация. По аналогии с классическим определением системы Маркова, доказывается, что любые первые n функции системы $x^{-1}, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ на любом $[a, b]$ будут типа $n-1$. Рассмотрены и другие подобные системы функций.

By analogy with the classical definition of the Markov system, we prove that any first n functions of the system $x^{-1}, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ on any $[a, b]$ will be of type $n-1$. Other similar systems of functions are also considered.

Ключевые слова: определитель, минор, система функций, тип системы.

Keywords: determinant, minor, system of functions, type of system.

Непрерывны на $[a, b]$ функции $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$, для которых определитель

$$(1) \quad D \begin{pmatrix} u_0, \dots, u_n \\ x_1, \dots, x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_0(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_0(x_{n+1}) & \dots & u_n(x_{n+1}) \end{vmatrix} \neq 0$$

для любого набора различных точек $\{x_k\}_{k=1}^{n+1} \in [a, b]$ называется

системой Чебышева. Если при каждом $n (0 \leq n < \infty)$ функции

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), u_{n+1}(x), \dots$$

будут системой Чебышева, то эту бесконечную систему называют системой Маркова.

Определение. Если при фиксированном σ и любом $n (0 \leq \sigma \leq n < \infty)$,

функции $\{u_i(x)\}_{i=0}^n$ образуют систему типа $n-\sigma$, то $\{u_i(x)\}_{i=0}^\infty$ будем называть обобщенной системой Маркова типа $n-\sigma$.

Тип классической системы Маркова $\{x^i\}_{i=0}^\infty$ положим равным $n+1$.

Докажем, что система функций $x-1, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ является обобщенной системой Маркова типа $n-1$ на $[-1, 1]$.

Вычислим определитель

$$D_1 = D \begin{pmatrix} 1 & x^2 & \dots & x^n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{методом} \quad \text{математической}$$

индукции

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 + x_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_2^2 x_1 \\ 1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_3^2 x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$$

$$\begin{vmatrix} x_2 + x_1 & x_2^2 \\ x_3 + x_1 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i) (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

$$(1) D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_2^2 x_1 & \dots & x_2^n - x_2^{n-1} x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 - x_1^2 & x_n^3 - x_n^2 x_1 & \dots & x_n^n - x_n^{n-1} x_1 \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^n (x_i -$$

$$x_1) \left\{ \prod_{i=2}^n x_i \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left[\sum x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_{n-1}} \right], \quad \text{где} \quad t_1, \dots, t_{n-1}$$

всевозможные комбинации из чисел $1, 2, \dots, n$.

$$(2) D \begin{pmatrix} x-1 & x^2 & \dots & x^n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x & x^2 & \dots & x^n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} -$$

$$D \begin{pmatrix} 1 & x^2 & \dots & x^n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} =$$

Первое слагаемое после выноса за знак определителя $x_1 x_2 \dots x_n$

является определителем Вандермонда

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) (x_1 x_2 \dots x_n - \sum x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_{n-1}}).$$

Для доказательства нам нужно показать;

- 1) определитель (2) может обратиться в нуль на $[-1, 1]$;
- 2) в равном нулю определителе (2) все миноры по первым $n-1$ столбцам отличны от нуля и одного знака.

Для наглядности проиллюстрируем решение задачи при $n=4$, и

$$-1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 1$$

Допустим определитель (2) при $n=4$ равен нулю, то есть

$$(3) x_1 x_2 x_3 x_4 - (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) = 0$$

$$x_4 = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3 - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right)} \quad \text{при } x_i \neq 0, i =$$

1,2,3.

Например при $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{8}$

Обращение в нуль и знак миноров по первым трем столбцам определяется значениями выражений $x_2 x_3 x_4 - (x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4)$;

$$x_1 x_3 x_4 - (x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_3 x_4); x_2 x_1 x_4 - (x_2 x_1 + x_2 x_4 + x_1 x_4);$$

$$x_2 x_3 x_1 - (x_2 x_3 + x_2 x_1 + x_3 x_1).$$

Если допустить равенство нулю любого минора, например последнего, из формул (3) видно x_4 равен ∞ . Если допустить равенство нулю любого из $x_1 x_2 x_3$, например $x_2 = 0$, из формул (3) следует $x_1 x_3 x_4 = 0$, то есть еще один $x_k = 0$, что невозможно ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$).

Допустим в равном нулю определителе (2) два последние, соседние миноры имеют противоположные знаки:

$$0 > [x_2 x_3 x_1 - (x_2 x_3 + x_2 x_1 + x_3 x_1)][x_2 x_1 x_4 - (x_2 x_1 + x_2 x_4 + x_1 x_4)] =$$

$$= [x_2 x_3 x_1 - x_2 x_1 - (x_2 x_3 + x_3 x_1)][x_2 x_1 x_4 - x_2 x_1 - (x_2 x_4 + x_1 x_4)] =$$

$$= x_2 x_1 [x_1 x_2 x_3 x_4 - (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)] + x_1^2 x_2^2 -$$

$$-(x_1 + x_2)[x_1 x_2 x_3 x_4 - (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)] = x_1^2 x_2^2 < 0$$

Получили противоречие. Таким образом в каждом равном нулю определителе порядка n все миноры по первым $n-1$ столбцам отличны от нуля и одного знака.

2. Система функций $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n}, \dots$ ($0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$) образуют систему Маркова типа n на любом $[a, b]$ ($0 < a < b$) [1].

Теорема. Система функций $1, x, \dots, x^r, x^{r+3}, \dots, x^n$ полученный из системы $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ вычеркиванием двух соседних степеней образует систему Маркова на любом сегменте $[a, b]$.

Доказать нужно при $a < 0 < b$. Пусть $r=0$. Введем обозначение

$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_1^n$. Установим знак определителя

$$D \begin{pmatrix} 1 & x^3 & \dots & x^n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_1^{n-1} [\sum x_{t_1}^2 x_{t_2}^2 \dots x_{t_{n-2}}^2 + \sum x_{t_1}^2 \dots x_{t_{n-3}}^2 x_{t_{n-2}} x_{n-1}]$$

Предположим $x_1 < \dots < x_k < 0 < x_{r+2} < \dots < x_{n-1}$

$$D \begin{pmatrix} 1 & x^3 & \dots & x^n \\ x_1 & x_k & 0 & x_{k+2} & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^{k+2} x_1^3 \dots x_k^3 x_{k+2}^3 \dots x_{n-1}^3 D \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x^{n-3} \\ x_1 & x_k & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Определитель Вандермонда положителен произведение $(-1)^{k+2} x_1^3 \dots x_k^3$ при любом k положителен. Далее установим точно также

положительность подобного определителя при $r=1$

$$D \begin{pmatrix} 1 & x & x^4 & \dots & x^n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_1^n [\sum x_{t_1}^2 x_{t_2}^2 \dots x_{t_{n-3}}^2 + \sum x_{t_1}^2 \dots x_{t_{n-4}}^2 x_{t_{n-3}} x_{t_{n-2}} + 2 \sum x_{t_1}^2 \dots x_{t_{n-5}}^2 x_4 x_{t_{n-3}} x_{t_{n-2}} x_{t_{n-1}}]$$

$$D \begin{pmatrix} 1 & x & x^4 & \dots & x^n \\ x_1 & x_k & 0 & x_{k+2} & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^{r+2} x_1 \dots x_k x_{k+2} \dots x_{n-1} D \begin{pmatrix} 1 & x^3 & \dots & x^{n-1} \\ x_1 & x_k & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}$$

положителен, учитывая случай $r=0$

Далее по индукции устанавливаем положительность определителей вида

$$D \begin{pmatrix} 1 & \dots & x^r & x^{r+3} & \dots & x^n \\ x_1 & & x_2 & \dots & & x_{n-1} \end{pmatrix}, r=2,3,\dots$$

Точно также устанавливается положительность определителей с вычеркнутыми четным числом соседних степеней.

Теорема. Функции $1, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n}, \dots$ образуют систему Маркова на сегменте $[a, b] (a < 0 < b)$, при условии $\alpha_r - \alpha_{r-1} = 2i - 1, i = 1, 2, \dots$

Доказательство следует из

Теоремы

[1]

Если

$h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x), \dots$ *возрастающая* на $[a, b]$ непрерывные справа функции ($h_1(x)$ – непрерывна), то функции

$$1, u_1(x) = \int_0^x d(h_1(t_1)), u_2(x) = \int_0^x dh_1(t_1) \int_0^{t_1} dh_2(t_2), \dots,$$

$$u_n(x) = \int_0^x dh_1(t_1) \int_0^{t_1} dh_2(t_2) \dots \int_0^{t_{n-1}} dh_n(t_n), \dots$$

образуют систему Маркова.

Пример. $1, x^3, x^8, x^{11}, x^{18}$ образуют систему Маркова $h_1(x) = x^3, h_2(x) = \frac{8}{3}x^5, h_3(x) = \frac{11}{5}x^3, h_4(x) = \frac{225}{22}x^7$

Антиподами системам Маркова, (увеличение *тип* системы увеличивается), будут: $1, x^2, x^4, \dots, x^{2n}, \dots$ на сегменте $[a, b] (a < 0 < b)$, будет типа 1 при любом $n \geq 1$;

$1-2x, 1-3x^2, \dots, 1-nx^{n-1}, \dots$ на сегменте $[0, 1]$ будет системой типа 0 при любом $n \geq 2$.

Литература

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М. Наука. 1974.

2. Алиев М.С. Свойства полиномов по одной системе функций Вестник ДГУ, 2016, стр 41-45. Алиев М.С. Об одной системе функций Маркова. Вестник ДГУ, 2018, вып. 4, стр. 80-84.

3. Алиев М.С. О приближение функций слабой системой Чебышева.- Вестник ДГУ -2011г. –вып. 6, стр. 120 -123.

4. Алиев М.С. Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями. Вестник ДГУ -2017 г. –вып. 3 том 32, стр. 67-73.

5. Рамазанов А_Р.К., Магомедова В.Г. Оценка наилучших приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом. Вестник ДГУ -2015 –вып. 6 .

6. Алиев М.С. К вопросу реализации нормы одного функционала.-Вестник ДГУ -2013 г. –вып. 1

7. Рамазанов А_Р.К., Магомедова В.Г. Оценка скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам через индуцированные функции. Вестник ДГУ -2016 г. –вып. 2, стр. 35-40.

8. Сеге Г.,Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа. М. Наука, 1978.

9. Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш. Оценка значений многочленов внутри отрезка.-Вестник ДГУ -2012 г. –вып. 6

УДК 539.3: 532.542

Анкилов А.В., Вельмисов П.А.

Ankilov A.V., Velmisov P.A.

Ульяновский государственный технический университет,
Ульяновск

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk

E-mail: ankil@ulstu.ru, velmisov@ulstu.ru

**Об устойчивости решений одной нелинейной
начально-краевой задачи в аэрогидроупругости**

**On stability of solutions of a nonlinear initial-boundary
value problem in aerohydroelasticity**

Аннотация: В работе на основе построения функционала исследуется устойчивость решений начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей совместные колебания деформируемых элементов и дозвукового потока сжимаемой среды в вибрационном устройстве. Для описания динамики упругих элементов используется нелинейная теория твердого деформируемого тела. Получены достаточные условия устойчивости нулевого решения указанной системы.

In work on the basis of the construction of the functional the stability of solutions of initial boundary value problems for the system of partial differential equations that describe joint oscillations of deformable elements and a subsonic flow of a compressible medium in a vibrating device is investigated. To describe the dynamics of elastic elements, the nonlinear theory of a solid deformable body is used. Sufficient stability conditions for the zero solution of this system are obtained.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, устойчивость, упругая пластина, дозвуковой поток, дифференциальные уравнения, функционал.

Keywords: aerohydroelasticity, stability, elastic plate, subsonic flow, differential equations, functional.

Рассматривается плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < H\}$, в котором расположены упругие элементы. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругими

являются пластины $J_{1i} = \{(x, y) \in R^2 : y = y_1 \in (0, H), x \in [b_i, c_i]\}$ и $J_{2i} = \{(x, y) \in R^2 : y = y_2 \in (0, H), x \in [b_i, c_i]\}$, $i = \overline{1, n}$ (рис. 1).

Обозначим $J = \bigcup_{i=1}^n (J_{1i} \cup J_{2i})$.

Введем обозначения: $u_{ji}(x, t), w_{ji}(x, t), j = 1, 2, i = \overline{1, n}$ – функции, определяющие продольные и поперечные составляющие деформации элементов в направлении осей Ox и Oy соответственно; $\varphi(x, y, t)$ – функция, определяющая потенциал скорости возмущенного потока газа; a – скорость звука в невозмущенном потоке жидкости ($V < a$).

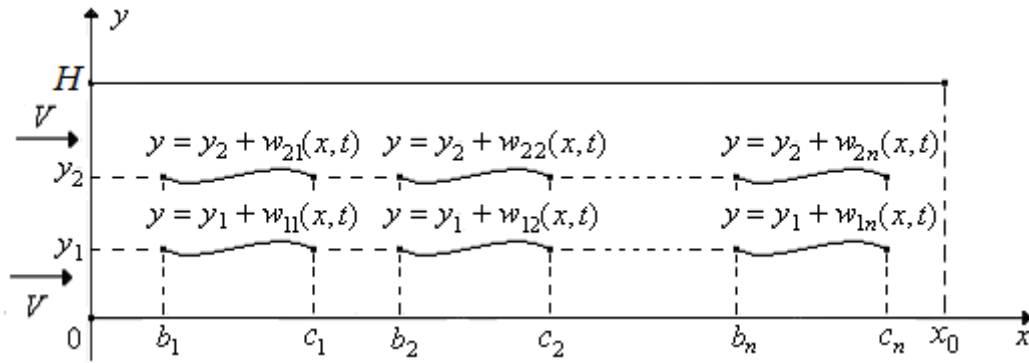


Рисунок 1 – Канал, внутри которого расположены деформируемые элементы

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), (x, y) \in G \setminus J, t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_j, t) = \dot{w}_{ji}(x, t) + Vw'_{ji}(x, t), x \in (b_i, c_i), i = \overline{1, n}, j = 1, 2, t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, H, t) = 0, x \in (0, x_0), t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, x \in (0, x_0), t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \varphi(x_0, y, t) = 0, y \in (0, H), t \geq 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} -E_{ji}F_{ji} \left(u'_{ji}(x, t) + \frac{1}{2} w_{ji}^{\prime 2}(x, t) \right)' + M_{ji} \frac{\partial}{\partial x} (u_{ji}(x, t) - \beta_{2ji} F_{ji} u_{ji}(x, t)) = 0, \\ -E_{ji}F_{ji} \left[w'_{ji}(x, t) \left(u'_{ji}(x, t) + \frac{1}{2} w_{ji}^{\prime 2}(x, t) \right) \right]' + D_{ji} w_{ji}^{\prime\prime\prime}(x, t) + M_{ji} \frac{\partial}{\partial x} (w_{ji}(x, t) + \\ + N_{ji}(t) w_{ji}^{\prime\prime}(x, t) + \beta_{2ji} I_{ji} w_{ji}^{\prime\prime\prime}(x, t) + \beta_{1ji} \frac{\partial}{\partial x} (u_{ji}(x, t) - \beta_{2ji} F_{ji} u_{ji}(x, t)) + \beta_{0ji} w_{ji}(x, t) = \rho(\varphi_t^+(x, y_j, t) - \\ - \varphi_t^-(x, y_j, t)) + \rho V(\varphi_x^+(x, y_j, t) - \varphi_x^-(x, y_j, t)), \quad x \in (b_i, c_i), i = \overline{1, n}, j = 1, 2, t \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$w_{ji}(b_i, t) = w_{ji}^{\prime\prime}(b_i, t) = u_{ji}(b_i, t) = w_{ji}(c_i, t) = w_{ji}^{\prime\prime}(c_i, t) = u_{ji}(c_i, t) = 0, j = 1, 2, i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y, t ; штрих обозначает производную по x , а точка – производную по t ;
 $\varphi_t^\pm(x, y_j, t) = \lim_{y \rightarrow y_j \pm 0} \varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x^\pm(x, y_j, t) = \lim_{y \rightarrow y_j \pm 0} \varphi_x(x, y, t)$; ρ – плотность жидкости; $I_{ji} = h_{ji}^3 / (12(1 - \nu_{ji}^2))$; $F_{ji} = \frac{h_{ji}}{1 - \nu_{ji}}$; $D_{ji} = E_{ji} I_{ji}$ – изгибные жесткости элементов; h_{ji} – толщина элементов; $M_{ji} = h_{ji} \rho_{ji}$ – погонные массы элементов; E_{ji} , ρ_{ji} – модули упругости и линейные плотности элементов; $N_{ji}(t)$ – сжимающие (растягивающие) силы; β_{2ji}, β_{1ji} – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_{0ji} – коэффициенты жесткости обжимных слоев; ν_{ji} – коэффициенты Пуассона.

Введем обозначение: $K_j(t) = \min_{i=1, n} (\lambda_{1ji} D_{ji} - N_{ji}(t))$, $j = 1, 2$, где λ_{1ji} – наименьшие собственные значения краевых задач [1] для уравнения $\psi'''' = -\lambda \psi''$, $x \in (b_i, c_i)$, $i = \overline{1, n}$ с краевыми условиями (7).

На основе исследования функционала

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_{G \setminus J} \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \varphi_x^2 + a^2 \varphi_y^2 \right) dx dy + 2a^2 V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \int_{b_i}^{c_i} (\varphi^+(x, y_j, t) - \\ & - \varphi^-(x, y_j, t)) w'_{ji}(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \int_{b_i}^{c_i} \left(E_{ji} F_{ji} \left(u'_{ji}(x, t) + \frac{1}{2} w_{ji}^{\prime 2}(x, t) \right)^2 + \right. \\ & \left. + M_{ji} \left(\dot{u}_{ji}^2(x, t) + \dot{w}_{ji}^2(x, t) \right) + D_{ji} w_{ji}^{\prime 2}(x, t) + \beta_{0ji} w_{ji}^2(x, t) - N_{ji}(t) w_{ji}^{\prime 2}(x, t) \right) \end{aligned}$$

доказана теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} \dot{N}_{ji}(t) \geq 0, \beta_{2ji} \geq 0, \beta_{1ji} \geq 0, \beta_{0ji} \geq 0, j = 1, 2, i = \overline{1, n}, \\ \frac{y_1 V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2 \right)}{(y_2 - y_1) \left(2K_1(t) (a^2 - V^2) \pi^2 y_1 - V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 y_1^2 + 2a^2 x_0^2 \right) \right)} \in (0, 1), \\ \frac{(H - y_2) V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2 \right)}{(y_2 - y_1) \left(2K_2(t) (H - y_2) (a^2 - V^2) \pi^2 - V^2 \rho \left((a^2 - V^2) \pi^2 (H - y_2)^2 + 2a^2 x_0^2 \right) \right)} \in (0, 1), \end{aligned}$$

$$\frac{y_1}{\left(2K_1(t)y_1(a^2 - V^2)\pi^2 - V^2\rho\left((a^2 - V^2)\pi^2 y_1^2 + 2a^2 x_0^2\right)\right)} +$$

$$+ \frac{(H - y_2)}{\left(2K_2(t)(H - y_2)(a^2 - V^2)\pi^2 - V^2\rho\left((a^2 - V^2)\pi^2 (H - y_2)^2 + 2a^2 x_0^2\right)\right)} <$$

$$< \frac{(y_2 - y_1)}{V^2\rho\left((a^2 - V^2)\pi^2 (y_2 - y_1)^2 + 2a^2 x_0^2\right)}.$$

Тогда решение $w_{ji}(x, t)$, $j = 1, 2, i = \overline{1, n}$, $\varphi(x, y, t)$ задачи (1)–(7) и производные $\varphi_t(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$, $\dot{u}_{ji}(x, t)$, $\dot{w}_{ji}(x, t)$, $w'_{ji}(x, t)$, $w''_{ji}(x, t)$, $j = 1, 2, i = \overline{1, n}$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных $\varphi_t(x, y, 0)$, $\varphi_x(x, y, 0)$, $\varphi_y(x, y, 0)$, $\varphi^+(x, y, 0)$, $\varphi^-(x, y, 0)$, $\dot{u}_{ji}(x, 0)$, $u'_{ji}(x, 0)$, $\dot{w}_{ji}(x, 0)$, $w'_{ji}(x, 0)$, $w''_{ji}(x, 0)$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и Ульяновской области № 18-41-730015.

Литература

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – 146 с.

УДК 517.968.74

Асхабов С.Н.^{1,2}

Askhabov S.N.^{1,2}

¹Чеченский государственный университет, г. Грозный

²Чеченский государственный педагогический университет,
г. Грозный

¹Chechen State University, Grozny

²Chechen State Pedagogical University, Grozny

E-mail:askhabov@yandex.ru

**Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки
второго порядка со степенной нелинейностью**

**Integro-differential equation of the second order convolu-
tion type with power nonlinearity**

Аннотация. В классе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций изучается интегро-дифференциальное уравнение второго порядка вольтерровского типа с разностным ядром и степенной нелинейностью.

Abstract. In the class of non-negative continuous functions on the positive half-axis, we study a second order integro-differential equation of the Volterra type with a difference kernel and power nonlinearity.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, свертка, степенная нелинейность.

Key words: integro-differential equation, convolution, power nonlinearity.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} & u^\alpha(x) \\ &= \int_0^x k(x-t) \cdot u''(t) dt, \quad \alpha \\ &> 1, \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $C^n[0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, множество всех n раз непрерывно дифференцируемых на полуоси

$[0, \infty)$ функций. Всюду далее предполагается, что ядро $k(x)$ удовлетворяет на $[0, \infty)$ условию:

$$\begin{aligned} k(x) \in C^3[0, \infty), \quad k'''(x) \text{ не убывает,} \\ k(0) = k'(0) = k''(0) = 0 \text{ и } k'''(0) > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решения уравнения (1) будем разыскивать в классе:

$$Q_0^2 = \{u(x): u(x) \in C^2(0, \infty), u(0) = u'(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Уравнение (1) тесно связано с интегральным уравнением

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k''(x-t) \cdot u(t) dt, \quad \alpha > 1, \quad (4)$$

возникающим при решении различных задач гидроаэродинамики (см. [1, §17]).

В связи с указанными приложениями решения уравнения (4) будем разыскивать в классе

$$Q_0 = \{u(x): u(x) \in C[0, \infty), u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Лемма 1. Если $u(x) \in Q_0$ является решением уравнения (4), то $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$, дважды непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$ и

$$\begin{aligned} F(x) \equiv \left[\frac{(\alpha-1)^2 k'''(0)}{2\alpha \cdot (\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\frac{2}{\alpha-1}} \leq u(x) \leq \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot k'(x) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \equiv G(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что при $k(x) = x^3$ функция $u^*(x) = \left[\frac{3(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha+1)} \right]^{1/(\alpha-1)} x^{2/(\alpha-1)}$ совпадает с $F(x)$ и является решением уравнения (4), т.е. априорная оценка снизу из (5) не улучшаема в определенном смысле.

Исследование интегрального уравнения (4) основано на принципе сжимающих отображений и для его применения в классе

$$P_b = \{u(x): u(x) \in C[0, b] \text{ и } F(x) \leq u(x) \leq G(x)\},$$

где $b > 0$ – произвольное число, вводится метрика

$$\rho_b(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{x^{2/(\alpha-1)} e^{\beta \cdot x}}, \quad \beta > 0.$$

В результате получаем полное метрическое пространство P_b .

Выберем достаточно малое число $c \in (0, b)$ такое, что $k'''(c) < \alpha \cdot k'''(0)$ и положим

$$\beta = \frac{1}{k'''(0)} \sup_{c \leq x \leq b} \frac{k'''(x) - k'''(0)}{x}.$$

При этих условиях, методом подробно изложенным в [1, §18], доказывається, что уравнение (4) имеет единственное решение в P_b (и в Q_0).

Интегрируя по частям, легко показать, что любое решение $u(x) \in Q_0^2$ задачи Коши (1)–(2) является решением уравнения (4). Для доказательства обратного утверждения, что любое решение $u(x) \in Q_0$ уравнения (4) является решением задачи Коши (1)–(2) достаточно воспользоваться леммой 1 и дополнительным условием на ядро:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x k'''(x-t) \cdot (k'(t))^{\frac{1}{\alpha-1}} dt \cdot \left(\int_0^x k''(x-t) \cdot t^{\frac{2}{\alpha-1}} dt \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = 0, \quad (6)$$

обеспечивающим выполнение условия $u'(0) = 0$.

Теорема 1. *Если ядро $k(x)$ удовлетворяет условиям (3) и (6), то задача Коши (1)–(2) имеет единственное решение в классе Q_0^2 (и в пространстве P_b при любом $b > 0$). Это решение можно найти итерационным методом Пикара в P_b .*

При $\alpha = 2$ и $k(x) = x^3$ оба условия (3) и (6) выполняются и $u(x) = x^2/2$ является как решением задачи Коши (1)–(2), так и интегрального уравнения (4).

Другие классы нелинейных дискретных, интегральных и интегро-дифференциальных типа свертки различными методами исследованы в [2]–[4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001.

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009.
2. Асхабов С.Н. Интегро-дифференциальные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции. М.: МАКС Пресс, 2019. С. 11–14.
3. Асхабов С.Н., Мухтаров Х.Ш. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №3. С. 512–514.
4. Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах // Доклады Академии наук. 1992. Т. 322, №6. С. 1015–1018.

Балкизов Ж.А.

Balkizov Zh.A.

¹Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS

E-mail: Giraslan@yandex.ru

Краевая задача со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с производной второго порядка в граничных условиях

A boundary value problem with a bias for a third-order parabolic-hyperbolic type equation with a second-order derivative under boundary conditions

Аннотация. В рамках данного доклада исследована краевая задача со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа третьего со второй производной в граничных условиях.

In the framework of this report, a boundary value problem with a bias for an equation of parabolic-hyperbolic type of the third with the second derivative in the boundary conditions is investigated.

Ключевые слова: краевая задача, граничные условия, регулярное решение.

Keywords: boundary value problem, boundary conditions, regular solution

На евклидовой плоскости точек (x, y) и рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy} - f_1, & y < 0, \\ u_{xxx} - u_y - f_2, & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $f_1 = f_1(x, y)$, $f_2 = f_2(x, y)$ – заданные функции, $u = u(x, y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) при $y < 0$ совпадает с неоднородным уравнением гиперболического типа $u_{xx} - u_{yy} = f_1(x, y)$, а при $y > 0$ является неоднородным уравнением третьего порядка параболлического типа [1; с. 72] с кратными

характеристиками

[2; с. 9] вида $u_{xx} - u_y = f_2(x, y)$.

Уравнение (1) рассматривается стандартной смешанной области Ω , ограниченной характеристиками $AC: x + y = 0$ и $CB: x - y = r$ уравнения (1) при $y < 0$, выходящими из точки $C = \left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right)$ и проходящими через точки $A = (0, 0)$ и $B = (r, 0)$ соответственно, а также прямоугольником с вершинами в точках $A, B, A_0 = (0, h), B_0 = (r, h), h > 0$, при $y > 0$. Обозначим $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}, \Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}, J = \{(x, 0) : 0 < x < r\}, \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C_x^3(\Omega_2)$, $u_x, u_y \in L_1(J)$, удовлетворяющую уравнению (1).

Задача 1. Требуется найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(r, y) = \varphi_2(y), \quad u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y < h, \\ \alpha(x)u[\theta_0(x)] + \beta(x)u[\theta_r(x)] = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \end{aligned}$$

где $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; -\frac{x}{2}\right), \theta_r(x) = \left(\frac{x+r}{2}; \frac{x-r}{2}\right)$ – координаты точек

пересечения характеристик уравнения (1) при $y < 0$, выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками AC и BC соответственно; $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y); \alpha(x), \beta(x), \psi(x)$ – заданные функции, причем $\alpha^2(x) + \beta^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]$.

Сформулированная *задача 1* относится к классу нелокальных краевых задач со смещением А.М. Нахушева [3].

В основе исследований краевых задач со смещением лежат результаты В.И. Жегалова [4] и А.М. Нахушева [5], [6]. Большой обзор литературы по данной тематике приводятся в монографиях [3], [7].

Среди работ близко примыкающих к тематике данного доклада отметим работы [8], [9], в которых были исследованы задачи со смещением для различных уравнений парабола-гиперболического типа второго и третьего порядков.

В рамках данного доклада исследована краевая задача со смещением для уравнения парабола-гиперболического типа третьего со второй производной в граничных условиях.

Получены следующие результаты: показано неравноправие характеристик AC и BC , ограничивающих гиперболическую часть Ω_1 области Ω как носители данных задачи Трикоми при $r = \pi n$, $n \in N$ и из разрешимости задачи Трикоми с данными на характеристике BC , вообще говоря, не следует разрешимость задачи Трикоми с данными на характеристике AC ; найдены критерии однозначной разрешимости исследуемой задачи. В некоторых частных случаях решение исследуемой задачи выписано в явном виде.

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно составного типов. Ташкент: ФАН. 1979. 239 с.
3. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука. 2006. 287 с.
4. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на линии перехода // Ученые записки Казанского университета. 1962. Том 122. Книга 3. С. 3-16.
5. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т.5. №1. С. 44-59.
6. Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады академии наук СССР. 1969. Т.187. №4. С. 736-739.
7. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: издательство Самарского филиала Саратовского университета. 1992. 162 с.
8. Балкизов Ж.А. Краевая задача со смещением для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // Вестник КРАУНЦ. Серия физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 19–26.
9. Балкизов Ж.А. Об одной краевой задаче типа задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с тремя смещениями

в гиперболической части области // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. 2019. Т.51, №1. С. 5-14. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-5-14.

УДК 536.2

^{1,2,3} Бейбалаев В.Д., ¹Эмиров С.Н., ^{1,2} Аливердиев А.А.

Weibalaev V.D., Emirov S.N., Aliverdiev A.A.

¹ Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики филиал ОИВТ, Махачкала

² Дагестанский государственный университет, Махачкала

³ Дагестанский государственный университет народного хозяйства, Махачкала

E-mail: wemirov@mail.ru, kaspj_03@mail.ru

Расчет теплопроводности гранулитов в зависимости от давления и температуры

Calculation of thermal conductivity of granulites depending on pressure and temperature

Аннотация. В работе на основе экспериментальных данных образцов Саксонских гранулитов (Германия) выведено эмпирическое уравнение для расчета теплопроводности гранулитов. Показано, что теоретические данные хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Based on the experimental data of samples of Saxon granulites (Germany), an empirical equation is derived for calculating the thermal conductivity of granulites. It is shown that theoretical data are in good agreement with experimental data.

Ключевые слов: теплопроводность, давление, температура, гранулиты.

Keywords: Thermal conductivity, pressure, temperature, granulites.

Введение

Количественное описание теплообмена в композитных структурированных и пористых структурах как

искусственного естественного, так и естественного происхождения в широком диапазоне температур и давлений не теряет актуальности в связи с широким спектром прикладных задач прикладной инженерии и наук о Земле, где описание температурного поля недр имеет первостепенное значение.

Хорошо известно, что давление в таких структурах всесторонние напряжения достаточно сложного характера, которые, в свою очередь, с одной стороны приводят к изменению объёма и упругих параметров решётки, с другой – к развитию поперечных и продольных деформаций. Ряд авторов также указывают на возможность обратимый барического фазовый переход второго рода.

Влияния давления на теплопроводность горных пород исследовалось в [1-6]. В работах [7-10] также изучались барические зависимости тесно связанных с тепловыми характеристиками механических свойств, в частности, скорости упругих волн. Исследования показали, что быстрый рост величины как теплопроводности, так и скорости звука происходит до $P \approx 100 \text{ МПа}$. В первую очередь это вызвано тем, что именно в этом барическом диапазоне поры захлопываются, а межгранульные контакты уплотняются.

В настоящей работе приводится описание температурно-барической зависимости теплопроводности образцов Саксонских гранулитов (Германия).

Анализ экспериментальных данных

В таблице представлены данные результат экспериментальных исследований по влиянию гидростатического давления до 400 МПа на теплопроводность образцов Саксонских гранулитов (Германия), плотностью $\rho = 2.06 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k=1\%$

Температура Т, К	Давление Р, МПа								
	0.1	50	100	150	200	250	300	350	400
273	2.06	2.19	2.27	2.31	2.34	2.35	2.36	2.37	2.38
323	1.96	2.13	2.19	2.24	2.28	2.29	2.30	2.31	2.32
373	1.85	2.05	2.11	2.16	2.20	2.21	2.22	2.23	2.24
423	1.77	1.94	2.04	2.09	2.13	2.14	2.15	2.16	2.17
473	1.70	1.86	1.96	2.01	2.04	2.05	2.06	2.07	2.08

523	1.63	1.80	1.90	1.96	2.99	2.00	2.01	2.02	2.03
-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Как мы видим из таблицы, теплопроводность является функцией зависящей от температуры и давления, т.е. $\lambda(T, P)$, то есть

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 f(P_{np.}) \cdot T_{np.}^{n(P_{np.})}, \quad (1)$$

где $P_{np.} = \frac{P}{P_0}$, $T_{np.} = \frac{T}{T_0}$, $P_0 = 0.1 \text{ МПа}$, $T_0 = 273 \text{ К}$. Здесь

$f(P_{np.})$ и $n(P_{np.})$ - функции, зависящие от давления.

Функция $f(P_{np.})$ имеет вид $f(P_{np.}) = \frac{P_{np.} + a}{b \cdot P_{np.} + c}$, где a, b, c

параметры, а функция $n(P_{np.}) = d(1 + P_{np.})^m$, где d, m параметры. Значения параметров моделируются на основе экспериментальных данных. Для образцов Саксонских гранулитов (Германия), плотностью $\rho = 2.06 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k=1\%$ значения параметров равны $a = 708.242$, $b = 0.84$ $c = 708.4$, $d = -0.41$, $m = -0.06$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 \cdot \frac{P_{np.} + 708.242}{0.84 \cdot P_{np.} + 708.4} \cdot (T_{np.})^{-0.41 \cdot (1 + P_{np.})^{-0.06}}. \quad (2)$$

На рисунках приведены графики зависимостей теплопроводности от давления и температуры. На рис. 1 приведены графики зависимости теплопроводности от давления при $T = 273 \text{ К}, 373 \text{ К}, 473 \text{ К}$, а на рис. 2 приведены графики зависимости теплопроводности от температуры при $P = 0.1 \text{ МПа}, 100 \text{ МПа}, 200 \text{ МПа}, 400 \text{ МПа}$.

Как видно из рисунков теоретические данные, полученные на основе уравнения (2) хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Полученное аналитическое выражение для теплопроводности (2) позволяет определить теплопроводность Саксонских гранулитов в зависимости от температуры и давления, что поможет моделированию процессов теплопереноса и прогнозированию глубинных температур.

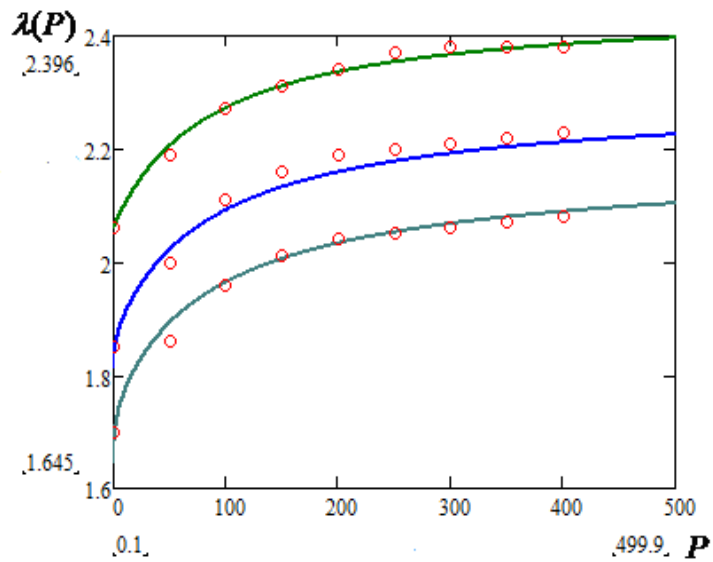


Рис. 1. Графики зависимости теплопроводности от давления.

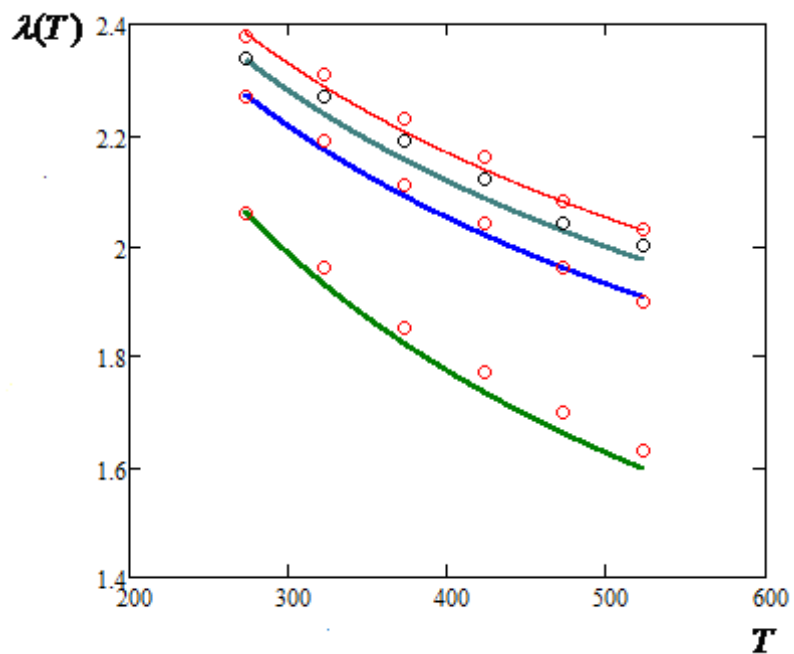


Рис. 1. Графики зависимости теплопроводности от температуры.

