МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Труды межвузовского семинара

МАХАЧКАЛА - 2021

УДК 517
ББК 22.16
А-43

Актуальные вопросы математики и смежные вопросы (труды межвузовского семинара). - Махачкала, ФГБОУ ВО «ДГТУ», 2021 г., 65 с.

В сборник включены материалы докладов и сообщений, представленных на обсуждение на заседаниях межвузовского научно-методического семинара кафедры высшей математики. Тематика охватывает довольно широкий спектр проблем современной математики, методики преподавания в высшей и средней школах, а также смежные вопросы.

Рецензенты: Саркаров Т.Э. – д.т.н., проф. кафедры ТОЭ ДГТУ,
Рамазанов А.К. – зав. каф. МА ДГУ, д.ф.-м.н., профессор.

Ответственный редактор: Нурмагомедов А.М. - зав. каф. высшей математики ДГТУ, к.ф.м.-н., доцент

Печатается по решению Ученого совета ФГБОУ ВО «ДГТУ»
от 27 мая 2021 г.

ISBN 978-5-907249-98-1

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517

ОЦЕНКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R})$

Абилова Ф.В. (ДГТУ)

Абилов М.В. (ДГТУ)

В статье построен оператор Фурье $F[f]$ для класса $L_2(\mathbb{R})$, введен модуль непрерывности k – го порядка функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ и приведена оценка преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, оценка интеграла, преобразование Фурье.

Пусть $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ - пространство суммируемых в p–ой степени функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Известно, что для функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ преобразование Фурье определяется равенством

$$g(x) = F[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Тем самым мы определяем некоторый линейный оператор $F[f]$ на пространстве $L_1(\mathbb{R})$, ставящий в соответствие каждой функции из этого пространства ее преобразование Фурье, вообще говоря, не принадлежащее пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Известно, что функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ не обязана принадлежать $L_1(\mathbb{R})$, т.е. не обязана быть суммируемой на всей оси. Поэтому она не имеет преобразования Фурье в обычном смысле.

В 1910 году М.順順 Планшерель впервые построил оператор Фурье $F[f]$ для класса $L_2(\mathbb{R})$, доказав следующую замечательную теорему, устанавливающую при этом полное равноправие между функцией $f \in L_2$ и ее преобразованием Фурье $F[f]$ (см.[1]).

ТЕОРЕМА (М.Планшерель). Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда имеет место следующее.

Формула

$$g(x) = F[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{ixt} - 1}{it} dt$$

почти всюду на $\mathbb{R}$ определяет функцию $g \in L_2(\mathbb{R})$.

Двойственная формула

$$f(t) = F^{-1}[g](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{e^{-ixt} - 1}{-ix} dx$$

также справедлива почти всюду.

Кроме того, для пары функций

$$f(x) \text{ и } g(x) = F[f](x)$$

имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Из теоремы М. Планшереля нетрудно получить, что для всякой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ интеграл

$$g_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t) e^{-ixt} dt, \ \ x \in \mathbb{R}$$

представляет собой функцию, принадлежащую пространству $L_2(\mathbb{R})$, т.е. $g_N \in L_2(\mathbb{R})$ при любом $N > 0$, и, оказывается, существует такая функция $g \in L_2(\mathbb{R})$, для которой

$$\|g_N - g\|_2 \to 0, N \to \infty,$$

причем

$$\|f\|_2 = \|g\|_2.$$

В ряде прикладных задачах представляет интерес оценка интеграла

$$\int_{|t| \geq N} |g(t)|^2 dt$$

на некоторых классах функций из пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\omega_k(f;\delta)_{L_2}$ – модуль непрерывности k – го порядка функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА.

$$\int_{|t| \geq N} |g(t)|^2 = O(N^{-k\alpha}) \Leftrightarrow \omega_k(f;\delta) = O(\delta^{k\alpha}),$$

$$k = 1,2,\dots; 0 < \alpha < 1.$$

ЗАМЕЧАНИЯ. **1.** При $k = 1$ этот результат известен (см., напр., [2], стр. 222).

2. Сформулированная здесь теорема примыкает к некоторым нашим ранним результатам [3].

Список литературы

1. Титчмарш Э. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Комкнига, 2005.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., Наука, 1965.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Несколько замечаний о преобразовании Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. // Журнал вычисл. мат. и матем. физики, 2008, т.48, №6, с.

УДК 531

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ КАК ОДНО ИЗ НАПРАВЛЕНИЙ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ

Айбетова Т.В. (ДГТУ)

Аннотация: Реализация межпредметных связей способствует систематизации, а, следовательно, глубине и прочности знаний, помогает дать ученикам целостную картину мира. При этом повышается эффективность обучения и воспитания, обеспечивается возможность сквозного применения знаний, умений, навыков, полученных на уроках по разным предметам.

Ключевые слова: межпредметные связи, процессы, образование, учебный процесс, учащихся.

Проблема межпредметных связей интересовала педагогов еще в далеком прошлом. Ян Амос Коменский выступал за взаимосвязанное изучение грамматики и философии, философии и литературы, Джон Локк - истории и географии. В России значение межпредметных связей обосновывали В.Ф. Одоевский, К.Д. Ушинский и другие педагоги. В советское время много внимания межпредметным связям уделяла Н. К. Крупская. "Комплексность комплексности рознь,- писала она в 1932 г. в "Методических заметках". Есть комплексность, которая затемняет реальные связи и опосредствования, которая связывает воедино вещи, ничего общего между собой не имеющие и есть комплексность, способствующая пониманию существующих реальных связей между различными областями явлений и тем способствующая выработке цельного материалистического мировоззрения".

В настоящее время, пожалуй, нет необходимости доказывать важность межпредметных связей в процессе преподавания.

Современный этап развития науки характеризуется взаимопроникновением наук друг в друга.

Связь между учебными предметами является, прежде всего, отражением объективно существующей связи между отдельными науками и связи наук с техникой, с практической деятельностью людей, определяет роль изучаемого предмета в будущей жизни.

Межпредметные связи являются конкретным выражением интеграционных процессов, происходящих сегодня в науке и в жизни общества. Эти связи играют важную роль в повышении практической и научно-теоретической подготовки учащихся, существенной особенностью которой является овладение ими обобщенным характером познавательной деятельности.

Осуществление межпредметных связей помогает формированию у учащихся цельного представления о явлениях природы и взаимосвязи между ними и поэтому делает знания практически более значимыми и применимыми, это помогает учащимся те знания и умения, которые они приобрели при изучении одних предметов, использовать при изучении других предметов, дает возможность применять их в конкретных ситуациях, при рассмотрении частных вопросов, как в учебной, так и во внеурочной деятельности, в будущей производственной, научной и общественной жизни выпускников.

Межпредметные связи следует рассматривать как отражение в учебном процессе межнаучных связей, составляющих одну из характерных черт современного научного познания.

При всем многообразии видов межнаучного взаимодействия можно выделить три наиболее общие направления:

1. Комплексное изучение разными науками одного и тоже объекта.

2. Использование методов одной науки для изучения разных объектов в других науках.

3. Привлечение различными науками одних и тех же теорий и законов для изучения разных объектов.

В современных условиях возникает необходимость формирования у учащихся не частных, а обобщенных умений, обладающих свойством широкого переноса. Такие умения, будучи сформированными в процессе изучения какого-либо предмета, затем свободно используются учащимися при изучении других предметов и в практической деятельности.

Список литературы

1. Баврин И.И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике: Кн. для учащихся 10-11 кл. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2000. – 80 с.

2. Баева Ю.И., Гундерина С.Ю., Каданер А.П. Путешествие в экономику. Сборник задач для 5-6 классов (I ступень программы СЭО). Под ред. Заиченко Н.А. – СПб.: СМИО Пресс, 2004. – 96 с.

3. Бурцева Н.М. Межпредметные связи как средство формирования ценностного отношения учащихся к физическим занятиям: Дис. … канд. пед. наук. – СПб., 2001. – 231 с.

4. Дорофеев М.В., Лесов М.Б. Математика на уроках химии // Химия в школе. – 1999. - №6. – с. 50-55

5. Каданер А.П., Козлов К. Г., Козлова С.Ю. Бизнес-курс. Сборник экономико-математических задач для 6-8 классов. 2 ступень программы СЭО. – СПб.: СМИО Пресс, 2005. – 48 с.

УДК 334

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ОБЪЕКТИВНОСТИ ОЦЕНКИ УЧАЩИХСЯ В ЧАСТНОЙ ШКОЛЕ

Асадулаева Т.Г. (ДГТУ)

Аннотация: В работе рассматриваются некоторые факторы, влияющие на качество и объективность оценки учащихся. Изучаются получившее наибольшее распространение в теории и практике внутришкольного управления формы и методы педагогического контроля.

Ключевые слова: качество, объективность, обучение, управление, ступени школы, справедливость, гласность, надежность, эффективность, валидность, системность, всесторонность.

Для повышения качества обучения педагогу необходимо уметь грамотно и к месту выбирать и применять существующие формы и методы педагогического контроля, четко определять его цели и функции.

В теории и практике внутришкольного управления наибольшее распространение получили следующие формы и методы педагогического контроля:

1. Тематический - глубокое изучение знаний и умений учащихся по ключевым темам учебной программы (изучение системы работы учителя в границах учебной темы).

2. Фронтально-обзорный - пилотажное изучение знаний и умений коллектива учащихся (успешность работы группы учителей) по общим вопросам.

3. Сравнительный - параллельное изучение личности учащихся, учебных групп, отдельных педагогов.

4. Персональный - всестороннее изучение личности конкретного ребенка, системы профессиональной деятельности отдельного педагога.

5. Классно-обобщающий - изучение качеств знаний и умений учащихся (качества преподавания) в конкретном классе;

6. Предметно-обобщающий - изучение качеств знаний и умений учащихся (качества преподавания) по отдельным учебным курсам.

7. Комплексно-обобщающий - всестороннее изучение качеств знаний и умений учащихся (качества преподавания) в конкретном классе на начальной, основной средней или полной средней ступени школы.

8. Оперативный - изучение неожиданно возникших проблем в образовательном процессе.

9. Формулирующий - оценивание осуществляется в течение всего времени обучения для установления обратной связи от обучаемых к преподавателю.

10. Итоговый (суммативный) - оценивание направлено на подведение конечных результатов обучения (аттестация).