Литература

1. Эмиров С.Н., Рамазанова А.Э.// Изв. РАН., Сер. Физ.- 2013.- Т. 77., №3.-С.317.

2. Alm O., Backstrom G.//High Temperatures- High Pressures.-1975.- V.7.- P. 235.
3. Селезнев В.Е., Цыпкина Н.С., Петров А.В. и др.// Физика тв. тела.- Т.18, В.5.- 1976.- С. 1423.
4. Higes D., Savin F.// Phys. Rev.- 1967.-V.61, №3.-P.861.
5. Seipold U., Engler R.// Gerlands. Beiz. Geophysik Leipzig.- 1981.-№1.-P. 65.
6. Abdulagatov I.M., Emirov S. N., Gairbekov Kh. A.// Ind.Eng. Chem. Res.- 2002.- V. 41.- P.3586.
7. Волярович М.М., Баюк Е.И., Левикин А.И., Томишевская И.С. Физико- механические свойства горных пород и минералов при высоких давлениях.- М.: Наука.- 1974.- 223 с.
8. Пью Х.Л. Механические свойства материалов под высоким давлением.- М.: Мир.- 1973.- 300 с.
9. Свенсон К. Физика высоких давлений.- М.: Из-во иностр. лит.- 1963.- 218 с.
10. Лебедев Т.С., Корнин В.А., Савенко Б.Я. и др. Теплофизические свойства минерального вещества в термобарических условиях литосферы.- Киев: Наук.думка.- 1988.- 248 с.

УДК 519.8

Боташева Ф.Ю.

Botasheva F.Y.

Северо-кавказская государственная академия, Черкесск

North Caucasus State Academy, Cherkessk

E-mail: Fatima_botash@mail.ru

**Исследование и разработка информационной системы
принятия решений**

**Research and development of decision-making infor-
mation system**

Аннотация. В статье рассматриваются достоинства и недостатки систем подбора персонала разрабатываемые в последние годы. Было выполнено проектирование информационной системы подбора персонала, в которой используется механизм нечетких запросов к реляционным базам данных, которая позволят применять информационную систему подбора персонала в условиях неопределенности, когда отсутствуют сведения, необходимые для успешного выполнения четких запросов.

the article discusses the advantages and disadvantages of recruitment systems developed in recent years. the staff recruitment information system was designed, which uses a fuzzy query mechanism for relational databases, which will make it possible to use the recruitment information system in conditions of uncertainty, when there is no information necessary for the successful implementation of clear queries.

Ключевые слова: информационная система, подбор сотрудников, нечеткий запрос, базы данных

Keywords: information system, staff recruitment, fuzzy query, databases

С развитием цифровых технологий, интегрированных со стратегией управления человеческими ресурсами, становится ключевой условием перехода бизнеса от традиционной к технологичной [1]. «Во всех сферах человеческой деятельности проблема выбора квалифицированного персонала существует давно. С вступлением нашей страны в эру информационных технологий, активизация в сфере финансов и услуг, промышленности и сельского хозяйства к началу XXI века обусловило дефицит кадров»[2]. Поиск персонала для работы обычно сопряжён с множеством

проблем. Более того, трудности могут быть общими, которые могут заключаться в выборе сотрудника в целом или могут быть независимыми при выполнении работы с учетом сопутствующих обстоятельств на рынке труда и др.

Для организации процесса подбора персонала сегодня применяют специализированные информационные системы. Сегодня также существует огромное количество специализированных интернет-ресурсов для работы, где соискатели публикуют свое резюме и информацию работодателей о вакансиях.

Принимая решение о выборе сотрудника, важно корректно, выбирать методы и инструменты, которые повышают уровень прогностичности этого процесса. При организации отборочного конкурса необходимо внедрить автоматизированную программу регистрации и оценки кандидатов в офисе службы управления персоналом. Завершающим этапом процесса является составление базы данных кандидатов на вакантную должность.

«Сегодня российский рынок информационных технологий содержит огромный выбор компаний-разработчиков, предлагающих свои услуги по внедрению систем управления персоналом»[3]. Но стоит отметить, что на данный момент не существует универсальной системы поиска, которая предоставляла бы систематические и комплексные решения для качественного поиска кадров.

В своей работе мы провели изучение и разработку информационной системы по выбору персонала с использованием нечетких запросов и теории принятия решений.

Нечеткие запросы к базам данных – это перспективное направление в современных системах обработки информации, которые получили признание во всем мире. Этот инструмент позволяет формулировать запросы на естественном языке, что невозможно при использовании стандартного механизма. Для этой цели разработана нечеткая реляционная алгебра и специальные расширения языка SQL для нечетких запросов.

Системы подбора персонала разрабатываемые в последние годы предлагают широкий спектр функциональных возможностей. Они позволяют полностью

интегрироваться в рабочий процесс поиска менеджера. Однако существует ряд причин, по которым системы востребованы не в полной мере. К главной причине можно отнести невозможность существующими на рынке системами давать оценку потенциальным кадрам при неопределенных требованиях к вакантному месту. Например, эти системы могут оказаться бесполезными для определения местоположения в ситуациях, когда опыт, возраст и уровень квалификации кандидата неизвестны.

Поэтому предлагается в качестве решения возникшей проблемы разработка информационной системы подбора персонала в которой используемый механизм нечетких запросов к реляционным базам данных позволит применять информационную систему подбора персонала в условиях неопределенности, когда отсутствуют сведения, необходимые для успешного выполнения четких запросов. Применение данного механизма позволит повысить конкурентоспособность системы.

На основании проведенного исследования и анализа было выполнено проектирование информационной системы подбора персонала. Результатом проектирования стало разработка логической модели базы данных системы и диаграммы классов клиентского приложения.

Литература

1. Нагибина Н.И., Щукина А.А. HR-Digital: цифровые технологии в управлении человеческими ресурсами // Интернет-журнал «Науковедение». 2017. Том 9. №1. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/24EVN117.pdf>.
2. Аллин, О.Н. Кадры для эффективного бизнеса. Подбор и мотивация персонала / О.Н. Аллин, Н.И. Сальникова — М. : Генезис, 2005. 248 с.
3. Вязигин, А. В. Оценка персонала высшего и среднего звена / А. В. Вязигин. - М. : Вершина, 2006. - 256 с.
4. Шукшина Н.С., Воронова Л.И. РАЗРАБОТКА НЕЧЕТКИХ ЗАПРОСОВ К РЕЛЯЦИОННОЙ БАЗЕ ДАННЫХ СИСТЕМЫ ОНЛАЙН-ПЛАТЕЖЕЙ // Международный студенческий научный вестник. – 2015. – № 3-4.; URL: <http://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=14171>.

УДК 518.12

Бутенков С.А., Кривша В.В., Кривша Н.С.,
Семененко А.В.

Butenkov S.A., Krivsha V.V., Krivsha N.S., Semenenko A.V.

Научно-исследовательский центр супер-ЭВМ и
нейрокомпьютеров, Таганрог

E-mail: saabmount@gmail.com,

Математические основы гранулирующего подхода к моделированию процессов обработки данных на супервычислительных системах

The mathematical foundations of a granular approach to modeling data processing processes on supercomputing systems

Аннотация. В работе рассматривается применение структурного моделирования реконфигурируемых ВС с помощью методов грануляции на примере задачи вычисления многомерных кубатур. Целью работы является создание методологии модификации вычислительных формул для реализации в виде РВС на полях ПЛИС [1]. Разрабатываемая методология должна основываться на развитой алгебре гранулированных моделей, допускающих большое количество эквивалентных преобразований вычислительных формул. Она должна иметь высокую наглядность для проектировщика РВС за счет того, что структуры в \square^n адекватно отображаются в образы в \square^2 . В то же время методология должна быть содержательной, т.е. применимой к широкому кругу задач вычислительной математики [3]. Рассмотрим математические основы алгебры гранулярных вычислений [2].

The paper considers the use of structural modeling of reconfigurable aircraft using granulation methods using the example of the problem of calculating multidimensional cubatures. The aim of the work is to create a methodology for the modification of computational formulas for implementation in the form of RVS on FPGA fields [1]. The methodology being developed should be based on a developed algebra of granular models that allow a

large number of equivalent transformations of computational formulas. It should have high visibility for the RVS designer due to the fact that the structures in adequate are displayed in the images in. At the same time, the methodology should be substantive, i.e. applicable to a wide range of problems in computational mathematics [3]. Consider the mathematical foundations of the algebra of granular computing [2].

Ключевые слова: алгебраическая структура, кубатурные формула, гранулы

Keywords: algebraic structure, cubature formula, granules

Введение. В настоящее время растет потребность в применении вычислительных систем высокой производительности (супер-ЭВМ) для решения широкого круга задач. При этом рост возможностей вычислительной техники циклически порождает рост требований к новым супер-ЭВМ. Ставятся все более масштабные вычислительные задачи. В силу физических ограничений на скорость работы процессоров и передачи информации единственным способом повышения производительности супер-ЭВМ является использование структурно сложных архитектур – параллельных, конвейерных и др. [1].

Наиболее сложные структурные решения возникают при проектировании реконфигурируемых ВС (РВС), для которых структуру выбирают на основе структуры основной расчетной формулы. в РВС надо уметь модифицировать структуру исходной задачи (формулы), за которой будет следовать и структура РВС. В противовес классическому эвристическому подходу к модификации структур РВС, мы предлагаем для этой цели использовать развитый в наших работах аппарат гранулированных вычислений [2].

1. Математический аппарат гранулированных вычислений. В ряде наших работ были введены методы представления данных путем покрытия подмножеств точек данных декартовыми гранулами [2]. При этом модели имеют достаточно богатую алгебраическую структуру (на основе алгебры определителей). Согласно [3] для покрытия

подмножеств точек $A = ({}^i x^1; {}^i x^2) \in \square^2$, $i = 1, 2, \dots, m$ или $B = ({}^i x^1; {}^i x^2; {}^i x^3)$, $i = 1, 2, \dots, k$ достаточно определить крайние точки соответствующих проекций. Тогда по [2] модель декартовой гранулы на этих подмножествах вводится в виде определителя

$$G^2(A) = \begin{vmatrix} \min x^1 & \min x^2 & 1 \\ \max x^1 & \min x^2 & 1 \\ \max x^1 & \max x^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad G^3(B) = \begin{vmatrix} \min x^1 & \min x^2 & \min x^3 & -1 \\ \max x^1 & \min x^2 & \min x^3 & -1 \\ \max x^1 & \max x^2 & \min x^3 & -1 \\ \max x^1 & \max x^2 & \max x^3 & -1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Аналогично можно получить модель вида (1) для произвольного \square^n . Благодаря однозначному геометрическому смыслу моделей (1), они могут использоваться для модификации кубатурных формул [4].

2. Задачи вычисления кубатур. В работах [2], [3] нами был введен ряд базовых квадратурных формул, которые реализуются на параллельных и кластерных РВС [1]. Используя свойства моделей (1), мы можем записать составную квадратурную формулу более высокого порядка точности (формулу трапеций) для параллельно-конвейерной реализации по [3]:

$$\int_a^b f(x^1) dx^1 = \begin{vmatrix} \left[\left(\sum_{k=1}^N [x_{k-1}^1 \cdot f(x_{k-1}^1)] \right) - \left(\sum_{k=1}^N [x_k^1 \cdot f(x_k^1)] \right) \right] & 0 & \frac{1}{2} \\ \left[\left(\sum_{k=1}^N [x_k^1 \cdot f(x_{k-1}^1)] \right) - \left(\sum_{k=1}^N [x_{k-1}^1 \cdot f(x_k^1)] \right) \right] & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + R(x^1) \quad (2)$$

Квадратурная формула (2) может модифицироваться на основе основных свойств определителя (1), при этом изменяется структура информационного графа, позволяя использовать (2) на параллельных, кластерных и чисто конвейерных вычислительных системах [1].

В частности, из (2) можно получить базовый вариант квадратурной формулы Симпсона (параллельно-конвейерная реализация):

$$\int_a^b f(x^1) dx^1 = \begin{vmatrix} \left[4 \cdot \sum_{k=1}^N \left[2 \cdot x_{k-1}^1 \cdot f\left(\frac{x_{k-1}^1 + x_k^1}{2}\right) \right] - \sum_{k=1}^N \left[x_{k-1}^1 \cdot f(x_{k-1}^1) \right] + \sum_{k=1}^N \left[x_k^1 \cdot f(x_k^1) \right] \right] & 0 & \frac{1}{6} \\ \left[4 \cdot \sum_{k=1}^N \left[(x_{k-1}^1 + x_k^1) \cdot f\left(\frac{x_{k-1}^1 + x_k^1}{2}\right) \right] - \sum_{k=1}^N \left[x_k^1 \cdot f(x_{k-1}^1) \right] + \sum_{k=1}^N \left[x_{k-1}^1 \cdot f(x_k^1) \right] \right] & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + R(x^1) \quad (3)$$

На основе составных формул (2) и (3) можно получить кубатурные формулы прямоугольников последовательного типа в параллельно-конвейерной реализации:

$$\iint_D f(x^1, x^2) dx^1 dx^2 = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{Nx^1} \sum_{j=1}^{Nx^2} \left[x_{j-1}^2 \cdot f(x_k^1, x_j^2) \right] & 0 & \frac{1}{Nx^1} \\ \sum_{k=1}^{Nx^1} \sum_{j=1}^{Nx^2} \left[x_j^2 \cdot f(x_k^1, x_j^2) \right] & 0 & \frac{1}{Nx^1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{Nx^1} \left[x_k^1 - x_{k-1}^1 \right] & 0 \end{vmatrix} + R(x^1, x^2). \quad (4)$$

Используя свойства модели (4) можно получить составную кубатурную формулу (трапеций) в параллельно-конвейерной форме:

$$\iint_D f(x^1, x^2) dx^1 dx^2 = \begin{vmatrix} 2 \cdot \sum_{k=1}^{Nx^1} \sum_{j=1}^{Nx^2} \left[x_{j-1}^2 \cdot f\left(x_k^1, \frac{x_j^2 + x_{j-1}^2}{2}\right) \right] & 0 & \frac{1}{Nx^1} \\ \sum_{k=1}^{Nx^1} \sum_{j=1}^{Nx^2} \left[(x_j^2 + x_{j-1}^2) \cdot f\left(x_k^1, \frac{x_j^2 + x_{j-1}^2}{2}\right) \right] & 0 & \frac{1}{Nx^1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{Nx^1} \left[x_k^1 - x_{k-1}^1 \right] & 0 \end{vmatrix} + R(x^1, x^2). \quad (5)$$

На основе формул (2), (3), (4) и (5) можно получить формулы более высокого порядка точности, а также реализацию кубатурных формул Гаусса [4].

Заключение. Предлагаемая методика модификации вычислительных формул позволяет представлять их в виде объектов в \square^2 , отражающих структуру необходимых вычислительных операций. Получаемые семейства эквивалентных вычислительных формул являются основой для построения супервычислительных реконфигурируемых систем для многомерных кубатур произвольной размерности, а также других задач, связанных с кубатурами [3], [4].

Литературы

1. Каляев И.А., Левин И.И., Семерников Е.А., Шмойлов В.И. Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры.– Ростов н/Д : Изд.-во ЮНЦ РАН, 2009.– 344 с.
2. Бутенков С.А., Жуков А.Л. Информационная грануляция на основе изоморфизма алгебраических систем // Сб. трудов Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина, Нальчик, 12-18 июля 2009 г., с.
3. Бутенков С.А. Методы информационной грануляции в параллельных вычислениях // Материалы 3-й Всероссийской научно-технической конференции «СКТ-2014», 29 сентября – 4 октября 2014 г., Дивноморское, Геленджик, т. 1., с. 99-104.
4. Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.– М.: Наука, 1969.– 288 с.

УДК 517.927

Вагабов А.И., Абдусаламов Х.А.

Vagabov A.I., Abdusalamov H.A.

Дагестанский государственный университет, Махачкала,
Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: algebra-dgu@mail.ru

2n-кратная формула разложения по корневым функциям дифференциального пучка с двумя n-кратными характеристиками

2n-multiple formula for decomposition by root functions of differential beam with two n-fold characteristics

Аннотация. В случае двойных характеристических особенностей $2n$ порядков для дифференциальных пучков устанавливается формула $2n$ -кратных разложений произвольных функций.

Abstract. In the case of dual characteristic features of $2n$ orders, a formula of $2n$ -fold decompositions of arbitrary functions is established for differential beams.

Ключевые слова: $2n$ -кратная формула разложения, дифференциальные пучки.

Keywords: $2n$ -fold decomposition formula, differential beams.

Рассматриваем спектральную задачу

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^n y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

($y_j = x^j e^{\pm \lambda x}$ – фундаментальная система решений уравнения (1)) при граничных условиях:

$$\begin{cases} U_s(y) \equiv \frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}} \Big|_{x=0} = 0, & s = \overline{1, 2(n-1)} \\ U_{2n-1}(y) \equiv \frac{d^{2(n-1)}y}{dx^{2(n-1)}} \Big|_{x=0} = 0 \\ U_{2n}(y) \equiv \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} \Big|_{x=1} - \lambda^{2n-1} \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} \Big|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Функция Грина $G(x, \xi, \lambda) = g_2(x, \xi, \lambda) + \frac{\varepsilon(x, \lambda)}{\lambda^{2n}}$, где $\varepsilon(x, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ вне дискретного спектра задачи. Здесь

$$g_2(x, \xi, \lambda) = \int_{\xi}^x g(x, \xi, \lambda) g(x, \xi, -\lambda) d\xi + \frac{\varepsilon(x, \lambda)}{\lambda^{2n}}, \quad (3)$$

где $g(x, \xi, \lambda)$ – функция Коши уравнения

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^n = 0, \quad (4)$$

она аналитична по λ и $n-2$ раз непрерывно дифференцируема по $\xi \in (0,1)$. При любом ξ имеет непрерывные производные по x на участках $[0, \xi], [\xi, 1]$ и удовлетворяет уравнению (4), причем

$$\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} \Big|_{x=\xi-1} = 1. \quad \text{Мы имеем}$$

$$g(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)} e^{\lambda(x-\xi)}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad \text{является функцией}$$

Коши в левой λ -полуплоскости. Аналогично вводится функция g определителя в правой λ -полуплоскости. Таким

образом, $g_2(x, \xi, \lambda) = \int_{\xi}^x g(x, \xi, \lambda) g(x, \xi, -\lambda) d\xi$ приходим к

представлению (3) для функции Коши задачи (1) – (2).

Функцию Грина определяем в виде

$$G(x, \xi, \lambda) = g_2(x, \xi, \lambda) + \frac{\varepsilon(x, \lambda)}{\lambda^{2n}}, \quad (5)$$

где $\varepsilon(x, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ вне собственных значений задачи. Введем, подобно [1], выражение

$$F(\xi, f, \lambda) = \sum_{i=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{\lambda^{i+1}} \sum_{k=0}^{2n-i-1} (-1)^n \binom{2n}{k} \lambda^{2n-k} f_i^{(k)}(\xi) \right) \quad \text{и рассмотрим}$$

«частичные суммы»:

$$I_s(x) \equiv \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{-1}{2n\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda^s dx \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \lambda^2 \right)^n F(\xi, f, \lambda) d\xi = f_s(x). \quad (6)$$

При $s = 0$, используя лемму Жордана и проводя вычисления по полуокружностям $C_\nu \cap \pi_1$, $C_\nu \cap \pi_2$, получим равенство (6) в случаях π_1, π_2 . Повторяя рассуждение [1], получим общую формулу (6).

Литература

1. Вагабов А.И. n -кратная формула разложения в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с n -кратной характеристикой // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 555-560.

УДК 004.942

Воронина А.В.

Voronina A.V.

Димитровградский инженерно-технологический институт филиал НИЯУ МИФИ, Димитровград

Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute of the National Research Nuclear University MEPHI, Dimitrovgrad

E-mail: AVVoronina@mephi.ru

Численное моделирование ламинарной свободной конвекции вдоль поверхности неизотермической пластины

Numerical simulation of laminar free convection flow along the surface of non-isothermal plate

Аннотация. Представлен алгоритм моделирования ламинарной конвекции на неизотермической вертикальной пластине с постоянным тепловым потоком. Модель разработана в среде Matlab. Получены профили скорости и температуры для различных чисел Прандтля. Определены параметры потока и теплопередачи. Результаты настоящего моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными.

An algorithm for modeling laminar convection along a non-isothermal vertical plate with a constant heat flow is presented. The model is developed in the Matlab environment. The velocity and temperature profiles for various Prandtl numbers are obtained. The flow and heat transfer parameters are determined. The results of this simulation are in good agreement with experimental data.

Ключевые слова: теплообмен, модель, ламинарная конвекция, Matlab.

Keywords: heat transfer, model, laminar convection, Matlab.

В работе представлена модель ламинарной свободной конвекции у поверхности неизотермической пластины с постоянным тепловым потоком. Предполагается, что естественная конвекция является устойчивой, ламинарной, двумерной, без диссипации, а жидкость – ньютоновской с постоянными свойствами, за исключением плотности,

входящей в слагаемое для сил плавучести в уравнении движения.

Посредством преобразования переменных путем введения параметров подобия в нелинейные дифференциальные уравнения переноса импульса и энергии получена система дифференциальных уравнений (СДУ) [1]. Впоследствии они сводятся к системе первого порядка и интегрируются с использованием методов, реализованных в среде Matlab.

Было проведено обоснование выбора определенного метода решения данной СДУ с переменным шагом интегрирования для значений точности $10^{-8}..10^{-2}$. Получены профили скорости и температуры для чисел Прандтля 0.01, 1, 10 и 100. Эти теоретические профили находятся в хорошем согласии с данными, вычисленные Спэрроу, для ламинарной свободной конвекции на неизотермических вертикальных пластинах [2].

Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными [3], [4]. Хорошее согласие с экспериментальными данными позволяет сделать вывод об эффективности и применимости представленной модели естественной конвекции.

Литература

1. Б. Гебхарт, И. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. В 2-х книгах, кн. 1. Пер. сангл. — М.: Мир, 1991.—678 с.
2. Sparrow, E.M., Gregg, J.L. Laminar Free Convection from a Vertical Plate with Uniform Surface Heat Flux [Текст] / E.M. Sparrow, J.L. Gregg // J. Heat Transfer. – 1956. – vol. 78. – pp. 435-440.
3. Vliet, G.C. An Experimental Study of Turbulent Natural Convection Boundary Layers [Текст] / G.C. Vliet, C.K. Liv // Journal of Heat Transfer. – 1969. – № 4. – pp. 73-96.
4. Qureshi, Z.H. Transition and transport in a buoyancy driven flow in water adjacent to a vertical uniform flux surface [Текст] / Z.H. Qureshi, B. Gebhart // Int. J. Heat Mass Transform. – 1978. – vol. 21. – pp. 1467-1479.

УДК: 330.45:338.24

Ганичева А.В., Ганичев А.В.

Ganicheva A.V., Ganichev A.V.

ФГБОУ ВО Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь

Tver State Agricultural Academy, Tver

ФГБОУ ВО Тверской государственный технический университет, Тверь

Tver State Technical University, Tver

E-mail: TGAN55@yandex.ru, alexej.ganichev@yandex.ru

Процессно-ситуационный анализ явлений

Process situation analysis of the phenomena

Аннотация. Определены понятия вероятностной ситуации и процесса для дискретного и непрерывного множества наблюдений. Рассмотрены операции объединения, пересечения, полного и усечённого отрицания, композиции над ситуациями (процессами). Показана обратная ситуация к данной.

Concepts of probabilistic situation and process for discrete and continuous set of observations are defined. The operations of combining, crossing, complete and truncated negation, composition over situations (processes) are considered. The reverse situation to this one is shown.

Ключевые слова: множество, вероятностные отношения, ситуация, процесс, операции над ситуациями.

Keywords: many, probabilistic relations, situation, process, operations on situations.

Бинарное отношение R - это множество упорядоченных пар элементов $\langle x, y \rangle$, выражающее связь между ними. То, что элементы x и y находятся в данном отношении, записывается: $\langle x, y \rangle \in R$ или xRy . Элементы x и y называются координатами отношения. Множество значений первой координаты образует область определения отношения D_x , а множество значений второй - область значений отношения D_y . Если x и y представляют собой случайные события или значения случайных величин X и Y , соответственно, то отношение R называется вероятностным. В вероятностных отношениях любому событию x (или значению x случайной величины X)

может соответствовать множество событий y (значений y случайной величины Y), причём каждое значение x и y встречаются с вероятностями $P(x)$ и $P(y/x)$ соответственно для дискретных случайных величин X и Y и с плотностью $f(x)$ и $f(y/x)$ для непрерывных случайных величин X и Y . Будем говорить о взвешенном вероятностном отношении xRy , если каждой паре $\langle x, y \rangle \in R$ ставится в соответствие величина, зависящая от x и y и характеризующая полезность или риск существования данной связи $\langle x, y \rangle \in R$ либо её выбора [1].

Вероятностные отношения описывают ситуации. Множество значений X называется областью определения ситуации, множество значений Y называется областью значений ситуации. Для ситуации будет использоваться обозначение: *Ситуация* (x_i, y_j) -для дискретных случайных величин X и Y и *Ситуация* (x, y) - для непрерывных случайных величин X и Y . Из определения следует, что *Ситуация* $(x_i, y_j) = XRY$. Для дискретных случайных величин ситуацию можно представить рядом распределения вероятностей и таблицами риска или полезности. Для непрерывных случайных величин используются плотности распределения вероятностей и соответствующие функции риска и полезности. Если величины x и y зависят от времени, то ситуация переходит в процесс [2].

Операции над ситуациями и процессами определяются аналогично операциям над отношениями [3]. Пусть имеет место XRY , $X^1R^1Y^1$ и $X^2R^2Y^2$. *Ситуация* (x, y) является объединением ситуаций *Ситуация* (x, y) и *Ситуация* (x^2, y^2) , если $X = X^1X^2$ и $R = R^1R^2$, то есть xRy имеет место тогда и только тогда, когда либо $x^1R^1y^1$, либо $x^2R^2y^2$.

Ситуация *Ситуация* (x, y) представляет собой пересечение ситуаций *Ситуация* (x^1, y^1) и *Ситуация* (x^2, y^2) , если $X = X^1 \cap X^2$ и $R = R^1 \cap R^2$, то есть рассматривается общая область определения первой и второй ситуации и общее множество связей данных ситуаций между областью определения и областью значений с учётом одинаковых весов. Обозначение пересечения ситуаций: *Ситуация* $(x, y) = \text{Ситуация}(x^1, y^1) \cap \text{Ситуация}(x^2, y^2)$, то есть

общая ситуация сопоставлена одновременно с каждой из исходных ситуаций.

Объединение и пересечение процессов определяется аналогично.

Пример. Процесс выздоровления господина N определяется множеством препаратов $X^1(t)$ и реакцией организма на них $Y^1(t)$, а процесс выздоровления господина M зависит от препаратов $X^2(t)$ и реакций на них $Y^2(t)$. Пусть $X(t) = X^1(t) \cap X^2(t)$ (предположим, что $X(t)$ не пусто.) Пусть $R(t) = R^1(t) \cap R^2(t)$ - связь между препаратами и их действием на организм, одинаково проявляющаяся для обоих больных. В этом случае можно говорить о пересечении указанных процессов.

Если пересечение двух ситуаций (процессов) представляет собой одну из данных двух ситуаций (один из этих процессов), то говорят о включении этой ситуации (этого процесса) во вторую ситуацию (во второй процесс). Так, процесс цветения георгина включается в процесс развития куста и дальнейшего его увядания.

Полное отрицание (дополнение) ситуации определяется для трех случаев следующим образом.

1. Если для данного фактора x_i из области определения отношения $RP(x_i)=0$, то для любого y пара (x_i, y) принадлежит дополнению R .

2. Если для фактора x_i из области X определение отношения R и такого, что $P(x_i) \neq 0$, условная вероятность $P(y_j/x_i)=0$ для некоторого фактора y_j , то связь между x_i и y_j (пара (x_i, y_j)) принадлежит дополнению \bar{R} данного отношения R .

3. Для любых действительных чисел x_i и y_j пара (x_i, y_j) принадлежит отношению \bar{R} , если она не принадлежит отношению R .

На практике в п. 3 данного определения целесообразно рассматривать x_i и y_j из некоторых универсальных множеств, связанных с данной ситуацией и являющихся подмножествами множества действительных чисел.

Пример. Пусть x_i - предлагаемые работы ($i = \overline{1,6}$), y_j - возможные исполнители этих работ ($j = \overline{1,8}$), $L(x_i, y_j)$ - соответствующие полезности (или риски). Предположим, что $P(x_1)=0$ и $P(y_2/x_3)=0$, а остальные вероятности не равны

нулю. Тогда $xRy = \{(x_i, y_j) \mid i = \overline{1,6}; j = \overline{1,8}, \text{ кроме пар с первой координатой } x_i \text{ и пары } (x_3, y_2)\}$. Получаем $x\bar{R}y = \{(x_3, y_2); (x_1, y_j), \text{ где } j = \overline{1,8}; \text{ кроме того, левые пары из предполагаемых универсальных множеств, связанных с данной ситуацией}\}$. Например, если $x_i (i = \overline{1,6})$ – сотрудники данного отдела, то в качестве универсального множества может рассматриваться множество сотрудников данного института, а в качестве универсального множества для y_j – соответствующее рассмотренное множество возможных работ.

Усечённое отрицание (дополнение) ситуации получается из полного отрицания (дополнения), если рассматривать только пп. 1 и 2 определения, то есть не входить в область универсальных множеств, а оперировать только со значениями случайных величин X и Y , определяющих ситуацию XY . Отрицание (дополнение) ситуации будем называть также противоположной ситуацией. Отрицание процесса определяется аналогично.

Обратная ситуация $YR^{-1}X$ для ситуации XY получается из последней, если в ней поменять местами области определения и значений ситуации. Так, если ситуация XY описывает распределение работ X между работниками Y , то обратная ситуация $YR^{-1}X$ определяет распределение работников Y по работам X . Обратный процесс определяется аналогично.

Композицией ситуаций XR^1Y и YR^2Z является отношение XY , определяемое следующим образом: $(x, z) \in R$ тогда и только тогда, когда существует y такое, что $(x, y) \in R^1$ и $(y, z) \in R^2$.

Литература

1. Ганичева, А.В. Процессно-ситуационный менеджмент качества обучения // Сб.: Информационная среда ВУЗа XXI века; Материалы VI Межд. научно-практ. конф. – Петрозаводск: ПетрГУ, 2012. - С. 49-53.

2. Ганичева, А.В. Принятие решений на основе рискованных ситуаций и процессов / А.В.Ганичева, А.В.Ганичев // Бизнес. Образование. Право.–2014. - №: 4 (29). - С. 226-230.

3. Ганичева, А.В. Риск и полезность ситуаций и процессов / А.В.Ганичева, А.В.Ганичев // Бизнес. Образование. Право.– 2015. № 2 (31). - С. 247-251.

УДК 517.956.2

Гереева Г. Р.¹, Сиражудинов М. М.^{1,2,3}, Чубанов И. А.²

Gereeva T.R., Sirazhudinov M.M., Chubanov I.A.

Дагестанский государственный университет народного хозяйства, Махачкала

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала

E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Оценки погрешности усреднения задачи Пуанкаре для уравнения типа Бельтрами

Error estimates for homogenization the Poincare problem for a Beltrami-type equation

Аннотация. Получены оценки погрешности усреднения задачи Пуанкаре для одного уравнения типа Бельтрами при минимальных требованиях на коэффициенты - они измеримые ограниченные периодические функции.

Estimates of the error of homogenization the Poincare problem for a Beltrami-type equation are obtained with minimal requirements for coefficients - they are measurable bounded periodic functions

Ключевые слова: усреднение, G-сходимость, уравнение Бельтрами

Keywords: G-convergence, homogenization, Beltrami equation

Рассмотрим следующую задачу Пуанкаре для уравнения типа Бельтрами:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} \Delta u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z \Delta u_\varepsilon = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q) = \{u \in W_2^3(Q) \mid u|_{\partial Q} = 0\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \Delta u|_{\partial Q} - \operatorname{Im} \Delta u|_{\partial Q} = 0, \\ \int_Q (\operatorname{Re} \Delta u + \operatorname{Im} \Delta u) dx = 0 \end{array} \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, коэффициент $\mu^\varepsilon(x) = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$ - ограниченная измеримая периодическая функция, удовлетворяющая условию эллиптичности: $\forall \operatorname{rai} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} (|\mu(x)|) \leq k_0 < 1$, k_0 - постоянная (константа эллиптичности), Q - ограниченная односвязная область плоскости. (Мы здесь придерживаемся обозначений из работ [1], [2].)

ТЕОРЕМА 1. Задача Пуанкаре (1) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(Q; \mathbb{C})$ и любого $\varepsilon > 0$, причем имеют место априорные оценки:

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} \Delta u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q A_\varepsilon u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} \Delta u} dx,$$

$$u \in W_0(Q),$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} \Delta u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \|A_\varepsilon u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})},$$

$$u \in W_0(Q).$$

Скажем, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если для любой правой части f из $L_2(Q; \mathbb{C})$ семейство решений u_ε задачи (1) сходится в $W_2^2(Q; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению аналогичной задачи для уравнения с постоянными коэффициентами.

В вопросах, связанных с усреднением недивергентных операторов, важную роль играет ядро оператора \mathcal{A}^* , сопряженного оператору периодической задачи. Рассмотрим периодическую задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &\equiv \partial_{\bar{z}} \Delta u + \mu \partial_z \Delta u = f \in L_2(\square; \mathbb{C}), \\ u &\in W_2^3(\square; \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Справедливы следующие утверждения:

- Для периодической задачи (2) имеет место «неравенство острого угла»

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{z}} \Delta u|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} \Delta u} \rangle,$$

$$u \in W_2^3(\square; \mathbb{C}).$$

- Периодическая задача (2) является фредгольмовой.

- Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*: L_2(\square; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^{-3}(\square; \mathbb{C})$ определяется следующей формулой

$$-\mathcal{A}^* \mathcal{L} = \partial_z \Delta \mathcal{L} + \partial_{\bar{z}} \Delta, \quad \mathcal{L} \in L_2(\square; \mathbb{C}),$$

где производные понимаются в смысле распределений.

- Ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$, $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \mathbb{C}^2$ – двумерные подпространства (над полем действительных чисел) соответствующих пространств, причем один из базисов p_1, p_2 ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ обладает следующими свойствами: $p_2 = ip_1$, $\langle p_1 \rangle = 1$.

ТЕОРЕМА 3 (ОБ УСРЕДНЕНИИ). Для семейства операторов (1): $A_\varepsilon = \partial_{\bar{z}} \Delta + \mu^\varepsilon \partial_z \Delta$, имеет место усреднение, причем усреднённый оператор определяется формулами

$$A_0 = \partial_{\bar{z}}\Delta + \mu^0 \partial_z\Delta, \quad \mu^0 = \langle \mu \bar{p}_1 \rangle \quad (3)$$

Нам потребуются периодические решения следующей задачи на ячейке:

$$\begin{cases} \mathcal{A}N \equiv \partial_{\bar{z}}N + \mu \partial_zN = 2^{-1}(\mu^0 - \mu(x)), \\ N \in W_2^1(\square). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь μ^0 – есть коэффициент усредненного оператора (3).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4 (О задаче на ячейке). Периодическая задача (4) разрешима и решения ее представляются в виде $N + c$, где c – есть произвольная постоянная из \mathbb{C} , а N – решение, среднее значение которого равно нулю.

В качестве первого приближения к решению задачи (1) возьмем вектор-функцию

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon N(y) \partial_z \Delta u^0(x),$$

где $N(y)$ – периодическое решение задачи на ячейке (см. теорему 4), $y = \varepsilon^{-1}x$, u^0 – решение задачи Пуанкаре для усреднённой задачи $A_0 u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q)$.

Сформулируем основное утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть правая часть f уравнения (1) принадлежит пространству $W_2^4(Q; \mathbb{C})$, Q – односвязная область с гладкой (класса C^4) границей, тогда имеют место оценки

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^3(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^3(Q; \mathbb{C})},$$

$$\|u_\varepsilon - u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^3(Q; \mathbb{C})},$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и области Q .

Литература

1. М. М. Сиражудинов, «О G -сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами», Матем. сб., 199:5 (2008), 124-155.

2. М. М. Сиражудинов, «О краевой задаче Римана-Гильберта», Дифф. уравн., 24:1 (1988), 64-73.

УДК 303.732

Глущенко С.В.

Glushchenko S.V.