Таким образом, выявляются четыре основные функции педагогического контроля:

-диагностическая (оценка степени усвоения учебной программы и уровня профессионализма и квалификации слушателей);

-обучающая (повышение мотивации и индивидуализация темпа обучения);

- организующая (совершенствование организации учебного процесса за счет подбора оптимальных форм, методов и средств обучения);

- воспитывающая (выработка структуры ценностных ориентаций).

При этом в процессе организации педагогического контроля рекомендуется соблюдать следующие принципы:

-связь с процессом образования и воспитания;

-объективность, справедливость и гласность;

-надежность, эффективность, валидность;

-системность и всесторонность.

Измерение считается объективным, если удается максимально уменьшить интерсубъективные воздействия исследователей. Достичь унификации и уменьшения субъективных воздействий на процедуру педагогического контроля можно за счет обеспечения объективности проведения измерения, обработки данных, интерпретации результатов измерения.

Степень надежности измерения определяется коэффициентом надежности (корреляционный коэффициент), который показывает, в какой мере совпадают результаты измерений, проведенных в одинаковых условиях. Понятие надежности непосредственно связано со стандартной измерительной ошибкой, информацией о том, между какими значениями полученной численной оценки находится истинное значение успеваемости индивидуума. Учителям полезно знать, что измерительная ошибка пятибалльной системы оценок составляет ±1 балл .

Валидность измерения показывает то, что данная методика позволяет измерять действительно требуемые критерии (характеристики) исследуемого педагогического явления. Валидность подразделяется на несколько типов:

-содержательная валидность - экспертное подтверждение соответствия диагностического материала программе и основным целям обучения в контролируемой предметной области, согласованности результатов диагностики с другими независимыми формами контроля знаний;

-критериальная валидность - достаточный уровень корреляции результатов тестирования по отдельным заданиям и по всему тесту в целом;

-техническая валидность - обеспечение достаточного числа эквивалентных форм измерителей (вариантов заданий, вопросов), предотвращающих возможность механического заучивания правильных ответов.

Список литература

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0% B0%D1%8F_%D1%88%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0/
2. http://moneymakerfactory.ru/rabotajuwij-biznes/kakotkryit_chastnuyushkolu/
3. Якубов А.В. Непрофессионализм руководства как фактор низкого уровня качества образования в республике. Народное образование, 2017, №9-10, с.52-58.

УДК 517.958:536.71

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Ахмедов Т.З. (ДГТУ)

Аннотация. В статье разработаны явные и неявные разностные схемы решения краевой задачи для нелокального уравнения теплопроводности с производными дробного порядка в смысле Рисса, доказаны критерии устойчивости этих разностных схем.

Ключевые слова: численный метод, аппроксимация, фрактал, фрактальная среда, дифференциальное уравнение, устойчивость.

Рассмотрим в области $D = \{(x,t): -\infty < x < +\infty, 0 \le t \le T\}$ краевую задачу для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка.

Задача. Найти решение $u(x,t) \in C^2(D)$ уравнения:

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = C(x,t) R^{-\beta} u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

где $0 < \alpha \le 1, 1 \le \beta \le 2, C(x,t) \ge 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и граничным условиям $u(-L,t) = \mu_1(t)$ и $u(L,t) = \mu_2(t)$. Здесь $D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} I_{0t}^{1-\alpha}$ – частная дробная производная Римана-Лиувилля.

$$(I_{0+}^{\alpha} u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(s,x)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \quad R^{-\beta} u(x,t)$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(\beta)\cos(\frac{\beta\pi}{2})} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s,t)}{|s-x|^{1-\beta}} ds.$$

Используя выражение $R^{-\beta} u(x,t) = \frac{1}{2\Gamma(\beta)\cos(\frac{\beta\pi}{2})} \left(D_{0-}^{\beta} u(x,t) + D_{0+}^{\beta} u(x,t) \right)$,

где $\left(D_{0+}^{\beta} u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{x} \frac{u(s,t)}{(x-s)^{\beta-1}} ds \, , \left(D_{0+}^{\beta} u\right)(x)$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{x}^{+\infty} \frac{u(s,t)}{(x-s)^{\beta-1}} ds,$$

уравнение (1) примет вид:

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \frac{C(x,t)}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}\left(D_{0+}^{\beta}u(x,t) + D_{0-}^{\beta}u(x,t)\right) + f(x,t). \qquad (2)$$

Для нахождения решения краевой задачи для уравнения (2) применим конечно-разностный метод. Построим разностную схему. Для этого в области $\overline{D} = \{(x,t): -L \le x \le +L, 0 \le t \le T\}$ введем сетку: $\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i,t_n): x_i = -L + ih, t_n = n\tau, i = 0,1,\dots,K, h = \frac{2L}{K}, n = 0,1,\dots,N, \tau = \frac{T}{N}\}$ с шагом h по x и τ по t. Для аппроксимации дробных производных Римана-Лиувилля по переменным x, y при $1 < \beta < 2$ на отрезках $[0,a],[0,b]$ воспользуемся формулой Грюнвальда-Летникова со смещением [12-14]:

$$f_{0+}^{\beta}u(x,t) = \lim_{h\to+0}\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{k=0}^{M_+} q_k f[x-(k-1)h], \qquad (3)$$

где $h = \frac{x}{M}$. Как установлено в [12-14], формула (3) обеспечивает более точную аппроксимацию, чем стандартная формула Грюнвальда-Летникова.

Воспользовавшись определением (3) в уравнении (2) дробные производные по координате в правой части заменим разностными выражениями:

$$(D_{+}^{\beta}u)_i \sim \frac{1}{h^{\beta}}\sum_{k=0}^{i+1} q_k u_{i-k+1} = \Lambda_{+}^{\beta}u_i, \quad (D_{-}^{\beta}u)_i \sim \frac{1}{h^{\beta}}\sum_{k=0}^{K-i+1} q_k u_{i+k-1}$$
$$= \Lambda_{-}^{\beta}u_i, \qquad (4)$$

Применяя достаточное условие [10] к дробному производному Римана-Лиувилля на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$, получим

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t_n) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{u(x,t_n)}{(t_{n+1}-t_n)^{\alpha}} + \int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{u'(x,\tau)}{(t_{n+1}-\tau)^{\alpha}}d\tau\right].$$

Заменяя производную $u'(x,\tau)$ на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ конечной разностью $\left(\frac{du}{d\tau}\right)_n \sim \frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}$,

разностную аппроксимацию производной дробного порядка α на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ запишем в виде

$$(D_{0t}^{\alpha}u)_n \sim \frac{u^{n+1} - \alpha u^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\tau^{\alpha}}. \qquad (5)$$

С учетом соотношений (4) и (5) получим следующую неявную разностную схему:

$$\frac{u_i^{n+1}-\alpha u_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\tau^\alpha}$$
$$=\frac{C_i^{n+1}}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)h^\beta}\left[\sigma\left(\Lambda_+^\beta u_i^{n+1}+\Lambda_-^\beta u_i^{n+1}\right)+(1-\sigma)(\Lambda_+^\beta u_i^n\right.$$
$$\left.+\Lambda_-^\beta u_i^n)\right]+f_i^{n+1},$$
$$C_i^{n+1}\approx \mathrm{C}(x_i,t_n), f_i^{n+1}\approx f(x_i,t_n). \qquad (6)$$

В случае $\sigma=1$ получаем неявную разностную схему с опережением на шаблоне:

$$\frac{u_i^{n+1}-\alpha u_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\tau^\alpha}=\frac{C_i^{n+1}}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)h^\beta}\left[\sum_{k=0}^{i+1}q_k u_{i-k+1}^{n+1}+\sum_{k=0}^{K-i+1}q_k u_{i+k-1}^{n+1}\right]+f_i^{n+1},$$
$$u_i^0=\varphi(x_i),\ u_0^n=\mu_1(t_n),\ u_K^n=\mu_2(t_n),\ C_i^{n+1}\approx \mathrm{C}(x_i,t_n),\ f_i^{n+1}\approx f(x_i,t_n). \qquad (7)$$

Теорема 1. Разностная схема (7) безусловно устойчива.

А в случае $\sigma=0$ получаем явную разностную схему:

$$\frac{u_i^{n+1}-\alpha u_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\tau^\alpha}$$
$$=\frac{C_i^n}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)h^\beta}\left[\sum_{k=0}^{i+1}q_k u_{i-k+1}^n+\sum_{k=0}^{K-i+1}q_k u_{i+k-1}^n\right]+f_i^n, \qquad (8)$$

После элементарных преобразований разностная схема (8) примет вид:

$$u_i^{n+1}=(\alpha+2q_1\xi_i)u_i^n+\xi_i\left[q_0(u_{i+1}^n+u_{i-1}^n)+\sum_{k=2}^{i+1}q_k u_{i-k+1}^n+\sum_{k=2}^{K-i+1}q_k u_{i+k-1}^n\right]$$
$$+\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha f_i^n. \qquad (9)$$

Теорема 2. Разностная схема (9) устойчива, если $\frac{\gamma}{h^\beta}\le\frac{\alpha}{2\beta C_{max}}$.

Список литературы

1. Бейбалаев В.Д. Численный метод решения математической модели теплопереноса в средах с фрактальной структурой// Фундаментальные исследования. Москва. -2007. - №12. -С.249-251

2. Бейбалаев В.Д. Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка // Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Серия физ.-мат. науки. -2009. -Т.1(18). -С.267-270.

3. Бейбалаев В.Д. Математическая модель переноса в средах с фрактальной структурой // Математическое моделирование. -Москва, 2009. -Т.21., -№ 5. -С.55-62.

4. Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д. Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. -Вып. 6, 2008. -С.46-53.

5. Самко С.Г., Килбас А.А, Маричев О.И. Интегральные и производные дробного порядка и некоторые их приложения. -Минск : Наука и Техника, 1987. -498с.

6. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик,2003. -299с.

УДК 517.946

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Гаджиев М.М. (ДГТУ)

Аннотация: рассмотрена смешанная задача для нелинейной системы гиперболо-параболических уравнений в «Видоизмененной» постановке и при некоторых условиях на коэффициенты уравнений и их правые части. Доказано существование и единственность решения этой задачи.

Ключевые слова: сингулярная смешанная задача, условия разрешимости задачи, априорная оценка решения, корректность постановки задачи.