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж

Military Training and Scientific Center of the Air Force "Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and G.A. Gagarin", Voronezh

E-mail: serjvladimir@rambler.ru

Об информационном подходе к исследованию конфликта

About The Information Approach To Research Conflict

Аннотация: Показана целесообразность разбиения всего множества параметров стохастической системы на три группы по характеру их взаимодействия. Доказывается, что наибольшую информативность содержат группы конфликтующих параметров. Из этого делается предположение о возможности исследования функционирования стохастической системы на основе анализа ядер конфликта.

The expediency of dividing the entire set of parameters of a stochastic system into three groups according to the nature of their interaction is shown. It is proved that the most informative are the groups of conflicting parameters. From this, an assumption is made about the possibility of studying the functioning of the stochastic system based on the analysis of the nuclei of conflict.

Ключевые слова: система, конфликт, плеяда, ядро, информация, корреляция.

Keywords: system, conflict, galaxy, core, information, correlation.

На первом этапе анализа функционирования стохастической системы целесообразно разбить параметры системы на группы по степени их информативности с целью выявления групп параметров, вносящих наибольший вклад в поведение системы. Оптимальное функционирование стохастической системы (СС) подразумевает, что ее

параметры достигают своих оптимальных значений или варьируются вблизи своих оптимумов. Однако для большинства реальных систем наблюдается совсем иное положение вещей. Все параметры СС можно разбить на три группы:

1 - группа независимых параметров;

2 - группа, в которой характер взаимосвязей между параметрами можно определить как "согласие";

3 - группа, в которой характер взаимосвязей между параметрами можно определить как "конфликт".

Параметры из 2-й группы отвечают тому требованию, что если воздействовать на каждый из них в направлении их оптимумов, то значения взаимосвязанных с ними параметров также приближаются к оптимальным. Напротив, для любой пары конфликтующих параметров из 3-й группы наблюдается следующее: приближение значений одного из этих параметров к своему оптимуму соответствует отдалению значений другого параметра от своего оптимума.

Параметры из 1-й и 2-й групп не вызывают проблем при оптимизации процесса. Для этих групп возможно применение хорошо разработанного аппарата скалярной оптимизации. По параметрам из 3-й группы скалярная оптимизация невозможна, в этом случае необходимо осуществить векторную оптимизацию, что гораздо более сложно. Отсюда следует, что конфликтующие параметры вызывают намного больший интерес у исследователя по сравнению с неконфликтующими.

В факторном анализе (в методе главных компонент) выделяются для исследования те из факторов, которые в сумме объясняют большую часть общей дисперсии исходной совокупности параметров.

При анализе функционирования стохастической системы целесообразно выделять для исследования параметры, несущие основное количество информации о системе, и отсеивать параметры малоинформативные с точки зрения исследователя. В сложных СС, значительное количество параметров взаимосвязано. При этом корреляционные плеяды, включающие конфликтующие параметры (с

отрицательными значениями парных коэффициентов корреляции) образуют ядра конфликта W^k , плеяды, состоящие из параметров с положительными коэффициентами корреляции, образуют ядра содействия W^c , а некоррелирующие параметры можно сгруппировать в ядро безразличия W^n [1]. Практические исследования показывают, что, как правило, количество параметров из W^k превалирует в системе. Основной причиной нестационарности системы могут быть параметры как ядер конфликта, так и ядер согласия (в меньшей степени в силу того, что, можно осуществить скалярную оптимизацию параметров из W^c и W^n). Подобного эффекта, воздействуя на конфликтующие параметры, добиться невозможно. Отсюда возникает целесообразность анализа функционирования СС целесообразно основывать на исследовании конфликта.

Утверждение 1. Информативность параметра из W^k превышает информативность параметра из W^c (W^n).

Доказательство. При оптимизации СС, воздействуя на параметры из W^c и W^n , можно добиться того, что их значения будут охватывать не весь интервал варьирования, а лишь часть его ближе к оптимуму. Воздействуя на конфликтующие параметры, подобного эффекта добиться невозможно, поскольку априори неизвестна точка компромисса на множестве Парето. Поэтому конфликтующие параметры будут принимать значения на всем интервале варьирования. Следовательно дисперсия параметра из ядра содействия (безразличия) $\sigma_c^2(\sigma_n^2)$ значительно меньше дисперсии параметра из ядра конфликта $\sigma_k^2(\sigma_c^2(\sigma_n^2) \ll \sigma_k^2)$. Согласно [2], величина информативности непрерывной случайной величины X , распределенной по нормальному закону, равна $I = \text{Log}[(2\pi e)^{1/2} \sigma / \Delta x]$, где Δx - предел точности измерения X . Так как $(\sigma_c^2(\sigma_n^2) \ll \sigma_k^2)$, то величина информативности параметра из ядра содействия $I_c = \text{Log}[(2\pi e)^{1/2} \sigma_c / \Delta x]$ и безразличия $I_n = \text{Log}[(2\pi e)^{1/2} \sigma_n / \Delta x]$ будет меньше величины информативности параметра из ядра конфликта

$$I_k = \text{Log}[(2\pi e)^{1/2} \sigma_k / \Delta x].$$

Если рассматривать ядра конфликта, содействия и безразличия, каждое как систему, то, доказав, что информативность ядра конфликта превышает информативность ядра содействия или безразличия при равном количестве параметров в ядрах, мы будем иметь больше оснований утверждать о возможности анализа функционирования СС на основе исследования конфликта взаимодействующих параметров по сравнению с тем, что дает доказательство предыдущей теоремы. Обозначим k, s, n - количество параметров соответственно в W^k, W^c, W^n .

Утверждение 2. Информативность W^k превышает информативность W^c (W^n) при $k \geq s$ ($k \geq n$).

Доказательство. Информативность ядер конфликта, содействия, безразличия определяется следующим образом:

$$I_k = \sum_{i=1}^k I_i^k, \quad I_c = \sum_{i=1}^k I_i^c, \quad I_n = \sum_{i=1}^k I_i^n, \quad (1)$$

здесь I_i^k, I_i^c, I_i^n - соответственно приведенные величины информативности i -го параметра. Значения I_i^k, I_i^c зависят от силы связей i -го параметрами с j -ми в соответствующем ядре. Необходимо выделить параметр (X_i), оказывающий наибольшее воздействие на ядро в целом. При этом, если влияние других параметров на информативность этого параметра несущественно, то информативность ядра конфликта:

$$I_k = \sum_{i=1}^k \text{Log}[(2\pi e)^{1/2} \sigma_{ik} / \Delta x_i]. \quad (2)$$

Можно определить воздействие на X_i группы параметров как воздействие одного интегрального параметра X_j . В этом случае

$f_i = e^{-\frac{(x_i / \sigma_{ik} - r_{ij} x_j / \sigma_{jk})^2}{2(1 - r_{ij}^2)}}$, где r_{ij} - парный коэффициент корреляции X_i и X_j . σ_{ik} и σ_{jk} - соответствующие средние квадратические отклонения, f_i - плотность вероятности. Тогда

$$I_i^k = \text{Log}[(2\pi e)^{1/2} \sigma_{ik} (1 - r_{ijk}^2)^{1/2} / \Delta x_i]. \quad (3)$$

Поскольку

$$I_k = \sum_{i=1}^k I_i^k = \sum_{i=1}^k (\text{Log}[(2\pi e)^{1/2} \sigma_{ik} (1 - r_{ijk}^2)^{1/2} / \Delta x_i]), \quad (4)$$

то

$$I_k = \text{Log}[(2\pi e)^{k/2} \prod_{i=1}^k (\sigma_{ik}(1 - r_{ijk}^2)^{1/2} / \Delta x_i)]. \quad (5)$$

Для драссогласия

$$I_c = \text{Log}[(2\pi e)^{s/2} \prod_{i=1}^k (\sigma_{ic}(1 - r_{ijc}^2)^{1/2} / \Delta x_i)]. \quad (6)$$

В силу того, что $\sigma_{ik} \gg \sigma_{ic}$, а величины s и k , r_{ijk} и r_{ijc} являются величинами одного порядка, то $I_k > I_c$.

Аналогичные рассуждения можно привести при рассмотрении соотношений информативности ядер конфликта и безразличия. Ядро безразличия состоит из независимых параметров, отсюда

$$I_n = \sum I_i^n = \sum (\text{Log}[(2\pi e)^{1/2} \sigma_{1k} / \Delta x_1] = \text{Log}[(2\pi e)^{n/2} \prod (\sigma_{in} / \Delta x_i)]). \quad (7)$$

Т.к. $\sigma_{ik} \gg \sigma_{in}$, величины а $(1 - r_{ijk}^2)^{1/2}$ - не бесконечно малые, то $I_k > I_n$.

В случае, если информативность среднего и выборочной дисперсии конфликтующего параметра больше информативности среднего и выборочной дисперсии неконфликтующего, то при определенных условиях [1] возможен анализ стационарности СС, а также анализ функционирования случайной системы, по параметрам из W^k .

Литература

1. Глущенко, С.В. Синтез моделей и алгоритмов анализа функционирования стохастических технологических систем в условиях конфликта взаимодействующих параметров. Дис...канд. техн. наук [Текст] / С.В. Глущенко. – Воронеж: ВГТА, 1997. – 159с.

2. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель – Москва: Гос. издат. физ. – мат. литературы, 1962. - 564 с.

УДК621.039.546.8

Зайченко П.А.

Zaichenko P.A.

Димитровградский инженерно-технологический институтфилиал НИЯУ МИФИ, Димитровград

Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute of the National Research Nuclear University MEPHI, Dimitrovgrad

E-mail: zaichenko.p.a@mail.ru

Анализ радиационных характеристик тепловыделяющих сборок исследовательского реактора по результатам моделирования их облучения в активной зоне

Analysis of the radiation characteristics of the fuel assemblies of a research reactor based on the results of modeling their radiation in the core

Аннотация. Проведен анализ результатов расчетного моделирования облучения тепловыделяющих сборок в активной зоне исследовательского реактора, который позволил доработать существующую модель и внедрить в ее состав новые компоненты, позволяющие проводить оценку радиационных характеристик облученной тепловыделяющей сборки.

The analysis of the results of computational modeling of irradiation of fuel assemblies in the active zone of a research reactor, which made it possible to refine the existing model and introduce new components into it, making it possible to assess the radiation characteristics of the irradiated fuel assembly.

Ключевые слова: радиационные характеристики, модель, облучение, исследовательский реактор.

Keywords: radiation characteristics, model, irradiation, research reactor.

Моделирование облучения тепловыделяющих сборок (ТВС) в активной зоне исследовательского реактора (ИР) позволяет спрогнозировать такие важные характеристики как:

- общая активность облученной ТВС;
- вклад конкретных нуклидов в общую активность на различных этапах обращения с ТВС;
- интенсивность, тип излучения и его энергия;

Определение указанных характеристик позволяет спрогнозировать оптимальный сценарий обращения с облученными ТВС. Подробная информация о типе и интенсивности излучения, а также продуктах взаимодействия различных типов излучения с материалом топливной матрицы или оболочками ТВЭЛОВ обладает практической ценностью как при обеспечении хранения облученной ТВС, так и при разработке соответствующей защиты при необходимости обеспечения безопасности при транспортировании.

В работе [1] представлены результаты моделирования на примере ТВС ИР-8 и показано, что разработка дополнительных компонентов позволяет расширить возможности применения модели. Использование данных [2] позволило создать расчетную схему, позволяющую определить интенсивность и энергию излучения каждого нуклида, дающего вклад в общую активность. Благодаря указанной схеме было определено распределение по энергии и интенсивности испускаемых α -частиц, что в свою очередь позволяет рассчитать поток α -частиц с определенной энергией и внедрить учет реакции типа (α, n).

Итоговый результат представлен как расширение возможностей расчетной модели, заключающееся в определении не только вклад конкретного нуклида в общую активность, но и интенсивности и энергетического распределения каждого из типов излучения. Полученные данные могут быть применены при разработке необходимой защиты от излучения при обращении с облученными ТВС.

Литература

1. Зайченко П.А. Моделирование нуклидного состава ТВС после облучения в исследовательском реакторе. Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук (г. Махачкала, 16–20 сентября 2019 г.). – Махачкала: Издательство ДГУ, 2019. – 230 с.
2. Shultis J. K., Faw R. E. «Fundamentals of nuclear science

and engineering», Kansas State University Manhattan, Kansas, 2002. – 506 p.

УДК 534.014.2

Ибавов Т.И.

Ibavov T.I.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail:ibavov94@mail.ru

Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с дробным производным по времени

On a boundary value problem for the heat equation with a fractional time derivative

Аннотация. В работе исследована краевая задача для уравнения теплопроводности. Решение найдено методом сведения к краевой задаче с граничными условиями первого рода.

In the paper, the boundary value problem for the heat equation is investigated. The solution was found by reducing to a boundary value problem with boundary conditions of the first kind.

Ключевые слова: краевая задача, дробная производная, преобразования Лапласа.

Keywords: boundary value problem, fractional derivative, Laplace transforms

В работе исследована краевая задача вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{0t}^{\alpha} T(x, t) = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (t > 0, \quad 0 < x < \infty) \\ T(x, 0) = T_0 = const, \\ \lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + q_c = 0, \\ T(\infty, t) = T_0, \quad \frac{\partial T(\infty, t)}{\partial x} = 0, \end{array} \right.$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} T(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{T(x, s)}{(t-s)^{\alpha}} ds$ - дробная производная Капуто [1], $0 < \alpha < 1$.

Решение задачи (1) будем находить путем сведения этой задачи к задаче с граничными условиями первого рода. Имеем:

$$q(x, \tau) = -\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x}. \quad (2)$$

Продифференцируем уравнение (1) по переменной x , т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right),$$

или же

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (3)$$

Воспользовавшись равенствами (2) и (3), получим задачу с краевыми условиями первого рода:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha q(x, \tau)}{\partial \tau^\alpha} = a \frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2}, \\ q(x, 0) = 0, \\ q(0, \tau) = q_c = \text{const}, \\ q(\infty, \tau) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

К производной $\frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2}$ применяя преобразования Фурье, для образа Фурье получим выражение:

$$\begin{aligned} F_s \left[\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right] &= \frac{2}{\pi} \omega q(0, t) - \omega^2 F_s(q) = \frac{2}{\pi} \omega q(0, t) - \omega^2 q(\omega, t) \\ &= \frac{2q_c \omega}{\pi} - \omega^2 q(\omega, t). \end{aligned}$$

К уравнению (4) применяя преобразования Фурье получим:

$$D_{0t}^\alpha q(\omega, t) + a\omega^2 q(\omega, t) - \frac{q(\omega, 0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} = \frac{2q_c \omega a}{\pi},$$

или же

$$D_{0\tau}^\alpha q(\omega, t) + q(\omega, t)a\omega^2 = \frac{2q_c \omega a}{\pi}, \quad (5)$$

К уравнению (5) применяя преобразования Лапласа получим:

$$p^\alpha q(\omega, p) = \frac{2q_c \omega a}{\pi p(p^\alpha + \omega^2)}$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{p(p^\alpha + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2} \int_0^\infty e^{-p\tau} (1 - E_{\alpha,1}(-\omega^2 \tau^\alpha)) d\tau,$$

получим

$$q(\omega, \tau) = \frac{2q_c}{\omega \pi} [1 - E_{\alpha,1}(-\omega^2 \tau^\alpha)]. \quad (6)$$

Применяя обратные преобразования Фурье, получим решение задачи (4) в виде:

$$q(x, t) = \frac{2aq_c}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} [1 - E_{\alpha,1}(-\omega^2 \tau^\alpha)] \sin \omega x d\omega. \quad (7)$$

Подставляя решение (7) в равенство (2), можно получить решение задачи (1).

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.- 272 с.
2. Бейбалаев В.Д. Математическая модель переноса в средах с фрактальной структурой // Математическое моделирование. -Москва, 2009. -Т.21., -№ 5. -С.55-62.

УДК 517.927

Исраилов С.В.^{1,2,3}, Танкиев И.А.⁴

Israilov S.V.^{1,2,3}, Tankiev I.A.⁴

¹ Чеченский государственный университет, Грозный

² Чеченский государственный педагогический университет,
Грозный

Комплексный НИИ РАН, Грозный

¹ Chechen State University, Grozny

² Chechen State Pedagogical University, Grozny

Complex Research Institute of RAS, Grozny

⁴ Ингушский государственный университет, Магас

⁴ Ingush State University, Magas

E-mail: tank551711@yandex.ru, tank551711@yandex.ru

Случай порождения трех простых и двух асимптотических нулей решения системы ОДУ точкой сингулярности

The case of generating three simple and two asymptotic zeros of a solution of the ODE system by the singularity point

Аннотация. Исследуется система ОДУ с сингулярностями на концах интервала $(-\infty; +\infty)$, по независимой переменной и в точках $x = c \in (-\infty; +\infty)$, которые порождают краевые условия. Такие разновидности краевых задач впервые исследованы в публикациях авторов. Изучаемая задача является более обобщенной и имеет практическое значение в качественной теории ОДУ. Сформулирована теорема и приведена схема её доказательства.

We study an ODE system with singularities at the ends of the interval $(-\infty; +\infty)$, for an independent variable, and at the point $x = c \in (-\infty; +\infty)$, which generate boundary conditions. These types of boundary value problems were first investigated in the authors' publications. The problem under study is more generalized and has practical significance in the qualitative theory of odes. The theorem is formulated and the scheme of its proof is given

Ключевые слова: система ОДУ, точки сингулярности, интегральные операторы, принцип Шаудера, теорема существования решения.

Key words: system of ODE with point of singularity, integral operators, the principle of Schauder's theorem the existence of a solution.

В работе рассматриваются достаточные условия существования у системы ОДУ

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

решения $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} y_i(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y_i(x) = 0, \quad y_i(a) = 0, \quad y_i(c) = 0, \quad y_i(b) \\ = 0, \quad i \\ = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (2)$$

когда функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, рассматривается относительно точек области $D_i: \{x \in (-\infty; +\infty), |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$, $d_i, i = \overline{1, n}$ данные числа. При этом $a, b, c \in (-\infty; +\infty)$, $a < c < b$, а точка $c \in (a, b) \subset (-\infty; +\infty)$ является точкой сингулярности в смысле работ [1,2,3]. Функции $f_i, i = \overline{1, n}$, по совокупности аргументов в области $D_i^*: \{x \in (-\infty; c) \cup (c; +\infty), |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$, со своими частными производными $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$ непрерывны и

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, \varphi_i(x), y_{i+1}, \dots, y_n)| \leq \psi_i(x), \quad i \\ = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_i} \text{sign}(x - c) \geq \bar{\psi}_i(x), \quad x \in [a, b], c \\ \in (a, b) \quad (4)$$

$$\frac{\partial f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_i} \geq \psi_i^*(x), \quad x \in (-\infty, a], \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_i} \leq -\psi_i^*(x), \quad x \in [b, +\infty), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, интегрируемы или суммируемы на отрезках $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$.

Для любого $\delta > 0$

$$\int_a^{c-\delta} \bar{\psi}_i(x) dx < +\infty, \int_{c-\delta}^c \bar{\psi}_i(x) dx = +\infty, \int_{c+\delta}^b \bar{\psi}_i(x) dx < +\infty,$$

$$\int_c^{c+\delta} \bar{\psi}_i(x) dx = +\infty, \quad (7)$$

Для любого числа $M < a$

$$\int_M^a \psi_i^*(x) dx < +\infty, \int_{-\infty}^M \psi_i^*(x) dx = +\infty, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

и для любого числа $M^* > b$

$$\int_b^{M^*} \psi_i^*(x) dx < +\infty, \int_{M^*}^{\infty} \psi_i^*(x) dx = +\infty, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

Считается, что выполнены ещё неравенства

$$\int_a^c \psi_i(x) dx \leq d_i, \int_c^b \psi_i(x) dx \leq d_i, \int_{-\infty}^a \psi_i(x) dx \leq d_i,$$

$$\int_b^{+\infty} \psi_i(x) dx \leq d_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (10)$$

Вводятся новые функции

$$\begin{aligned}
& \varphi_i(x) \\
= & \begin{cases} \int_x^a e^{-\int_x^t \psi^*(s) ds} \psi_i(t) dt, & i = \overline{1, n}, \quad x \in (-\infty, a], \\ \int_a^x e^{-\int_t^x \bar{\psi}(s) ds} \psi_i(t) dt, & i = \overline{1, n}, \quad x \in [a, c), \\ \int_c^b e^{-\int_x^t \bar{\psi}(s) ds} \psi_i(t) dt, & i = \overline{1, n}, \quad x \in (c, b], \\ \int_b^x e^{-\int_t^x \psi^*(s) ds} \psi_i(t) dt, & i = \overline{1, n}, \quad x \in [b, +\infty). \end{cases} \quad (11)
\end{aligned}$$

Из-за ограничений (7), (8), (9), (10) функции $\varphi_i(x), i = \overline{1, n}$ обладают свойствами

$$\begin{aligned}
& \varphi_i(a) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_i(x) = 0, \varphi_i(b) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i(x) = 0, \varphi_i(c) \\
& = 0, i \\
& = \overline{1, n} \quad (12)
\end{aligned}$$

Составляется новая система интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
& y_i(x) \\
= & \begin{cases} \int_x^a e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt, & i = \overline{1, n}, \quad x \in (-\infty, a], \\ \int_a^x e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt, & i = \overline{1, n}, \quad x \in [a, c), \\ \int_c^b e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt, & i = \overline{1, n}, \quad x \in (c, b], \\ \int_b^x e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt, & i = \overline{1, n}, \quad x \in [b, +\infty). \end{cases} \quad (13)
\end{aligned}$$

Из пространства непрерывных вектор-функций $C^{(n)}(-\infty; +\infty)$ выбираем множество

$T^{(n)}(-\infty; a), T^{(n)}(a, c), T^{(n)}(c, b), T^{(n)}(b, +\infty)$ функций $y(x) = (y_i(x))_{i=1}^n$, удовлетворяющих следующим условиям

$$1) |y_i(x)| \leq \varphi_i(x), i = \overline{1, n},$$

2) для любого $\delta > 0$ существует такое число $N_\delta > 0$, что при x_1, x_2 принадлежащих сегментам из $(-\infty; +\infty)$ с конечными границами, без точек сингулярностей, выполняются неравенства

$$|y_i(x_1) - y_i(x_2)| \leq N_\delta |x_1 - x_2|, i = \overline{1, n}.$$

Доказывается замкнутость, выпуклость и компактность этих множеств в пространстве $C^{(n)}(-\infty; +\infty)$. Каждый из нелинейных операторов из правых частей системы (13) на своём участке изменения x определен на своём множестве $T^{(n)}$ и отображается в этом же $T^{(n)}[1,2]$. В силу перечисленных свойств правых частей системы (1) и приведённых ограничений они непрерывны на $T^{(n)}$ и преобразуют $T^{(n)}$ в себя. Тогда по принципу Шаудера каждый из операторов в правой части (13) на своём участке изменения x имеет неподвижную точку, т.е. решение. Например, $y_{i_1}(x)$ на $(-\infty, a)$, $y_{i_2}(x)$ на (a, c) , $y_{i_3}(x)$ на (c, b) , $y_{i_4}(x)$ на $(b, +\infty)$. Тогда система функций

$$y_i(x) = \begin{cases} y_{i_1}(x), & x \in (-\infty, a), \\ y_{i_2}(x), & x \in (a, c), \\ y_{i_3}(x), & x \in (c, b), \\ y_{i_4}(x), & x \in (b, +\infty), i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (14)$$

будет решением и системы дифференциальных уравнений (1), непрерывных на $(-\infty; +\infty)$ и дифференцируемых по x почти везде, за исключением точек a, b, c . Выполнимость условий

$$\frac{y_i(-\infty)}{= \overline{1, n}} = 0, y_i(a) = 0, y_i(c) = 0, y_i(b) = 0, y_i(+\infty), i \quad (15)$$

вытекает из неравенства 1) $|y_i(x)| \leq \varphi_i(x), i = \overline{1, n}$, если учесть равенство (12).

Теорема: Если в области D_i, D_i^* выполнены условия (3)-(10), то система (1), с сингулярностями на концах интервала $(-\infty; +\infty)$ и в точке $c \in (-\infty; +\infty)$ имеет, по крайней мере, одно решение $y(x) = (y_i(x))_{i=1}^n$, непрерывное на $(-\infty; +\infty)$ и дифференцируемое по x при $x \neq c$, удовлетворяющее условиям (2).

Литература

1. Исраилов С. В., Юшаев С. С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик. Издательский центр «Эль-фа», 2004, с.448.

2. Исраилов С. В. Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Махачкала. Издательство «Алеф», 2014, с. 439.

Исраилов С.В., Танкиев И.А. Решение задачи Коши-Николетти для системы ОДУ с нулями в граничных точках сингулярностей. Сб.

УДК 517.927

Исраилов С.В.^{1,2,3}, Танкиев И.А.⁴

Israilov S.V.^{1,2,3}, Tankiev I.A.⁴

¹ Чеченский государственный университет, Грозный

² Чеченский государственный педагогический университет,
Грозный

Комплексный НИИ РАН, Грозный

¹ Chechen State University, Grozny

² Chechen State Pedagogical University, Grozny

Complex Research Institute of RAS, Grozny

⁴ Ингушский государственный университет, Магас

⁴ Ingush State University, Magas

E-mail: tank551711@yandex.ru, tank551711@yandex.ru

Система ОДУ с точками сингулярностей двух видов и асимптотическими нулями в решениях

AN ODE system with two types of singularities points and asymptotic zeros in solutions

Аннотация. В статье доказываются теоремы существования решений с асимптотическими нулями. Когда левый конец интервала $(a, +\infty)$ имеет сингулярности двух видов, порождающие оценки с суммируемыми и несуммируемыми функциями и сами являются нулями компонента решений.

The paper proves the existence theorems of solutions with asymptotic zeros. When the left end of the interval $(a, +\infty)$ has singularities of two kinds, generating estimates with summable and non-summable functions and are themselves zeros of the solution component.

Ключевые слова: сингулярность, асимптотический ноль, теоремы существования, принцип Шаудера.

Keywords: singularity, asymptotic zero, existence theorems, Schauder principle.

Рассматривается квазилинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_i' = \Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) y_i + f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

относительно точек области $D_i: \{x \in [a, +\infty), |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$, $d_i, i = \overline{1, n}$ – данные числа. Функции $\Phi_i, i = \overline{1, n}$, непрерывны по фазовым координатам $y_i, i = \overline{1, n}$, и по $x \in [a, b], b < +\infty$. Точка $x = a$ является точкой сингулярности одного из видов [1,2]:

1. В области $D_i^*: \{x \in [a, b], b < +\infty, |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$:

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq \psi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\psi_i(x), i = \overline{1, n}$, интегрируемые или суммируемые функции на $[a, b]$. В области $D_i: \{x \in [b, +\infty), |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \leq -\psi_i^*(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где

$$\int_b^{+\infty} \psi_i(t) dt = +\infty, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

В области D_i

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \lambda_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где $\lambda_i(x), i = \overline{1, n}$, интегрируемые или суммируемые функции на $[a, +\infty)$.

Выполняются еще неравенства

$$\int_a^b e^{\int_t^a \psi_i(s) ds} \lambda_i(t) dt \leq \frac{d_i}{2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$\int_a^{\infty} \lambda_i(t) dt \leq \frac{d_i}{2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

2. В области D_i^* выполняются неравенства (3) и

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \geq \psi_i^*(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (a, b] \quad (8)$$

где для любого $\delta > 0$

$$\int_a^{a+\delta} \psi_i^*(t) dt = +\infty, \quad (9)$$

но

$$\int_{a+\delta}^b \psi_i^*(t) dt < +\infty, \quad (10)$$

Ещё выполняются условия (5), (7)

$$\int_a^b \lambda_i(t) dt \leq \frac{d_i}{2}, i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

При выполнении условий пункта 1. по системе (1) построим систему интегральных уравнений

$$y_i(x) = \begin{cases} \int_a^x e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt, & x \in (a, b], \\ \int_a^b e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt \cdot e^{\int_b^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} + \\ + \int_b^x e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt, & x \in [b, +\infty). \end{cases} \quad (12)$$

и введём в рассмотрение функции

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} K_i \int_a^x \lambda_i(t) dt, & x \in (a, b] \\ K_i \int_a^b \lambda_i(t) dt \cdot e^{-\int_b^x \psi^*(s) ds} + \int_b^x e^{-\int_t^x \psi_i^*(s) ds} \lambda_i(t) dt, & x \in [b, +\infty) \end{cases} \quad (13)$$

$$K_i = \exp\left(\int_a^b \psi_i^*(t) dt\right), i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

Из-за (2), (3), (4)-(7) видно, что функции $\psi_i^*(x)$ из (13) удовлетворяют условиям

$$\varphi_i(a) = 0, \varphi_i(+\infty) = 0, |\varphi_i(x)| \leq d_i, i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

Из пространства непрерывных вектор-функций $C^n(a, b)$ выберем множество $T^{(n)}(a, b)$ функций $y(x) = (y_i(x))_{i=1}^n$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$a) |y_i(x)| \leq \varphi_i(x), i = \overline{1, n},$$

для любого $\delta > 0$ существует такое $N_\delta > 0$, что при $x_1, x_2 \in [a + \delta, b]$ выполняются неравенства
 б) $|y_i(x_1) - y_i(x_2)| \leq N_\delta |x_1 - x_2|, i = \overline{1, n}$.

Как показано в [1,2] неоднократно, множество $T_{(a,b)}^{(n)}$ замкнуто и выпукло в пространстве $C_{(a,b)}^{(n)}$. Его компактность доказывается по тем же схемам.

Рассмотрим теперь нелинейный интегральный оператор $Ay = (A_i y)_{i=1}^n, y(x) = (y_i(x))_{i=1}^n$ и (см.(12))

$$A_i y(x) = \int_a^x e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt, i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

В силу (15) оператор A определён на $T^{(n)}(a, b)$ и нетрудно доказать $AT^{(n)} \subset T_{(a,b)}^{(n)}$. В силу свойств функций $\Phi_i, f_i, i = \overline{1, n}$, он непрерывен на $T_{(a,b)}^{(n)}$ и преобразует $T_{(a,b)}^{(n)}$ в себя. Тогда по принципу Шаудера имеет в $T_{(a,b)}^{(n)}$ неподвижную точку, что равносильно существованию решения $\tilde{y}(x) = (\tilde{y}_i(x))_{i=1}^n$ системы интегральных уравнений (12) для $x \in (a, b]$, причём из-за условия а)

$$\tilde{y}_i(a) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

Остаётся доказать существование решения системы интегральных уравнений

$$y_i(x) = \tilde{y}_i(b) \exp\left(\int_b^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds\right) + \int_b^x e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt \quad (18)$$

из (12) при $x \in [b, +\infty)$, удовлетворяет условиям

$$y_i(+\infty) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

Для этого вводится множество $\tilde{T}^{(n)}(b, +\infty)$ функций $y(x) = (y_i(x))_{i=1}^n$ из пространства непрерывных вектор-функций $C^n(b, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:

I. $|y(x)| \leq \varphi_i(x), i = \overline{1, n}, x \in [b, +\infty)$

и для любого сколь угодно большого положительного числа M существует такое число $N_M^{(i)} > 0$, что при $x_1, x_2 \in$

$$[b, b + M] \text{ выполняются неравенства II. } |y_i(x_1) - y_i(x_2)| \leq \frac{N_M^{(i)}}{1, n} |x_1 - x_2|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

По приведенной схеме доказывается, что множество $\tilde{T}^{(n)}(b, +\infty)$ замкнуто, выпукло и компактно в пространстве $C^{(n)}(b, +\infty)$.

Оператор в правых частях (18) определен на $\tilde{T}^{(n)}(b, +\infty)$ в силу (14), (15) и $A\tilde{T}^{(n)}(b, +\infty) \subset \tilde{T}^{(n)}(b, +\infty)$, является непрерывным на $\tilde{T}^{(n)}(b, +\infty)$ и преобразует его в себя. По принципу Шаудера существует неподвижная точка, что равносильно существованию решения $y^*(x) = (y_i^*(x))_{i=1}^n$ у системы (18), и, при этом удовлетворяет и условиям (см. (19))

$$\begin{aligned} y_i^*(+\infty) &= 0, \quad i = \overline{1, n} \\ y_i^*(b) &= \tilde{y}_i^*(+\infty), \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда вектор-функции

$$Z_i(x) = \begin{cases} y_i(x), & x \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}, \\ y_i^*(x), & x \in [b, +\infty), \quad i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (22)$$

будет решением системы (1), удовлетворяющим условиям

$$Z_i(a) = 0, \quad Z_i(+\infty) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (23)$$

и доказана

Теорема 1. При выполнении условий (2)-(7) в областях D_i и D_i^* система (1) имеет по крайней мере одно решение $Z_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющее условиям (2).

При выполнении условий (3)-(5), (8)-(11) строится система интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} y_i(x) &= \\ &= C_i e^{\int_b^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} \\ &+ \int_b^x e^{\int_t^x \Phi_i(s, y_1, y_2, \dots, y_n) ds} f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt, \end{aligned} \quad (24)$$

$$x \in (a, +\infty)$$

где $C_i \equiv \text{const}$, $i = \overline{1, n}$.

$$|C_i| \leq \frac{d_i}{2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (25)$$

и путём аналогичных рассуждений доказывается

Теорема 2. Если в областях D_i, D_i^* выполнены условия (3)-(5), (8)-(11) и (25), то система (1) имеет континуум решений $y_i(x, C_i)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условиям $y_i(a, C_i) = 0$, $y_i(+\infty, C_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$,

Литература

1. Исраилов С. В., Юшаев С. С. . Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик. Издательский центр «Эль-фа», 2004, с.448.

2. Исраилов С. В. Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Махачкала. Издательство «Алеф», 2014, с. 439.

3. Исраилов С.В., Танкиев И.А. Решение задачи Коши-Николетти для системы ОДУ с нулями в граничных точках сингулярностей. Сб. «Осенние математические чтения в Адыгее». Материалы III международной научной конференции. С.69-71. Майкоп, 15-20 октября 2019 г.

УДК 517.929.4+519.21

Кадиев Р.И.^{1,2}

Kadiev R.I.

1. Дагестанский государственный университет

2. Дагестанский государственный университет народного хозяйства;

1. Dagestan State University, Makhachkala

2. Dagestan State University of National Economy, Makhachkala

E-mail: kadiev_r@mail.ru

К вопросу об устойчивости решений одной гибридной системы Ито относительно начальных значений.

To the question of the stability of solutions of one hybrid Ito system with respect to the initial values.

Аннотация. Доклад посвящен исследованию вопросов моментной устойчивости решений одной

гибридной системы, состоящая из одного линейного дифференциального уравнения Ито и одного линейного разностного уравнения Ито.

The report is devoted to the study of the issues of moment stability of solutions of one hybrid system, consisting of one linear Ito differential equation and one Ito linear difference equation.

Ключевые слова: уравнение Ито, моментная устойчивость, разностное уравнение.

Keywords: Ito equation, moment stability, difference equation.

В последнее время у исследователей большой интерес вызывают процессы и системы, описываемые системами, состоящих из обыкновенных дифференциальных уравнений и разностных уравнений, параметры которых - случайные функции времени. Такие системы в литературе называют гибридными системами. Отличительной особенностью этих систем является наличие в пространстве состояний системы двух компонент дискретной и непрерывной. Так как одним из основных условий физической реализуемости любого процесса является его устойчивость, то изучение таких процессов привело к необходимости исследования устойчивости решений гибридных систем.

Доклад посвящен исследованиям вопросов моментной устойчивости решений одной гибридной системы, состоящая из одного линейного дифференциального уравнения Ито и одного линейного разностного уравнения Ито вида

$$\begin{aligned} d\bar{x}(t) &= [-a_{11}\bar{x}(t) + a_{12}\bar{x}([t])]dt + [b_{11}\bar{x}(t) + b_{12}\bar{x}([t])]dB(t) \quad (t \geq 0), \\ \bar{x}(s+1) &= \bar{x}(s) + [a_{21}\bar{x}(s) - a_{22}\bar{x}(s)]h + [b_{21}\bar{x}(s) + b_{22}\bar{x}([s])](B((s+1)h) - B(sh)) \quad (s \in N_+), \end{aligned} \quad (1)$$

где h - достаточно малое положительное действительное число; a_{ij} - некоторые действительные числа при $i, j = 1, 2, s \in N_+$; N - множество натуральных чисел; $N_+ = \{0\} \cup N$; $[t]$ - целая часть числа t ; B - скалярный стандартный винеровский процесс.

Для системы (1) исследованы вопросы q -устойчивости ($1 \leq q < \infty$) (моментной устойчивости) решений относительно начальных значений. Для этого применяются идеи метода модельных или вспомогательных уравнений, разработанные Н.В.Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости решений детерминированных функционально-дифференциальных уравнений, а также теория положительно обратимых функций. Получены достаточные условия экспоненциальной q -устойчивости ($2 \leq q < \infty$) решений системы (1) в терминах положительной обратимости матрицы, построенной по параметрам системы (1). Проверяется выполнимость этих условий в конкретных случаях.

УДК 517.956.6

Киржинов Р.А.

Kirzhinov R.A.

Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино–Балкарского научного центра РАН (ИПМА КБНЦ
РАН), Нальчик

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin–
Balkar Scientific Center of the RAS (IAMA KBSC RAS), Nal-
chik

E-mail: kirzhinov.r@mail.ru

**Об одной внутреннекраевой задаче для уравнения
смешанного параболо–гиперболического типа второго
порядка**

**On inner-boundary problem for parabolic–hyperbolic
mixed type second order equation**

Аннотация. Для уравнения параболо–гиперболического
типа второго порядка исследуется задача с
внутреннекраевым условием, связывающим значение от
производной на участке границы со значением искомой
функции на линии изменения типа уравнения и краевыми
условиями, задающими значение искомой функции. Доказаны
единственность и существование решения исследуемой
задачи. Решение выписано в явном виде.

*For an inhomogeneous parabolic–hyperbolic type second or-
der equation we investigate problem with inner–boundary condi-
tion, which binds the value of partial derivative on a part of
boundary with the value of desired function on the equation type
change line, and nonhomogeneous boundary conditions. There
are proved solution uniqueness and existence of the problem un-
der investigation. The solution is written out in explicit form.*

Ключевые слова: внутреннекраевая задача,
уравнение параболо–гиперболического типа,
уравнение смешанного типа.

Keywords: inner–boundary problem, parabolic–hyperbolic
type equation, mixed type equation.

Для формулировки корректных граничных задач
с ультрагиперболическим и псевдопараболическим
операторами в параллелепипеде А. А. Дезин [1] предложил

использовать нелокальные граничные условия, связывающие значения некоторых линейных операторов, действующих на искомую функцию, в различных точках границы. Там же, как отмечено в [2, с. 18], в случае задачи с ультрагиперболическим оператором предложено использовать внутреннекраевое условие с локальным смещением, связывающее значение от производной на границе со значением искомой функции на линии изменения типа уравнения.

Упомянутая задача для уравнений эллиптико–гиперболического типа, в том числе Лаврентьева–Бицадзе, в прямоугольной области была исследована в работах [3–6]. Аналог задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо–гиперболического типа, был сформулирован З. А. Нахушевой [7]. Там же доказана однозначная разрешимость и исследован вопрос о спектре однородной задачи. Дальнейшим исследованиям аналога задачи А. А. Дезина для параболо–гиперболических уравнений посвящены работы [8–10].

В вышеуказанных работах рассматриваются задачи с внутреннекраевым условием с локальным смещением и нелокальными условиями периодичности. В данной работе исследуется аналог задачи А. А. Дезина, в котором условия периодичности заменены локальными условиями, задающими значение искомой функции на различных участках границы области. Доказана теорема однозначной разрешимости исследуемой задачи и выписано решение в явном виде.

Литература

1. Дезин А. А. Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов // Докл. АН СССР, 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
2. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

3. Нахушева З. А. Об одной нелокальной задаче А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Дифференц. уравнения, 2009. Т. 45, № 8. С. 1199–1203.
4. Сабитов К. Б., Новикова В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Изв. вузов. Матем., 2016. № 6. С. 61–72.
5. Сабитов К. Б., Гущина (Новикова) В. А. Задача А. А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Изв. вузов. Матем., 2017. № 3. С. 37–50.
6. Гущина В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения смешанного эллиптико—гиперболического типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2016. Т. 20, № 1. С. 22–32.
7. Нахушева З. А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2011. 196 с.
8. Киржинов Р. А. Аналог задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного парабола—гиперболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2014. Т. 16, № 2. С. 41–46.
9. Киржинов Р. А. О единственности решения аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного парабола—гиперболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2015. Т. 17, № 3. С. 28–30.
10. Киржинов Р. А. О решении аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного типа второго порядка методом функции Грина // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 36–41. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-36-41

УДК 517.9

Ковалев А.В.

Kovalev A.V.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет, Белгород

Belgorod State University, Belgorod

E-mail: jamper84@bk.ru

**Представление решений для системы Ламе первого
порядка**

Presentation of solutions for the first-order Lamé system

Аннотаци. в работе рассматривается представление системы Ламе для случая изотропной среды через так называемые J – аналитические функции, которые являются решениями эллиптической системы 1-го порядка специального вида.

The paper considers the representation of the Lamé system for the case of an isotropic medium through the so-called J -analytic functions, which are solutions of a first-order elliptic system of a special form.

Ключевые слова: изотропная среда, J –аналитические функции, краевая задача, эллиптическая система.

Keywords: isotropic medium, J –analytic functions, boundary value problem, elliptic system.

Для исследования состояния среды плоской анизотропной теории упругости вводят в рассмотрение тензоры напряжения σ и деформации ε , которые представляют собой симметричные 2×2 –матрицы–функции вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

где ε_j выражаются через вектор смещения $u = (u_1, u_2)$ по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right). \quad (1)$$

В линейной теории упругости тензоры σ и ε связаны между собой законом Гука

$$\sigma = \alpha \varepsilon, \quad (2)$$

где тензор модулей упругости α – матрица линейного преобразования, которая симметрична и положительно определена.

Элементы a_j матричных коэффициентов, называемых модулями упругости, подчиняются требованию положительной определенности матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & a_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Вектор $u = (u_1, u_2)$ характеризует смещение. Он связан со столбцами $\sigma_{(1)} = (\sigma_1, \sigma_3)$, $\sigma_{(2)} = (\sigma_3, \sigma_2)$ тензора напряжений.

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где $\sigma_{(j)}$ означает j -ый столбец матрицы σ .

В данной работе рассматривается изотропный случай, следовательно модули упругости связаны $a_1 = a_2 = 2a_3 + a_4$, $a_5 = a_6 = 0$.

В покомпонентной записи соотношения (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_4 \varepsilon_2, \\ \sigma_2 &= \alpha_4 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2, \text{ где } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= 2\alpha_3 \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно формулам (1) соотношения закона Гука (4) запишем в виде $\sigma_{(i)} = a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial y}$, $i = 1, 2$, (5)

с матричными коэффициентами $a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, $a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$,

$$a_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражение (5) в уравнения равновесия (3), получим для вектора смещения $u = (u_1, u_2)$ эллиптическую систему уравнений второго порядка

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

которую называют системой Ламе [2,3].

Как известно [2], для системы Ламе в области D на плоскости можно рассмотреть задачу целью которой является нахождение решения системы по заданному вектору смещения $u|_{\Gamma} = f$. Эту задачу принято называть первой краевой задачей.

Вторая краевая задача, отвечающая задаче Неймана, состоит в нахождении решения системы по заданному значению на границе $\Gamma = \partial D$, либо нормальной компоненты $\sigma = \sigma_{(1)}n_1 + \sigma_{(2)}n_2$ тензора напряжения σ .

Согласно [2], общее решение u системы Ламе и сопряженная к ней функция v описываются через J -аналитические функции.

Теорема. *Существуют такие обратимые матрицы $B, C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, что любое решение u системы Ламе (6) и сопряженная к нему вектор-функция v в области D представима в виде*

$$u = \operatorname{Re} B \phi, \quad v = \operatorname{Re} C \phi + \xi,$$

с некоторой J -аналитической функцией ϕ и $\xi \in \mathbb{R}^2$, причем ϕ определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого, здесь матрицы B и C описываются через корни характеристического многочлена системы.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Солдатов А.П., Чернова О.В. Задача Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера. Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009. Т.13. №17-2. С.115.
3. Ковалева, Л.А.: Об одной задаче теории функций / Л.А. Ковалева, А.П. Солдатов // Доклады АМАН. - 2007. - Т.9. - №2. - С.30-38.

УДК 517.956.4

Ковалева Л.А.

KovalevaL.A.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет, Белгород

Belgorod State University, Belgorod

E-mail: Kovaleva_1@bsu.edu.ru

Об одной краевой задаче

About one boundary value problem

Аннотация. В настоящей работе мы рассмотрим краевую нелокальную задачу для уравнения Лапласа. Эта задача основывается на уже изученной задаче Бицадзе–Самарского. В плоском случае, исследуемом в работе, поставленную задачу удастся преобразовать к локальной краевой задаче, и получить задачу Дирихле, для уравнения, аналогичного уравнению Лапласа на стратифицированном множестве. Оказывается, применяя метод Пуанкаре–Перрона удастся доказать, что решением является верхняя огибающая семейства субгармонических функции, принимающих на границе заданные значения.

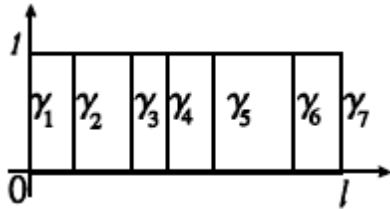
In this paper, we consider a boundary nonlocal problem for the Laplace equation. This task is based on the Bitsadze – Samarsky problem already studied. In the flat case studied in the work, the problem posed can be transformed to a local boundary-value problem and the Dirichlet problem can be obtained for an equation similar to the Laplace equation on a stratified set. It turns out, using the Poincare-Perron method, it is possible to prove that the solution is the upper envelope of a family of subharmonic functions that take specified values on the boundary.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, метод Пуанкаре – Перрона, стратифицированное множество.

Keywords: Laplace equation, Poincare – Perron method, stratified set.

В настоящее время насчитывается огромное количество работ, посвященных краевым задачам с нелокальными краевыми условиями. По праву одной из первоначальных можно назвать работу Бицадзе и Самарского. Обычно, такие задачи различными приемами сводятся к локальным краевым

задачам. Данная работа не является исключением, и в ней рассматривается нелокальная краевая задача, являющейся аналогом задачи Бицадзе–Самарского. Поставленная задача сводится с помощью факторизации к локальной задаче Дирихле на стратифицированном множестве. Разрешимость задачи доказывается методом Пуанкаре–Перрона.



На плоскости R^2 рассмотрим прямоугольник P (см. рис.1), в котором выделим n вертикальных интервалов $\gamma_i = \{(\xi_i, y), y \in (0,1)\}$, ($i = 1, \dots, N$) причем $\xi_1 = 0, \xi_n = 1$. Эти

интервалы поделим на группы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ в каждую из которых поместим некоторое число интервалов γ_i (не обязательно идущих подряд). Задача состоит в нахождении непрерывной в замыкании P функции, которая гармонична в каждой полосе прямоугольника P , заключенного между γ_i и γ_{i+1} , то есть

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

и удовлетворяющей следующим условиям:

$$u(\xi_i, y) = u(\xi_j, y) \quad y \in [0,1], \quad (2)$$

если γ_i и γ_j входят в одну группу Γ_k . Если Γ_k состоит

из интервалов $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_v}$, то

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] (\xi_{i_1}, y) + \dots + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] (\xi_{i_v}, y) = 0, \quad y \in [0,1] \quad (3)$$

где $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] (\xi_i, y)$ означает скачок производной

$$\frac{\partial u}{\partial x} (\xi_i + 0, y) - \frac{\partial u}{\partial x} (\xi_i - 0, y), \quad \xi_i \neq 0, 1.$$

Если же $\xi_i = 0$ или $\xi_i = l$, то речь идет об односторонних производных $\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y)$ и, соответственно $-\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y)$.

Кроме того, задаются условия Дирихле:

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \dots u(x,1) = \varphi_1(x) \dots x \in [0, l]. \quad (4)$$

Заметим, что в отличие от задачи Бицадзе – Самарского [1], в рассматриваемой задаче функция u не предполагается гармонической во всей полосе P . В связи с этим, не возможно применить ход доказательства разрешимости задачи (1)-(4), предложенную в работе [1]. В данной работе получена разрешимость задачи на основе метода верхних огибающих субгармонических функций [2,3].

Литература

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т.185. С.739–740.

2. А.П. Солдатов, О.В. Чернова К теории эллиптических систем первого порядка, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2009, Т.11.

3. Гилбарг Д, Трудингер М.Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

УДК 531.391

Кузнецова Н.Н.

Kuznetsova N.N.

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил

«Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е.

Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж

Military training and research center of the air force " air force

Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. a. Ga-

garin», Voronezh

E-mail: slavna.1@ya.ru

**Некоторые аспекты исследования автоколебаний
блокированных колес в процессе торможения автомобиля**
**Some aspects of the study of self-oscillations of blocked
wheels during vehicle braking**

Аннотация. В данном докладе рассматривается проблема возникновения автоколебаний в определенные моменты торможения автомобиля после блокировки колес, скольжение которых по дороге описывается моделью нелинейного вязкого трения с падающим участком характеристики. Воздействия автоколебаний могут быть причиной возникновения на дороге волнообразного рельефа.

In this report, we consider the problem of self-oscillation at certain moments of vehicle braking after locking the wheels, whose sliding on the road is described by a model of nonlinear viscous friction with a falling section of the characteristic. The effects of self-oscillation can cause undulating terrain on the road.

Ключевые слова: автоколебания, вязкое трение, блокировка колес, фрикционные системы.

Keywords: self-oscillation, viscous friction, wheel locking, friction systems.

При взаимодействии двух контактных тел часто возникают автоколебания, которые являют собой колебания частей тел друг относительно друга [1].

Определенное устройство получает некоторое количество энергии от постоянного внешнего источника, которое не будет периодическим. За счет этого оно начинает совершать

автоколебания и в результате создается периодический процесс. Колебания не зависят от начальных условий. Образованная таким образом система называется автоколебательной.

Автоколебания происходят везде в природе, они присутствуют в различных химических и природных явлениях. Например, поющие пески или возникновение инфразвуковых колебаний при движении ветра над морскими волнами, так называемый «голос моря», и есть собственно автоколебания. Нетрудно догадаться, что в живом организме многие процессы представляют собой автоколебания. Например, дыхание, работа сердца и т.д. Автоколебания появляются при игре на духовых и смычковых музыкальных инструментах. Автоколебания сопровождают нас везде.

Наиболее распространенными видами автоколебаний являются фрикционные релаксационные автоколебания, которые обусловлены трением. Их легко определить по характерному скрипу.

Исследованиями динамики таких фрикционных систем занимается теория нелинейных дифференциальных уравнений. Таким образом, исследование автоколебаний в сложных системах, тем более с несколькими степенями свободы, оказывается довольно сложной задачей, часто неразрешимой аналитическими методами. В связи с этим исследование фрикционных автоколебательных систем имеет смысл начинать с рассмотрения автоколебаний в системе с двумя степенями свободы.

Составлены математические методы, алгоритмы построения модели колебаний автомобиля при его экстренном торможении на дороге с полной блокировкой колес. Эти задачи рассмотрены в теоретических и экспериментальных исследованиях [2,3].

В частности, рассматривается движение автомобиля после блокировки колес, скольжение которых по дороге описывается моделью нелинейного вязкого трения с падающим участком характеристики. Построенная модель аппроксимирует модель сухого трения, когда трение покоя превосходит трение скольжения [3]. В этом случае на некоторых этапах торможения автомобиля в системе наблюдаются автоколебания (при определенных начальных

условиях движения). Автоколебания колес автомобиля могут создавать такую проблему, как возникновение на дороге волнообразного рельефа. В частности, эта проблема распространяется и на покрытия аэродромов, где используется достаточно много тяжелой автомобильной техники. Исследования характера движения такой механической системы решается числовыми примерами для уравнений Лагранжа второго рода и для уравнений, получаемым методом усреднения канонических уравнений в переменных действие-угол.

Различаются случаи «жесткого» и «мягкого» возбуждения автоколебаний. В первом, «жестком» случае для возникновения автоколебательного режима необходимо выбрать начальные условия движения из области притяжения предельного цикла, описывающего автоколебательный процесс. Условия возникновения «мягкого» возбуждения автоколебаний возникают в процессе собственно торможения автомобиля, когда скорость скольжения заблокированных колес попадает в область, характеризуемую увеличением силы трения при уменьшении скорости скольжения.

Автоколебания заблокированных колес вызывают тангенциальные силы периодического характера, которые негативно действуют на материал дороги, по которой движется автомобиль. Это обстоятельство, вероятнее всего, является причиной возникновения пластических деформаций материала дороги, поверхность которой приобретает волнообразный рельеф, особенно в местах интенсивного торможения автомобилей.

Литература

1. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М. Либроком. 2010. 360с.
2. Кручинин П. А., Магомедов М. Х., Новожилов И. В. Математическая модель автомобильного колеса на антиблокировочных режимах движения // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 6. — С.63—69.
3. Новожилов И.В., Павлов И.С., Фрольцов В.А. «О поведении автомобиля на «миксте»» // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — №3.

УДК 534.11

Литвинов В.Л., Анисимов В.Н., Корпен И.В.,
Косинова С.Н.

Litvinov V.L., Anisimov V.N., Korpen I.V., Kosinova S.N.

Московский государственный университет им. М. В.
Ломоносова, Москва

Сызранский филиал Самарского государственного
технического университета, Сызрань

Moscow State University, Moscow,

Syzran' Branch of Samara State Technical University, Syzran

E-mail: vladlitvinov@rambler.ru

**Исследование продольных колебаний каната
грузоподъемной установки**

Investigations of oscillations rope of capacity plans

Аннотация. В статье исследуются резонансные свойства каната грузоподъемной установки. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов переменной длины. При решении использовался метод Канторовича–Галёркина. В отличие от асимптотических методов решение имеет модовую структуру, что позволяет анализировать резонансные свойства каната. Пренебрежение малыми величинами позволило получить сравнительно простое выражение для амплитуды резонансных колебаний. С помощью полученного выражения проанализированы явления установившегося резонанса и прохождения через резонанс

The resonance properties of the rope hoisting installations are investigated in the article. The object of study refers to a wide range of vibrating one-dimensional objects of variable length. Kantorovich–Galerkin method was used in the solution. The solution has a mode structure, unlike the asymptotic methods, allowing you to analyze the resonance properties of the rope. Neglecting small quantities provides a relatively simple expression for the amplitude of resonance oscillations. The phenomena of resonance and the steady passage through resonance analyzed using the resulting expression.

Ключевые слова: колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, резонансные свойства.

Keywords: fluctuations objects with moving boundaries, value problems, mathematical models, resonance properties.

The article explores the resonance properties of a hoisting rope. The object of study relates to a wide range of oscillating one-dimensional objects of variable length [1–12]. A classical mathematical model is used to describe the oscillations. When solving, the Kantorovich – Galerkin method was used [5, 6, 11]. In contrast to asymptotic methods [3,7], the solution has a mode structure, which allows one to analyze the resonance properties of the rope.

The following notation is introduced for the model: ρ – is the bulk density of the rope material; S – cross-sectional area of the rope; E – modulus of elasticity; μ – is the coefficient characterizing the property of viscoelasticity of the rope material based on the Voigt structural model; $l(t)$ – is the length of the sagging part of the rope in an undeformed state; $v(t)$ – is the peripheral speed of the drum; m – mass of cargo. Let $Z(x, t)$ – be the shift of the rope point with the coordinate x at time t . The x axis is connected to a fixed coordinate system (the point of suspension of the drum). At the initial time, the points of the undeformed rope are connected with the points of the x axis. Between $l(t)$ and $v(t)$ the following relation holds

$$l'(t)(1 + Z_x(l(t) \pm 0, t)) = -v(t). \quad (1)$$

The mathematical model describing the longitudinal vibrations of the rope has the form [6,12]:

$$\begin{aligned} \rho Z_{tt}(x, t) - EZ_{xx}(x, t) - \mu Z_{xxt}(x, t) + \rho g &= 0; \\ mZ_{tt}(0, t) - ESZ_x(0, t) - \mu SZ_{xt}(0, t) + mg &= 0; \\ Z_t(l(t), t) &= v(t); \\ Z(x, 0) &= \frac{mg(x-l(0))}{ES} + \frac{\rho g}{2E}(x^2 - l(0)^2); \quad Z_t(x, 0) = v_0(0). \end{aligned} \quad (2)$$

We introduce a new function

$$Z(x, t) = u(x, t) + \frac{mg}{ES}(x - l(0)) + \frac{\rho g}{2E}(x^2 - l(0)^2).$$

Here, the function $(\frac{mg}{ES}(x - l(0)) + \frac{\rho g}{2E}(x^2 - l(0)^2))$ characterizes the initial strains of the rope, compensating for the weight of the load and the cable.

As a result, task (2) takes the form:

$$\rho \mathbf{u}_{tt}(\mathbf{x}, t) - E \mathbf{u}_{xx}(\mathbf{x}, t) - \mu \mathbf{u}_{xxt}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}; (3)$$

$$m \mathbf{u}_{tt}(\mathbf{0}, t) - E S \mathbf{u}_x(\mathbf{0}, t) - \mu S \mathbf{u}_{xt}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}; (4)$$

$$\mathbf{u}_t(l(t), t) = \mathbf{v}(t); (5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{v}(\mathbf{0}).$$

We express $\mathbf{u}_t(l(t), t)$ in terms of the total derivative

$$\mathbf{u}_t(l(t), t) = \frac{d\mathbf{u}(l(t), t)}{dt} - \mathbf{u}_x(l(t), t)l'(t).$$

Taking into account equality (1) and integration over $d\mathbf{t}$, the boundary condition (5) takes the form

$$\mathbf{u}(l(t), t) = \int_0^t \mathbf{v}(\zeta) d\zeta = \mathbf{F}(t). (6)$$

The article is devoted to the study of forced oscillations of the object, therefore, in the future, the initial conditions are not considered. We take $l(t) = -v_0 t + l(0)$, where v_0 is the average peripheral speed of the drum during the observation of the resonance phenomenon. For $\mathbf{F}(t)$ we take the following expression:

$$\mathbf{F}(t) = v_0 t + A \sin w(t), (7)$$

where $A \sin w(t)$ characterizes weak harmonic perturbations associated with the deviation of the shape of the drum from the circle, as well as with vibration of the drum.

We introduce dimensionless variables: $\xi = \frac{x}{l(0)}$; $\tau = \frac{a}{l(0)} t$; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = l(0) \mathbf{U}(\xi, \tau)$;

$$\frac{1}{l(0)} l(t) = L(\varepsilon_0 \tau) = 1 + \varepsilon_0 \tau; \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \varepsilon_0 = -\frac{v_0}{a}.$$

The small parameter ε_0 characterizes the slowness of the boundary motion in comparison with the wave velocity.

As a result, problem (3) - (5) taking into account (6), (7) will take the following form:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = \mathbf{0}; (8)$$

$$U_{\tau\tau}(\mathbf{0}, \tau) - \frac{1}{M} (U_\xi(\mathbf{0}, \tau) + \varepsilon_1 U_{\xi\tau}(\mathbf{0}, \tau)) = \mathbf{0}; (9)$$

$$U(L(\varepsilon_0 \tau), \tau) = \varepsilon_0 \tau + B \sin W(\tau), (10)$$

$$\text{где } \varepsilon_1 = \frac{\mu}{a \rho l(0)}; \quad M = \frac{m}{\rho S l(0)}; \quad B = \frac{A}{l(0)}; \quad W(\tau) = w \left(\frac{l(0)}{a} \tau \right).$$

To solve problem (8) - (10), we will use the Kantorovich – Galerkin method [5, 11]. We will seek a solution in the form

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi, \tau), (11)$$

where

$$U_n(\xi, \tau) = \varphi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau). \quad (12)$$

After neglecting the nonresonant terms, we obtain the following expression for the amplitude of the forced oscillations in the n -th dynamic mode:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{B^2} B_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left(\left(\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos(\Phi_n(\zeta)) d\zeta \right)^2 + \left(\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin(\Phi_n(\zeta)) d\zeta \right)^2 \right). \quad (13)$$

where

$$E_n^2(\tau) = \frac{1}{4} (C_n(\tau) a_n(\varepsilon_0 \tau))^2; F_n(\zeta) = \frac{D_n(\zeta)}{\omega_n(\varepsilon_0 \zeta) a_n(\varepsilon_0 \tau)}; \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta).$$

A steady-state resonance is observed if $\Phi_n(\zeta) = 0$. If we take the slow time function $L(\varepsilon_0 \tau)$ equal to unity, then the change in the amplitude of the oscillations will be described by the following expression:

$$A_n(\tau) = \frac{2}{\pi^2 n^2 \varepsilon_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 \varepsilon_1 \tau}{2}\right) \right).$$

The phenomenon of transmission through a resonance is observed with an external perturbation of a constant frequency $W(\tau) = \Omega \tau$.

Thus, in contrast to asymptotic methods, the use of the Kantorovich – Galerkin method made it possible to obtain a solution with a mode structure for studying vibrations. Neglecting small quantities made it possible to obtain a relatively simple expression for the amplitude of resonance oscillations, which simplifies the analysis of the resonance properties of an object.

References

1. Vesnitsky A.I., Potapov A.I. Transverse vibrations of ropes in mine hoists // Dynamics of systems. Bitter: Bitter. un-t, 1975. Number 7. S. 84–89.
2. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Longitudinal vibrations of a viscoelastic rope of variable length // Tr. 4th All-Russian. scientific conf. “Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Mathematical modeling and boundary value problems. ” Samara: SamSTU, 2007. Part 1. P. 25–27.

3. Goroshko OA, Savin G.N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kiev: Science. Dumka, 1971.290 s.

4. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. V. 19. No. 4. - S.161-165.

5. Anisimov B.H., Litvinov B.L. Investigation of the resonance properties of mechanical objects with moving boundaries using the Kantorovich – Galerkin method // Tomsk State University Journal. Samara State Technical University. Ser. Phys. – mat. science. 2009. No. 1. P. 149–158.

6. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and study of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov - Samara: Samar. state tech. un-t, 2017 .-- 149 p.

7. Litvinov V.L. The study of free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method // Zh. Middle Volga Mathematical Society. 2014. V. 16. No. 1. P.83–88.

8. Litvinov V.L. Transverse vibrations of a viscoelastic rope of variable length with bending stiffness taking into account the influence of the resistance forces of the medium. // Modern problems of the theory of functions and their applications. Voronezh: Publishing house Scientific book. 2014.S. 153–157.

9. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Calculation of natural frequencies of transverse vibrations of a viscoelastic rope moving in the longitudinal direction and having bending stiffness // Tr. 5th All-Russian. scientific conf. "Mathematical modeling and boundary value problems." Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structural elements. Samara: Samara State Technical University, 2008. Part 1. P. 38–42.

10. Anisimov V.N., Korpen I.V., Litvinov V.L. Resonance properties of a rope of variable length with bending stiffness taking into account the action of damping forces // Tr. 8th All-Russian. scientific conf. "Mathematical modeling and boundary value problems." Mathematical models of mechanics, strength

and reliability of structural elements. Samara: Samara State Technical University, 2011. P. 15–20.

11. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich – Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2018. No2. S. 70–77.

12. Litvinov V.L. Nonlinear mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of one-dimensional mechanical objects with moving boundaries. In: Modern problems of mathematics and mechanics. Materials of the international conference dedicated to the 80th anniversary of Academician of the RAS V. A. Sadovnichy, (Moscow, May 12–16, 2019), Moscow: MAKS Press, 2019.P. 739–742.

УДК 681.3.07

Магомедов А.М.

Magomedov A.M.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

Графический подход к решению задачи о выпуклой оболочке

Graphic approach to solving the convex hull problem

Аннотация. Графическими средствами языка программирования решена задача по построению выпуклой оболочки заданного множества точек и обходу ее вершин.

Graphic means of the programming language solved the problem of constructing the convex hull of a given set of points and orderly traversal of its vertices.

Ключевые слова: закрашивание, список, упорядочение.

Key words: coloring, a list, organizing.

1. Введение. Для алгоритмиста задача о построении выпуклой оболочки заданного множества с последующим обходом вершин может послужить мотивацией к разработке интересных алгоритмов (два из них – алгоритмы Грэхема и Джарвиса см. в [1]), для программиста – приглашением к увлекательному выбору подходов, оптимальных по вычислительной сложности (см., например, [2]), для преподавателя (как в нашем случае) – материалом для выявления связей между такими, казалось бы, отдаленными областями, как вычислительная геометрия и компьютерная графика.

Задача. В окне формы проекта Delphi задано множество точек с положительными целочисленными координатами: $M = \{M[i], i=1, \dots, n\}$, $M[1]$ – его нижняя-правая точка, т.е. $M[1]$ имеет максимальную абсциссу среди точек M с максимальной ординатой. Требуется средствами Delphi построить для множества M минимальную выпуклую оболочку D и перечислить вершины ее границы в соответствии с *упорядоченным обходом* (против часовой стрелки или по часовой стрелке), начиная с вершины $M[1]$.

Примечание 1. Для минимальной выпуклой оболочки (части плоскости) и ее границы будем использовать обозначения в.о. и г.в.о. соответственно.

С применением графических средств языка Delphi в разделе 2 в.о. D в окне формы выделяется цветом, в разделе 3 формируется множество вершин г.в.о. D и информация о соседстве вершин запоминается в матрице L, которая используется в разделе 4 для построения списка упорядоченного обхода вершин г.в.о. D.

2. Построение цветного изображения в.о. D. Справка: если значение четвертого параметра метода FloodFill класса TCanvas языка Delphi выбрано равным fsBorder, а первые два параметра x и y – координаты точки из некоторой связной области D с границей цвета Color, то вызов метода

Canvas.FloodFill (x, y, Color, fsBorder)

производит заливку области D, начиная с точки (x,y), используя цвет Canvas.Brush.Color и стиль Canvas.Brush.Style текущей кисти Canvas.Brush.

Примечание 2. Для краткости текста далее будем использовать сокращенные обозначения без указания канвы Canvas: Brush.Color и т.д.

Выберем три разных цвета: Color1=clBlue, Color2=clGreen, Color3=clBtnFace и обозначим через Link (M, Color1) процедуру выполнения попарных соединений всех точек множества M отрезками цвета Color1 (и толщины 1).

Утверждение 1. В результате выполнения действий:

Link (M, Color1);

Brush.Color:=Color2; floodFill (0,0, Color1, fsBorder);

Link (M, Color3)

в.о. D закрашивается в цвет Color3, а ее дополнение до окна формы – в цвет Color2.

Примечание 2. Предложение использовать метод FloodFill для построения в.о. встречается в методических рекомендациях к проведению олимпиады по информатике (под ред. В.М. Кирюхина). Выражаем признательность автору идеи.

3. Соотношения соседства для вершин г.в.о. D. 3.1. Построим список V из номеров вершин г.в.о. D: если для вершины M[i] существует соседняя (сверху, снизу, справа или слева) точка цвета Color2, что означает принадлежность вершины M[i] г.в.о. D, то i добавим в V; i=1,..., n.

3.2. Если для $V[i]$ найдутся две различные $V[j]$ и $V[k]$, такие, что отрезок $(M[V[j]], M[V[k]])$ содержит вершину $M[V[i]]$, то удалим $V[i]$ из V ; $i=1, \dots, |V|$.

3.3. Для $i1=1, \dots, |V|-1, j1=i1+1, \dots, |V|$ выполнить:

$i:=V[i1]; j:=V[j1];$

если цвет срединной точки отрезка $(M[i], M[j])$ или соседней с ней точки – Color2, то $L[i,j]$ и $L[j,i]$ присвоить True, иначе – False.

Утверждение 2. Две различные вершины $M[i]$ и $M[j]$ являются соседними вершинами г.в.о. D , если и только если $L[i,j]=\text{True}$.

4. Построение обхода вершин границы в.о. D .

Инициализация списка. В качестве "текущей вершины" обхода примем $i=V[1]$; найдем для i соседнюю вершину r (любую из двух), назовем ее "просмотренным соседом" и запомним в переменной first. Включим i в список обхода List.

Итерация построения списка. Используя массив L , найдем для текущей вершины i "нового соседа" (обозначим его через new), т.е. соседа вершины i , отличного от ее просмотренного соседа. Добавим new в список List и выполним два присвоения: $r:=i$ и $i:=\text{new}$, суть которых заключается в назначении текущей вершины i на роль просмотренного соседа, а нового соседа – на роль текущей вершины. Если $\text{new} = \text{first}$, завершим цикл, иначе перейдем к следующей итерации.

Утверждение 3. Список List задает упорядоченный обход вершин г.в.о. D .

Работа подготовлена при поддержке Отдела математики и информатики ДФИЦ РАН.

Литература

1. Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. Алгоритмы. Построение и анализ. – 3-е изд. – «Вильямс», 2013. – 1324 с.

2. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек [Электронный ресурс]// URL:<http://algotist.ru/maths/geom/convhull/>. (Дата обращения: 18.01.2020).

УДК 519

Магомедов А.М.

Magomedov A.M.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

Головоломки как поиск цепей в графе

Puzzles like finding chains in a graph

Аннотация. Показано, как решение головоломок сводится к поиску в графе.

It is shown how solving puzzles is reduced to searching in a graph.

Ключевые слова: головоломка, граф, путь, поиск.

Keywords: puzzle, graph, path, search.

Введение

Изложение головоломки в терминах графов нередко позволяет свести ее решение к поиску цепи, соединяющей некоторые узлы (вершины) графа [1, с. 51]. В качестве узлов графа, соответствующего задаче, выбираются некоторые состояния, естественным образом выявляемые в задаче; а ребра/дуги служат для обозначения допустимых переходов между состояниями.

Задача "Ревнивые мужья" [1, с. 52]. Три супружеские пары должны переправиться с левого берега реки на правый. Имеется только одна лодка, которая может выдержать одновременно только двоих. Как могут переправиться все шестеро, если никакой муж не оставит жену в присутствии других мужчин?

1. Построение графа и поиск решения. Примем буквенные обозначения: А, а, В, в, С, с, где прописная буква соответствует мужу, а одноименная строчная буква – его жене.

Перед каждым отплытием (и после каждого прибытия) лодки состояние на обоих берегах будем рассматривать как узел ориентированного графа G , а информацию о местонахождении людей задавать структурированной меткой

узла – подмножествами L и R , образованными элементами множества $\{A, a, B, b, C, c\}$, которые находятся на левом (L) и правом (R) берегу соответственно; если в рассматриваемый момент времени лодка находится на левом берегу, будем добавлять знак «+» в множество L , в противном случае знак «+» будем добавлять в R . На рис. 1 подмножество L записано в верхней строке, R – в нижней строке метки каждого узла; для удобочитаемости элементы множеств перечислены без разделительных знаков (понятно, что в плане информативности одно из L и R избыточно, но из соображений наглядности мы будем выписывать оба множества).

Построим граф G . В начале G содержит лишь один узел v_1 с двухстрочной меткой

$ABCabc\emptyset$,

будем считать данный узел «не рассмотренным». Два узла графа G будем называть *эквивалентными*, если при замене местами в метке одного из этих узлов каких-либо двух букв (отдельно - их прописных вариантов и отдельно – их строчных вариантов) получится метка другого из этих узлов.

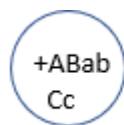
Пример эквивалентных узлов:



В самом деле, если в метке узла слева выполнить замены $B-C$ и $b-c$, то получим метку узла, расположенного справа.

Два узла графа G будем называть *зеркальными*, если при замене местами строк в метке одного из этих узлов получится узел, эквивалентный второму из этих узлов. Примеры зеркальных узлов:

1)



2)



Выше была приведена метка начального узла v_1 графа G . Как создаются новые узлы графа (и их метки) и как они соединяются?

На очередном шаге по построению ориентированного графа G :

а) выберем из нерассмотренных узлов графа G тот узел u , который имеет наименьший номер, т.е. построен раньше других;

б) каждый узел w , достижимый из u выполнением одной-единственной переправы с соблюдением условия ревности - «если в лодке или на каком-либо берегу присутствуют строчная буква x и какая-либо прописная буква, то обязательно присутствие прописной буквы X »,

и неэквивалентный ни одному из ранее построенных вершин графа G , добавим к графу G вместе с дугой (u, w) в качестве нерассмотренного узла с присвоением очередного номера. После этой процедуры узел u считается рассмотренным.

Примечание. Запрет на добавление в граф узла w , соответствующего состоянию, достижимому из рассматриваемого узла u , в случае, когда граф G уже содержит эквивалентный w узел, призван исключить зацикливание.

Построение графа G завершается либо при создании «конечного» узла с меткой

$\emptyset + ABCabc$,

соответствующей состоянию, когда все супружеские пары перевезены на правый берег, либо при достижении состояния, когда конечный узел не создан, и в то же время не удается добавить к графу ни одного нового узла (последнее равносильно отсутствию решения).

Из рис. 1 видно, что алгоритм построения графа завершён созданием конечного узла v_{14} . Любой путь из узла v_1 до узла v_{14} является решением (таких путей четыре), которое достигается выполнением 11 переправ через реку.