Интерес к исследованию начально-краевых задач гиперболо-параболических уравнений связан с тем, что такие системы встречаются в задачах, описывающих совместное распространение тепловых и звуковых колебаний, фильтрации грунтовых вод в капиллярно-пористых средах и других разделах механики и физики.

Пусть $-$ограниченная область в R^n с гладкой границей S. Положим $Q_T = \Omega \times [o,T], S_T = S \times [o,T]$ и в цилиндрической области Q_T рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$L_i(u^i) = K_i(x,t)u^i + M_i(u^i) + |u_t^i|u_t^i = f(x,t,u,u_t^i,\nabla u), \tag{1}$$

$K_i(x,t) \geq 0, \qquad u = (u^1, u^2, \dots, u^n), \qquad x = (x^1, x^2, \dots, x^n), (x,t) \in Q_T$

$M_i(u^i)$ – равномерно эллиптические операторы второго порядка.

$$M_i(u^i) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}(x)v_{xi}\big), 0 < p_i < \frac{2}{n-2}, i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

При $t = 0$ введем множества

$$\textstyle\sum_{+} = \{(x,o) \in \Omega, \qquad K_{\mathrm{i}}(x,o) > 0\}, \qquad \sum = \overline{\sum}_{+}.$$

Предположим, что функции

$$f\big(x,t,u,u_t^i,\nabla u\big) \in L^2(Q_T) \qquad (3)$$

для всех функций $u^i \in W_2^2(Q_T)$ и $f_i(x,0,\dots,0) = 0$.

В работе для системы уравнений (1) рассмотрим сингулярная смешанная задача [1]:

найти в области Q_T функции $u^i(x,t)$, являющиеся решением системы (1) и удовлетворяющие условиям:

$$u^i(x,o) = u_t^i(x,0)\big|_{\Sigma} = u^i(x,t)\big|_{S_T} = 0. \qquad (4)$$

и доказана разрешимость этой задачи при выполнении некоторых условий на коэффициенты и правую часть уравнений. Следуя работе [2], рассмотрена для системы (1) также классическая смешанная задача:

найти в области Q_T функции $u^i(x,t)$, удовлетворяющие системе уравнений (1) и условиям:

$$u^i(x,o) = u_t^i(x,0) = u^i(x,t)\big|_{S_T} = 0. \qquad (5)$$

Обозначим через $S_{L_i}(Q_T)$ и $K_{L_i}(Q_T)$ классы функций из пространства Соболева $W_2^2(Q_T)$, удовлетворяющие системе (1) и соответственно начально-краевым условиям (4) и (5). Теперь введем в рассмотрение систему уравнений

$$\mathcal{L}_i(u^i) = L_i(u^i) + a_i(x,t)u_t^i + \sum_{j=1}^{n} b_j^i(x,t)\, u_{x_j}^i + \sum_{j=1}^{n} c_j^i(x,t)\, u^i = f(x,t) \qquad (6)$$

и докажем, что разрешимы смешанные задачи (6), (4) и (6), (5).

Лемма 1. Если существует константа $\lambda_0 \geq 0$ такая, что

$$2\left(a_i(x,t) - \frac{\lambda_0}{2}K_i(x,t)\right) - K_{it}(x,t) \geq \delta > 0, \qquad (7)$$

то найдется константа $\lambda_1 \geq \lambda_0$, такая, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$ и всех функций $u^i(x,t)$ из класса $S_L(Q_T)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|u^i\right\|_1^2 \leq C \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i(u^i) u_t^i \exp(-\lambda t)\, dxdt, \;\; c > 0.$$

Рассмотрим строго гиперболическую систему уравнений

$$\mathcal{L}_{i\varepsilon}(u^i) = \varepsilon u_{tt}^i + \mathcal{L}_i(u^i), \tag{8}$$

$$(K_{i\varepsilon} = K_i + \varepsilon, \;\; \varepsilon > 0).$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и $\varepsilon > 0$. Тогда существует константа $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такая, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$ и всех функций $u^i(x,t)$ из класса $K_L(Q_T)$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| u^i \right\|_1^2 \leq C \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{i\varepsilon}(u^i) u_t^i \exp(-\lambda t)\, dxdt, \;\; c > 0.$$

Доказательство леммы 1 и леммы 2 проводится методом интегрированием по частям.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2) и (7). Если при этих условиях задача (6), (4) имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что смешанная задача (6), (4) имеет два решения $u_1^i(x,t)$ и $u_2^i(x,t)$ из пространства $W_2^2(Q_T)$. Разность этих решений функция $\omega^i(x,t) = u_1^i(x,t) - u_2^i(x,t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$K_i \omega_{tt}^i - \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r}\left(a_{rs}^i(x)\omega_{x_s}^i\right) + a_i \omega_t^i + \sum_{j=1}^{n} b_j^i(x,t)\, \omega_{x_j}^i + \sum_{j=1}^{n} c_j^i(x,t)\, \omega_t^i +$$

$$+ \left|u_{2t}^i\right|^{\rho_i} u_{2t}^i - \left|u_{1t}^i\right|^{\rho_i} u_{1t}^i = 0.$$

Умножим обе части на $\omega_t^i \exp(-2\lambda t)$ и проинтегрируем по частям полученное выражение и получим

$$\frac{d}{dt}\left[K_i \left|\omega_t^i\right|^2 + \sum_{r,s=1}^{n} a_{is}\, \omega_{x_s}^i \exp(-2\lambda t)\right] \leq 0, \quad \textit{т.е.} \;\; \omega^i(x,t) = 0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условие (2) и

$$2a_i(x,t) - |K_{it}(x,t)| \geq \delta > 0.$$

Тогда для любых функций $f_i(x,t)$ из пространства $W_2^2(Q_T)$ таких, что $f_{it}(x,t) \in L^2(Q_T)$ и $f_i(x,0) = 0$ существуют функции $u^i(x,t)$ из пространства $W_2^2(Q_T)$, являющиеся решением задачи (6), (5).

Доказательство проведем по схеме [2], т.е. сначала рассмотрим строго гиперболическую систему уравнений (8) и для $\varepsilon > 0$ найдем решение смешанной задачи (8), (5) методом Галеркина с выбором специального базиса. Для приближенных решений найдем априорные оценки и совершим предельный переход, опираясь на свойство компактности.

Следствие. Из существования решения смешанной задачи (1), (5) (при условии $f(x,o) = 0$ следует существование решения задачи (1), (4)). Из единственности решения задачи (1), (4) следует единственность решения задачи (1), (5).

Список литературы

1. Врагов В.Н. Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений // Дифф. уравнения, Т. 12, №1, 1976.

2. Гаджиев М.М. Смешанная задача для одного нелинейного гиперболо-параболического уравнения // Дифф. уравнения, Т. 13, №2, 1977.

УДК 517

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОПРАВОК К РЕШЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Гаджимагомедов Г. Г. (ДГТУ)

Рассмотрим н.с.и.у.

$$u(x) - \lambda F\left(x, \int_a^b \frac{f(x,s,u(s))}{s-x} ds\right) = g(x) \tag{1}$$

в вещественном пространстве $L_2[a,b]$, где $g(x) \in L_2[a,b], \lambda -$ числовой параметр.

Покажем применимость метода Ю.Д. Соколова [1] или метода осреднения функциональных поправок к уравнении (1). Этот метод в применении к уравнению (1) заключается в следующем: в качестве начального приближения возьмем любой элемент $u_0(x) \in L_2[a,b]$, а последующие приближения будем определять из соотношения

$$u_n(x) = \lambda F\left(x, \int_a^b \frac{f(x,s,u_n(s))}{s-x} ds\right) + \lambda L_n(x) + g(x), \tag{2}$$

$$\text{где } L_n(x) = \sum_{i=1}^{k} C_{n_i} \psi_i(x),$$

где $\{\psi_i(x)\} -$ произвольная ортонормированная система линейно независимых функций из $L_2[a,b]$, а коэффициенты C_{n_i} будем определять из системы

$$C_{n_i} = \int_a^b \delta_n(x) \psi_i(x) dx \tag{3}$$

$$\delta_n(x) = F\left(x, \int_a^b \frac{f(x,s,u_n(s))}{s-x} ds\right) - F\left(x, \int_a^b \frac{f(x,s,u_{n-1}(s))}{s-x} ds\right) \tag{4}$$

Мы покажем сходимость итерационного процесса (2), существование решение уравнения (1) и разрешимость системы (3) при определенных условиях на функции $f(x,t)$ и $f(x,s,u)$.

Пусть функция $f(x,t)$ определена для $a \le x \le b, -\infty < t < \infty$ и удовлетворяет условиям

$$|F(x,t_1) - F(x,t_2)| \le A|t_1 - t_2|, \qquad (5)$$

$$F(x,0) \in L_2[a,b], \qquad (6)$$

а функция $f(x,s,u)$ определена при $a \le x, s \le b, -\infty < u < \infty$ и удовлетворяет условиям

$$|f(s,s,u) - f(s,s,v)| \le B|u - v|, \qquad (7)$$

$$|k(x,s,u) - k(x,s,v)| \le R(x,s)|u - v|, \qquad (8)$$

где $k(x,s,u) = f(x,s,u) - f(s,s,u), R(x,s) -$ неотрицательная функция такая, что

$$\int_a^b \int_a^b \frac{R^2(x,s)}{|s-x|^2} dxds = R^2, < \infty \qquad (9)$$

$$\int_a^b \int_a^b f^2(x,s,o)dxds \ < \infty, \qquad (10)$$

где $A, B, R_1 -$ постоянные.

Пусть $u^*(x) \in L_2[a,b]$ решение уравнения (1). Обозначим $\lambda_n(x) = u^*(x) - u_n(x)$.