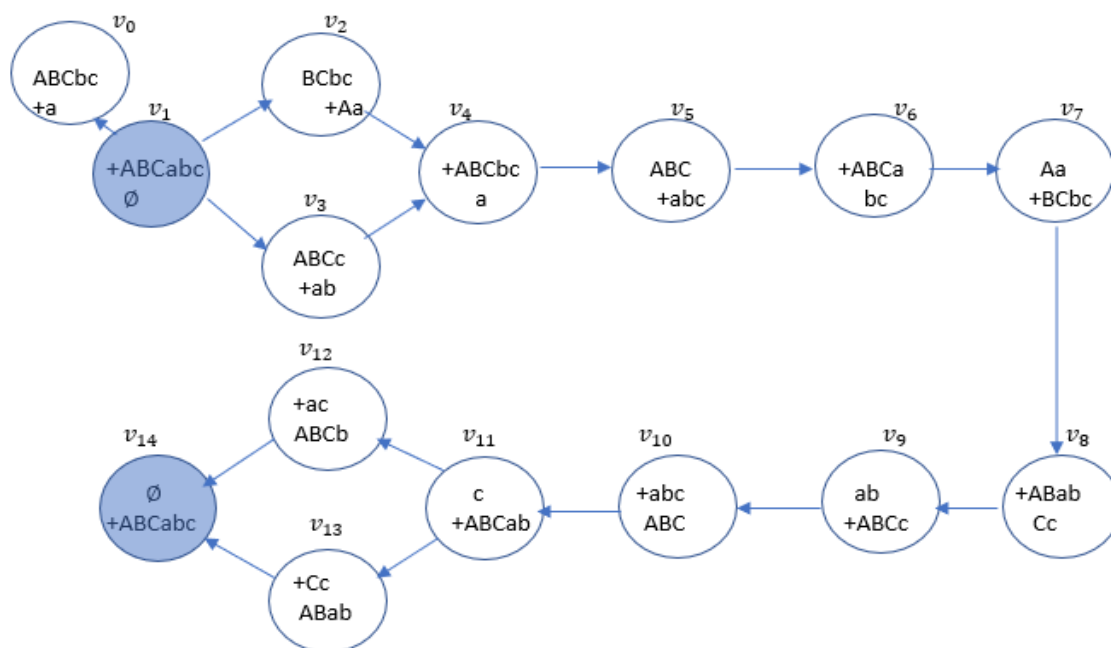


Рис. 1. Граф для задачи о ревнивых мужьях. Для решения необходимо и достаточно 11 переправ.

В следующем утверждении через $s(u, w)$ обозначено расстояние между узлами u и w .

Утверждение. Если в построенной части графа G присутствуют зеркальные узлы v_m и v_n , $n > m$, то в графе G существует конечный узел v_k и

$$s(v_1, v_k) \leq 2s(v_1, v_m) + s(v_m, v_n).$$

2. Заключение. Аналогичным образом могут быть решены, например, и головоломки о переливаниях. На основе полученного таким образом решения разработано программное обеспечение [2].

Работа подготовлена при поддержке Отдела математики и информатики ДФИЦ РАН.

Литература

1. О. Оре. Теория графов. – 2-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 336 с.

2. Магомедов А.М. Шарапудинов Т.И. Программа решения задачи об оптимальных переливаниях с ограничениями для случая трех сосудов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019664676 от 12 Ноября 2019 г.

УДК 519.837.3

Магомедова Е.С., Раджабова М.Т.

Magomedova E.S., Radjabova M.T.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

Защита информации методами теории статических решений

Information protection by methods of the theory of static solutions

Аннотация: рассмотрена математическая модель игры защиты информации методами теории статических решений

The mathematical model of the information protection game by methods of the theory of static solutions is considered.

Ключевые слова: игра, стратегия, матрица рисков, защита информации.

Keywords: game, strategy, risk matrix, information protection.

Задача конфликтной ситуации теории статических решений состоит в том, что неизвестные условия операции зависят от сознательно действующего игрока А, защищающего имеющуюся у него информацию от неопределенных действий противника, называемого «Природой». Будем считать, что действия второго игрока – П неизвестны и произвольны.

Тогда математическая модель такой задачи будет иметь вид матрицы размерности $m \times n$:

$$\{a_{ij}\}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n},$$

где строки матрицы - стратегии игрока А: A_1, A_2, \dots, A_m , а столбцы – стратегии второго игрока П: P_1, P_2, \dots, P_n ; элементы a_{ij} выражают выигрыш первого игрока при выборе стратегий (A_i, P_j) , соответственно игроками.

Для определения решения задачи об оптимальном выигрыше игроком А рассмотрим случай, когда второму игроку выбор любой стратегии при своем ходе безразличен. Тогда для определения наиболее удачного выбора стратегии

игрок A может воспользоваться доминирующей над другими стратегией и дальше продолжать игру в том же духе.

Для определения наиболее выгодного выбора стратегии игроком A , можно составить матрицу рисков с элементами

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где β_j – максимальный элемент j – го столбца.

По критерию минимального риска Сэвиджа, выбор стратегии игрока A будет определяться из равенства

$$V = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Если заранее известны, или каким-то образом, определены вероятности выбора стратегий второго игрока P

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1,$$

то выигрыш игрока A можно определить из равенства

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_j a_{ij} \rightarrow \max, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Для решения задачи о защите информации можно воспользоваться и другими критериями решения задачи теории статических решений Байеса, Вальда, Гурвица, Лапласа или приближенным методом итераций Брауна-Робинсона.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. Уч. пос. для вузов, 3-е изд. – М.: Дрофа, 2004.
2. Магомедова Е.С., Раджабова М.Т. Математическая модель стохастической игры защиты информации. Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XII Международной конференции приуроченной к 85-летию профессора Алишаева М. Г. – Махачкала, изд. ДГУ, 2017.

УДК 519.86

Магомедов Р.И., Магомедов И.И.

Magomedov R.I., Magomedov I.I.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

Математическая модель динамики изменения мощности физического объекта

A mathematical model of the dynamics of changes in the power of a physical object

Аннотация. В работе показан способ построения математической модели изменения величины мощности физического объекта в процессе развития во времени в виде стохастического дифференциального уравнения.

The paper shows a method for constructing a mathematical model of the change in the power value of a physical object in the course of development over time in the form of a stochastic differential equation.

Ключевые слова: мощность объекта, скорость изменения, случайный фактор.

Key words: object power, rate of change, random factor.

Предположим, что физический объект, обладающий какой-то характеристикой, изменяется во времени.

Для получения модели обозначим через $x(t)$ функцию, зависящую от времени и характеризующую этот объект. Будем считать эту функцию непрерывной и дифференцируемой. Производная $x'(t)$ будет определять скорость изменения физической характеристики этого объекта на временной оси. Эта скорость будет зависеть от различных факторов, действующих на объект как положительно, так и отрицательно в любой момент времени.

С учетом этих факторов можно составить функцию зависимости скорости изменения ее во времени и записать

$$dx(t) = F(x, t)dt. \quad (1)$$

Вид функции $F(x, t)$ будет зависеть от воздействия положительных и отрицательных факторов, действующих на объект в течение определенного времени.

На объект, кроме воздействия стационарных факторов, может оказывать воздействие и случайный фактор. Обозначим через $X(t)$ эту случайную величину, для которой выполняются условия Маркова-Колмогорова-Чепмена, и будем считать, что для нее выполняются условия сильной непрерывности и становится винеровским процессом [1].

За малый промежуток времени Δt случайная величина также изменится

$$X(t + \Delta t) = X(t) + dX.$$

Величина $X(t + \Delta t) - X(t) = dX$, — скорость изменения $X(t)$ за промежуток времени Δt , — и считается стохастическим дифференциалом случайного процесса [1].

Если к уравнению (1) прибавим стохастический дифференциал, получим стохастическое дифференциальное уравнение, которое в общем виде запишется так:

$$dx = F(x, t)dt + G(x, t)dX, \quad (2)$$

где функции $F(x, t)$ и $G(x, t)$ неслучайные. Если задать первоначальное условие $X(t)|_{t=0} = x_0$, то случайную величину $X(t + dt)$ можно определить с помощью функции плотности вероятности марковского процесса и равенства (2) и записать в виде

$$x(t + \Delta t) - x(t) = F(x, t)\Delta t + G(x, t)(X(t + \Delta t) - X(t)).$$

Разбив временной интервал на элементарные отрезки Δt_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и положив $X(t_i) = z_i$, получим разностное уравнение для численного определения величины

$$x_{i+1} = F(x_i, t_i)\Delta t_i + G(x_i, t_i)z_{i+1} \quad (3)$$

Используя начальные условия x_0 и разностную схему, можно получить одну из возможных траекторий случайной величины $X(t)$. [2],[3].

Литература

1. Справочник по теории вероятностей и математической статистики. С. Королук и др. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 640с.

2. Магомедов И.И., Магомедов Р.И. Математическое моделирование мощности фирмы и помощью стохастических дифференциальных уравнений. Научно-технический вестник. Поволжье, №2 2011г. – Казань Научно-технический вестник. Поволжья, 2011, 112-123 с.

3. Магомедов Р.И., Магомедов И.И., Назаралиев Н-Ш.А. Математическая модель денежных вкладов и материальных ценностей. Известия ДГПУ. Естественные и точные науки, №2(23), 2013 г., 8-12 с.

УДК 004.02

Наталуха И.А.

Natalukha I.A.

Северо-Кавказский федеральный университет(филиал в г. Пятигорске)

North Caucasus Federal University (branch in Pyatigorsk)

E-mail:in63@mail.ru

Моделирование и анализ эффективности инструментов регулирования промышленных выбросов предприятий

Modeling and analysis of the effectiveness of industrial emission control instruments for enterprises

Аннотация. Построена математическая модель, позволяющая методами вычислительного эксперимента выяснять эффективность различных инструментов регулирования промышленных выбросов предприятий как стимулов предприятий к финансированию создания и внедрения инновационных технологических процессов.

A mathematical model has been built, which allows the computational experiment methods to find out the effectiveness of various tools for controlling emissions of enterprises as incentives for enterprises to finance the creation and implementation of innovative technological processes.

Ключевые слова: моделирование, оптимальность, экологическое регулирование, прибыль, промышленные выбросы.

Keywords: modeling, optimality, environmental regulation, profits, industrial emissions.

Регулирование промышленных выбросов представляет собой основной фактор в стимулировании загрязнителей к разработке и использованию инновационных технологических процессов (ИТП), которые понижают негативное влияние производства на окружающую среду. В связи с этим построение математических моделей и исследование относительной эффективности различных инструментов снижения промышленных выбросов является важной задачей [1]. В отрасли рассматриваются два предприятия, имеющие цель максимизацию получаемой

ими прибыли. Предприятие i производит объем продукции q_i . Потребительский спрос определяется функцией $P = P(Q)$, где P - цена, а $Q = q_1 + q_2$ - совокупный отраслевой объем продукции. Предприятия будем индексировать 1 и 2 или i и j .

Без использования эколого-экономических инструментов предприятия производят промышленное загрязнение q_i . Издержки на уменьшение загрязнения будем определять функциями $C_i(q_i - e_i)$, где e_i - промышленные загрязнения предприятий после воздействия эколого-экономических инструментов. Предприятие i может усовершенствоваться используемую технологию снижения промышленного загрязнения путем создания и внедрения ИТП. Если предприятие финансирует создание и внедрение ИТП в размере K_i , то издержки на уменьшение промышленного загрязнения понижаются от $C_i(q_i - e_i)$ до $k_i C_i(q_i - e_i)$. Производственная функция, определяющая создание и внедрение ИТП, записывается в виде $k_i = f_i(K_i)$. Издержки на создание и внедрение ИТП равны $\nu_i K_i$. Задача экологического регулятора заключается в том, чтобы полный объем промышленного загрязнения оставался равным $\bar{E} = e_1 + e_2$. Эта задача может решаться путем установления экологических (допустимая масса загрязнения, определяемая предприятию) или эколого-технологических нормативов (допустимая масса выбросов в расчете на единицу производимой предприятием продукции) для предприятий, или путем бесплатного распределения государством квот на промышленные выбросы, или с использованием продаваемых государством квот на загрязнение [2].

Оптимальный объем финансирования создания и внедрения ИТП при использовании каждого из средств осуществления экологической политики может быть получен максимизацией выражения $\pi_i(K_i) - \nu_i K_i$, где $\pi_i(K_i)$ представляет собой прибыль предприятия i . Решение K_i^*

определяется условием $\frac{d\pi_i(K_i)}{dK_i} = v_i$, в котором $\frac{d\pi_i(K_i)}{dK_i}$ представляет собой полную производную от $\pi_i(K_i)$ по K_i . Инструмент А приводит к более высокому объему финансирования создания и внедрения ИТП, чем В, если имеет место неравенство $\left| \frac{d\pi_i^A}{dK_i} \right| > \left| \frac{d\pi_i^B}{dK_i} \right|$. В работе были получены выражения для производной $\left| \frac{d\pi}{dk} \right|$ для каждого из перечисленных выше инструментов эколого-экономической политики. Проведенное исследование показывает, что экологические нормативы и эколого-технологические нормативы являются более эффективными стимуляторами для финансирования предприятия создания и внедрения ИТП, чем квоты. Проведен также анализ построенной модели при различных типах конкуренции на товарном рынке и рынке квот. Совокупное финансирование создания и внедрения ИТП при применении в качестве средств ограничения загрязнения экологических нормативов может оказаться больше или меньше совокупного финансирования создания и внедрения ИТП при применении в качестве средств ограничения загрязнения квот. Это зависит от издержек снижения промышленного загрязнения и функциональной зависимостью, описывающей создание и внедрение ИТП.

Литература

1. Экология и экономика природопользования: учебник / под ред. Э.В. Гирусова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2014. – 607 с.
2. Наталуха И.А. Стратегии реализации эколого-экономического регулирования предприятий АПК с использованием разрешений на промышленные выбросы // Материалы Международной научно-практической конференции «Аграрная наука – сельскому хозяйству». – Барнаул: Алтайский ГАУ, 2019. – Т. 1. – С. 381–383.

УДК 517.9

Некрасова Н.Н.

Nekrasova N.N.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет, Белгород

Belgorod State National Research University, Belgorod

E-mail: nekrasova@bsu.edu.ru

Пространство Гёльдера на сфере Римана

Hölder space on the Riemann sphere

Аннотация: В работе сформулировано определение метрики сферы Римана, сформулирована и доказана лемма о том, что некоторая заданная функция является расстоянием и относительно этого расстояния инверсия удовлетворяет двусторонней оценке. Введено пространство Гёльдера на сфере Римана.

Abstract: We definition of the Riemann sphere metric is formulated. We prove the lemma that some given function is a distance and with respect to this distance, the inversion satisfies a two-way estimate. We introduced the Hölder space on the Riemann sphere.

Ключевые слова: Метрика, пространство Гёльдера, сфера Римана.

Keywords: Metric, Hölder space, Riemann Sphere.

Занимаясь изучением краевых задач доктрины функций в бесконечных областях [2] довольно нередко появляется надобность применения пространств функций, которые бы удовлетворяли условию Гёльдера по отношению к метрике сферы Римана [1].

Определение. Одноточечная компактификация $\overline{\mathbb{R}^k} = \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ евклидова пространства \mathbb{R}^k есть метрика сферы Римана.

Согласно определению, окрестностями элемента ∞ в этой операции, преобразующей топологические пространства в компактные будут служить дополнения к шарам. Более того, непрерывность функции φ в точке ∞ означает существование предела $\varphi(\infty) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x)$. При $n=2$ стереографическая проекция устанавливает гомеоморфизм компакта $\overline{\mathbb{R}^2} = \overline{\mathbb{C}}$ на единичную

сферу Ω_3 трехмерного пространства и поэтому компакт носит название сферы Римана. Отметим, собственно, что подобную проекцию можно установить и для $k \geq 3$, что означает сохранность введенного термина и в данном случае [1].

Очевидно, инверсия

$$\delta(x) = \frac{x-a}{|x-a|^2} \quad (1)$$

относительно сферы $|x-a|=1$ с центром в точке a осуществляет гомеоморфизм компакта $\overline{\mathbb{R}^k}$ на себя, причем $\delta(a) = \infty$ и $\delta(\infty) = 0$. При $a=0$ это преобразование будем обозначать $\delta(x) = x^*$. Заметим, что оно переставляет точки $0, \infty$ и взаимно обратно. Обратным к (1), в общем случае, является преобразование $y \rightarrow a + y^*$.

Компакт $\overline{\mathbb{R}^k}$ можно наделить естественной структурой метрического пространства. С этой целью с каждой парой его точек x, y свяжем неотрицательное число $d(x, y)$ по формуле

$$d(x, y) = (1+|x|)^{-1}(1+|y|)^{-1}|x-y|, \quad x \neq \infty, y \neq \infty,$$

$$d(x, \infty) = d(\infty, x) = (1+|x|)^{-1}, \quad x \neq \infty; \quad d(\infty, \infty) = 0.$$

Заметим, что тогда $d(x, y) \rightarrow d(x, \infty)$ при $y \rightarrow \infty$.

Лемма. *Функция $d(x, y)$ есть расстояние. Инверсия, заданная формулой (1), относительно функции $d(x, y)$ удовлетворяет следующей двусторонней оценке:*

$$(1+|a|)^{-2}d(x, y) \leq d[\delta(x), \delta(y)] \leq (1+|a|)^2d(x, y).$$

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение леммы проверим выполнимость неравенства треугольника для трех точек $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}^k}$. Заметим, собственно, что это неравенство уточняется непосредственно, когда одна из данных точек совпадает с ∞ [2]. Поэтому нужно доказать неравенство $\frac{|x-z|}{(1+|x|)(1+|z|)} \leq \frac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} + \frac{|y-z|}{(1+|y|)(1+|z|)}$, или, что равносильно, неравенство $(1+|y|)|x-z| \leq (1+|z|)|x-y| + (1+|x|)|y-z|$. Достаточно убедиться, что $|y||x-z| \leq |z||x-y| + |x||y-z|$. Данное неравенство очевидно, если одна из точек x, y, z совпадает с 0 . В общем случае после деления на $|x||y||z|$ оно переходит в

$$\left| \frac{\tilde{x}}{|z|} - \frac{\tilde{z}}{|x|} \right| \leq \left| \frac{\tilde{x}}{|y|} - \frac{\tilde{y}}{|x|} \right| + \left| \frac{\tilde{y}}{|z|} - \frac{\tilde{z}}{|y|} \right|, \text{ где положено } \tilde{x} = \frac{x}{|x|} \text{ и аналогично}$$

обозначение принято и для \tilde{y}, \tilde{z} . Так как

$$\left| \frac{\tilde{x}}{|z|} - \frac{\tilde{z}}{|x|} \right|^2 = \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|x|^2} - 2 \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{|x||z|} = \left| \frac{\tilde{x}}{|x|} - \frac{\tilde{z}}{|z|} \right|^2 = |x^* - z^*|^2,$$

аналогично для остальных пар точек, это неравенство совпадает с неравенством треугольника по отношению к евклидовой метрике. Перейдем к доказательству второго утверждения леммы, которое базируется на равенстве

$$|x^* - y^*| = \frac{|x - y|}{|x||y|}. \quad (2)$$

Заметим, что равенство (2) равносильно следующему равенству: $|y|^2|x - |x|^2|y|^2 = |x|^2|y|^2|x - y|^2$. Левая часть этого выражения равна $|y|^4|x| - 2|x|^2|y|^2|xy| = |x|^2|y|^2(|x|^2 + |y|^2 - 2xy)$, что совпадает с его правой частью. В силу (1), (2) расстояние $d[\delta(x), \delta(y)]$ можем записать в виде

$$\left(1 + \frac{1}{|x-a|}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{|y-a|}\right)^{-1} \frac{|x-y|}{|x-a||y-a|} = \frac{|x-y|}{(1+|x-a|)(1+|y-a|)},$$

откуда $d[\delta(x), \delta(y)] = q(x)q(y)d(x, y)$, где $q(x) = \frac{1+|x|}{1+|x-a|}$. Остается

заметить, что в силу очевидного неравенства $1+|x+b| \leq (1+|x|)(1+|b|)$ выполнена оценка $(1+|a|)^{-1} \leq q(x) \leq 1+|a|$.

Определение. Условие Гёльдера [3] вводится и для функций, которые заданы на произвольном метрическом пространстве, по отношению к его метрике $d(x, y)$. Для этого нужно лишь заменить выражение $|x - y|^\mu$ в условии $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\mu$ на выражение $[d(x, y)]^\mu$. Соответствующий класс обозначим через $C^\mu(G) = C^\mu(G; d)$, указывая при необходимости метрику.

Как показано в [3] это пространство является банаховым относительно нормы $\|\varphi\|_\mu = \|\varphi\|_0 + [\varphi]_\mu$, $[\varphi]_\mu = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{[d(x, y)]^\mu}$.

Можно также ввести класс $C^\mu(G_1, G_2)$ отображений α из метрического пространства G_1 в G_2 с помощью условия Гельдера $d_2[\alpha(x), \alpha(y)] \leq C[d_1(x, y)]^\mu$.

Отметим, собственно, что все основные свойства нормированных пространств и теорема об эквивалентности общепризнанных мер в банаховых пространствах сохраняют свою силу и в данном случае, поскольку при их

доказательстве специфика евклидоваго расстояния никак не применялась.

Литература

1. Ковалёва Л. А., Чернова О. В. Математика как неотъемлемая компонента образования инженера-специалиста // Наука и образование: отечественный и зарубежный опыт. Сборник трудов конференции Двадцать третьей международной научно-практической конференции. - 2019. - С. 116-120.

2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

3. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I / А. П. Солдатов // СМФН. – 2017. – Т. 63, № 1. – С. 1–189.

УДК: 537.9

Нечаев В.Н., Шуба А.В.

Nechaev V.N., Shuba A.V.

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж

Military Educational and Scientific Centre of the Air Force

N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh

E-mail: wladnic@mail.ru, shandvit@rambler.ru

**Спектр времен релаксации в ансамбле
суперпараэлектрических частиц**

**Spectrum of relaxation times in an ensemble of
superparaelectric particles**

Аннотация. На основе теории марковских случайных процессов рассматривается коллективное поведение ансамбля сегнетоэлектрических наночастиц и формирование спектра времен релаксации в нем. Установлено, что число различных времен релаксации в ансамбле равно числу частиц, а вклад наибольшего времени релаксации в среднее время релаксации монотонно убывает с увеличением количества частиц.

Based on the theory of Markov random processes, the collective behavior of an ensemble of ferroelectric nanoparticles and the formation of a spectrum of relaxation times in it are considered. It has been established that the number of relaxation times of ensemble is equal to the number of particles, and the contribution of the largest relaxation time to the average relaxation time decreases monotonically with increasing number of particles.

Ключевые слова: время релаксации, сегнетоэлектрическая наночастица, марковский процесс.

Keywords: relaxation time, ferroelectric nanoparticle, Markov process.

Как известно, изучение кинетики физических свойств твердых тел опирается на исследование времени протекания того или иного физического процесса, определяемого конкретным временем релаксации. Вблизи точки фазового перехода второго рода релаксация параметра порядка определяется наибольшим временем релаксации. Данная

релаксация в условиях ограниченной геометрии и влияния окружения значительно отличается от релаксации в объемном материале. Цель настоящего сообщения состоит в изучении кинетики релаксации поляризации для ансамбля из произвольного числа одноосных сегнетоэлектрических наночастиц и выяснении вклада наибольшего времени релаксации в общее время релаксации системы.

Рассмотрим систему из трех сегнетоэлектрических частиц, каждая из которых может находиться в двух состояниях: вектор дипольного момента направлен вниз или вверх. Смоделируем такую систему марковским случайным процессом с четырьмя состояниями под номерами, соответствующими числу частиц, имеющих направленный вверх дипольный момент (рис. 1).

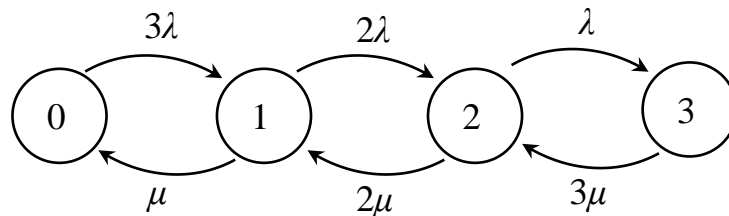


Рис. 1. Граф переходов системы из трех частиц

Тогда уравнения Колмогорова в векторно-матричной форме примут вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \hat{Q}\vec{p}, \quad (1)$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}; \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} -3\lambda & \mu & 0 & 0 \\ 3\lambda & -2\lambda - \mu & 2\mu & 0 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda - 2\mu & 3\mu \\ 0 & 0 & \lambda & -3\mu \end{pmatrix},$$

где p_i – вероятности нахождения частицы в состояниях $i=0, 1, 2, 3$; λ, μ – интенсивности переходов. Как известно [1], решение системы (1) имеет вид

$$\vec{p}(t) = e^{\hat{Q}t} \cdot \vec{p}(0), \quad (2)$$

где $e^{\hat{Q}t}$ – матричная экспонента, $\vec{p}(0) = (1, 0, 0, 0)^T$ – вектор начальных условий, определяющий первоначальную ориентацию дипольных моментов. Для поиска матрицы \hat{Q}

используем спектральное разложение:

$$\hat{Q} = \hat{U} \cdot \hat{D} \cdot \hat{U}^{-1}, \quad (3)$$

где \hat{D} – диагональная матрица из собственных чисел s_i матрицы \hat{Q} , а \hat{U} – матрица, столбцы которой являются собственными векторами $\hat{U}^{(i)}$ матрицы \hat{Q} ($i=1, 2, 3, 4$). Составляя характеристическое уравнение $\det(\hat{Q} - s\hat{E}) = 0$ для нахождения собственных векторов $\hat{U}^{(i)}$ получаем корни, обратные значения которых характеризуют времена релаксации: $\tau_1 = |s_2^{-1}| = (\lambda + \mu)^{-1}$, $\tau_2 = |s_3^{-1}| = (2\lambda + 2\mu)^{-1}$, $\tau_3 = |s_4^{-1}| = (3\lambda + 3\mu)^{-1}$. Далее, находя собственные векторы $\hat{U}^{(i)}$, образующие матрицу перехода, согласно разложению (3) определяем матричную экспоненту $e^{\hat{Q}t} = \hat{U} \cdot e^{\hat{D}t} \cdot \hat{U}^{-1}$, подставляя которую в формулу (2) находим решение $\vec{p}(t)$. Тогда поляризация системы $\mathcal{P}(t) = 3d(p_3(t) - p_0(t))$ имеет вид

$$\mathcal{P}(t) = \frac{3d}{(\lambda + \mu)^3} \left[(\lambda^3 - \mu^3) - 3\lambda(\lambda^2 + \mu^2)e^{-(\lambda+\mu)t} - 2\lambda^3 e^{-2(\lambda+\mu)t} + 3\lambda^2(\lambda - \mu)e^{-3(\lambda+\mu)t} \right],$$

где d – дипольный момент одной частицы. Прodelывая аналогичные выкладки для произвольного числа n частиц, получаем выражение

$$\mathcal{P}(t) = \frac{nd}{(\lambda + \mu)^n} \left[(\lambda^n - \mu^n) - n\lambda(\lambda^{n-1} + \mu^{n-1})e^{-(\lambda+\mu)t} + ((-1)^n - 1)\lambda^n e^{-2(\lambda+\mu)t} + \sum_{k=3}^n (-1)^{n+k} C_n^{n-k+2} \lambda^{n-k+2} (\lambda^{k-2} - (-1)^{n+k} \mu^{k-2}) e^{-k(\lambda+\mu)t} \right], \quad (4)$$

Анализ зависимости (4) показывает, что вклад наибольшего времени релаксации τ_1 монотонно убывает с увеличением количества частиц в системе.

Литература

1. И.А. Лаппо-Данилевский. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд. техн.-теор. лит-ры, 1981, 456 с.

УДК 534.014.2

Паровик Р.И.

Parovik R.I.

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский

Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk Kamchatskiy

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka

E-mail: romanparovik@gmail.com

Вынужденные колебания дробного осциллятора Эйри

Forced oscillations of a fractional Airy oscillator

Аннотация. В работе с помощью метода гармонического баланса исследуются вынужденные колебания дробного осциллятора Эйри. Построены амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики, а также показана связь порядков дробных производных, входящих в модельное уравнение с добротностью колебательной системы.

Using harmonic balance method, we study the forced oscillations of a fractional Airy oscillator. The amplitude-frequency and phase-frequency characteristics are constructed, and also the relationship of the orders of fractional derivatives included in the model equation with the quality factor of the oscillatory system is shown.

Ключевые слова: дробный осциллятор Эйри, амплитудно-частотная характеристика, дробная производная, добротность, резонансная частота.

Keywords: Airy fractional oscillator, amplitude-frequency characteristic, fractional derivative, quality factor, resonant frequency.

Исследование колебательных систем имеет важное значение, так как они встречаются в различных областях знаний от физики до экономики. В настоящее время развивается теория колебательных процессов с учетом

наследственности или памяти [1]. Опираясь на математический аппарат дробного исчисления [2], колебательные системы с памятью (дробные осцилляторы) можно описать с помощью производных дробных порядков. Порядки дробных производных, как показали результаты работ [3,4], отвечают за интенсивность диссипации энергии и связаны с добротностью, изучаемой колебательной системы.

В настоящей работе было проведено исследование вынужденных колебаний дробного осциллятора Эйри – аналога осциллятора Эйри, встречающегося в лазерной оптике [5].

Уравнение дробного осциллятора Эйри с трением и внешним периодическим воздействием имеет вид:

$$\partial_{0r}^{\beta}x(\tau) + \lambda \partial_{0r}^{\gamma}x(\tau) + tx(t) = a \cos(\varphi t), \quad (1)$$

где $x(t)$ - функция смещения; $\partial_{0r}^{\beta}x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau$ и

$\partial_{0r}^{\gamma}x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau$ - дробные производные в смысле

Герасимова-Капуто порядков $1 < \beta < 2, 0 < \gamma < 1$ [6,7]; $t \in [0, T]$ - время процесса; $T > 0$ - время моделирование; λ - коэффициент трения; a и φ - амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия

Отметим, что в случае $\beta = 2, \gamma = 1$ уравнение (1) переходит в уравнение для классического осциллятора Эйри.

Случай отсутствия трения $\lambda = 0$ и внешнего воздействия $a = 0$ в рамках задачи Коши был рассмотрен в работе [8], в которой были найдены аналоги функций Эйри 1-го и 2-го родов.

В работе [9] исследовалась задача Коши для уравнения (1) с помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы, здесь были построены осциллограммы и фазовые траектории осциллятора, а в работе [10] с помощью той же схемы были исследованы и вынужденные колебания, построены амплитудно-частотные характеристики.

В настоящей работе с помощью метода гармонического баланса по аналогии с работой [3] были получены аналитические формулы для расчета амплитудно-частотных

и фазово-частотных характеристик, а также добротности. Проведено сопоставление полученных результатов с численными результатами работы [10].

Литература

1. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p

2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М: Физматлит, 2003. 272 с.

3. Рехвиашвили С.Ш., Псху А.В. Новый метод описания затухающих колебаний балки с одним заделанным концом // Журнал технической физики. 2019. Т. 89. №9. С. 1314-1318

4. Parovik R.I. Amplitude-frequency and phase-frequency performances of forced oscillations of a nonlinear fractional oscillator // Technical Physics Letters. 2019. Т. 45. № 7. С. 660-663.

5. Хонина С.Н., Волотовский С.Г. Зеркальные лазерные пучки Эйри // Компьютерная оптика. 2010. Т. 34. №2. С. 203-213.

6. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // ПММ. 1948. Т. 12. №3. С. 251-260.

7. Caputo M., Elasticità e dissipazione. Zani-Chelli. Bologna, 1969. 150 pp.

8. Паровик Р.И. Задача Коши для обобщенного уравнения Эйри // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16. № 3. С. 64-69.

9. Паровик Р.И. Математическое моделирование эрмитарного осциллятора Эйри с трением // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 1. С. 138-148.

10. Паровик Р.И. Хаотические и регулярные режимы дробных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2019. 132 с.

УДК 517. 948

Рагимханов В.Р.

Ragimkhanov V.R.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: vadimragimkhanov@yandex.ru

Включение Гаммерштейна с запаздывающим аргументом

Delay integral inclusion of the Hammerstein type

Аннотация. Конструируется интегральное включение для формального интегрального уравнения Гаммерштейна с запаздывающим аргументом и приводятся условия существования решения для него.

The integral inclusion for the formal delay integral equation of Hammerstein type is constructed and the conditions for the existence of a solution for it are given

Ключевые слова. Интегральное включение, многозначное отображение, уравнение Гаммерштейна, неподвижная точка.

Keywords. Integral inclusion, multivalued map, integral equation of the Hammerstein type, fixed point.

Рассматривается задача

$$\begin{cases} x(t) = \int_a^t K(t,s)f[s, x(h(s))]ds + \eta(t), & t \geq a, \\ x(\tau) = \varphi(\tau), & \tau \notin [a, b] \end{cases} \quad (1)$$

в следующих предположениях относительно скалярных функций $K(t, s), f(s, \xi), h(t), \varphi(t), \eta(t)$:

a) $f: [a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – измерима как по совокупности переменных, так и по каждой переменной в отдельности (здесь $-\infty < a < b \leq \infty$) и для любого числа $\gamma > 0$ существует функция $\Psi_\gamma \in L_{loc}[a, b)$, что

$$|f(s, \xi)| \leq \Psi_\gamma(s) \text{ при } |\xi| \leq \gamma;$$

b) для любых $b_1 \in (a, b)$ и $t, t' \in [a, b_1]$

$$\int_{[a,t] \cap [a,t']} |K(t,s) - K(t',s)| \Psi_\gamma(s) ds + \int_{[a,t] \setminus [a,t']} |K(t,s)| \Psi_\gamma(s) ds \rightarrow 0$$

при $t - t' \rightarrow 0$;

- c) функции $h(t)$ и $\eta(t)$ непрерывны на $[a, b)$, причем
- d) $h(t) \leq t$ при $t \in [a, b)$ и $-\infty < \alpha := \min\{\inf_{a \leq t < b} h(t), a\}$;
- e) функция $\varphi(t)$ непрерывная на $[\alpha, a]$.

Попытка функционально-аналитической формулировки задачи (1) при таких условиях наталкивается на ту сложность, что подынтегральная функция в (1) может оказаться неизмеримой. Желание сохранить операторный подход к исследованию этой задачи вынуждает в обобщенной трактовке правой части (1). На этом пути, исходя из функций $K(t, s)$, $f(s, u)$ и непрерывных функций h, φ, η , строится многозначный оператор $\mathcal{E}_f^{h, \varphi}$:

$$\mathcal{E}_f^{h, \varphi} x := \left\{ g \in L_{loc}[a, b) : \begin{aligned} (S_f^{h, \varphi} x)(s) &\leq g(s) \\ &\leq (S_f^{h, \varphi} x)(s) \text{ при п. в. } s \in [a, b) \end{aligned} \right\},$$

Здесь $S_f^{h, \varphi}$ и $S_f^{h, \varphi}$ – верхняя и нижняя регуляризации "оператора"

$$f: x(s) \mapsto \begin{cases} f[s, x(h(s))], & \text{при } h(s) \in [a, b), \\ f[s, \varphi(h(s))], & \text{при } h(s) \notin [a, b), \end{cases}$$

точнее,

$$\begin{aligned} (S_f^{h, \varphi} x)(s) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Vrai sup}_{\xi \in U(\tilde{x}(s), \delta)} f(s, \xi), \\ (S_f^{h, \varphi} x)(s) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Vrai inf}_{\xi \in U(\tilde{x}(s), \delta)} f(s, \xi), \end{aligned}$$

(см. [2]).

Далее, задача (1) рассматривается как интегральное включение

$$\begin{aligned} x(t) &\in (\Gamma x)(t) + \eta(t), \\ t &\in [a, b), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$(\Gamma x)(t) := \left\{ \int_a^t K(t,s)g(s)ds : g \in \mathcal{E}_f^{h,\varphi} x \right\}$$

Установлены некоторые свойства многозначного оператора $\Gamma: C[a, b_1) \rightarrow 2^{C[a, b_1)}$, на основе которых доказана следующая теорема существования решения для включения (2).

Теорема. *При указанных выше условиях на функции $K(t, s), f(s, \xi), h(t), \varphi(t)$ и $\eta(t)$ включение (2) имеет непрерывное решение на некотором промежутке $[a, b_1) \subset [a, b)$.*

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы (общая теория). – М.: ИЛ, 1962, 895с.
2. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., Наука, 1966.
3. Рагимханов В.Р. Свойства многозначных операторов внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций. Межв.сб."Функционально-диффер. уравнения и их приложения", вып.2, Махачкала, 1994.

УДК 517.9+43

Ризаев М.К.

Rizaev M.K.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: Rizaev.56@mail.ru

Исследование спектральных свойств одного дифференциального оператора методом теории малых стационарных возмущений

Investigation of the spectral properties of a single differential operator using the theory of small stationary perturbations

Аннотация. В работе исследуется дискретный спектр одного дифференциального оператора, имеющего самые различные приложения в задачах естествознания. Определяется главный член поправки в разложении собственного значения в ряд по степеням малого параметра возмущения.

Ключевые слова. Самосопряженный оператор, спектр, краевая задача, собственное число, ортонормированная функция, возмущение, асимптотика, распределение.

The paper investigates the discrete spectrum of a single differential operator that has a variety of applications in natural science problems. The main member of the correction is determined in the expansion of the eigenvalue in a series of degrees of a small perturbation parameter.

Keywords. Self-adjoint operator, spectrum, boundary value problem, eigenvalue, orthonormal function, perturbation, asymptotics, distribution.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Hf(x) = -p(x)f''(x)$$

(1) на подпространстве функций

$$D(H) = \{f \in C^2([0, l]) | f(0) = 0, f'(l) = 0\} \quad (2)$$

пространства $C^2([0, l])$. Вопросы асимптотического распределения собственных значения операторов типа H , самосопряженных дифференциальных операторов произвольного порядка приводятся в источниках [1] – [3].