Тогда

$$\lambda_n(x) = \lambda\left[F\left(x, \int_a^b \frac{f\big(x,s,u^*(s)\big)}{s-x}ds\right) - F\left(x, \int_a^b \frac{f\big(x,s,u_n(s)\big)}{s-x}ds\right)\right] - \lambda\alpha_n(x) =$$

$$= \lambda\left[F\left(x, \int_a^b \frac{f(x,s,u^*(s))}{s-x}ds\right) - F\left(x, \int_a^b \frac{f(x,s,u_n(s))}{s-x}ds\right)\right]$$

$$+ \lambda[\delta_n(x) - \alpha_n(x)],$$

Пользуясь условием (5), имеем

$$|\lambda_n(x)| \le A|x|\left|\int_a^b \frac{f\big(x,s,u^*(s)\big) - f\big(x,s,u_n(s)\big)}{s-x}ds\right| + |x||\delta_n(x) - \alpha_n(x)|.$$

Преобразуем $f\big(x,s,u^*(s)\big) - f\big(x,s,u_n(s)\big)$

$$\left|\left[f\big(x,s,u^*(s)\big) - f\big(s,s,u_n(s)\big)\right] - \left[f\big(x,s,u_n(s)\big) - f\big(s,s,u_n(s)\big)\right]\right| +$$

$$+\left|f\big(s,s,u^*(s)\big) - f\big(s,s,u_n(s)\big)\right|.$$

Применяя интегральное неравенстве Гельдера, теорему Рисса-Хведелидзе с весом $\rho(x) = 1$, пользуясь условиями (7), (8), получим

$$\|\lambda_n(x)\| \le |\lambda||R_2|\big||\lambda_n(x) + (x)||\delta_n(x) - \alpha_n(x)|\big| \text{ или}$$

$$\|\lambda_n(x)\| \le \frac{|x|}{1-|x|R}\big||\delta_n(x) - \alpha_n(x)|\big| \qquad (11)$$

где

$R_2 = A(R_1 + C_2 B), C_2 -$ норма линейного сингулярного оператора в $L_2[a,b]$.

Как и при оценке $\|\lambda_n(x)\|$ из (4) получим

$$\left|\left|\delta_n(x)\right|\right| \le R_2 \, \|u_n - u_{n-1}\| \qquad (12)$$

Оценим $\|u_n(x) - u_{n-1}(x)\|$.

$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = \lambda\left[F\left(x, \int_a^b \frac{f\big(x,s,u_{n-1}(s)\big)}{s-x} ds\right) - F\left(x, \int_a^b \frac{f\big(x,s,u_{n-2}(s)\big)}{s-x} ds\right)\right] + $$
$$+ \lambda[\alpha_n(x) - \alpha_{n-1}(x)] - \lambda[\delta_{n-1}(x) - \alpha_{n-1}(x) + \alpha_n(x)],$$

откуда

$$\left|\left|\delta_n(x)\right|\right| \le |\lambda| \, |R_2| \, \|\delta_{n-1}(x) - \alpha_{n-1}(x) + \alpha_n(x)\| \qquad (13)$$

Справедливо равенстве

$$\|\delta_n(x) - \alpha_{n-1}(x) + \alpha_n(x)\|^2 = \|\delta_n(x) - \alpha_{n-1}(x)\|^2 + \|\alpha_n(x)\|^2. \qquad (14)$$

Если подобрать λ так, чтобы выполнилось неравенство

$$\alpha = |x| R_2 < 1, \qquad (15)$$

то получим

$$\|\delta_n(x) - \alpha_n(x)\| \le \alpha\|\delta_{n-1}(x) - \alpha_{n-1}(x)\| \le \alpha^{n-1}\|\delta_1(x) - \alpha_1(x)\|. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (11), получим

$$\|\lambda_n(x)\| \le \frac{|\lambda|\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\left|\left|\delta_1(x) - \alpha_1(x)\right|\right|.$$

Отсюда следует сходимость последовательных приближений (2) по норме $L_2[a,b]$ к решению уравнения (1).

Докажем существование решения уравнения (1). Для этого запишем это уравнение в операторном виде

$$u = Mu, \qquad (18)$$

$$Mu = \lambda F\left(x, \int_a^b \frac{f(x,s,u(s))}{s-x} ds\right) + g(x).$$

Очевидно, при выполнении условий (5-10) оператор M действует из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$.

Покажем, что оператор M является оператором сжатия.

Пусть выполнены условия (5-10), тогда

$$|Mu - Mv| \le |\lambda| A \left|\int_a^b \frac{\big[f\big(x,s,u(s)\big) - f\big(s,s,u(s)\big)\big] - \big[f\big(x,s,v(s)\big) - f\big(s,s,v(s)\big)\big]}{s-x} ds\right| +$$

$$+|\lambda|A\left|\int_a^b \frac{f(s,s,u(s))-f(s,s,v(s))}{s-x}ds\right|.$$

Применяя интегральное неравенство Гельдера, теорему Рисса-Хведелидзе, получим

$$\|Mu-Mv\|\le|\lambda|A(R_1+BC_2)\|u-v\|$$

или

$$\|Mu-Mv\|\le\alpha\|u-v\|,$$

откуда при выполнении условия (15) следует, что оператор M является оператором сжатия в $L_2[a,b]$, из чего следует существование единственного решения уравнения (1) в $L_2[a,b]$.

Теперь покажем разрешимость системы (3). Будем считать, что все последовательные приближения до $(n-1)-$го порядка включительно известными. Подставляя (4) в (3), а потом $u_n(x)$ из (2), получим

$$\mathrm{C}_{n_i}=\int_a^b F\left(x,\frac{f\big(x,s,\tau(s)\big)}{s-x}ds\right)\psi_i(x)dx-b_i, \tag{18}$$

где

$$\tau(s)=\lambda F\left(s,\int_a^b\frac{f(s,t,u_{n-1}(t))}{t-s}dt\right)+\lambda\sum_{j=1}^{k}C_{n_j}\psi_j(s)+g(s),$$

$$b_i=\int_a^b F\left(x,\int_a^b\frac{f\big(x,s,u_{n-1}(s)\big)}{s-x}ds\right)\psi_i(x)dx$$

b_i- считаем известными.

Запишем (18) в операторном виде

$$\mathrm{C}_{n_i}=P_i(\alpha_n) \tag{19}$$

где

$$P_i(\alpha_n)=\int_a^b F\left(x,\int_a^b\frac{f\big(x,s,\tau(s)\big)}{s-x}ds\right)\psi_i(x)dx-b_i.$$

Введем метрику

$$\|\alpha_n(x)\|^2=\sum_{i=1}^{k}C_{n_i}^2. \tag{20}$$

Покажем, что оператор P_i является оператором сжатия в метрике (20).

Применяя неравенство Коши-Буняковского, интегральные неравенства Гёльдера и Миньковского, теорему Рисса-Хведелидзе и пользуясь тем, что $\|\psi_i(x)\|_{L_2}=1$, получим

$$\left|\int_a^b\left[F\left(x,\int_a^b\frac{f\big(x,s,\tau(s)\big)}{s-x}ds\right)-F\left(x,\int_a^b\frac{f(x,s,\tau'(s))}{s-x}ds\right)\right]\psi_i(x)dx\right|\le$$

$$\leq A\left\{\int_a^b \left|\int_a^b \frac{f\big(x,s,\tau(s)\big)-f\big(x,s,\tau'(s)\big)}{s-x}ds\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq A\left\{\int_a^b \left|\int_a^b \frac{\big[f\big(x,s,\tau(s)\big)-f\big(s,s,\tau(s)\big)\big]-\big[f\big(x,s,\tau'(s)\big)-f\big(s,s,\tau'(s)\big)\big]}{s-x}ds\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$+$

$$+A\left\{\int_a^b \left|\int_a^b \frac{f\big(s,s,\tau(s)\big)-f\big(s,s,\tau'(s)\big)}{s-x}ds\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq A\left\{\int_a^b \left|\int_a^b \frac{R(x,s)|\tau(s)-\tau'(s)|}{|s-x|}ds\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} + ABC_2\|\tau(s)-\tau'(s)\| \leq$$

$$\leq A\big((R_1+BC_2)\big)\|\tau(s)-\tau'(s)\| = R_2\left\|\lambda\sum_{j=1}^{k}\left(C_{n_j}-C'_{n_j}\right)\psi_j(x)\right\|$$

$$\leq R_2|\lambda|\ \ \|\alpha_n-\alpha_n'\|.$$

Следовательно, если

$$|\lambda|R_2 < 1, \qquad (21)$$

то система (3) разрешима единственным образом.

Для определения последовательных приближений можно дать и такой алгоритм метода осреднения функциональных поправок

$$\overline{u_n}(x) = \lambda F\left(x, \int_a^b \frac{f[x,s,\overline{u_{n-1}}(s)+\overline{\alpha_n}(s)]}{s-x}ds\right) + g(x), \qquad (2')$$

где

$$\overline{\alpha_n}(x) = \sum_{i=1}^{k}\overline{C_{n_i}}\psi_i(x),$$

а коэффициенты $\overline{C_{n_i}}$ определяются из соотношения

$\overline{C_{n_i}} =$

$$\lambda\int_a^b\left[F\left(x,\int_a^b\frac{f(x,s,\overline{u_{n-1}}(s)+\overline{\alpha_n}(s))}{s-x}ds\right)-F\left(x,\int_a^b\frac{f(x,s,\overline{u_{n-2}}(s)+\overline{\alpha_{n-1}}(s))}{s-x}ds\right)\right]\psi_i(x)dx.$$

(3')

При этом оценка (17) имеет вид

$$\|\overline{\Delta_n}(x)\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\left\|\overline{\delta_1}(x)-\overline{\alpha_1}(x)\right\|, \qquad (17')$$

где $\Delta_n(x) = u^*(x)-u_n(x);\quad \alpha = |\lambda|R_2 < 1.$

Таким образом доказана

Теорема. Пусть функция $F(x,t)$ определена при $a \leq x \leq b, -\infty < t < \infty$ и удовлетворяет условиям (5), (6), а функция $f(x,s,u)$ определена при $a \leq x, s \leq b$,

$-\infty < u < \infty$ и удовлетворяет условиям (7-10), $\lambda -$ удовлетворяет условию (21).

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение в $L_2[a,b]$, к которому сходятся последовательные приближения (2) или (2'), причем имеет место оценка (17) или (17').

Литература

1. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Москва, «Наука», 1980г.

УДК 519.86

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПО ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА ПЛОДОВО-ЯГОДНЫХ КОМПОТОВ

Ильясова С.А. (ДГТУ)

Аннотация: Рассматривается одна из возможных ситуаций оптимизации производства. Полученная по оптимальному решению производственная структура хозяйства позволит предприятию обеспечить гарантированное производство и поставки продукции. Соблюдение оптимальных пропорций в развитии отраслей позволит хозяйству повысить свою рентабельность, укрепить экономику, обеспечить более выгодное положение на рынке

Ключевые слова: предприятие, компот, оптимизация, экономико-математическая модель.

В условиях рыночной экономики важным фактором, влияющим на конечные результаты производства, является поиск более выгодных сочетаний и соотношений различных отраслей, поскольку успех деятельности любого предприятия определяется, прежде всего, правильным выбором специализации. При этом необходимо исходить из конкретных условий функционирования хозяйства и ресурсов, имеющихся в его распоряжении.

Цель заключается в производства плодово-ягодных компотов, при которых объём прибыли от реализации товарной продукции был бы максимальным.

Рассмотрим одну из возможных ситуаций оптимизации.

Предприятие выпускает 3 вида компотов, причём суточное плановое задание составляет не менее 90 уп. компотов 1-го вида, 70 уп. - 2, 60 уп. - 3. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования, 850 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии, расход которых на 1уп. представлен в таблице. Цена за 1уп. равна 80 у.е. - 1 вид, 70 - 2й, 60 - 3й. Определить сколько упаковок компотов каждого вида следует выпускать, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Ресурсы	1	2	3
Оборудование	2	3	4
Сырьё	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Обозначим за x_1 - количество метров первого вида ткани, x_2 - количество метров второго вида ткани, x_3 - количество метров третьего вида ткани. Далее составим математическую модель задачи, указав все условия согласно условия к задаче.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 780 \\ 1x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 850 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 790 \\ x_1 \ge 90 \\ x_2 \ge 70 \\ x_3 \ge 60 \end{cases}$$

$$F(x) = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \to MAX$$

Учитывая минимальный объём производства, преобразуем условие задачи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 150 \\ 1x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 180 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 120 \end{cases}$$

$$F(x) = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \to MAX$$

Смысл данного преобразования заключается в том, чтобы уменьшить заданные ресурсы, на тот обязательный объём, который необходимо произвести и исключить данные ограничения. В дальнейшем при рассмотрении итогового решения данное условие будет добавлено в целевую функцию.

Далее решим задачу симплекс-методом. Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции $F(x) = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3$ при следующих условиях-ограничений.

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 150$

$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 180$

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме).

В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_4. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_5. В 3-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_6.

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 150$

$1x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 180$

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 120$

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Базисные переменные — это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.

Экономический смысл дополнительных переменных: дополнительные перемены задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_4, x_5, x_6. Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план: X1 = (0,0,0,150,180,120)

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	150	2	3	4	1	0	0
x_5	180	1	4	5	0	1	0
x_6	120	3	4	2	0	0	1
F(X0)	0	-80	-70	-60	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план не оптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее: min (150 : 2, 180 : 1, 120 : 3) = 40

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (3) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_4	150	2	3	4	1	0	0	75
x_5	180	1	4	5	0	1	0	180
x_6	120	3	4	2	0	0	1	40
F(X1)	0	-80	-70	-60	0	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x_6 в план 1 войдет переменная x_1.

Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_6 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=3.

На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 плана 1 записываем нули. Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_1 и столбец x_1. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А*В) /РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (3), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

Расчет каждого элемента

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
150-(120 • 2):3	2-(3 • 2):3	3-(4 • 2):3	4-(2 • 2):3	1-(0 • 2):3	0-(0 • 2):3	0-(1 • 2):3
180-(120 •	1-(3 •	4-(4 •	5-(2 •	0-(0 •	1-(0 •	0-(1 •

1):3	1):3	1):3	1):3	1):3	1):3	1):3
120 : 3	3 : 3	4 : 3	2 : 3	0 : 3	0 : 3	1 : 3
0-(120 • -80):3	-80-(3 -80):3	-70-(4•-80):3	-60-(2 • -80):3	0-(0 • -80):3	0-(0 • -80):3	0-(1 • -80):3

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	70	0	$^{1}/_{3}$	$2^{2}/_{3}$	1	0	$^{-2}/_{3}$
x_5	140	0	$2^{2}/_{3}$	$4^{1}/_{3}$	0	1	$^{-1}/_{3}$
x_1	40	1	$1^{1}/_{3}$	$^{2}/_{3}$	0	0	$^{1}/_{3}$
F(X1)	3200	0	$36^{2}/_{3}$	$-6^{2}/_{3}$	0	0	$26^{2}/_{3}$

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план не оптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_3, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i3} и из них выберем наименьшее: min (70 : $2^{2}/_{3}$, 140 : $4^{1}/_{3}$, 40 : $^{2}/_{3}$) = $26^{1}/_{4}$

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен ($2^{2}/_{3}$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_4	70	0	$^{1}/_{3}$	$2^{2}/_{3}$	1	0	$^{-2}/_{3}$	$26^{1}/_{4}$
x_5	140	0	$2^{2}/_{3}$	$4^{1}/_{3}$	0	1	$^{-1}/_{3}$	$32^{4}/_{13}$
x_1	40	1	$1^{1}/_{3}$	$^{2}/_{3}$	0	0	$^{1}/_{3}$	60
F(X2)	3200	0	$36^{2}/_{3}$	$-6^{2}/_{3}$	0	0	$26^{2}/_{3}$	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x_4 в план 2 войдет переменная x_3.

Строка, соответствующая переменной x_3 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=$2^{2}/_{3}$

На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1. В остальных клетках столбца x_3 плана 2 записываем нули. Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_3 и столбец x_3. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

Расчет каждого элемента

B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$70 : 2^{2}/_{3}$	$0 : 2^{2}/_{3}$	$^{1}/_{3} : 2^{2}/_{3}$	$2^{2}/_{3} : 2^{2}/_{3}$	$1 : 2^{2}/_{3}$	$0 : 2^{2}/_{3}$	$^{-2}/_{3} : 2^{2}/_{3}$
$140-(70 \cdot 4^{1}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$0-(0 \cdot 4^{1}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$2^{2}/_{3}-(^{1}/_{3} \cdot 4^{1}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$4^{1}/_{3}-(2^{2}/_{3} \cdot 4^{1}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$0-(1 \cdot 4^{1}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$1-(0 \cdot 4^{1}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$^{-1}/_{3}-(^{-2}/_{3} \cdot 4^{1}/_{3}):2^{2}/_{3}$
$40-(70 \cdot ^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$1-(0 \cdot ^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$1^{1}/_{3}-(^{1}/_{3} \cdot ^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$^{2}/_{3}-(2^{2}/_{3} \cdot ^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$0-(1 \cdot ^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$0-(0 \cdot ^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$^{1}/_{3}-(^{-2}/_{3} \cdot ^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$
$3200-(70 \cdot -6^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$0-(0 \cdot -6^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$36^{2}/_{3}-(^{1}/_{3} \cdot -6^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$-6^{2}/_{3}-(2^{2}/_{3} \cdot -6^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$0-(1 \cdot -6^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$0-(0 \cdot -6^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$	$26^{2}/_{3}-(^{-2}/_{3} \cdot -6^{2}/_{3}):2^{2}/_{3}$

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	$26^{1}/_{4}$	0	$^{1}/_{8}$	1	$^{3}/_{8}$	0	$^{-1}/_{4}$
x_5	$26^{1}/_{4}$	0	$2^{1}/_{8}$	0	$-1^{5}/_{8}$	1	$^{3}/_{4}$
x_1	$22^{1}/_{2}$	1	$1^{1}/_{4}$	0	$^{-1}/_{4}$	0	$^{1}/_{2}$
F(X2)	3375	0	$37^{1}/_{2}$	0	$2^{1}/_{2}$	0	25

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	$26^{1}/_{4}$	0	$^{1}/_{8}$	1	$^{3}/_{8}$	0	$^{-1}/_{4}$
x_5	$26^{1}/_{4}$	0	$2^{1}/_{8}$	0	$-1^{5}/_{8}$	1	$^{3}/_{4}$
x_1	$22^{1}/_{2}$	1	$1^{1}/_{4}$	0	$^{-1}/_{4}$	0	$^{1}/_{2}$
F(X3)	3375	0	$37^{1}/_{2}$	0	$2^{1}/_{2}$	0	25

Оптимальный план можно записать так:

$x_3 = 26^{1}/_{4}$

$x_1 = 22^{1}/_{2}$

F(X)усл. $= 60 \cdot 26^{1}/_{4} + 80 \cdot 22^{1}/_{2} = 3375$

Конечная функция будет иметь вид:

$$F(X) = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 3375$$

$$F(X) = 80 \cdot 90 + 70 \cdot 70 + 60 \cdot 60 + 3375 = 7200 + 4900 + 3600 + 3375 = 19075$$

Ответ: 19075

Такое распределение, имеющихся в распоряжении предприятия, позволит более эффективно использовать ресурсы с максимальной отдачей от вложенных средств.

Полученная по оптимальному решению производственная структура хозяйства позволит предприятию обеспечить гарантированное производство и поставки продукции. Соблюдение оптимальных пропорций в развитии отраслей позволит хозяйству повысить свою рентабельность, укрепить экономику, обеспечить более выгодное положение на рынке.

Список литература

1. Красс, М. С. Математика в экономике. Математические методы и модели. Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: Юрайт, 2014. - 544 с. 2.

2. Попов, А. М. Экономико-математические методы и модели / А.М. Попов, В.Н. Сотников. - М.: Юрайт, 2014. - 480 с.

3. Фомин, Г. П. Экономико-математические методы и модели в коммерческой деятельности. Учебник / Г.П. Фомин. - М.: Юрайт, 2014. - 464 с.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Магомедов Н.Н. (ДГТУ)

Аннотация. Работа посвящена построению динамики систем частиц в теории относительности путем сведения ее к одночастичной задаче
Ключевые слова: система частиц, импульс, энергия, масса, динамика, теория относительности, релятивистская механика.

Построение динамики системы частиц в теории относительности является сложной задачей. Сложность эта связана с выяснением понимания полной энергии, импульса и массы. В общем случае, если система состоит из взаимодействующих релятивистских частиц, ее полная энергия:

$$E_{вз} + E_c,$$

где $E_{вз}$– суммарная энергия взаимодействия всех частиц,
E_c – собственная энергия частиц системы.

В классической механике $E_{вз}$ представляет собой потенциальную энергию взаимодействия частиц системы, она зависит от конфигурации системы. В релятивистской механике не существует понятие потенциальной энергии взаимодействия, что обусловлено тем обстоятельством, что само понятие потенциальной энергии тесно связано с представлением о дальнодействии – мгновенной передаче взаимодействий. Являясь функцией конфигурации системы, потенциальная энергия системы в каждый момент времени определяется относительным расположением частиц системы в данный момент времени. Изменение конфигурации системы должно мгновенно вызвать изменение потенциальной энергии. Поскольку в действительности этого нет, взаимодействия передаются с конечной скоростью, то для системы, состоящей из релятивистских частиц, понятие потенциальной энергии не имеет смысла, как в классической механике.