При постоянной функции $p(x) \equiv p_0$ оператор H вырождается в оператор H_0 с дискретным спектром, распределенным по закону

$$P_n = p_0 \left(\frac{2k+1}{2l} \right)^2 \pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Собственные значения (3) являются однократными, им соответствуют следующие ортонормированные собственные функции

$$\psi_n(x; P_n) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \left(\frac{2k+1}{2l} \pi x \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Предположим, что $H = H_0 + \varepsilon B$, где B – оператор, определенный на том же пространстве $D(H)$. Оператор B при малых значениях параметра есть возмущение оператора H_0 , спектральные характеристики которого (3)–(4) нам известны. Если $P_n(\varepsilon)$ есть изолированные однократные собственные значения возмущенного оператора H , а $\psi_n(x; \varepsilon)$ – соответствующие им собственные функции, то для малых значений параметра ε имеют место разложения

$$P_n(\varepsilon) = P_n + P_n^{(1)} \varepsilon + \dots + P_n^{(k)} \varepsilon^k + \dots, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi_n(x; \varepsilon) &= \psi_n(x) + \psi_n^{(1)}(x) \varepsilon + \dots + \psi_n^{(k)}(x) \varepsilon^k + \dots. \end{aligned} \quad (6)$$

Для выполнения приведенных разложений (5) – (6) предполагается, что при фиксированной функции $f \in D(H)$ выполняется малость возмущения :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon Bf\| = 0.$$

Нахождение всех коэффициентов степенных рядов (5) – (6) является вовсе не простой задачей, в нашем случае мы ограничимся вычислением коэффициента $P_k^{(1)}$, задающего главный член поправки к известному исходному значению P_k . Коэффициент $P_k^{(1)}$ определяется из равенства

$$P_k^{(1)} = (B\psi_k, \psi_k), \quad (7)$$

Пусть возмущение εB оператора H_0 задается выражением

$$\varepsilon Bf(x) = -\varepsilon p_0 Q_4(x) f''(x), \quad (8)$$

где ε – малый параметр, $Q_4(x)$ – произвольный многочлен четвертой степени. В этом случае возмущенный оператор H действует по закону

$$Hf(x) = -p_0 [1 + \varepsilon Q_4(x)] f''(x)$$

Теорема. Пусть $Q_4(x)$ есть произвольный многочлен четвертой степени, $\hat{Q}_5(x)$ – любая его первообразная. Если возмущение εB оператора H_0 задается соотношением (8), то для собственных чисел $P_k(\varepsilon)$ возмущенного оператора H при достаточно малых ε справедлива асимптотика

$$P_k(\varepsilon) = p_0 \left(\frac{2k+1}{2l} \right)^2 \pi^2 \left\{ 1 + \varepsilon \frac{1}{l} \left\{ \hat{Q}_5(l) - \hat{Q}_5(0) + [Q_4'(0) + Q_4'(l)] \left[\frac{l}{\pi(2k+1)} \right]^2 - [Q_4'''(0) + Q_4'''(l)] \left[\frac{l}{\pi(2k+1)} \right]^4 \right\} \right\} + 0(\varepsilon^2), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Литература.

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М.: Наука, 1979.
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М.: Наука, 1970.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
5. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
6. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

УДК 519.651

Рыбаков К.А.

Rybakov K.A.

Московский авиационный институт, Москва

Moscow Aviation Institute, Moscow

E-mail: rkoffice@mail.ru

О расчете спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара

On the calculation of the spectral characteristics of a fractional-order integration operator with respect to the Walsh and Haar functions

Аннотация. Применение оператора интегрирования дробного порядка к блочно-импульсным функциям не составляет труда, а их связь с функциями Уолша и Хаара позволяет сформировать простые алгоритмы расчета спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка. На основе этих алгоритмов, а также разработанных ранее алгоритмов расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования целого порядка относительно функций Уолша и Хаара [1] могут быть получены алгоритмы расчета спектральных характеристик оператора дробного интегродифференцирования.

The application of the integration operator of fractional order to block-pulse functions is not difficult, and their relationship with the Walsh and Haar functions allows us to create simple algorithms for calculating the spectral characteristics of the integration operator of fractional order. Based on these algorithms, as well as previously developed algorithms for calculating the spectral characteristics of differentiation and integration operators of integer order with respect to the Walsh and Haar functions [1], algorithms for calculating the spectral characteristics of the fractional integro-differentiation operator can be obtained.

Ключевые слова: линейный оператор, спектральная характеристика, операторы дробного интегрирования

Keywords: *linear operator, spectral characteristic, fractional integration operators*

Среди различных подходов к приближенному решению линейных дифференциальных, интегральных или интегродифференциальных уравнений и систем можно выделить представление их решения в виде функционального ряда по некоторой базисной системе, в том числе неортогональной, неполной или финитной, и сведение задачи к нахождению коэффициентов функционального ряда (коэффициентов разложения). Существуют различные варианты методов, использующих разложение решения, один из них предполагает переход к линейным операциям матричной алгебры с коэффициентами разложения. Линейным операторам (операторам дифференцирования, интегрирования и др.) ставятся в соответствие бесконечные матрицы (конечные в случае финитных базисных систем), называемые двумерными нестационарными передаточными функциями, спектральными характеристиками линейных операторов, матричными операторами или операционными матрицами [1–4]. Эти матрицы формируют из коэффициентов разложения образов базисных функций при применении соответствующих линейных операторов.

Для эффективного применения методов, использующих переход к спектральным характеристиками линейных операторов, важно иметь алгоритмы их расчета. В частности, в работах [5, 6] были предложены алгоритмы расчета спектральных характеристик оператора дробного интегродифференцирования (Римана–Лиувилля) относительно функций Уолша и Хаара, однако эти алгоритмы оказались довольно сложными. В этой работе предлагаются значительно более простые алгоритмы, основанные на разложении функций Уолша и Хаара по блочно-импульсным функциям [4]. Применение оператора интегрирования дробного порядка к блочно-импульсным функциям не составляет труда, а их связь с функциями Уолша и Хаара позволяет сформировать простые алгоритмы расчета спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка. На основе этих

алгоритмов, а также разработанных ранее алгоритмов расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования целого порядка относительно функций Уолша и Хаара [1] могут быть получены алгоритмы расчета спектральных характеристик оператора дробного интегродифференцирования.

Литература

1. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979. – 664 с.

2. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.

3. Лапин С.В., Егупов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 496 с.

4. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – К.: НАН Украины, 2008. – 256 с.

5. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета спектральной характеристики оператора дробного интегродифференцирования относительно функций Хаара // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2018. № 1. – С. 31–51.

6. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета спектральной характеристики оператора дробного интегродифференцирования относительно функций Уолша // Вестник СамГТУ. Серия «Технические науки». – 2019. № 4. (в печати)

УДК 517.968

Сапронов И.В.

Sapronov I.V.

Воронежский государственный лесотехнический университет, Воронеж

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh

E-mail: vglta311@mail.ru

Линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода
Volterra linear integral equation of the first kind

Аннотация. Изучается интегральное уравнение Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в некотором банаховом пространстве с весом. При определенных ограничениях на операторный пучок, соответствующий данному интегральному оператору, ведется построение многопараметрического семейства решений.

We study the Volterra integral equation of the first kind with a singularity and a sufficiently smooth kernel in some Banach space with weight. Under certain restrictions on the operator beam corresponding to a given integral operator, a multi-parameter family of solutions is being constructed.

Ключевые слова: интегральное уравнение, оператор, операторный пучок, спектр.

Keywords: integral equation, operator, operator beam, spectrum.

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $B([0, \delta], E)$ ограниченных на $[0, \delta]$ функций со значениями в E норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{B([0, \delta], E)} = \sup_{0 \leq x \leq \delta} \|\psi(x)\|_E.$$

Рассмотрим семейство банаховых пространств $M_{q,\nu}^{k,\alpha}$, $q \geq 1$, $\nu < 0$:

$$M_{q,\nu}^{k,\alpha} = \left\{ \varphi(x): \varphi^{(i)}(x) = x^{\alpha-qi} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \omega_i(x), \omega_i \in B([0,\delta], E), \|\varphi\|_{M_{q,\nu}^{k,\alpha}} = \max_{0 \leq i \leq k} \|\psi_i\|_{B([0,\delta], E)} \right\}.$$

Изучается линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq \delta \quad (1)$$

с интегральным оператором второго порядка. Ядро $K(x,t)$ является заданной функцией со значениями в $L(E)$, $\varphi(x) = \mathcal{G}''(x)$ ($\mathcal{G}(x) \in M_{q,\nu}^{2,-q}$) является искомой функцией со значениями в E .

Пусть существуют пределы $C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x,x)}{x^{2q}}$, $C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(-1)K'_t(x,x)}{x^q}$, $C_2 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K''_{tt}(x,x)}{x^0}$, причем C_0 имеет ограниченный обратный C_0^{-1} .

Лемма 1. Уравнение (1) имеет решение $\varphi(x) = \mathcal{G}''(x)$, где $\mathcal{G}(x) \in M_{q,\nu}^{2,-q}$ тогда и только тогда, когда интегро-дифференциальное уравнение

$$A\mathcal{G} + D\mathcal{G} = f(x) \quad (2)$$

имеет решение $\mathcal{G}(x) \in M_{q,\nu}^{2,-q}$, где

$$A\mathcal{G} = C_0 x^{2q} \mathcal{G}' + C_1 x^q \mathcal{G} + C_2 \int_0^x \mathcal{G}(t) dt + q C_0 x^{2q-1} \mathcal{G}, \quad (3)$$

$$D\mathcal{G} = [K(x,x) - C_0 x^{2q}] \mathcal{G}' + [-K'_t(x,x) - C_1 x^q] \mathcal{G} + \int_0^x [K''_{tt}(x,t) - C_2] \mathcal{G}(t) dt - q C_0 x^{2q-1} \mathcal{G}. \quad (4)$$

Лемма 2. Пусть операторный пучок

$$B_\nu = -C_0 \nu + C_1 - C_2 \frac{1}{\nu}$$

имеет характеристическое число $\nu < 0$, которому соответствует вектор e_0 и цепочку присоединенных векторов e_1, e_2, \dots, e_m , тогда для уравнения $A\mathcal{G} = 0$ существует $m+1$ решений вида

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{x^q} e^{\nu \int_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \left[\bar{e}_p + \bar{e}_{p-1} \int_x^\delta \frac{dt}{t^q} + \dots + \bar{e}_0 \left(\int_x^\delta \frac{dt}{t^q} \right)^p \right], \quad p = 0, \dots, m. \quad (5)$$

Замечание 1. Пусть для операторного пучка B_ν все характеристические числа отрицательные $\nu_i < 0$ ($i = 1, \dots, m$), k_i – кратность ν_i , $\nu^* = \max_{1 \leq i \leq m} \{\nu_i\}$. Тогда для уравнения $A\mathcal{G} = 0$ существует k линейно независимых решений, принадлежащих пространству $M_{q,\nu}^{2,-q}$, где $k = \sum_{i=1}^m k_i$, $\nu^* \leq \nu < 0$.

Лемма 3. Операторы A и D действуют из $M_{q,\nu}^{2,-q}$ в $M_{q,\nu}^{1,0}$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|D\|_{M_{q,\nu}^{2,-q} \rightarrow M_{q,\nu}^{1,0}} < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \delta.$$

Лемма 4. При любой $f(x) \in M_{q,\nu}^{1,0}$ уравнение $A\mathcal{G} = f$ имеет частное решение $\mathcal{G} \in M_{q,\nu}^{2,-q}$, удовлетворяющее условию

$$\|\mathcal{G}\|_{M_{q,\nu}^{2,-q}} \leq C_0 \|f\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}.$$

Теорема. Пусть порядок интегрального оператора $K\varphi = \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt$ равен 2, $K(x,t)$ удовлетворяет

дополнительному условию $C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x,x)}{x^{2q}}$, $C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(-1)K'_t(x,x)}{x^q}$

, $C_2 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K''_{tt}(x,x)}{x^0}$, причем C_0 имеет ограниченный обратный

C_0^{-1} , операторный пучок $B_\nu = -C_0\nu + C_1 - \frac{1}{\nu}C_2$ удовлетворяет

условию замечания 1, $f(x)$ принадлежит пространству $M_{q,\nu}^{1,0}$.

Тогда при некотором $\nu^* < \nu < 0$ существует такое $\delta > 0$, что в окрестности $0 \leq x \leq \delta$ уравнение (1) имеет k – параметрическое семейство решений $\varphi(x) = \mathcal{G}''(x)$, где

УДК 517.956.2

Сиражудинов М. М.^{1,2}, Амаева М. Л.¹

Sirazhudinov M.M., Amaeva M.L.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала

E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Оценки погрешности усреднения задачи Римана-Гильберта для системы уравнений Бельтрами

Error estimates for homogenization the Riemann-Hilbert problem for a system of n Beltrami equations

Аннотация: Получены оценки погрешности усреднения задачи Римана-Гильберта для системы n уравнений Бельтрами при минимальных требованиях на коэффициенты - они измеримые ограниченные периодические функции.

Estimates of the error of homogenization the Riemann-Hilbert problem for a system of n Beltrami equations are obtained with minimal requirements for coefficients - they are measurable bounded periodic functions.

Ключевые слова: усреднение, G -сходимость, уравнение Бельтрами

Keywords: homogenization, G -convergence, Beltrami equation

Рассмотрим следующую задачу Римана-Гильберта для системы n уравнений Бельтрами:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q) = \left\{ u \in W_2^1(Q) \mid \operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \int_Q \operatorname{Im} u dx = 0 \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, коэффициент $\mu^\varepsilon =$

$$\mu(\varepsilon^{-1}x), \mu(x) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(x) & \cdots & \mu_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(x) & \cdots & \mu_{nn}(x) \end{pmatrix} - \text{ограниченная}$$

измеримая периодическая квадратная матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности:

$$\forall \alpha \sup_{x \in Q} (\|\mu(x)\|) \leq k_0 < 1, \quad k_0 - \text{постоянная}$$

(константа эллиптичности); $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\|\mu(x)\| -$

норма матрицы $\mu(x)$, которая рассматривается как оператор умножения в \mathbb{C}^n .

ТЕОРЕМА 1. *Задача Римана-Гильберта (1) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(Q; \mathbb{C})$ и любого $\varepsilon > 0$, причем имеют место априорные оценки:*

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q A_\varepsilon u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx, \quad u \in W_0(Q),$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \|A_\varepsilon u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad u \in W_0(Q),$$

где $A_\varepsilon u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u}$ – скалярное произведение.

Теорема доказывается аналогично случаю одного уравнения Бельтрами (см. [1], [2]).

Скажем, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если для любой правой части f семейство решений u_ε задачи (1) сходится в L_2 при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению аналогичной задачи с постоянной матрицей коэффициентов.

В вопросах, связанных с усреднением, важную роль играет ядро оператора \mathcal{A}^* , сопряженного оператору следующей периодической задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &\equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u = f \in L_2(\square; \mathbb{C}), \\ u &\in W_2^1(\square; \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2)$$

Имеет место (см. [3])

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения:*

- *Для периодической задачи (2) имеет место «неравенство острого угла»*

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{z}} u|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} \rangle, \quad u \in W_2^1(\square; \mathbb{C}).$$

- *Периодическая задача (2) является фредгольмовой.*

- *Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*: L_2(\square; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^{-1}(\square; \mathbb{C})$ определяется следующей формулой*

$$-\mathcal{A}^* \mathcal{L} = \partial_z \mathcal{L} + \partial_{\bar{z}} (\mu^* \mathcal{L}), \quad \mathcal{L} \in L_2(\square; \mathbb{C}), \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix},$$

где производные понимаются в смысле распределений, μ^* – сопряженная μ матрица, то есть матрица полученная из μ транспонированием и переходом к комплексносопряженным элементам.

• Ядра $\text{Ker } \mathcal{A}^*, \text{Ker } \mathcal{A} = \mathbb{C}^n$ – n -мерные подпространства соответствующих пространств, причем один из базисов

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} p_{n1} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

ядра $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ обладает следующим свойством: пусть

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица со столбцами $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$, тогда ее среднее значение есть единичная матрица $\langle \mathcal{P} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

ТЕОРЕМА 3 (ОБ УСРЕДНЕНИИ). Для семейства операторов (1):

$A_\varepsilon = \partial_{\bar{z}} + \mu^\varepsilon \partial_z$, имеет место усреднение, причем коэффициент усредненного оператора

$$A_0 = \partial_{\bar{z}} + \mu^0 \partial_z$$

есть постоянная матрица, определенная следующим равенством:

$$\begin{aligned} \mu^0 &= \langle \bar{\mathcal{P}} \mu \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \overline{p_{11}} & \cdots & \overline{p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{p_{n1}} & \cdots & \overline{p_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Нам потребуются периодические решения следующей задачи на ячейке:

$$\begin{cases} \mathcal{A}N \equiv \partial_{\bar{z}}N + \mu \partial_z N = 2^{-1}(\mu^0 - \mu(x)), \\ N \in W_2^1(\square). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь μ^0 – есть матрица коэффициентов усредненной системы (3).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4 (О задаче на ячейке). Периодическая задача (4) разрешима и решения ее представляются в виде $N + c$, где c – есть произвольная квадратная матрица порядка n , с постоянными элементами из \mathbb{C} , а N – квадратная матрица порядка n , среднее значение которой равно нулю.

В качестве первого приближения к решению задачи (1) возьмем вектор-функцию

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon N(y) \partial_z u^0(x),$$

где $N(y)$ – периодическое решение задачи на ячейке (см. теорему 4), $y = \varepsilon^{-1}x$, u^0 – решение задачи Римана-Гильберта для усреднённой системы $A_0 u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q)$.

Сформулируем основное утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть правая часть f системы уравнений Бельтрами (1) принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, Q – односвязная область с гладкой (класса C^2) границей, тогда

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})},$$

имеют место оценки

$$\|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})},$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и области Q .

Литература

1. М. М. Сиражудинов, «О G -сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами», Матем. сб., 199:5 (2008), 124-155.

2. М. М. Сиражудинов, «О краевой задаче Римана-Гильберта», Дифф. уравн., 24:1 (1988), 64-73.

3. М. М. Сиражудинов, «О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка», Матем. заметки, 48:5 (1990), 153-155.

УДК 517.956.2

Сиражудинов М.М., Ибрагимова С.Х.

Sirazhudinov M.M., Ibragimova S.H.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала

E-mail: sirazhmagomed@yandex.ru

Оценки усреднения одной задачи Пуанкаре для обобщенного уравнения типа Бельтрами

Estimates for homogenization error of a Poincare problem for a generalized Beltrami-type equation

Аннотация: Получены оценки усреднения задачи Пуанкаре для обобщенного уравнения типа Бельтрами при минимальных требованиях на коэффициенты - они измеримые ограниченные периодические функции.

Estimates of the error of homogenization the Poincare problem for a Beltrami-type equation are obtained with minimal requirements for coefficients - they are measurable bounded periodic functions.

Ключевые слова: усреднение, G-сходимость, уравнение Бельтрами

Keywords: G-convergence, homogenization, Beltrami equation

Рассмотрим следующую задачу Пуанкаре для обобщенного уравнения типа Бельтрами:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} \Delta u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z \Delta u_\varepsilon = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q) = \{u \in W_2^3(Q; \mathbb{C}) \mid u|_{\partial Q} = 0, \\ \operatorname{Re} \Delta u|_{\partial Q} = 0, \int_Q \operatorname{Im} \Delta u dx = 0 \}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, коэффициент $\mu^\varepsilon(x) = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$ – ограниченная измеримая периодическая функция, удовлетворяющая условию эллиптичности: $\operatorname{vrai} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} (|\mu(x)|) \leq k_0 < 1$, k_0 – постоянная (константа эллиптичности), Q – ограниченная односвязная область плоскости. (Мы здесь и ниже придерживаемся обозначений из работ [1], [2].)

ТЕОРЕМА 1. Задача Пуанкаре (1) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(Q; \mathbb{C})$ и любого $\varepsilon > 0$, причем имеют место априорные оценки:

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} \Delta u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q A_\varepsilon u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} \Delta u} dx, \quad u \in W_0(Q),$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} \Delta u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \|A_\varepsilon u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, \quad u \in W_0(Q).$$

Скажем, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}$ можно усреднить, если для любой правой части f семейство решений u_ε задачи (1) сходится в $W_2^2(Q; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению аналогичной задачи для уравнения с постоянными коэффициентами.

В вопросах, связанных с усреднением, важную роль играет ядро оператора \mathcal{A}^* , сопряженного оператору следующей периодической задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &\equiv \partial_{\bar{z}} \Delta u + \mu \partial_z \Delta u = f \in L_2(\square; \mathbb{C}), \\ u &\in W_2^3(\square; \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (2)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Справедливы следующие утверждения:

- Для периодической задачи (2) имеет место «неравенство острого угла»

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{z}} \Delta u|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} \Delta u} \rangle, \quad u \in W_2^3(\square; \mathbb{C}).$$

- Периодическая задача (2) является фредгольмовой.

- Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*: L_2(\square; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^{-3}(\square; \mathbb{C})$ определяется следующей формулой

$$-\mathcal{A}^* \mathcal{L} = \partial_z \Delta \mathcal{L} + \partial_{\bar{z}} \Delta (\bar{\mu} \mathcal{L}), \quad \mathcal{L} \in L_2(\square; \mathbb{C}),$$

где производные понимаются в смысле распределений.

- Ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$, $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \mathbb{C}$ – двумерные подпространства (над полем действительных чисел) соответствующих пространств, причем один из базисов p_1, p_2 ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ обладает следующими свойствами: $p_2 = ip_1$, $\langle p_1 \rangle = 1$.

ТЕОРЕМА 3 (ОБ УСРЕДНЕНИИ). Для семейства операторов (1): $A_\varepsilon = \partial_{\bar{z}} \Delta + \mu^\varepsilon \partial_z \Delta$, имеет место усреднение, причем усреднённый оператор определяется формулами

$$A_0 = \partial_{\bar{z}} \Delta + \mu^0 \partial_z \Delta, \quad \mu^0 = \langle \mu \bar{p}_1 \rangle (3)$$

Нам потребуются периодические решения следующей задачи на ячейке:

$$\begin{cases} \mathcal{A}N \equiv \partial_{\bar{z}}N + \mu\partial_zN = 2^{-1}(\mu^0 - \mu(x)), \\ N \in W_2^1(\square). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь μ^0 – есть коэффициент усредненного оператора (3).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4 (О задаче на ячейке). *Периодическая задача (4) разрешима и решения ее представляются в виде $N + c$, где c – есть произвольная постоянная из \mathbb{C} , а N – решение, среднее значение которого равно нулю.*

В качестве первого приближения к решению задачи (1) возьмем вектор-функцию

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon N(y)\partial_z\Delta u^0(x),$$

где $N(y)$ – периодическое решение задачи на ячейке из теоремы 4, $y = \varepsilon^{-1}x$, u^0 – решение задачи Пуанкаре для усреднённой задачи $A_0u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q)$.

Сформулируем основное утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть правая часть f уравнения (1) принадлежит пространству $W_2^4(Q; \mathbb{C})$, Q – односвязная область с гладкой (класса C^4) границей, тогда имеют место оценки*

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^3(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^3(Q; \mathbb{C})},$$

$$\|u_\varepsilon - u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^3(Q; \mathbb{C})},$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и области Q .

Литература

1. М. М. Сиражудинов, «О G-сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами», Матем. сб., 199:5 (2008), 124-155.

2. М. М. Сиражудинов, «О краевой задаче Римана-Гильберта», Дифф. уравн., 24:1 (1988), 64-73.

УДК 517.5

Хаиров А.Р.

Khairov A.R.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: asiyt@yandex.ru

Параметрические преобразования и ортогональные многочлены

Parametric transformations and orthogonal polynomials

Аннотация. По функции, заданной степенным рядом, определяются параметрические преобразования, которые преобразуются в ряды по ортогональным многочленам для данной функции. Приведены примеры разложений, показывающие эффективность метода.

Parametric transformations are defined for a function defined by a power series, which are converted to series by orthogonal polynomials for this function. Reduced examples of decompositions showing the effectiveness of the method are given.

Ключевые слова: параметрический, ортогональный, многочлен, весовая функция, преобразование.

Keywords: parametric, orthogonal, polynomial, weight function, representation

1. По данной функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (1)$$

определяют преобразования

$$f((a).x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a)_n x^n, \quad (2)$$

$$f\left(\frac{x}{(a)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{(a)_n}, \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1) \quad (3)$$

Если $f(x)$ такова, что существует (2) и (3), то имеют место правила дифференцирования [1]:

$$\frac{d}{dx} f((a).x) = a f'((a+1).x),$$

$$\frac{d}{dx} f\left(\frac{x}{(a)}\right) = \frac{1}{a} f'\left(\frac{x}{(a+1)}\right)$$

Если $f(x) = (1-x)^n$ и $a = \alpha + 1, \alpha > -1$, то многочлен [2]

$$l_n(x, \alpha) = \left(1 - \frac{x}{(\alpha + 1)}\right)^n$$

числовым множителем отличается от стандартизованного многочлена Чебышева-Лагерра, ортогонального на $(0, \infty)$ по весу $e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$

Если $f(ax)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $x - 1$, то в [2] мы получили формулу разложения

$$f(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{(n)}((\alpha + 1 + n)a) a^n L_n(x; \alpha), (4)$$

где

$$L_n(x; \alpha) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \left(1 - \frac{x}{(\alpha + 1)}\right)^n$$

2. Если преобразование (3) применить к многочлену

$$\left(1 - \frac{\xi}{(a)_n}\right)^n,$$

при $\xi = x^2$, $a = \alpha + \frac{1}{2}$ и $a = \alpha + \frac{3}{2}$, то получим четные и нечетные многочлены

$$\left(1 - \frac{x^2}{(\alpha + \frac{1}{2})}\right)^n x \left(1 - \frac{x^2}{(\alpha + \frac{1}{2})}\right)^n \quad (5)$$

ортогональные на $(-\infty, \infty)$ по весу $e^{-x^2} |x|^{2\alpha}$

Сонин [3] для многочленов, указанного веса и промежутка, получил выражения через многочлены Чебышева-Лагерра. Такая форма представления мало пригодна для приложений. Поэтому мы приняли для многочленов (5) такую стандартизацию [3], которая при $\alpha = 0$ дает многочлен Чебышева-Эрмита

$$H_{2n}(x; \alpha) = (-1)^n 2^{2n} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)_n \left(1 - \frac{x^2}{(\alpha + \frac{1}{2})}\right)^n, \quad (6)$$

$$H_{2n+1}(x; \alpha) = (-1)^n 2^{2n+1} \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)_n \left(1 - \frac{x^2}{(\alpha + \frac{3}{2})}\right)^n \quad (7)$$

Поскольку для четных и нечетных многочленов формы представления (5) различные, то функция $f(x)$ при прежних предположениях следует представить в виде

$$f(ax) = \varphi(a^2 x^2) + ax \psi(a^2 x^2)$$

и использовать выражения (5).

Пользуясь методом получения (4), находим

$$\varphi(a^2 x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{n!} \varphi^{(n)} \left(\left(\alpha + \frac{1}{2} + n \right) a^2 \right) \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)_n \left(1 - \frac{x^2}{\left(\alpha + \frac{1}{2} \right)} \right)^n, \quad (8)$$

$$ax\psi(a^2 x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{n!} \psi^{(n)} \left(\left(\alpha + \frac{3}{2} + n \right) a^2 \right) \left(\alpha + \frac{3}{2} \right)_n x \left(1 - \frac{x^2}{\left(\alpha + \frac{3}{2} \right)} \right)^n \quad (9)$$

С помощью формул (6) и (7) разложения (8) и (9) приводятся к виду

$$\varphi(a^2 x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n! 2^{2n}} \varphi^{(n)} \left(\left(\alpha + \frac{1}{2} + n \right) a^2 \right) H_{2n}(x; \alpha) \quad (10)$$

$$ax\psi(a^2 x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{n! 2^{2n+1}} \psi^{(n)} \left(\left(\alpha + \frac{3}{2} + n \right) a^2 \right) H_{2n+1}(x; \alpha) \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) могут быть использованы для получения разложений соответственно четных и нечетных функций.

Если в (10) и (11) полагать $\alpha = 0$, то получим разложения по многочленам Чебышева-Лагерра:

$$\varphi(a^2 x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n! 2^{2n}} \varphi^{(n)} \left(\left(\frac{1}{2} + n \right) a^2 \right) H_{2n}(x) \quad (12)$$

$$ax\psi(a^2 x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{n! 2^{2n+1}} \psi^{(n)} \left(\left(\frac{3}{2} + n \right) a^2 \right) H_{2n+1}(x) \quad (13)$$

3.

В случае, когда

$\varphi(t) = e^{-t}$, находим

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)} \left(\left(\frac{1}{2} + n \right) a^2 \right) &= (-1)^n e^{-\left(\frac{1}{2} + n \right) a^2} \\ &= (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + n \right)_k}{k!} a^{2k} = \\ &= (-1)^n (1 + a^2)^{-n - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

и воспользуемся формулой (12). В результате получим разложение

$$e^{-a^2x^2} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{n! 2^{2n}} (1 + a^2)^{-n-\frac{1}{2}} H_{2n}(x)$$

При получении этого разложения в [5] использованы формулы для коэффициентов Фурье по многочленам Чебышева-Эрмита, интегральное представление многочлена $H_{2n}(x)$, теорема о перемене порядка интегрирования в несобственных интегралах и формула удвоения для гамма-функции.

Литература

1. Хаиров А.Р. О различных формах представления многочленов Лежандра // Вестник ДГУ. Серия 1. Ест. Науки. 2018. Т. 33. Вып.3, с. 80-94.
2. Хаиров А.Р. Каноническая форма многочленов Чебышева-Лагерра и теорема разложения // Фундаментальные и прикладные проблемы математики. Материалы XIII Международной конференции (16-20 сентября 2019) – Махачкала: Изд. ДГУ, 2019. С.166-170.
3. Сонин Н.Я. Исследования о цилиндрических функциях и социальных полиномах. – М.: Гостехиздат, 1954.
4. Хаиров А.Р. Аналог формулы Родрига и дифференциальные уравнения для одной ортогональной системы многочленов // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения (материалы II Международной конференции, 25-29 сентября 2005)
5. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2007.

УДК 519.6

Хайиткулов Б.Х.

Khayitkulov B.Kh.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент

National University of Uzbekistan, Tashkent

E- mail: b.hayitqulov@mail.ru

Задача оптимального размещения источников тепла на стержне при заданных условиях на его концах

The problem of optimal placement of heat sources on the rod under given conditions at its ends

Аннотация. Предлагается метод и алгоритм решения задачи управления мощностью тепла на границах стержня таким образом, чтобы температура находилась в заданных пределах. Создан программное приложение для проведения вычисленных экспериментов с помощью этого алгоритма.

Abstract. We propose a method and algorithm for solving the problem of controlling the heat power at the boundaries of the rod so that the temperature is within the specified limits. A software application was created for performing numerical experiments using this algorithm.

Ключевые слова: плотность источников тепла, функция Грина, конечномерная аппроксимация.

Keywords: density of heat sources, Green's function, finite-dimensional approximation.

Введение. Рассматривается задача распределения источников тепла на стержне. Источники тепла обеспечивают заданный температурный режим при их минимальной суммарной мощности. Такая задача возникает при оптимальной организации обогрева жилых и производственных помещений, при поддержании заданного температурного режима в однородных и неоднородных твёрдых телах и т.д.[1]. Численное решение задачи связано с рядом проблем, из-за которых она в полном объёме практически не рассматривалась. Целевой функционал для оптимизации решения является линейным. В силу отсутствия у него свойства коэрцитивности не всегда можно определить существование точного решения.

Предлагается метод и алгоритм решения задачи управления мощностью тепла на границах стержня таким образом, чтобы температура находилась в заданных пределах. Создан программное приложение для проведения вычисленных экспериментов с помощью этого алгоритма.

Постановки задачи и алгоритм её решения. Распространение тепла в стержне описывается уравнением вида:

$$\chi \frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \left(\chi \frac{du}{dx} - \alpha_1 u \right) \Big|_{x=a} = \mu_1; \\ \left(\chi \frac{du}{dx} + \alpha_2 u \right) \Big|_{x=b} = \mu_2, \end{cases} \quad (2)$$

$$m(x) \leq u(x) + T_0 \leq M(x), \quad x \in D, \quad (3)$$

здесь область $D = \{x: a < x < b\}$, χ - коэффициент теплопроводности окружающей среды, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ - коэффициенты теплопередачи соответственно через левую и правую границы, $\mu_1, \mu_2 > 0$ - коэффициенты теплообмена соответственно через левую и правую границы, $u(x) = T(x) - T_0$ разность между температурой внутри области D и температурой окружающей среды T_0 , $m(x), M(x)$ - функции минимального и максимального профиля температур в области D . Плотность источников тепла $f(x)$ описывается квадратично интегрируемой функций в пространстве $L_2(D)$. Решение данной краевой задачи получено в аналитическом виде с использованием функции Грина[2].

Для поиска численного решения задачи (1)-(3) определим минимум функционала $J\{f\} = \int_D f(x) dx$ при следующих ограничения на плотность источников тепла

$$f(\cdot) \in L_2(D); \quad m(x) - T_0 \leq -\frac{1}{\chi} (Gf)(x) \leq M(x) - T_0, \quad (4)$$

где G – функция Грина. Построим конечномерную аппроксимацию (1)-(4) в виде задачи линейного программирования. Разобьём область D на n равных частей $D = \bigcup_{j=1}^n D_j$. Обозначим через $S_j(D) \subset L_2(D)$ объединим подпространство в которых определен кусочно-постоянны с функции вида $f(x) = f_j, x \in D_j (j=1,2,\dots,n)$. Введём в $S_n(D)$ базис, состоящий из функций $e_j(x) = 1, x \in D_j$ и $e_j(x) = 0, x \notin D_j$. Тогда

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^n f_j e_j(x). \quad \text{Обозначения}$$

$g_{ij} = (Ge_j, e_i), (m(x) - T_0, e_i(x)) = a_i, (M(x) - T_0, e_i(x)) = b_i,$ где (\cdot, \cdot) скалярное произведение в $L_2(D)$. Подставим выражение для $f(x)$ в (1) и используя скалярное неравенства (4) на $e_j(x)$ в $L_2(D)$ получим задачу линейного программирования [3]

$$J_n\{f\} = \sum_{j=1}^n (mes D_j) f_j \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$a_i \leq \sum_{j=1}^n g_{ij} f_j \leq b_i, f_i \geq 0 (i=1,2,\dots,n).$$

Ядро интегрального оператора G является функцией Грина для краевой задачи (1)-(2). Построение матрицы g_{ij} в одномерном случае не вызывает затруднений, т.к. функция Грина может быть получена в явном виде, и поэтому элементы g_{ij} можно вычислять аналитически. В двумерном и трёхмерном случаях элементы g_{ij} находятся только численно с использованием конечно-разностных схем на отрезке.

Литература

1. Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н. Управление нагревом металла // М.: Металлургия, 1972. 439 с.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. - 4-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва. Наука, М., 1977. 656 с.

УДК 519.85

Хвостов А.А., Иванов А.В., Журавлев А.А.

Khvostov A.A., Ivanov A.V., Zhuravlev A.A.

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж

E-mail: Khvtol1974@yandex.ru

Синтез математической модели основного теплообменника воздуходелительной установки

Synthesis of the mathematical model of the main air separation unit heat exchanger

Аннотация. На основе тепловых балансовых соотношений синтезирована математическая модель основного теплообменника воздуходелительной установки в виде системы скалярных и матричных однородных дифференциальных уравнений, дополненных начальными и граничными условиями.

On the basis of thermal balance relations, a mathematical model of the main heat exchanger of an air separation unit is synthesized in the form of a system of scalar and matrix homogeneous differential equations supplemented by initial and boundary conditions.

Ключевые слова: воздуходелительная установка, теплообменник, математическая модель, теплопередача.

Annotation. On the basis of thermal balance relations, a mathematical model of the main heat exchanger of an air separation unit is synthesized in the form of a system of scalar and matrix homogeneous differential equations supplemented by initial and boundary conditions.

Keywords: air separation unit, heat exchanger, mathematical model, heat transfer.

Одним из основных аппаратов мобильных воздуходелительных установок (ВРУ) является основной теплообменник (ОТ), представляющий собой кожухотрубчатый теплообменник и обеспечивающий передачу теплоты отбросного потока (ОП) к воздуху высокого давления (ВВД). Поскольку ОТ включен в контур сложного технологического процесса, то колебания его

режимных параметров крайне нежелательны, так как могут привести к резкому снижению выхода целевого продукта.

Целью работы является синтез динамической математической модели ОТ, позволяющей оценить динамические режимы его работы и выбрать оптимальные условия для его эксплуатации.