В общем случае написать выражение для энергии взаимодействия, а следовательно, и для полной энергии системы взаимодействующих релятивистских частиц, является сложной задачей. Это же относится и к импульсу системы, т.к. в релятивистской механике-динамике импульс является величиной, зависящей от полной энергии. Поэтому построение динамики системы релятивистских частиц ограничено немногими простейшими случаями. Одним из таких простейших случаев является рассмотрение системы из невзаимодействующих релятивистских частиц.

В этом случае полная энергия и импульс обладают аддитивными свойствами и для системы их можно представить в виде:

$E = \sum m_i c^2 \quad , \vec{p} = \sum \vec{p}_i$,

где m_i и $\vec{p}_i$– релятивистская масса и импульс, соответственно, i -той частицы системы. Так как взаимодействие между частицами отсутствует, то скорости всех частиц постоянны, а следовательно, постоянны во времени полная энергия и импульс всей системы. Введем понятия массы покоя и энергии покоя системы m_0, E_0 , которые связаны известным выражением:

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Масса системы m_0 не равна сумме масс покоя частиц, из которых состоит система:

$$m_0 > \sum m_{0i} \; .$$

Введение энергии покоя E_0 и массы покоя m_0, позволяет рассматривать систему невзаимодействующих релятивистских частиц как одну частицу с полной энергией:

$E = \sum m_i c^2$, импульсом $\vec{p} = \sum \overrightarrow{p_i}$, массой, $m_0 = E_0/c^2$ можно утверждать о справедливости формул для системы частиц:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = \text{пост.} \; , \vec{p} = E\vec{v}/c^2 ,$$

где $\vec{v}$ – скорость системы как целого.

Справедливость этих формул можно продемонстрировать на примере столкновения двух частиц, используя при этом законы сохранения энергии и импульса систем.

Применение закона сохранения энергии и импульса к ядерным процессам позволило экспериментально проверить справедливость одного из фундаментальных законов теории относительности – закона взаимосвязи массы и энергии.

УДК 517.1

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА.

Нурмагомедов А.М. (ДГТУ)

Аннотация: Показана инвариантность формы сингулярного интегрального оператора с ядром Коши относительно кривой интегрирования для широких классов контуров на комплексной плоскости. На основании этого получено обобщение неравенства Рисса - Зигмунда в улучшенной форме; показана пригодность интегральной формулы Шварца и, соответственно, разрешимость задачи Шварца для определения гармонической функции для этих контуров.

Ключевые слова: инвариантность, сингулярный интегральный оператор, ядро Коши, краевых задачи, Риман, Гильберт, формула Шварца, гармонические функции.

Пусть Γ - замкнутая кривая без точек самопересечения, удовлетворя - ющая условию $\frac{ds}{|dr|} \le N < \infty$. Класс таких контуров обозначим через (γ). Для $\Gamma \in (\gamma)$ примем, что $\frac{1}{\pi \cdot i}\int_{\Gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = 1$ почти всюду. Если контур замкнутый, то внутренняя область, ограниченная кривой Γ обозначим через D^{+}. Для каждого контура $\Gamma \in (\gamma)$ к существуют такие $m(\Gamma), M(\Gamma)$, что $0 < m \le \frac{ds}{d\varphi} \le M < \infty$, где s- элемент длины дуги кривой Γ, $\varphi \in [0;2\pi]$. Очевидно, что для замкнутых контуров $\Gamma \in (\gamma)$ при всех целых значениях $n \ne -1$ имеет место равенство

$\oint\limits_{\Gamma} t^n dt = 0$, где интеграл понимается в смысле Лебега. С учетом последнего почти всюду имеет место равенство

$$(Au)(t) \equiv \frac{1}{\pi \cdot i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau = \sum_{n \ge 0} a_n t^n - \sum_{k \ge 1} b_k t^k \;, u(t) = \sum_{n \ge 0} a_n t^n + \sum_{k \ge 1} b_k t^{-k}, \tag{1}$$

где $u(t) \in L_p(\Gamma)$, $p \in (1;\infty)$.

Теорема 1.1. Пусть замкнутая кривая $\Gamma \in (\gamma)$.

Тогда при любой $u(t) \in L_p(\Gamma)$ $(p \in (1;\infty))$ выполняется равенство

$$(Au)(t) = \frac{1}{\pi \cdot i} \int\limits_{|t_0|=1} \frac{u^0(\tau_0)}{\tau_0 - t_0} d\tau_0 = (A^0 u^0)(t_0), u^0(t_0) = u(t\,(t_0)); \tag{2}$$

и имеет место обобщенное неравенство Рисса-Зигмунда

$$\int\limits_{\Gamma} |(Au)(t)|^p dt \le B(\Gamma) \cdot A_p \cdot \|u(t)\|_p^p, \quad B = \frac{M}{m}. \tag{3}$$

Доказательство равенства (2) прямо вытекает из равенства (1).

При конформном отображении области D^+ на единичный круг

$$u(t) = u^0(t_0) = \sum_{n \ge 0} a_n t^n + \sum_{k \ge 1} b_k t^{-k} = \sum_{n \ge 0} a_n^0 t_0^n + \sum_{k \ge 1} b_k^0 t_0^{-k}; \tag{4}$$

отсюда и следует равенство(2). Таким же путем получаем и неравенство (3) :

$$\|Au\|_p^p = \int\limits_0^{2\pi} \left|(A^0 u^0)(\tau_0)\right|^p s'_\varphi d\varphi \le M \left\|A^0 u^0\right\|_p^p \le M A_p \left\|u^0\right\|_p^p = M A_p \int\limits_{\Gamma} |u(t)|^p (s'_\varphi)^{-1} ds = \frac{M}{m} A_p \|u\|_p^p. \tag{5}$$

Теорема доказана.

Замечание 1.1. Утверждения теоремы остаются верными и в случае разомкнутого контура Γ без точек самопересечения, а также, когда Γ состоит из конечного числа соответствующих разомкнутых контуров.

Для доказательства достаточно замкнуть эти контура в один контур с сохранением принадлежности классу (γ) , и принять $u(t) = 0$ на дополнительных кривых замыкания.

Обычно авторы при переходе интеграла от контура Γ к единичной окружности пользуются прямым равенством

$$(Au)(t) = \frac{1}{\pi \cdot i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{u^0(\tau_0)}{\tau_0 - t_0} \Psi(t_0, \tau_0; t, \tau) d\tau_0 \quad , \quad \Psi = \frac{\tau_0 - t_0}{\tau - t} \cdot \frac{d\tau}{d\tau_0}, \tag{6}$$

что сильно осложняет дело; и часто делает невозможным перенос свойств оператора A^0 к оператору A. В частности, Карлеман при доказательстве неравенства типа (3) пользовался функцией Ψ . Его доказательству посвящена целая целая статья в толстом журнале и не получена общая форма для коэффициента $B(\Gamma)$.

Равенство (2) позволяет обобщить формулу Шварца на контуры класса (γ).

Теорема 1.2. Пусть $\Gamma \in (\gamma)$, $t = t(s) \in \Gamma$, s – длина дуги кривой Γ от начала до точки t, $s \in [0, l]$. На Γ задана действительная функция $u(s)$, принадлежащая L_p.

Тогда аналитическая в области D^+ функция, действительная часть граничного значения которой равна $u(s)$, определяется по обобщенной формуле Шварца:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\pi \cdot i}\int_\Gamma \frac{u(s)d\tau}{\tau - z} - a_0 + C \cdot i \quad , a_0 = \frac{1}{2 \cdot l}\int_0^l u(s)ds \quad , z \in D^+. \tag{7}$$

Функция $\Phi^+(z)$ голоморфна в каждой внутренней точке области D^+ .Значит, она аналитична в этой области.

По формуле Племеля- Сохоцкого граничное значение

$$\Phi^+(t) = u(s) + \frac{1}{\pi \cdot i}\int_\Gamma \frac{u(s)}{\tau - t}d\tau - a_0 + C \cdot i. \tag{8}$$

Из равенства (2) и классической формулы Шварца [2] получаем, что

$$\Phi^+(t) = u(s) + \frac{1}{\pi \cdot i}\int_0^{2\pi} \frac{u^0(\tau_0)}{\tau_0 - t_0}d\tau_0 - a_0 + C \cdot i = u(s) - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}(\phi) ctg\frac{\phi - \varphi}{2}d\phi + C \cdot i, \tag{9}$$

где $\bar{u}(\varphi) = u(s(\varphi))$, $s(\varphi)$- функция, получаемая при конформном отображении области D^+ на единичный круг.

Таким образом, получаем, что $\mathrm{Re}[\Phi^+(t)] = u(s)$. Одновременно получаем, что сопряженная $u(s)$ функция $v(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{u}(\phi)\, ctg\frac{\phi - \varphi}{2}d\phi + C$, где C - произвольная действительная постоянная.

Теорема 1.2 дает также и решение задачи Шварца для области D^+ .Задача Шварца заключается в определении гармонической в области D^+ функции $U(x,y)$ по по заданному граничному значению $u(s)$. Согласно равенству (7) $\Phi^+(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, где U,V -функции, гармонические в области D^+. Предельным значением функции $U(x,y)$, согласно равенству (9), является $u(s)$.

Для круга с центром в начале координат задача Шварца решается по формуле Пуассона [3] с помощью перехода к полярным координатам. Формула (7) , по нашему мнению, дает более простое и естественное решение задачи Шварца и для круга.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: «Наука», 1968. 511 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физмат, 1963. 639 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1972. 735 с.

УДК 517.8

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИСТАНЦИОННО ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Расулов А.Г.(ДГТУ)

Аннотация: В этой статье мы строим математическую модель, которая позволить установить взаимосвязь между математическим содержанием, приближенным к дисциплине, с некоторыми проблемами, связанными с реализацией студентов. В этой статье мы поставили перед собой задачу проанализировать возможность педагогического вклада при использовании технологий дистанционного обучения при котором связь между содержанием учебной программы и применением математического моделирования при поддержке технологий в повседневной жизни студента, будет способствовать реализации учебных дисциплин полноценно, учитывая такие ситуации связанные с текущей или будущей профессиональной деятельности.

Ключевые слова: *дистанционное обучение, автоматизированная система обучения, процесс обучения, модель обучающей системы, база знаний.*

В настоящее время широкое распространение получили системы обучения с применением компьютерных технологий. Дистанционное обучение прочно вошло в образовательную практику, для его поддержки созданы системы управления обучением. Образовательные системы с использованием компьютерных технологий отличаются степенью распределения функции управления между системой и пользователем, степенью сочетания теоретического и практического аспектов образовательного процесса, наличию средств контроля обучения, сочетающая принципы системы управления обучением с применением интеллектуальных технологий для оптимизации компонентов процесса обучения.

Система управления обучением - информационная система, создающая условия для всестороннего и полного информационно-коммуникационного обеспечения всех субъектов учебно- воспитательного процесса, направленная на достижение поставленных образовательных и воспитательных целей, с реализацией функции документооборота.

Система управления обучением основана на следующих принципах:

- модульности, расширяемости (возможности варьировать подключаемые сервисы;
- минимальной достаточности (используются только необходимые сервисы);
- функциональной полноты (обеспечение всех составляющих процесса обучения);
- независимости системы от специфики учебного содержания;
- кросс-платформенности;
- интегрируемости (возможности использования инструментов из сторонних серверов).

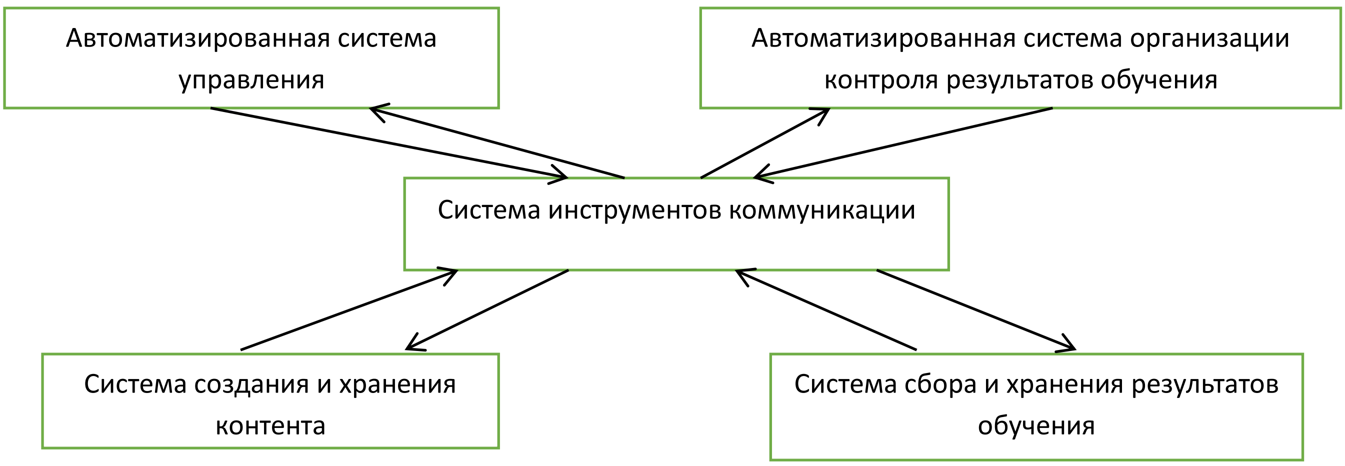

Рисунок 1 - Структура системы управления обучением

Автоматизированная система управления обучением реализует функции планирования, организации работы, координации и регулирования взаимодействия участников, учета и анализа результатов процесса обучения. Система инструментов коммуникации реализует взаимодействие различных модулей системы управления и общение участников процесса обучения. Система создания и хранения контента предоставляет участникам возможности создания и хранения учебных курсов, система сбора и хранения результатов обучения предназначена для сбора статистической информации о процессе обучения, автоматизированная система организации контроля обучения предназначена для автоматизации создания, проверки и обработки результатов тестирования обучающихся.

Основой для создания структурной модели обучающей системы являлась структурная модель системы управления обучением и структурная модель учебного процесса. Структурная модель обучающей системы представлена на рисунке 2.

Цели обучающей системы представляют основу деятельности преподавателя в системе, определяющего содержание и организацию процесса обучения.

Деятельность обучающегося в системе определяется содержательным и организационным компонентом, а также деятельностью преподавателя. Наличие обратной связи между участниками образовательного процесса может являться причиной изменений в содержании и организации процесса обучения с целью их адаптации к потребностям обучающегося. Компонент контроля определяет факт достижения обучающимся поставленных целей. Компонент сбора и анализа данных позволяет собирать и сохранять статистические данные о деятельности учащегося в системе, результаты контроля достижения поставленных целей и использовать их для оптимизации процесса обучения.

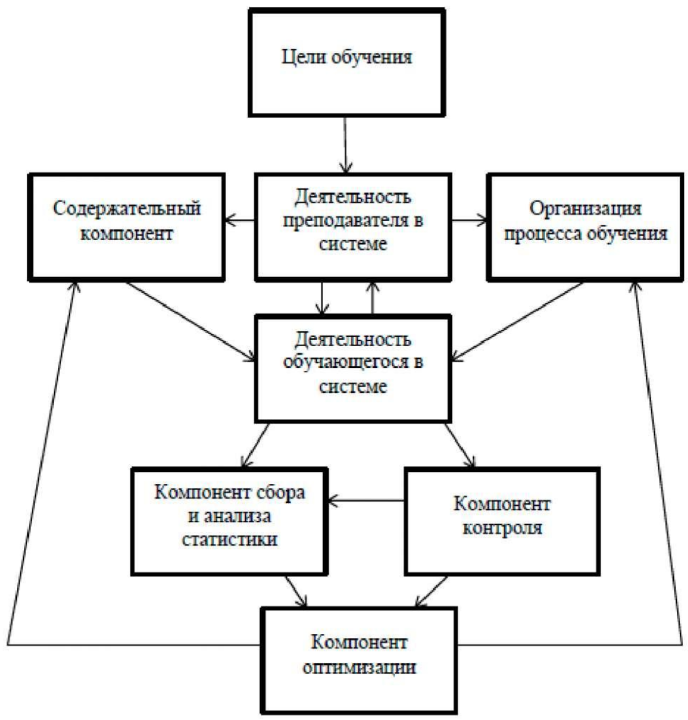

Рисунок 2 - Структурная модель обучающей системы.

Компонент сбора и анализа статистики использует данные о результатах контроля и о деятельности обучающихся в системе. Затем эти данные могут быть предъявлены преподавателю по запросу или переданы компоненту оптимизации для внесения изменений в содержание и методы обучения.

На основе структурной модели была разработана математическая модель обучающей системы, которая может быть представлена следующим образом:

URS = (K,C,PP,PO) *(1)*

где URS - обучающая система, K - множество учебных курсов обучающей системы, C - множество компетенций, формируемых у обучающихся в результате освоения курсов системы, - PP множество профилей преподавателей системы, PO - множество профилей обучающихся в системе.

Множество учебных курсов представляет следующее:

$K = \{ К_i\}, \ i = 1, \ldots, n$ (2)

где $К_i$ - учебный курс системы, имеющий номер i, n - количество учебных курсов в системе.

$К_i = \langle G_i, CT_i, EM_i, Q_i \rangle, \quad i = 1, \ldots, n$ (3)

Где G_i - множество компетенций, формируемых в результате изучения данного курса, CT_i –граф содержания курса с номером i , EM_i – множество элементов учебного контента i - того курса, Q_i - фонд оценочных средств курса с номером i.

$G_i = \{g_{ij}\}, i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m.$ (4)

где G_i - множество компетенций, формируемых в результате изучения i-го курса, множество G_i является подмножеством множества C компетенций обучающей системы, g_{ij} - компетенция, формируемая в процессе изучения данного курса, n - количество учебных курсов в системе, m - количество компетенций, формируемых в процессе изучения курса с номером i.

Множество компетенций формируется при проектировании учебного процесса, реализуемого обучающей системой.

Компонент модели GT_i курса с номером i представляет граф, заданный множеством вершин, каждая из которых представляет наименование дидактической единицы содержания курса, и множеством ребер CTR_i, отражающих связи между ними.

$CT_i = \langle CTN_i, CTR_i \rangle, CTN_i = \{ctn_{ij}\}, i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, l;$ (5)

$CTR_i = \{(ctn_{it}, ctn_{if})\}, ctn_{it}, ctn_{if} \in CTN_i$ (6)

Где CTN_i - вершин графа учебного курса, представляющих наименования дидактических единиц указанного курса, CTR_i – множество ребер графа, отражающих связи между дидактическими единицами содержания учебного курса с номером i, (ctn_{it}, ctn_{if}) элемент множества CTR_i, указывающий на наличие связи (дуги графа) между элементами содержания ctn_{it} и ctn_{if} - количество учебных курсов в системе, l - количество элементов множества CTN_i (количество дидактических единиц курса).

Граф содержания курса «элементы теории множеств» представлен на рисунке 3.

Под содержательным разделом курса понимается следующее:

$$PK_{ij} = \langle pknm_{ij}, u_t, Epk_{if} \rangle, u_t \in U, Epk_{ij} \subset E_i, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l, t = 1,2, f = 1 \dots l1,$$

где PK_{ij} — содержательный раздел курса, соответствующий дидактической единице ctn_{ij} учебного курса с номером i, $pknm_{ij} -$ наименование содержательного раздела; $u_t -$ уровень подробности изложения учебного материала, U — множество уровней подробности изложения материала, Epk_{if}- множество единиц образовательного контента, соответствующих данному содержательному разделу, l1 - количество единиц образовательного контента, предлагаемых пользователям в рамках изучения соответствующего раздела.

Аналогично задаем и определяем уровень подробности изложения учебного материала, уровень изложения содержания курса, уровень изложения разделов, множество практических заданий курса, множество компетенций, выполнение практического задания, фонд оценочных средсв, количество пользователей, преподавателей, зарегистрированных в системе и т.д.

В результате получаем:

1. Разработана структурная модель обучающей системы.
2. На основе структурной модели разработана формализованная модель обучающей системы, которая включает: модель учебного курса обучающей системы, модель целевого компонента обучающей системы, модель профиля преподавателей системы, модель профиля обучающегося в системе.
3. Проведено исследование модели обучающей системы с использованием теории алгебр. Введены операции объединения, пересечения учебных курсов, позволяющие получать новые курсы на основе уже существующих в обучающей системе.