В основу математической модели положены балансовые соотношения для тепловых потоков от ОП к стенке змеевика, теплопередачи через стенку, затем от стенки к ВВД. Межтрубное пространство для ОП рассматривается как реактор идеального смешения (РИС), трубное пространство для ВВД – как реактор идеального вытеснения (РИВ) [1]. При таком подходе динамическая модель ОТ имеет вид системы дифференциальных уравнений, дополненных соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{on}\rho_{on}c_{on} \frac{dT_{on}(t)}{dt} = \nu_{on}\rho_{on}c_{on} [T_{on}^{ex} - T_{on}(t)] + F_{on}K_{Ton} [T_{cm}(t) - T_{on}(t)]; \\ S_{\epsilon}\rho_{\epsilon}c_{\epsilon} \frac{\partial T_{\epsilon}(x,t)}{\partial t} = -\nu_{\epsilon}\rho_{\epsilon}c_{\epsilon} \frac{\partial T_{\epsilon}(x,t)}{\partial x} + \frac{F_{\epsilon}K_{T\epsilon}}{L_{\epsilon}} [T_{cm}(t) - T_{\epsilon}(t)]; \\ m_{cm}c_{cm} \frac{dT_{cm}(t)}{dt} = F_{on}K_{Ton} [T_{on}(t) - T_{cm}(t)] - F_{\epsilon}K_{T\epsilon} \left[T_{cm}(t) - \frac{1}{L_{\epsilon}} \int_0^{L_{\epsilon}} T_{\epsilon}(x,t) dx \right]; \\ T_{on}(0) = T_{0on}, T_{\epsilon}(x,0) = T_{\epsilon 0}(x), T_{\epsilon}(0,t) = T_{x0\epsilon}(t), T_{cm}(0) = T_{cm0}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $T_{on}(t)$, $T_{cm}(t)$ – температура ОП и продукта центра стенки в момент времени t , °С; V_{on} , V_{ϵ} – объем зоны РИС и РИВ, м³; F_{on} , F_{ϵ} – площадь поверхности теплообмена между ОП и стенкой змеевика и стенкой и ВВД, м²; K_{Ton} , $K_{T\epsilon}$ – коэффициент теплопередачи от ОП к центру стенки и от ВВД к центру стенки, Вт/(м²·К); L_{ϵ} – длина зоны РИВ, м; S_{ϵ} – площадь поперечного сечения РИВ, м²; T_{on}^{ex} , $T_{x0\epsilon}(t)$ – температура ОП на входе в зону РИС и температура ВВД на входе в зону РИВ, °С; $T_{\epsilon}(x,t)$ – функция распределения температуры теплоносителя по пространственной координате и времени, °С; ρ_{on} , ρ_{ϵ} – плотность ОП и ВВД, кг/м³; c_{on} , c_{ϵ} , c_{cm} – удельная теплоемкость ОП, ВВД и стенки, Дж/(кг·К); ν_{on} , ν_{ϵ} – объемный расход ОП и ВВД, м³/с; m_{cm} – масса стенки, кг.

Для реализации модели (1) в системы компьютерного моделирования MathWorks Simulink™, представим расчетные соотношения в виде системы скалярных и матричных однородных дифференциальных уравнений [2]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}_\varepsilon(t)}{dt} &= -\frac{\nu_\varepsilon}{\Delta x S_\varepsilon} [\mathbf{A}\mathbf{T}(t) + \mathbf{C}(t)] + \frac{F_\varepsilon K_{T_\varepsilon}}{V_\varepsilon \rho_\varepsilon c_\varepsilon} [T_{cm}(t) - \mathbf{T}_\varepsilon(t)]; \\ \frac{dT_{on}(t)}{dt} &= \frac{\nu_{on}}{V_{on}} [T_{on}^{ex} - T_{on}(t)] + \frac{F_{on} K_{T_{on}}}{V_{on} \rho_{on} c_{on}} [T_{cm}(t) - T_{on}(t)]; \\ \frac{dT_{cm}(t)}{dt} &= \frac{F_\varepsilon K_{T_\varepsilon}}{m_{cm} c_{cm}} \left[\frac{1}{L_\varepsilon} \sum_{i=1}^N T_{\varepsilon i}(t) \Delta x - T_{cm}(t) \right] - \frac{F_{on} K_{T_{on}}}{m_{cm} c_{cm}} [T_{cm}(t) - T_{on}(t)]; \\ \mathbf{T}_\varepsilon(0) &= \mathbf{T}_{\varepsilon 0}, T_{on}(0) = T_{on0}, T_{cm}(0) = T_{cm0}. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где N – число элементов дискретизации по длине зоны РИВ; i – порядковый номер текущего элемента зоны РИВ; $\mathbf{T}_\varepsilon(t)$, $\mathbf{T}_{\varepsilon 0}$ – соответственно, вектор текущей температуры и начальных условий в точках разбиения по пространственной координате; \mathbf{A} – матрица разложения первой производной; $\mathbf{C}(t)$ – вектор, задающий граничное условие.

Разработанная математическая модель позволяет получать оценки температур ОП и ВВД на выходе из ОТ в режиме реального времени, что дает возможность исследовать динамику процесса, определить его статические и динамические характеристики, а также синтезировать систему автоматического управления.

Литература

1. Математическое моделирование процессов и аппаратов химических, пищевых и биотехнологических производств : учебное пособие / Д.С. Дворецкий, С.И. Дворецкий, Е.В. Пешкова, М.С. Темнов. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014. – 80 с.

2. Khvostov A.A. Matrixdynamicmodelsofelementsoftechnologicalsystemswithperfectmixingandplug-flowhydrodynamicsinSimulink / A. Khvostov, V. Ryazhskikh, M. Magomedov, A. Zhuravlev // *FoodsandRawMaterials*, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 483–492. DOI: <http://doi.org/10.21603/2308-4057-2018-2-483-492>.

УДК 517.95

Хубиев К.У.

Khubiev K.U.

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН (ИПМА КБНЦ РАН), Нальчик

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of the RAS (IAMA KBSC RAS), Nalchik

E-mail: khubiev_math@mail.ru

О краевых задачах со смещением для гиперболо-параболического уравнения с нагруженным слагаемым на характеристике

On boundary value problems with shift for a hyperbolic-parabolic equation with loaded summand on the characteristic

Аннотация. Для уравнения гиперболо-параболического типа с нагруженным слагаемым на характеристике исследованы задачи со смещением.

Abstract. In this paper we investigated problems with shift for equation of mixed hyperbolic-parabolic type with loaded summand on the characteristic.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, задача со смещением, нелокальная задача.

Keywords: loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation, problem with shift, nonlocal problem.

Рассмотрим нагруженное [1] модельное уравнение смешанного гиперболо-параболического типа второго порядка

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x, 0) = f_1(x, y), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u\left(\frac{x+y+r}{2}, \frac{x+y-r}{2}\right) = f_2(x, y), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками прямых $x=0$, $x=r$, $y=T>0$ при $y>0$, характеристиками $x+y=0$, $x-y=r$ уравнения (1) при $y<0$; $u=u(x, y)$; $\lambda_1, \lambda_2 = const$, $f_1(x, y), f_2(x, y)$ - заданные функции.

Отличительной особенностью уравнения (1) является то, что нагруженное слагаемое в гиперболической части области попадает на характеристику, а не на линию изменения типа.

Обозначим через $\theta_0(x), \theta_r(x)$ абсциссы точек пересечения характеристик, исходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками $x + y = 0$, $x - y = r$ соответственно [2], [3].

Для уравнения (1) исследованы следующие задачи со смещением [2]:

Задача N₁. Найти в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cap \{y < 0\}) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega \cap \{y > 0\})$, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(r, y) = \varphi_r(y), \quad 0 \leq y \leq T, \\ \alpha u[\theta_0(x)] + \beta u[\theta_r(x)] = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq r, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_0(y), \varphi_r(y), \psi_1(x)$ - заданные функции, $\alpha, \beta = \text{const}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Задача N₂. Найти в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cap \{y < 0\}) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega \cap \{y > 0\})$, удовлетворяющее условиям (2) и условию:

$$\alpha \frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] + \beta \frac{d}{dx} u[\theta_r(x)] = \psi_2(x), \quad 0 < x < r,$$

где $\varphi_0(y), \varphi_r(y), \psi_2(x)$ - заданные функции, $\alpha, \beta = \text{const}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Понятие краевых задач со смещением было введено в работе [3], там же исследован ряд нелокальных краевых задач с разными смещениями для гиперболических и смешанного типа уравнений. Частными случаями задач со смещением являются такие задачи, как Карлемана, Стеклова, Франкля, Бицадзе-Самарского и многие др. [2]. В настоящее время теория нелокальных краевых задач, в том числе и задач со смещением, продолжает активно развиваться. Обширная библиография научных работ, посвященных исследованиям краевых задач со смещениями приведены в монографии [2]. Среди работ, близких по тематике к задачам N₁, N₂, отметим работы [4]-[13].

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
3. Нахушев А.М. О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44-59.

4. Елеев В. А. О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа// Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 22-29.

5. Нахушев А.М. О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями// Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 92-101.

6. Хубиев К.У. Аналог задачи Трикоми и задача со смещением для модельного нагруженного уравнения гипербола-параболического типа// Доклады АМАН. 2008. Т. 10, № 2. С. 67-71.

7. Хубиев К.У. Задача со смещением для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа// Доклады АМАН. 2009. Т. 11, № 1. С. 89-92.

8. Аттаев А.Х. Краевые задачи с внутреннекраевым смещением для уравнения колебания струны// Доклады АМАН. 2014. Т. 16, № 2. С. 17-19.

9. Хубиев К.У. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного гипербола-параболического типа// Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 3. С. 12-18.

10. Хубиев К.У. Внутреннекраевая задача для уравнения гипербола- параболического типа с оператором дробной диффузии// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2017. № 27(276). С. 52-56.

11. Балкизов Ж.А. Краевая задача со смещением для модельного уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 19-26.

12. Хубиев К.У. Задачи со смещением для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа с оператором дробной диффузии// Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 82-90.

13. Балкизов Ж.А. Об одной краевой задаче типа задачи Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка с тремя смещениями в гиперболической части области// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2019. Т. 51, № 1. С. 5-14.

УДК 517.9

Чернова О.В.

Chernova O.V.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет, Белгород

Belgorod State University, Belgorod

E-mail: chernova_olga@bsu.edu.ru

Оценки интегралов типа потенциалов в весовых пространствах

Estimates of Potential Type Integrals in Weighted Spaces

Аннотация: Приведены оценки интегралов типа потенциала с разностным ядром в весовых лебеговых и соболевских пространствах. Рассмотрены также сингулярные интегралы, полученные их дифференцированием, которые понимаются в смысле Кальдерона-Зигмунда.

The estimates of integrals of potential type in weighted Lebesgue and Sobolev spaces are given. The Calderon-Zygmund singular integrals which are received by their differentiation are also considered.

Ключевые слова: Разностные ядра, весовые L^p – пространства, сингулярные интегралы.

Keywords: Difference Kernels, Weighted L^p – spaces, Singular Integrals.

Введем в рассмотрение интеграл

$$\psi(x) = \int_{R^2} k(x, y; y - x) \varphi(y) dy_1 dy_2, (1)$$

где ядро $k(x, y; \xi)$ однородно степени -1 по переменной $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Предполагая, что функция φ равна нулю вне единичного круга, применение обычного неравенства Гельдера [2] $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\mu, 0 < \mu < 1$ дает L^p -оценку интеграла (1).

Лемма 1. Пусть ядро $k(x, y; \xi)$ непрерывно и ограничено по переменным $x, y \in R^2, |\xi| = 1$. Пусть $\varphi \in L^p(R^2), p \geq 1$ и φ обращается

в нуль вне круга $B = \{|y| \leq 1\}$. Тогда определяемый (1) оператор $\varphi \rightarrow \psi$ компактен в $L^p(B)$ и для его нормы справедлива оценка

$$|\psi|_{L^p} \leq C |k|_0 |\varphi|_{L^p}, \quad |k|_0 = \sup_{x, y, |\xi|=1} |k(x, y; \xi)| \quad (2)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от p .

Прежде чем перейти к обсуждению дифференцируемости интеграла (1), заметим, что для однородной степени -1 функции $k(\xi)$ производные $K(\xi) = \frac{\partial k}{\partial \xi_i}$ удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi} K(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 0, \quad \text{которое является необходимым для}$$

существования аналогичного (1) сингулярного интеграла типа Кальдерона-Зигмунда [3] с ядром $K(\xi)$.

Через $W^{1,p}(R^2)$ обозначим соболевское пространство всех функций $\varphi \in L^p(R)$, обобщенные производные первого порядка которых принадлежат $L^p(R^2)$. Обобщенные производные здесь понимаются в смысле теории обобщенных функций. Аналогичным образом пространство $W^{n,p}(D)$ определяется для любой области $D \subseteq R^2$. Относительно соответствующей нормы это пространство банахово [1]. Следующую лемма показывает, что при дополнительных условиях гладкости на ядро $k(x, y; \xi)$, интеграл (1) принадлежит классу $W^{1,p}$ и для его обобщенных производных справедлива формула дифференцирования.

Лемма 2. Пусть ядро $k(x, y; \xi)$ принадлежит классу $C^{1,\nu}(R^2 \times R^2)$, $\mu < \nu$, $\varphi(y) \in L^p$, $p > 1$ и обращается в нуль вне единичного круга B . Тогда $\psi \in W^{1,p}(B)$ и справедлива формула

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) = -\sigma_i(x) \varphi(x) + \int_{R^2} \frac{\partial k}{\partial x_i}(x, y; y-x) dy_1 dy_2 - \int_{R^2} \frac{\partial k}{\partial \xi_i}(x, y; y-x) dy_1 dy_2, \quad i=1,2. \quad (3)$$

В частности, $|\psi|_{W^{1,p}} \leq C |k|_{C^{1,\nu}} |\varphi|_{L^p}$, с некоторым $\varepsilon > 0$, где постоянная $C > 0$ не зависит от k и φ .

Доказательство. Заметим, что второе утверждение леммы есть следствие известной теоремы Кальдерона-Зигмунда [2], примененной к сингулярному интегралу в (3) и первого утверждения данной леммы. Используя эту теорему,

лемму 1 и тот факт, что класс $C_0^\infty(R^2)$ плотен в $W^{n,p}(R^2)$ при любом n , доказательство первого утверждения сводится к обоснованию формулы (3) для функций $\varphi(y) \in C_0^\infty(R^2)$. В этом случае оно проводится обычным образом, «вырезая» сингулярную точку и интегрируя по частям.

Лемма 1 позволяет рассматривать интегралы (1) с плотностью $\varphi \in L_\lambda^p(R^2; F)$, где пространство $L_\lambda^p(R^2; F)$ определяется следующим образом.

Определение. С каждым семейством вещественных чисел $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ (весовым порядком), где F есть конечное множество сферы Римана $\overline{R^2} = R^2 \cup \infty$, содержащее точку $\tau = \infty$, свяжем весовую функцию $\rho_\lambda(x) = (1+|x|)^{\lambda_\infty} \prod_{\tau \neq \infty} \left(\frac{|x-\tau|}{1+|x|} \right)^{\lambda_\tau}$. Весовое пространство $L_\lambda^p(R^2; F)$ состоит из всех измеримых функций φ , для которых $\rho_{-\lambda}\varphi$ принадлежит L^p -пространству относительно меры $\rho_2(x)dx$, которое обозначается $L_0^p(R^2; F)$. Таким образом, пространство $L_\lambda^p(R^2; F)$ задается нормой

$$|\varphi|_{L^p} = \left(\int_{R^2} \rho_{-p\lambda-2}(y) |\varphi(y)|^p dy_1 dy_2 \right)^{1/p}.$$

Аналогичным образом введем и весовое соболевское пространство $W_\lambda^{1,p}(R^2; F)$, которое определим условиями $\varphi \in L_\lambda^p$, $\varphi' \in L_{\lambda-1}^p$.

Теорема. Пусть ядро $k(x, y; \xi)$ непрерывно и ограничено по переменным $x, y \in R^2$ и $|\xi| = 1$. Пусть $\varphi \in L_\lambda^p(R^2; F)$, $p \geq 1$, с весовым порядком λ , удовлетворяющим условию $-2 < \lambda_\tau < -1$, $\tau \neq \infty$. Тогда функция $\psi(x)$ из (1) принадлежит $L_{\lambda+\sigma}^p$ с соответствующей оценкой норм $|\varphi|_{L_{\lambda+1}^p} \leq C |k|_0 |\varphi|_{L_\lambda^p}$. Если дополнительно функции $k(x, y; \xi)$ и $\frac{\partial k}{\partial \xi_j}$, $j=1,2$, принадлежат классу $C^{1,\mu}(R^2)$ по каждой переменной x, y равномерно по $\xi \in R^2, |\xi|=1$, то оператор K ограничен $L_\lambda^p \rightarrow W_{\lambda+1}^{1,p}$.

Литература

1. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Задача Дирихле для функций, гармонических на двумерной сети / К.А. Ковалева, А. П. Солдатов // Материалы международной конференции «International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17», Санкт-Петербургский политехнический университет, 24–28 июля 2017 г., Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., – 2019. – Т. 160. – С. 42-48.
2. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I / А. П. Солдатов // СМФН. – 2017. – Т. 63, № 1. – С. 1-189.
3. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

УДК 530.145; 004.383.4

Шалагин С.В.

Shalagin S.V.

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н.Туполева – КАИ, Казань

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan

E-mail: sshalagin@mail.ru

Представление квантового преобразования Фурье на основе дискретной модели квантово-механической системы

Representation of the quantum Fourier transform based on a discrete model of a quantum-mechanical system

Аннотация. Предложено представление квантового преобразования Фурье (КвПФ) на основе дискретной модели (ДМ) квантово-механической системы, включающей $N = 2^n$ базисных состояний, которая включает в себя $2(N-1)$ независимых элементов. Представление основано на одноптипных операциях (вентиллях): Адамара и с контролируемой фазой. Показана возможность распределенного моделирования КвПФ путем варьирования только N элементов ДМ

A representation of the quantum Fourier transform (QFT) is proposed based on the discrete model (DM) of a quantum-mechanical system that includes $N = 2^n$ basic states, which includes $2(N-1)$ independent elements. The representation is based on the same type of operations (gates): Hadamard and with controlled phase. The possibility of distributed simulation of QFT by varying only N elements of DM is shown.

Ключевые слова: квантовое преобразование Фурье, дискретная модель, представление

Keyword: quantum Fourier transform, discrete model, representation

Введение

Исследования в области квантовой обработки информации являются актуальным и перспективным

научным направлением [1 –8]. Вместе с тем существуют физические барьеры, связанные с реализацией квантово-механических систем (КМС), включающих в себя множество базисных состояний [4, 7]. В данной связи представляют интерес задачи, связанные с математическим моделированием КМС [6, 9 – 12].

В [13] предложена дискретная модель (ДМ) КМС, включающая N базисных состояний, которую обозначим как $КМС(N)$. Состояние $КМС(N)$ представимо на основе $2(N-1)$ параметров, а изменение ее состояния – на основе операций умножения над элементами поля Галуа [14], выполняемых параллельно. В [15] показано, что ДМ $КМС(N)$ представима на основе системы однотипных нелинейных полиномиальных функций [16–20], реализуемых на распределенных вычислительных системах с программируемой архитектурой (РВС ПА) [21], элементами которых являются программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС) класса FPGA [22].

В работе предложено представление квантового преобразования Фурье (КвПФ) [23], которое основано на определении в рамках ДМ $КМС(N)$, где $N = 2^n$, квантового алгоритма, включающего в себя известные квантовые вентили: однокубитный вентиль Адамара и двухкубитный вентиль с контролируемой фазой. Указанное представление позволяет отобразить воздействие КвПФ на $КМС(N)$, состояние которой описано $2(N-1)$ элементами заданной ДМ путем распределенного варьирования элементов данной ДМ $КМС(N)$ при заданном значении $N = 2^n$.

Дискретная модель квантово-механической системы с N базисными состояниями

$КМС(N)$ общего вида описывается конечномерным гильбертовым (унитарным) пространством – H , $|H| = N < \infty$ [1, 2]. Состояние $КМС(N)$ с базисными состояниями $|j\rangle$, $j = \overline{0, N-1}$, описывается как вектор-столбец (кет-вектор) [2, 3]

$$|\psi\rangle = (r_0 e^{i\varphi_0} \quad \dots \quad r_{N-1} e^{i\varphi_{N-1}})^T, \quad (1)$$

где $\sum_{j=0}^{N-1} r_j^2 = 1$. Система с конечным числом базисных состояний (уровней, измерений N), представляют интерес с точки зрения квантовой обработки информации. Изменение состояния КМС, представленной в виде (1), описывается квантовым вентилем (КВ) - матрицей G размерности $N \times N$ [4].

ДМ КМС(N) описывается при использовании графовой модели – двоичного (бинарного) дерева T [13]. Число его вершин, являющихся листьями, равно числу базисных состояний КМС(N), а число его узлов ветвления – $(N-1)$, определяет количество параметров, описывающих амплитудные и фазовые составляющие данной модели – $2(N-1)$ [15]. Варьирование состояния ДМ КМС(N), описываемое системой (1), задано квантовым вентилем, унитарной матрицей размерности $N \times N$, вида $G = G_\varphi G_A$, где матрицы G_φ и G_A размерности $N \times N$ определяют варьирование фазовой и амплитудной составляющей ДМ КМС(N), соответственно. В [13, 15] сформулированы две теоремы.

Теорема 1. Квантово-механическая система, имеющая N базисных состояний и определенная согласно (1), представима в виде вектора, включающего $2(N-1)$ параметров

$$(\theta_0, \dots, \theta_{N-2}, t_0, \dots, t_{N-2}), \quad (2)$$

где $(\theta_0, \dots, \theta_{N-2})$ определяют амплитудные составляющие элементов вектора (1), а (t_0, \dots, t_{N-2}) – фазовые составляющие (1).

Теорема 2. Операция по варьированию состояния квантово-механической системы имеющей N базисных состояний и определенной на основе (1) представлена вектором, включающим $2(N-1)$ параметр

$$(\Delta\theta_0, \dots, \Delta\theta_{N-2}, \Delta t_0, \dots, \Delta t_{N-2}), \quad (3)$$

который однозначно определяет квантовый вентиль $G = G_\varphi G_A$, где G_φ и G_A – имеют размерность $N \times N$. G_φ задана

параметрами $(\Delta t_0, \dots, \Delta t_{N-2})$ и описывает варьирование фазовых составляющих, а G_A – параметрами $(\Delta \theta_0, \dots, \Delta \theta_{N-2})$, и описывает изменение амплитудных составляющих элементов вектора (1).

Пример. Для КМС(4), заданной согласно (2), $(\theta_0, \dots, \theta_2, t_0, \dots, t_2)$, элементы кет-вектора вида (1) представимы согласно [13] по формулам $r_0 = \cos(\theta_0)\cos(\theta_1)$, $r_1 = \cos(\theta_0)\sin(\theta_1)$, $r_2 = \sin(\theta_0)\cos(\theta_2)$, $r_3 = \sin(\theta_0)\sin(\theta_2)$, $\varphi_0 = \tilde{t}$, $\varphi_1 = \tilde{t} + t_1$, $\varphi_2 = \tilde{t} + t_0$, $\varphi_3 = \tilde{t} + t_0 + t_2$.

Моделирование квантовых вентилях на основе дискретной модели квантово-механической системы

КвПФ основано на двух однотипных операциях, описываемых оператором Адамара над одним кубитом (или двумя базисными состояниями КМС(N)) и вентиляем с контролируемой фазой (ВКФ) над двумя кубитами (или четырьмя базисными состояниями КМС(N)), $N = 2^n$. Рассмотрим представление указанных операций над ДМ КМС(N) вида (1).

Оператор Адамара, действующий на два базисных состояния КМС(N) – $|2j\rangle$ и $|2j+1\rangle$, представим в виде:

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0, N/2-1}.$$
 Рассмотрим параметры θ_{j+b} и $\Delta \theta_{j+b}$, $j = \overline{0, N/2-1}$, $b = N/2-1$, векторов вида (2) и (3), соответственно. Для представленной модели имеет место

Утверждение 1. Воздействие оператора Адамара A_j на базисные состояния КМС(N), $N = 2^n$, $|2j\rangle, |2j+1\rangle$ описывается элементом $\Delta \theta_{j+b}$ вектора (3), вычисленного на основе элемента θ_{j+b} вектора (2)

$$\Delta \theta_{j+b} = \pi/4 - \theta_{j+b} \quad (4)$$

где $j = \overline{0, N/2-1}$, $b = N/2-1$, и элементом Δt_{j+b} вектора (3) $\Delta t_{j+b} = \pi$.

ВКФ, который воздействует на четыре базисных состояния КМС(N)— $|2j\rangle$, $|2j+1\rangle$, $|2k\rangle$ и $|2k+1\rangle$, $(N/2-1) \geq k > j \geq 0$, представим в виде матрицы:

$$S_{j,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad D = \exp(i \cdot 2^{-(k-j)} \pi), \quad 0 \leq j < k \leq (N/2-1).$$

Рассмотрим элементы $t_{j+b}, t_{k+b}, \Delta t_{j+b}, \Delta t_{k+b}, j < k, j, k = \overline{0, N/2-1}$, $b = N/2-1$, векторов вида (2) и (3), соответственно.

Справедливо

Утверждение 2. Воздействие вентилем с контролируемой фазой $S_{j,k}$ на базисные состояния КМС(N), $N = 2^n$, $|2j\rangle$, $|2j+1\rangle$, $|2k\rangle$ и $|2k+1\rangle$ описывается элементом $\Delta t_{k+b} = 2^{-(k-j)} \pi$ вектора (3) на элемент t_{k+b} вектора (2), $b = N/2-1$, $k = \overline{j+1, N/2-1}$ при заданном $j = \overline{0, N/2-2}$.

Реализация КвПФ над КМС(N), $N = 2^n$, предполагает выполнение квантового алгоритма в виде определенной последовательности воздействий на ее заданные базисные состояния, описываемых квантовыми вентилями вида A_j и $S_{j,k}, k = \overline{j+1, N/2-1}, j = \overline{0, N/2-2}$. Данная последовательность имеет вид [22]: $A_{N/2-1}, S_{N/2-2, N/2-1}, A_{N/2-2}, S_{N/2-3, N/2-1}, S_{N/2-3, N/2-2}, \dots, A_1, S_{0, N/2-1}, \dots, S_{0,1}, A_0$. Т.е. вентили Адамара применяются в обратном порядке к парам базисных состояний КМС(N) с номерами от $N/2-1$ до 0. В промежутках между вентилями Адамара A_{j+1} и A_j применяются вентили $S_{j,k}$ для $k = \overline{j+1, N/2-1}$, при заданном $j = \overline{N/2-2, 0}$. Согласно утверждениям 1 и 2, указанные воздействия на КМС(N), $N = 2^n$, могут быть представлены в рамках предложенной ДМ [13, 15] и вычислены распределенно путем варьирования различных элементов вектора (2) согласно квантовыми вентилями, которые описываются соответствующими элементами вектора (3). Различные вентили Адамара оказывают воздействия $\Delta \theta_{j+b}$, описанные согласно (4), на

соответствующие элементы θ_{j+b} вектора (2), $j = \overline{0, N/2-1}$, $b = N/2-1$. Совокупность воздействий, описываемых вентилями Адамара на элементы t_{j+b} вектора (2), $j = \overline{0, N/2-1}$, $b = N/2-1$, и вентилями с контролируемой фазой $S_{j,k}$, $k = \overline{j+1, N/2-1}$, $j = \overline{0, N/2-2}$, в рамках КвПФ представлены как воздействия вида:

$$\Delta t_{N/2-1} = \pi, \quad \Delta t_v = \pi \left(1 + \sum_{l=1}^{v-b} 2^{-l} \right), \quad (5)$$

где $v = \overline{N/2, N-2}$, $b = N/2-1$. При этом воздействия вентилями Адамара и вентилями с контролируемой фазой воздействуют на различные параметры независимо друг от друга и порядок их воздействия не имеет значения в рамках ДМ КМС(N). Имеет место

Замечание. При описании КвПФ на основе ДМ КМС(N), $N = 2^n$, параметры θ_a , t_a вектора (2) и параметры $\Delta\theta_a$, Δt_a вектора (3), $a = \overline{0, b-1}$, $b = N/2-1$, не задействованы.

На основе вышеизложенного справедливо

Утверждение 3. Воздействие КвПФ на КМС(N), $N = 2^n$, представлено как распределенные воздействия, задаваемые согласно (4), на параметры θ_{j+b} , $j = \overline{0, N/2-1}$, и согласно (5), на параметры t_v , $v = \overline{N/2-1, N-2}$, $b = N/2-1$.

Согласно утверждению 3 и замечанию оценим вычислительную сложность моделирования КвПФ КМС(N), $N = 2^n$, на основе ДМ, состояние которой представлено согласно (2), а варьирование ее состояния – согласно (3). Для представления ДМ КМС(N), $N = 2^n$, требуется $2(N-1)$ элементов, из которых варьируется только N : $N/2$ элементов меняют свое значение согласно формуле (4), остальные – согласно формуле (5).

Заключение

Предложено представление квантового преобразования Фурье при использовании ДМ КМС(N), $N = 2^n$, путем распределенного варьирования N из $2(N-1)$ элементов указанной ДМ. Вычислены значения величин, на которые производится варьирование элементов ДМ заданной КМС(N).

Данное обстоятельство позволяет выполнять моделирование указанного квантового алгоритма при использовании распределенных вычислений. Показано, что количество варьируемых параметров предложенной дискретной модели возрастает линейно с ростом количества базисных состояний $KMS(N)$.

Литература

1. Дирак, П. Лекции по квантовой механике/ П. Дирак. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1998. – 148 с.
2. Холево, А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории/ А.С. Холево. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. Холево, А.С. Введение в квантовую теорию информации/ А.С. Холево. – М.: МЦНМО, 2002. – 228 с.
4. Валиев, К.А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность/ К.А. Валиев, А.А. Кокин. – М.: Ижевск: R&CDynamics, 2001. – 351 с.
5. A Quantum Transistor Based on an Atom–Photon Molecule/ S.O.Tarasov, N.M.Arslanov, S.A.Moiseev, S.N.Andrianov// Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2018. T. 82. № 8. С. 1042-1046.
6. Аблаев, Ф.М. О сложности классических и квантовых моделей вычислений/ Ф.М. Аблаев/ Математические вопросы кибернетики. – 2004. – Вып. 13. – С. 137–146.
7. Богданов Ю.И. Квантовые компьютеры: достижения, трудности реализации и перспективы/ Ю.И.Богданов, К.А.Валиев, А.А.Кокин// Микроэлектроника. – 2011. – Т.40. №4. – С.243-255.
8. Andrew M. Childs. Quantum algorithms for algebraic problems/ Andrew M. Childs, Wim van Dam// Rev. Mod. Phys. 82, 1 – Published 15 January 2010. URL: <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.82.1>
9. Richter M., Arnold G., Trieu B., Lippert T. Massively Parallel Quantum Computer Simulations: Towards Realistic Systems. // John von Neumann Institute for Computing, NIC series v. 38, 2007, pp. 61-68.

10. Богданов Ю.И. Вычислительные задачи моделирования элементной базы квантовых компьютеров/ Ю.И. Богданов, Н.А. Богданова, В.Ф. Лукичев и др.// Информационные технологии и вычислительные системы. – 2013. – № 3.– С. 3 -14.

11. Зуев С.В. Моделирование квантовых вычислений на классическом компьютере/ С.В.Зуев// Вестник БелГТУ. – 2013. – № 2. – С. 135 – 139.

12. Y.I. Statistical Models and Adequacy Validation for Optical Quantum State Tomography with Quadrature Measurements/ Y.I.Bogdanov, N.A.Bogdanova, L.V.Belinsky, V.F.Lukichev// Russian Microelectronics. 2017. –Т. 46. № 6. –С. 371-378.

13. Шалагин, С.В. Дискретная модель квантовой системы обработки информации/ С.В.Шалагин// Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2007. – № 4. – С.22-27.

14. Лидл, Р. Конечные поля: в 2 т./ Р. Лидл, Г. Нидеррайтер. – М.: Мир, 1988.

15. Шалагин С.В. Полиномиальная модель квантовой системы обработки информации/ С.В.Шалагин// Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики: Материалы XIII Междунар. конф., приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук (г. Махачкала, 16–20 сентября 2019 г.). – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2019. – С. 180 – 185.

16. Захаров, В.М. Вычисление нелинейных полиномиальных функций на многопроцессорной системе с программируемой архитектурой/ В.М. Захаров, С.В. Шалагин // Информационные технологии. – 2012. – № 5. – С. 6–11.

17. Захаров, В.М. О развитии аппаратных средств статистического моделирования/ В.М. Захаров, С.В. Шалагин// Развитие вычислительной техники и ее программного обеспечения в России и странах бывшего СССР: история и перспективы: сб. трудов Третьей Междунар. конф. Sorusom-2014. – 2014. – С. 109-114.

18. Шалагин, С.В. Представление нелинейных полиномов над конечным полем распределенной вычислительной системой/ С.В. Шалагин// Нелинейный мир. – 2009. – № 5. – С. 376–379.

19. Шалагин С.В. Сложность вычисления нелинейных полиномиальных функций над полем $GF(2^2)$ на ПЛИС/FPGA/ С.В. Шалагин// Поиск эффективных решений в процессе создания и реализации научных разработок в российской авиационной и ракетно-космической промышленности: сб. трудов Междунар. научно-практич. конф. – 2014. – С. 661-664.

20. Шалагин С.В. Реализация цифровых устройств в архитектуре ПЛИС/FPGA при использовании распределенных вычислений в полях Галуа. Монография. – Казань: изд-во КНИТУ-КАИ, 2016. – 228 с.

21. Дордопуло, А.И. Высокопроизводительные реконфигурируемые вычислительные системы / А.И. Дордопуло, И.А. Каляев, И.И. Левин и др. // «Суперкомпьютеры». – 2010. – № 3 (3). – С. 44–48.

22. Кузелин, М.О. Современные семейства ПЛИС фирмы Xilinx: справочное пособие / М.О. Кузелин, Д.А. Кнышев, В.Ю. Зотов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 440 с.

23. Coppersmith, Don. An approximate Fourier transform useful in quantum factoring, IBM Research Report RC19642 «R. Cle.» (1994).

УДК 621.391

Шалагин С.В., Кириллов Е.М.

Shalagin S.V., Kirillov E.M.

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ, Казань

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan

E-mail: sshalagin@mail.rusfsmail@yandex.ru

Проектирование базовых IP-ядер для выполнения быстрого преобразования Фурье

Designing basic IP-cores for the fast Fourier transform execution

Аннотация. Разработаны прототипы базовых IP-ядер в архитектуре ПЛИС семейства Virtex-6, которые позволяют реализовать одно- и двумерные быстрые преобразования Фурье. Представлены оценки аппаратной и временной сложности указанных IP-ядер. Предложенное IP-ядро позволяет выполнять конвейерную обработку данных, представленных как числа с плавающей запятой.

Prototypes of basic IP cores in the FPGA Virtex-6 family, which allow implementing one- and two-dimensional fast Fourier transforms, have been developed. Estimates of hardware and time complexity of the specified devices are presented. The proposed IP-core is allows to perform pipelined data processing which represented as floating-point numbers.

Ключевые слова: быстрое преобразование Фурье, ПЛИС, оценки сложности

Keyword: fast Fourier transform, FPGA, estimates of complexity

Введение

В настоящее время актуальна задача обработки изображений в реальном масштабе времени. Возможности программной реализации алгоритмов, реализующих данную задачу на ЭВМ общего назначения, ограничены возможностями фон-неймановской архитектуры. Выходом из сложившейся ситуации является применение специализированных ЭВМ. В частности – ЭВМ, включающих в свой состав аппаратные ускорители как ASIC,

так и программируемые логические интегральные схемы класса FPGA (ПЛИС).

В работе рассмотрена распределенная реализация двумерного быстрого преобразования Фурье (БПФ) [1, 2] на основе однотипных IP-ядер, выполненных в архитектуре ПЛИС. На основе оценок аппаратной сложности и времени задержки функционирования IP-ядер получены уточненные оценки аппаратной и временной сложности выполнения одно- и двумерного БПФ для изображения заданной размерности.

Базис ПЛИС класса FPGA

Структура ПЛИС включает в себя три типа программируемых элементов, конфигурация которых может изменяться разработчиком при проектировании устройств. Это блоки ввода-вывода (БВВ - от англ. IOB - Input/Output Block), конфигурируемые логические блоки (КЛБ - CLB - Configurable Logic Block) и межсоединения (МС, Interconnection)[3]. Справедливо

Определение 1.[4].Набор элементов внутри ПЛИС - КЛБ, МС и *D*-триггеры внутри КЛБ, являются обобщенным базисом ПЛИС.

В базисе (в архитектуре) ПЛИС возможно представление распределенных схем вычислений различных логических функций. Данное обстоятельство позволяет ставить и решать задачи распределенного вычисления на многопроцессорных вычислительных системах с программируемой архитектурой [5], элементами которых являются ПЛИС класса FPGA[3], различных алгоритмов [6 – 13]. В частности, БПФ на основе операций над целочисленными значениями, представленными фиксированной разрядной сеткой [13 – 15].

Числа с плавающей запятой (float) — один из возможных способов представления действительных чисел, который является компромиссом между точностью и диапазоном обрабатываемых значений. В наиболее распространённом формате (стандарт IEEE 754) число float в формате обмена с половинной точностью — «binary16», представляется в виде: $(-1)^S \cdot M \cdot B^E$, где *S* — знак (один разряд), *B* — основание (по

умолчанию равно величине «2»), E — порядок (пять разрядов), M — мантисса (10 разрядов).[16].

Оценки сложности реализации однотипных IP-ядер для вычисления БПФ

Двумерное БПФ реализуемо как комплекс однотипных преобразований «бабочка» (ПрБ), применяемых при вычислении одномерного БПФ. Для выполнения одной операции над четырьмя элементами массива чисел X , требуется четыре ПрБ. Указанные операции требуется выполнить над массивом из N^2 элементов $\log_2 N$ раз[13, 15].

Аппаратные IP-ядра реализованы на ПЛИС семейства Virtex-6 при использовании специализированной САПР ISEDesignSuit 14.7.

Первое IP-ядро, служащее для выполнения двухточечного одномерного БПФ или ПрБ, реализовано при использовании разработанных автором конвейерных схем «complex_fadd», «complex_fsub», «complex_fmulo» и конвейерной схемы из 16-ти регистров, каждый из которых включает в себя по 16 D -триггеров. Указанные схемы реализуют операции сложения, вычитания и умножения, соответственно, комплексных чисел в формате float. Схема из регистров реализует задержку на количество тактов выполнения операции умножения. Проведено функционально-логическое моделирование собранной схемы[17].

В результате для обработки значений, представленных на входе аппаратного IP-ядра, требуется 22 такта функционирования устройства. При этом максимальное время задержки функционирования составляет около 8,90 нс., а частота – примерно 112 МГц. При поступлении обрабатываемых значений на вход схемы общая задержка конвейерной обработки составляет около 196 нс.

Аппаратные затраты ПЛИС XC6VLX75t-1FF484 (семейство Virtex – 6, Xilinx, Inc.) для реализации первого IP-ядра следующие:

- D -триггеры – 2606 из 93120 (примерно 2%),

- генераторы функций или таблиц преобразования (англ. Look-upables, LUTs) – 1852 из 46560 (примерно 3%),
- базовые логические блоки ПЛИС (Slices) – 814 из 11640 (примерно 6%),
- блоки ввода-вывода – 163 из 240 (примерно 63%).

Второе IP-ядро предназначено для реализации четырехточечного двумерного БПФ. Для его реализации использовалось четыре ПрБ, реализованных при использовании первого IP-ядра. Проведено функционально-логическое моделирование собранной схемы при использовании специализированной САПР ISEDesignSuit 14.7 [17].

Для обработки значений, представленных на входе аппаратного IP-ядра, требуется 43 такта функционирования устройства. При этом максимальное время задержки функционирования составляет примерно 12,8 нс., а частота – 78,0 МГц. При поступлении обрабатываемых значений на вход схемы общая задержка конвейерной обработки составляет около 551 нс.

Аппаратные затраты ПЛИС XC6VLX240t-1FF1156 (семейство Virtex – 6, Xilinx, Inc.) для реализации первого IP-ядра следующие:

- D-триггеры – 11128 из 301440 (примерно 3%),
- генераторы функций или таблиц преобразования (англ. Look-upables, LUTs) – 7821 из 150720 (примерно 5%),
- базовые логические блоки ПЛИС (Slices) – 3016 из 37680 (примерно 8%),
- блоки ввода-вывода – 323 из 600 (примерно 54%).

Заключение

На основе приведенных данных видно, что узким местом указанных модулей является задействование большой доли блоков ввода-вывода ПЛИС. Следует исследовать схемы реализации IP-ядер, которые предполагают выполнение различных операций, реализующих БПФ, для относительно

небольшого количества входных и выходных переменных. Проведенные исследования могут быть применены для решения задачи реализации дискретных ортогональных преобразований, в том числе – БПФ, на многопроцессорных вычислительных системах с программируемой архитектурой, как на существующих, так и на перспективных.

Литература

1. Gonzalez R.C. Digital Image Processing/ R.C.Gonzalez, R.E.Woods. 3rd Edition. – Prentice-Hall, 2007. – 976 p.
2. Dudgeon D. Multidimensional Digital Signal Processing/ D.Dudgeon, R.Mersereau, R.Merser.– Prentice Hall, 1983. – 400 p.
3. Кузелин, М.О. Современные семейства ПЛИС фирмы Xilinx: справочное пособие / М.О. Кузелин, Д.А. Кнышев, В.Ю. Зотов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 440 с.
4. Шалагин, С.В. Умножение элементов расширений полей Галуа в базисе ПЛИС/FPGA/ С.В.Шалагин// Информационные технологии. – 2007. – № 12. – С. 22–27.
5. Дордопуло, А.И. Высокопроизводительные реконфигурируемые вычислительные системы / А.И. Дордопуло, И.А. Каляев, И.И. Левин и др. // «Суперкомпьютеры». – 2010. – № 3 (3). – С. 44–48.
6. Шалагин С.В. Оценка сложности распределенного вычисления нелинейной полиномиальной функции над полем $GF(2^K)$ на многопроцессорной вычислительной системе/ С.В.Шалагин// Новые информационные технологии и системы: сб. научн. статей XI Междунар. научно-технич. конф. – Пенза, 25-27 ноября 2014 года. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2014 – С. 9 – 12.
7. Шалагин С.В. Реализация цифровых устройств в архитектуре ПЛИС/FPGA при использовании распределенных вычислений в полях Галуа. Монография. – Казань: изд-во КНИТУ-КАИ, 2016. – 228 с.
8. Захаров В.М. О развитии аппаратных средств статистического моделирования/ В.М.Захаров, С.В.Шалагин//

Развитие вычислительной техники и ее программного обеспечения в России и странах бывшего СССР: история и перспективы: труды Третьей междунар. конф. (Казань, 13-17 октября 2014). – Казань, 2014. – С. 103 – 108.

9. Шалагин С.В. Представление нелинейных полиномов над конечным полем распределенной вычислительной системой/ С.В.Шалагин// Нелинейный мир, 2009. № 5. С. 376 – 379.

10. Захаров В.М. Модель распределенной обработки цифровых данных над полем $GF((2^2)^k)$ в архитектуре ПЛИС класса FPGA/ В.М.Захаров, С.В.Шалагин, А.В.Евдачёв// АКТО-2014: сб. докладов междунар. научно-практич. конф. Т. II (Казань, 5-8 августа 2014). – Казань, 2014 – С. 449 – 451.

11. Шалагин С.В. Проектирование аппаратных ядер для реализации алгоритмов цифровой обработки сигналов на ПЛИС/FPGA/ С.В.Шалагин, А.В.Евдачёв, Р.Э.Рахмонов// АКТО-2014: сб. докладов междунар. научно-практич. конф. Т. II (Казань, 5-8 августа 2014). – Казань, 2014 – С. 452 – 455.

12. Шалагин С.В. Конвейерное вычисление булевых функций на основе однотипных IP-ядер в архитектуре ПЛИС/Virtex/ С.В.Шалагин, И.Ф.Чебурахин// Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 1. – С. 3 – 8.

13. Zakharov V.M. Distributed image processing based on the same IP-cores in FPGA-architecture/ V.M.Zakharov, S.V.Shalagin, B.F.Eminov// CEUR Workshop Proceedings (Data Science Session at the 5th International Conference on Information Technology and Nanotechnology, DS-ITNT 2019; Samara; Russian Federation; 21-24 May 2019). – Vol. 2416, 2019. – Pp. 126-133. URL: <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-85071029159&partnerID=MN8TOARS>

14. Шалагин С.В. Распределенное вычисление быстрого преобразования Фурье в архитектуре ПЛИС/ С.В.Шалагин// Вестник КХТИ. 2019. Т. 22, № 2. – С. 155 – 158.

15. Захаров В.М. Распределенная обработка двумерных массивов данных на основе аппаратных IP-ядер в

архитектуре ПЛИС/ В.М.Захаров, Б.Ф.Эминов,
С.В.Шалагин// Вестник КХТИ, 2019. Т.22. №9 – С.121 – 124.

16. 754-2008 – IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. Revision of ANSI/ IEEE Std 754-1985// ieeexplore.ieee.org, 2008 ISBN 978-0-7381-5752-8, doi:10.1109/IEEESTD.2008.4610935.

17. Кириллов Е.М. Реализация двумерного быстрого преобразования Фурье на основе аппаратных IP-ядер в архитектуре ПЛИС/FPGA/ Е.М.Кириллов// XXIV Туполевские чтения (школа молодых ученых): Междунар. молодёжная научн. конф., 7-8 ноября 2019 года: Материалы конф. Сб. докладов. – В 6 т.; Т. 4. – Казань: изд-во ИП Сагиева А.Р., 2019. – С. 615 - 618.

УДК 519.17

Шихиев Ш.Б., Шихиев Ф.Ш.

Shikhiyev Sh.B., Shikhiyev F.Sh.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail: sh_sh_b51@mail.ru, shihievfuad@mail.ru

Автоматная грамматика естественного языка

Automaton grammar of natural language

Аннотация. Различия в механизмах обработки информации человеком и ЭВМ усложняет моделирование и реализацию языковой способности человека на компьютере. Если совместить оперативную память и процессор и проектировать архитектуру машины в виде одной программы, имитирующей языковую способность человека, то получится реальная информационная система. Сама программа будет представлена в виде орграфа, в котором вершины – словоформы языка (данные); дуги – команды (семантические и синтаксические отношения) над словоформами; корневые деревья в этой сети (подпрограммы) – выражения-деревья.

Differences in human and computer processing mechanisms make it more difficult to model and implement a person's language ability on a computer. If you combine the RAM and the processor and design the architecture of the machine as a single program that simulates the language capacity of a person, you will have a real information system. The program itself will be represented as an orgraph in which the vertices are word forms of the language (data); Arcs - commands (semantic and syntax relations) over word forms; Root trees in this network (subroutines) are tree expressions.

Ключевые слова: грамматика, морфология, синтаксис, семантика выражение, язык, модель, программа, сеть, автомат, архитектура, компьютер.

Keywords: grammar, morphology, syntax, semantics expression, language, model, program, network, automatic, architecture, computer.

1. *Формулировка задачи.* Различия в механизмах обработки информации человеком и ЭВМ усложняет

моделирование и реализацию языковой способности человека на компьютере. В статье предлагается иная организация архитектуры машины, нежели та, которая была предложена Дж. Нейманом и управляет работой универсальной (по Тьюрингу) ЭВМ. Предлагаемая архитектура имеет следующую принципиальную схему и принципы работы.

А. Машина имеет память, в которую «загружена» программа для решения одной единственной задачи (имитации языковой способности человека), как в свое время представлял себе машину Ч. Бэббидж.

Б. Ячейки памяти являются вершинами графа, в которых хранятся элементы лексики (словоформы) конкретного языка; физические характеристики ячейки указывают на морфологические особенности (части речи) хранящейся в ней словоформы.

В. Ячейки памяти связаны между собой таким образом, что физические характеристики дуги (связующего материала) указывают на код команды – морфологической операции, которой будет подвергаться слово, образующее концы этой дуги.

Г. Под исполнением программы понимается исполнение команд (дуг), образующих корневое дерево в исходной программе. Исполняются команды в порядке одностороннего обхода дерева. Результатом исполнения программы является выражение – последовательность словоформ, образующих односторонний обход рассматриваемого дерева.

Из сказанного следует, что машина может претендовать на роль имитатора языковой способности человека, так как результатом работы машины являются выражения на конкретном естественном языке (ЕЯ); следовательно, такая машина представляет собой информационную систему. Новизна и широта задачи требует описания приемов ее решения на частных примерах.

2. *Общая характеристика автоматного языка.* Несмотря на корректность грамматики ЕЯ (естественного языка) формализация и реализация ЕЯ на компьютере остается неразрешимой проблемой. Дело в том, что ЕЯ определяется

не только грамматикой; сочетания слов кроме *синтаксических отношений* должно удовлетворять и *семантическим отношениям*. Более того, два составляющие языка (синтаксис и семантика) – явления разной природы; синтаксис корректен и удобен для формализации дискретностью своих элементов; а сущность элементов семантики – в их непрерывности, размытости границ. Более того, способы представления элементов синтаксиса и семантики в памяти компьютера, состоящей из последовательности дискретных элементов, заранее предопределены.

Интуитивно мы, носители ЕЯ осознаем древовидность структуры выражений на ЕЯ ([4]). Следовательно, представление языка в виде графа имело бы свои преимущества. Но реализуя язык на машине, мы вынуждены вписываться в архитектуру компьютера, в частности, представить в виде массивов чисел и строк привычные и очевидные приемы представления языка; например, в виде *семантических сетей*.

Естественно возникает вопрос об организации иной, например, сетевой архитектуры машины (назовем ее *имитатором ЕЯ*), на которой будет реализована только языковая способность человека.

В имитаторе ЕЯ память и процессор совмещены; ОП представляет собой ориентированный граф G , вершинами которого являются ячейки для хранения *словоформ* (*морфологических форм* слов) рассматриваемого языка; дуга графа (v, w) связывает две *семантически* (по смыслу) *связанные понятия* (*понятие* - слово, именуемое знанием) v и w , и представляет собой *морфологический оператор*, подбирающий для заданной словоформы *морфологическую форму* слова w таким образом, чтобы словоформы v и w образовали *морфологически связанную пару* – *словосочетание*.

Такая конструкция сети G и, в частности, описанная выше функция дуги вытекает из задачи, решаемой на сети G ; задача заключается в анализе (распознавании) и синтезе

(построении) выражений в языке, который будет представлен сетью G .

Сети широко используются для представления формальных языков; языки, представимые в виде сети, известны как *автоматные языки* ([4]); почему бы не пытаться представить язык (или упрощенный его вариант) в виде конечного автомата, а далее реализовать его как электронную машину.

В конечном автомате язык порождается путями, соединяющими одну из входных вершин с одной из выходных вершин сети.

Предполагается, что выражение в естественном языке представляет собой корневое дерево; поэтому и выражение в ЕЯ порождается некоторым корневым деревом T в сети G ; корнем дерева является одна из входных вершин сети, а листьями дерева T являются выходные вершины сети. Входными вершинами будут объявлены ИС в исходной форме, а выходной вершин может быть любое слово кроме предлога.

Построение выражения-дерева начинается с задания его корня r : $T = (\{r\}, \emptyset)$. Далее дерево строится пошаговым добавлением новой вершины (слова) w к одной из вершин (словоформ) v строящегося дерева (выражения) T .

Мы в общих чертах описали сетевую *модель* языка. Прежде чем продемонстрировать ее на конкретном примере языка, следует указать на то, что она интересна при условии ее реализации в виде одной электронной схемы, в которую будет «зашита» вся сеть G . Сеть G на самом деле представляет собой программу (назовем ее программой G), которая отличается от программы в ЭВМ с архитектурой Дж. фон Неймана тремя принципиальными принципами: к командам программы, образующим дуги графа G , нет произвольного (прямого) доступа; параметрами команды являются константы – два слова; и наконец, под исполнением программы G подразумевается исполнение некоторого набора команд (дуг сети G), образующих некоторое корневое дерево в сети G . Результатом исполнения программы G

является некоторое выражение; множество таких выражений образует язык $L(G)$, порождаемый программой G .

111111

3. *Пример программы G .* Как известно, семантическая связь между понятиями v и w дублируется в морфологическую связь между словоформами v и w . Семантическая связь между именем существительным (ИС) и именем прилагательным (ИП) дублируется в морфологическую связь, известную как *согласованное определение*, например, синее море. Семантическая связь двух понятий v и w , когда v является принадлежностью w , дублируется в морфологическую связь, известную как *несогласованное определение*, например, море южан.

Наличие дуги (v, w) в сети G указывает на семантическую связь между понятиями v и w (семантические связи между вещами «от Бога»); далее каждая дуга (семантическая связь) сети G будет дополнена соответствующей морфологической связью. Чтобы оперировать с термином *морфологическая связь*, его необходимо определить и формализовать.

В рассматриваемом примере урезанной (упрощенной) грамматики русского языка показаны приемы кодирования правил морфологии и синтаксиса. Грамматика G , которая будет построена, имеет лексику:

ИС = {линия, управление, образование, край, цех} (1)

ИП = {белый, черный, синий, северный, кустарный} (2)

а морфологические формы слов (словоформы) образуются операторами категорий: рода, числа и падежа. Язык, порождаемый грамматикой G , обозначается через $L(G)$.

Категория рода (как трехместный функционал) и три ее оператора (мужской, средний и женский) кодированы числами: 10(11, 12, 13). Категория числа имеет код 20(21, 22). В категории падежа всего два оператора: именительный и родительный; кодированы они числами: 30(31, 32). Кодами 01 и 02 обозначены множества ИС и ИП соответственно. Тогда через 01132132 будет обозначено множество словоформ, состоящее из ИС в форме женского рода, единственного числа и родительного падежа.

Множества ИС и ИП разбиты на подмножества (лексические группы), которые кодированы четырьмя двузначными десятичными числами: <код части речи><форма кат/рода><форма кат/числа><форма кат/падежа>.

Каждое из множеств ИС и ИП разбито на 12 групп: 01102030 и 02102030, соответственно. Код 02102030, например, объединяет в себе следующие группы:

02112131, 02112132, 02112231, 02112232 – формы муж/рода,

02122131, 02122132, 02122231, 02122232 – формы сред/рода,

02132131, 02132132, 02132231, 02132232 – формы жен/рода.

В рассматриваемом нами синтаксисе всего два правила (СО). Согласно первому правилу (называется оно *несогласованным определением*) два ИС образуют словосочетание, если первое из этих словоформ (главный член словосочетания) имеет произвольную форму, а второе (зависимый член) – форму родительного падежа. Согласно второму правилу (называется оно *согласованным определением*) ИС (главный член словосочетания) в произвольной форме вступает в синтаксическую связь с ИП (зависимый член), который должен иметь по всем категориям те же самые формы, в которых состоит главный член.

Пользуясь введенными выше обозначениями *морфологических форм слов* (словоформ), можно сказать, что элементы семидесяти двух прямых произведений, объединенных в одном выражении:

$$01102030 \times 01102032 \quad (3)$$

образуют *несогласованные определения*; а элементами произведений:

$$\begin{aligned} &01112131 \times 02112131, 01112132 \times 02112132, \\ &01112231 \times 02112231, 01112232 \times 02112232, \\ &01122131 \times 02122131, 01122132 \times 02122132, \\ &01122231 \times 02122231, 01122232 \times 02122232, \\ &01132131 \times 02132131, 01132132 \times 02132132, \end{aligned}$$

01132231×02132231, 01132232×02132232

являются *согласованные определения*. Последние двенадцать произведений также можно объединить под одной формулой:

$011g2n3c \times 021g2n3c$, где $g = 1..3$, $n = 1..2$, $c = 1..2$. (4)

Любая область науки имеет в себе сведения в форме предположений, а в языкознании, два его составляющие - *грамматика* и *семантика* – присутствуют в описании этой науки в разных долях; на это указывают названия учебников: «Грамматика такого-то языка»; и, излагая *грамматику*, автор предполагает, что читатель давно и хорошо знаком с *семантикой* языка. (Поэтому выше было сказано, что *семантика* «от Бога»)

И мы поступим аналогично, предположим, что граф G для нашего примера (обозначим его через $G1$) уже построен; в нем вершин $m = 80$ вершин (20 ИС и 60 ИП) и n дуг, определенных семантикой понятий (1) и (2).

При построении дуг сети учтены правила грамматики русского языка. На Рис. 1 показан фрагмент графа $G1$.

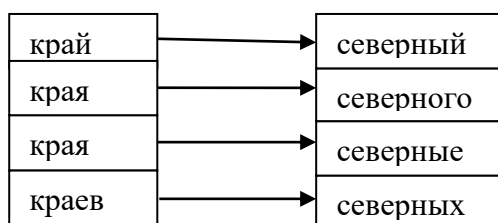


Рис. 1. Фрагмент графа $G1$.

Корневое дерево в сети $G1$ называется *выражением-деревом*; односторонний обход *выражения-дерева* называется *выражением-последовательностью*. Если в *выражении* имеются главные члены (подлежащее и сказуемое), то оно называется *предложением*. (В нашем примере нет словоформ, которые могли выполнить роль сказуемого) Множество *выражений*, содержащихся в сети $G1$, образует *язык* $L(G1)$. Поэтому сеть $G1$ называется *грамматикой языка* $L(G)$.

Процесс построение *выражения-дерева* $T(v) = (V, R)$ с корнем v начинается с исходного дерева $T(v) = (\{v\}, \emptyset)$. Далее

выбирается некоторая вершина w дерева $T(v)$ и произвольная дуга $r = (w, u)$ в графе $G1$ таким образом, что дополненному вершиной $V = V \cup \{w\}$ и дугой $R = R \cup \{r\}$ дереву $T(v)$ соответствует новое выражение (с одним новым членом).

В рассматриваемой нами грамматике деревья T будут иметь следующую структуру: корнем дерева T является вершина типа ИС; если из дерева T удалить вершины типа ИП, то останется путь из вершин типа ИС.

Если каждая вершина типа ИС в дереве T связана не более чем с одной вершиной типа ИП, то такие выражения в арабском и персидском языках называются *идафными цепочками*, то есть цепь *несогласованных определений*, каждый член которого при себе может иметь одно *согласованное определение*.

Для демонстрации алгоритма построения идафной цепи нами составлена программа в языке С# и реализована она в VisualStudio. В качестве примера сети $G2$ используется граф с 96 вершинами (32 – ИС, 64 – ИП). Словоформы упакованы в двух массивах:

```
string[] lines = new string[]
{ "00.01112131дом2132дома2231дома2232домов",
  "01.01112131кот2132кота2231коты2232котов",
  "02.01112131двор2132двора2231дворы2232дворов",
  "03.01132131палка2132палки2231палки2232палок",
  "04.01132131птица2132птицы2231птицы2232птиц",
  "05.01122131перо2132пера2231перья2232перьев",
  "06.01112131отец2132отца2231отцы2232отцов",
  "07.01122131дерево2132дерева2231деревья2232деревьев"};
string[] lines1 = newstring[]
{"00.02112131белый112132белого122131белое122132белого
132131белая132132белой2231белые2232белых",
"01.02112131куцый112132куцого122131куцое122132куцого
132131куцая132132куцой2231куцые2232куцых",
"02.02112131живой112132живого122131живое122132живого
132131живая132132живой2231живые2232живых",
"03.02112131мальй112132малого122131малое122132малого
132131малая132132малой2231малые2232малых",
```


"04.02112131мильй112132милого122131милое122132милого
 132131милая132132милой2231милые2232милых",
 "05.02112131хильй112132хилого122131хилое122132хилого
 132131хилая132132хилой2231хилые2232хилых",
 "06.02112131тихий112132тихого122131тихое122132тихого
 132131тихая132132тихой2231тихие2232тихих",
 "07.02112131тугой112132тугого122131тугое122132тугого
 132131тугая132132тугой2231тугие2232тугих"};

Массивы строк `lines` и `lines1` составляют словарь языка и отображены в раскрывающихся списках под названиями “Dict/Substant” и “Dict/Adject” на интерфейсе проекта (Форма “MyForm”, Рис. 2)

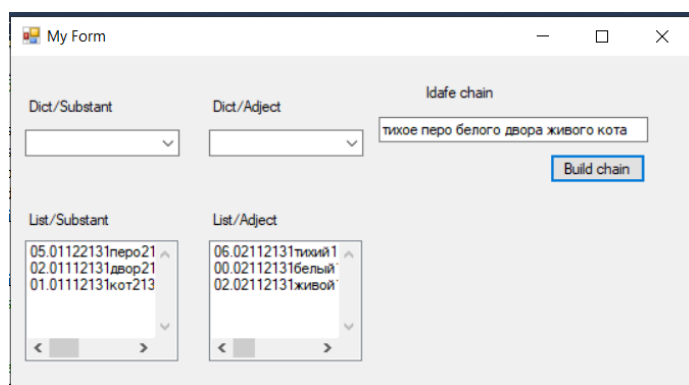


Рис. 2. Интерфейс (Form) проекта программы.

4. В лексике рассматриваемого примера - 16 слов в исходной форме, а словоформ – 128 (32 – ИС, 96 – ИП). У графа G 128 вершин. Процесс выбора дуг графа G – занятие нудное. Если граф G будут все дуги, порожденные СО (3) и (4), то их окажется 768. Действительно.

Морфологическая группа 01102030 в лексике (1) и (2) имеет 32 элемента, а *группа 01102032* - 16 элементов; следовательно, в графа G – 512 дуг, представляющих собой отношения *несогласованного определения* (3).

Каждая словоформа из 32 элементов *группы 011g2n3c* из (4) образует дугу с каждой ИП, имеющей форму $011g2n3c$ (их ровно восемь словоформ для фиксированных значений g, n, c); следовательно, в графа G – 256 дуг, представляющих собой отношения *согласованного определения* (4).

В графе G с 128 вершинами и с 768 дугами требуется построить корневые деревья, точнее, идафные цепи заданной длины.

На первом шаге алгоритм выбирает случайным образом по три ИС и ИП из словаря, а точнее, по три элемента из каждого массива $lines$ (список ИС1) и $lines1$ (список ИП1). Выбранные ИС и ИП отображены в списках под названиями “List/Substant” и “List/Adject” на интерфейсе проекта.

На втором шаге из первого элемента списка ИС1 извлекается соответствующее ИС $v0$ в форме единственного числа и именительного падежа; а из первого элемента списка ИП1 извлекается соответствующее ИП $w0$ в форме, согласованной с $v0$. В нашем примере мы имеем словосочетание «живое перо».

На третьем шаге из второго элемента списка ИС1 извлекается ИС $v1$ в форме родительного падежа; значение категории числа (1 или 2) определяется случайным образом. Далее из второго элемента списка ИП1 извлекается ИП $w1$ в форме, согласованной с $v1$. В нашем примере мы имеем сочетание «живое перо хилого двора». (Еще раз напомним, для краткости программы и изложения, семантические отношения между понятиями не учтены)

Далее шаг 3 повторяется еще раз и получается идафная цепь из трех членов, показанная на Рис. 6. В нашем примере мы имеем сочетание «живое перо хилого двора малого кота».

Примерно таким образом моделируется ЕЯ и реализуется на ЭВМ. В этой модели и в алгоритме ее реализации очевидно огромное множество операций, которых можно избежать, если для моделирования ЕЯ использовать не абстрактные инструменты (граф, в данном случае), а электронные схемы; то есть, архитектуру машины проектировать в виде сети. В частности, разные физические характеристики ячеек (вершин сети) и связывающих их линий (дуг сети) можно использовать в качестве кодов ИС и ИП, а также действий над ячейками.

Выводы. Таким образом, если известно предназначение информационной системы, известны решаемые ею задачи и, разумеется, обрабатываемые ею данные, то имеет смысл

реализовать ее в виде отдельной универсальной машины. задача распознавания (анализа) и построения (синтеза) предложений ЕЯ (естественного языка) относится к числу таких задач. Природа самого языка указывает на то, что в ней исходные данные (лексика языка) и правила (морфологические и синтаксические) их преобразования переплетены и образуют одно целое. В таком случае резонно разработать машину, совместив в одном блоке функции памяти и процессора. Реализация описанного здесь имитатора ЕЯ с единой архитектурой памяти и процессора несомненно позволит иначе подойти к исследованию ЕЯ.

Литература

1. Виноградов В.В., Истрина Е.С., Бархударов С.Г. (редакторы). Грамматика русского языка. В 2-х т. М.: Издательство Академии наук СССР, 1960. 720 с.
2. Шихиев Ф.Ш. Формализация и сетевая формулировка задачи синтаксического анализа. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук.: – СПб.: СпбГУ, 2006. 171 с.
3. Мирзабеков Я. М., Шихиев Ш.Б. Формальная грамматика русского языка в примерах. *Прикладная дискретная математика*, 2018, № 40, 114–126
4. Тестелец Я.Г. Введение в общий синтаксис, - М.: Издательство РГГУ, 2001. 798 с.
5. Schwartz E. L. Computational Neuroscience. - Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1990. - 441 p.

УДК 517.929

Эмирова И.С.

Imirova I.S.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Dagestan State University, Makhachkala

E-mail : irina.emirova@mail.ru

Оценка характеристического показателя решения уравнения n -го порядка с отклонением аргумента в гильбертовом пространстве

Value of characteristic exponent of the solution of the n -order equation in the argument deviation in the Hilbert space

Аннотация. Доказана теорема, в которой получены условия на резольвентный оператор, операторные коэффициенты и отклонения аргумента, позволяющие оценить характеристический показатель решения функционально-дифференциального уравнения n -го порядка с отклонением аргумента в гильбертовом пространстве.

The theorem is proved in which conditions on resolvent operator, operator coefficients and argument deviations, allowing to value the characteristic exponent of functional-differential equation of the n -order with the argument deviation in the Hilbert space have been obtained.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, отклонение аргумента, гильбертово пространство, операторные коэффициенты, резольвента, норма, характеристический показатель.

Key words: functional-differential equation, argument deviation, Hilbert space, operator coefficients, resolvent, norm, characteristic exponent.

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение n -го порядка

$$L_0 u(t) \equiv D_t^n u(t) - \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^m A_{\gamma\mu}(t) S_{h_{\gamma\mu}}(t) D_t^\gamma u(t) = f(t), \quad (1)$$

где $A_{\gamma\mu}(t)$ - неограниченные линейные операторные коэффициенты, их область определения принадлежит X , а область значений принадлежит Y . X, Y - гильбертовы

пространства, причем $X \subset Y$, $\|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y$, $D_t^\gamma \equiv \frac{1}{i^\gamma} \cdot \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}$,
 $S_{h_{\gamma\mu}}(t) = u(t - h_{\gamma\mu}(t))$.

Оператор $R_0(\lambda, t) \equiv \left(\lambda^n E - \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^m A_{\gamma\mu}(t) \lambda^\gamma \exp(-i\lambda h_{\gamma\mu}(t)) \right)^{-1}$

является резольвентным для оператора L_0 .

Определим пространства $X_{R_+^{t_0}}^{n,\alpha}$ и $Y_{R_+^{t_0}}^{0,\alpha}$ с помощью норм

[1]

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \exp(2\alpha t) \left(\sum_{\gamma=0}^{n-1} \|u^{(\gamma)}(t)\|_X^2 + \|u^{(n)}(t)\|_Y^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \alpha = \text{const} \in R \text{ и}$$

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \exp(2\alpha t) \|u(t)\|_Y^2 dt \right)^{1/2} \text{ соответственно.}$$

Пространство $L^2(R_+^{t_0}, X)$ определяется нормой

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \|u(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2}.$$

Теорема. Пусть выполнены условия:

а) $A_{\gamma\mu}(t) \in \mathfrak{L}_0(Y, Y) \cap \mathfrak{L}_\infty(X, Y)$ для $\forall t \in R$ $A_{\gamma\mu}(t): Y \rightarrow Y$ -замкнутые, $\mu \geq 1$, $\gamma = 0, n-1$; $A_{\gamma\mu}(t): X \rightarrow Y$ - сильно равномерно непрерывные, существуют сильные производные

$$\frac{dA_{\gamma\mu}(t)}{dt}, t \geq t_0, \sup_{t \geq t_0} \left\| \frac{dA_{\gamma\mu}(t)}{dt} \right\|_Y \leq \delta, \delta > 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0;$$

б) резольвентные операторы

$R_0(\lambda, t) \equiv \left(\lambda^n E - \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^m A_{\gamma\mu}(t) \lambda^\gamma \exp(-i\lambda h_{\gamma\mu}(t)) \right)^{-1}$ регулярны при

$\text{Im } \lambda < a < \infty, t \geq t_0$;

в) существуют постоянные c_0, C_0 и $p > 0$, причем $p \in Z$, что для $\forall t \geq t_0$ и $\text{Im } \lambda = \alpha < a$ выполняется неравенство

$$\sum_{\gamma=0}^{n-1} \left\| \lambda^\gamma R_0(\lambda, t) \right\|_X + \left\| \lambda^n R_0(\lambda, t) \right\|_X \leq c_0 h^{-p} + C_0, h = a - \alpha;$$

$$\Gamma) f(t) \in Y_{R_+^{t_0}}^{0,\alpha};$$

Д) $h_{\gamma\mu}(t) \in HR_+^{t_0}, 0 \leq h_{\gamma\mu}(t) \leq h^0, h_{\gamma\mu}(t)$ - равномерно непрерывны в $R_+^{t_0}, \mu \geq 1, \gamma = \overline{0, n-1}$.

Тогда для характеристического показателя $\chi(u(t))$ решения $u(t)$ уравнения(1) справедлива оценка

$$\chi(u(t)) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sum_{\gamma=0}^{n-1} \|u^{(\gamma)}(t)\|_Y < -a + C_\delta(\varepsilon) \delta^{\frac{1}{1+p}-\varepsilon}, t > 0.$$

Литература

1. Функционально-дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве/ Алиев Р.Г. //Махачкала: Издательско-полиграфический центр ДГУ, 2001- 82с.

2. Эмирова И.С. Об оценках решений начальной задачи для функционально-дифференциального уравнения n - го порядка в гильбертовом пространстве/Эмирова И.С.// Вестник Дагестанского государственного университета.- 1998. -№1.- с. 106-109.

УДК 534.014.2

¹Якубов Р.А., ^{1,2}Бейбалаев В.Д.

¹Yakubov R.A., ^{1,2}Veibalaev V.D.,

¹Дагестанский государственный университет, Махачкала

²Дагестанский государственный университет народного хозяйства, Махачкала

¹Dagestan State University, Makhachkala

²Dagestan State University of National Economy, Makhachkala

E-mail: kaspij_03@mail.ru

Исследование нелокальной математической модели динамической системы Ресслера

Аннотация. В работе исследованы регулярные и хаотические режимы нелокальной динамической системы Ресслера методом фазовой плоскости. Разработана программа численного моделирования динамической системы Ресслера, описываемой дробными дифференциальными уравнениями.

The paper investigates the regular and chaotic regimes of the non-local dynamic Rössler system using the phase plane method. A program for the numerical simulation of the Rössler dynamical system described by fractional differential equations is developed.

Ключевые слова: динамическая система, фазовая плоскость, дробная производная, нелинейные колебания.

Keywords: dynamical system, phase plane, fractional derivative, nonlinear oscillations.

Как известно, качественная теория дифференциальных уравнений является адекватным математическим аппаратом для исследования различных явлений в целом ряде областей. Несмотря на значительные усилия по развитию теории нелинейных колебательных процессов, наши знания в этой области далеки от своей полноты и необходимо развитие принципиально новых подходов [1,4]. Развитие математического аппарата дифференциальных уравнений дробного порядка, позволило учитывать эффекты памяти при исследовании различных колебательных процессов в динамических системах [4].

Работа посвящена численному исследованию нелинейной динамической системы Рееслера, описываемой системой дробных дифференциальных уравнений методом фазовой плоскости.

В работе исследована нелокальная автономная система Рееслера, описываемая системой дробных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha} x &= -y - z, \\ \partial_{0t}^{\alpha} y &= x + py, \\ \partial_{0t}^{\alpha} z &= q + z(x - r), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds$ - дробная производная Caputo [2], p, q, r и $0 < \alpha < 1$ - параметры системы, x, y, z - динамические переменные, зависящие от времени.

Система (1) является математической моделью нелокальной автоколебательной системы с трехмерным фазовым пространством.

В работе исследован случай, когда $r^2 - 4pq \geq 0$. Данное условие является условием равновесия в полюсах:

$$x_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2}, \quad y_{1,2} = -\frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}, \quad z_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}. \quad (2)$$

Система (1) представляет с собой систему нелинейных дробных дифференциальных уравнений. Решение системы (1) будем находить численным методом. Не трудно убедиться, что правые части системы (1) непрерывны в окрестностях особых точек и удовлетворяют условию Липшица по динамическим переменным x, y, z .

Для численного решения системы (1) введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau > 0$

$$\omega_{\tau} = \{t_n = n \cdot \tau, n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Для дробной производной имеет вид разностная аппроксимация [3]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t_n) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) + O(\tau). \quad (3)$$

Воспользовавшись разностной аппроксимацией (3) систему дифференциальных уравнений (1) заменим системой разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= -y_n - z_n, \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= x_n - py_n, \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (z_{k+1} - z_k) \cdot (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= q + z_n(x_n - r). \end{aligned} \quad (4)$$

Для численного исследования системы (4), добавим начальные условия:

$$x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c.$$

Выводы. Установлено, что при переходе к дробным производным в фазовой плоскости происходят топологические изменения. При этом в системе происходит бифуркация рождения устойчивой и неустойчивой положений равновесия вокруг особых точек. Далее из устойчивого положения в результате бифуркации переходит в устойчивый предельный цикл с каскадом бифуркаций.

Литература

1. Дорошин А.В. Математическое моделирование в нелинейной динамике.- Самара: Издательство СГАУ.-100 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.- 272 с.
3. Бейбалаев В.Д., Абдуллаев И.А., Наврузова К.А., Гаджиева Т.Ю. // О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования. // Вестник ДГУ. 2014. Вып. 6. С. 53-61.
4. Бейбалаев В.Д., Мейланов Р.П., Назаралиев М.А., Шабанова М.Р. Особенности фазовой траектории «фрактального» брюсселятора.// Сб. материалов седьмой Всероссийской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Г. Самара, 2010.

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Материалы I Всероссийской конференции
(г. Махачкала, 3–5 февраля 2020 г.)

Компьютерная верстка Шахсинова Э.Г.

Подписано в печать 12.03.2020. Формат 60×84 ¹/₁₆.

Усл. п. л. 13. Уч.-изд. л. 6,8.

Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство ДГУ
г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 59е