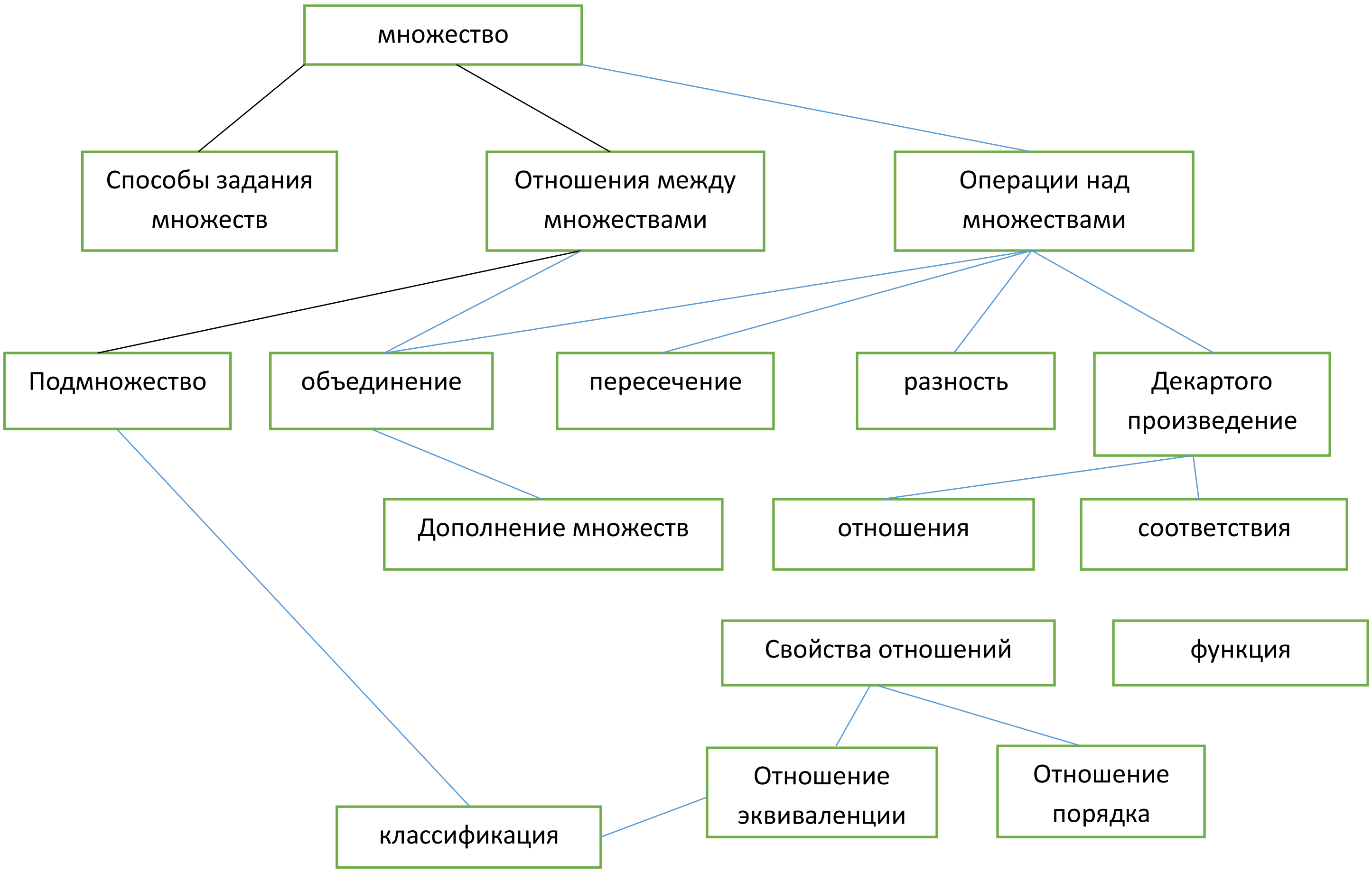

Рисунок 3 - Граф содержания курса «Элементы теории множеств».

Список титературы

1. Астахова И.Ф. Модель гибридной системы обучения/И.Ф.Астахова, Е.И.Киселева// Современные наукоемкие технологии. – 2016. –№12. – Вып.3. – С. 450-453.
2. Астахова И.Ф. Алгоритм использования искусственной иммунной системы для оптимизации целевого компонента информационной образовательной системы. / И.Ф.Астахова, Е.И.Киселева// Вестник Воронежского государственного университета. Серия Системный анализ и информационные технологии. – 2017. –№ 2. – С. 61-65.
3. Левина Е.Ю. Внутривузовская диагностика качества обучения на основе автоматизированной экспертной системы: автореф. … дис. канд. пед. Наук/ Е.Ю.Левина. – Казань, 2008. – 25 с.

УДК 517

ПИФАГОРЕЙСКИЙ СОЮЗ

Салахов А.З. (ДГТУ)
Накусов Р.А. (ДГТУ, ФМП)

Аннотация. В пифагорейском союзе имущество отдавалось для "общего пользования". Вероятно все же предполагалось, что имуществом должны распоряжаться иерархи союза - иначе могла бы возникнуть некоторая путаница, неупорядоченность, неисчислимость, неизмеримость, анархия, столь нелюбимые пифагорейцами. Аналогичные более поздние политические организации также подразумевали под "общностью имущества", как правило, передачу его в распоряжение руководителей.
Ключевые слова: пифагорейский союз, пифагор, иерархи, неупорядоченность, пифагор, математические знания

Около - 535 года Пифагор организовал школу, в г. Кротон, Южная Италия, где обучал своим теориям и целям жизни. Желавшие вступить в союз вначале проходили испытания: *"Три года..."* (Ямвлих). Потом они *"пять лет только слушали Пифагора, но не видели его"* (Ямвлих). *"... Предписывал, следуя Пифагору, пятилетнее молчание"* (Евсевий).

Союз пифагорейцев имел две степени посвящения. Некоторые знания сообщались всем ученикам, другие - только внутреннему кругу. *"Одни назывались математиками, то есть познавателями, другие акусматиками, то есть слушателями"* (Порфирий).

Видимо пифагорейцы низшей степени лишь следовали определенным правилам, предписаниям и получали символические этико-теологические наставления. На высшем уровне изучалась математика и религиозно-философские доктрины (перевоплощение душ, циклический характер Космоса...). Таким образом, математические знания, теории- методы созерцания, привезенные Пифагором из его поездок или разработанные им самим, составляли основную часть его учения, те таинства, мистерии в которых посвящали прошедших испытания и предварительную подготовку слушателей.

Пифагорейское учение сохранялось в тайне от непосвященных. *"Было неизвестно до Филолая, который продал Платону три книги"* (Диоген Лаэртский). Часть математических знаний разгласил пифагореец Гиппас, изгнанный за это из союза. *"Открыл недостойным... природу соизмеримого и несоизмеримого"* (Ямвлих).

В пифагорейском союзе имущество отдавалось для "общего пользования". *"Его ученики сносили добро воедино"* (Диоген Лаэртский). (Вероятно все же предполагалось, что имуществом должны распоряжаться иерархи союза - иначе могла бы возникнуть некоторая путаница, неупорядоченность, неисчислимость, неизмеримость, анархия, столь нелюбимые пифагорейцами. Да и аналогичные более поздние политические организации также подразумевали под "общностью имущества", как правило, передачу его в распоряжение руководителей). Открытия школы - интеллектуальное имущество - подобным же образом считались общими; вариант: приписывались Пифагору.

Пифагорейская символика. Символом союза была пентаграмма. Пифагорейцы называли ее "пожеланием здоровья". Возможно, это было связано с их представлениями о влиянии математических и философских занятий на духовное и физическое здоровье людей. Еще одним символом союза была *Тетрактида*, "Четверица". Популярными атрибутами математиков, то есть "посвященных" пифагорейцев были циркуль и линейка/ угольник.

Символом союза была пентаграмма. Пифагорейцы называли ее "пожеланием здоровья". Возможно, это было связано с их представлениями о влиянии математических и философских занятий на духовное и физическое здоровье людей. Еще одним символом союза была Тетрактида, "Четверица". Популярными атрибутами математиков, то есть "посвященных" пифагорейцев были циркуль и линейка/ угольник. Еще древние люди были уверены, что числа имеют свойство влиять на их жизнь. Пифагор одним из первых стал заниматься теорией чисел и развивать это учение. Опираясь на знания древних магов и жрецов и на собственные теории, Пифагор утверждал, что именно цифры правят миром. Он считал, что все сущее имеет абстрактную величину, поэтому все вещи (материальные и духовные понятия) можно сравнить с числами. Число, по мнению пифагорейцев, является первоосновой вещей. В течение 2500 лет, прошедших со смерти Пифагора, философы пытаются разгадать тайну пифагорейской математики. На сегодняшний день имеется ключ к простейшим составляющим философии Пифагора.

Пифагор считал, что матерью математических наук является арифметика, ведь именно на базе арифметики возникли музыка, геометрия и астрономия. Математика, как гласит учение Пифагора, состоит из двух основных частей. Первая часть математики - это множественность и составляющие вещей, вторая - величина и плотность вещей. Множественность также делится на две части - относящаяся к самой себе и относящаяся к другим. То же и с величиной, которая может быть постоянной и изменяющейся (непостоянной). Наука арифметика, по мнению Пифагора, основывается на множественности, которая относится к самой себе, а музыка - на множественности, относящейся к другим вещам. Астрономия - это наука, относящаяся к непостоянной величине, а геометрия - к постоянной. Результатом числа стала и атомистическая теория.

Влияние пифагорейского союза. Пифагорейский союз во время своего расцвета достиг большого влияния и популярности. *"От этих занятый вся Италия (т.е. "Великая Греция") наполнилась философами...". "Пифагор... прославился вместе со своими учениками... числом около трехсот"* (Диоген Лаэртский). Ямвлих приводил список 235 членов пифагорейского союза.

Влияние этого по сути реакционного союза весьма быстро распространяется и на Сицилию. Пифагор и пифагорейский союз имеют немалую заслугу в том, что в Кротоне сравнительно длительное время удерживала политическую власть аристо-кратия. По их инициативе аристократический Кротон предпринял военные действия против города Сйбарис, в котором победила рабовладельческая демократия.

Социальные и классовые конфликты в самом Кротоне привели в конце концов к ограничению, а затем и к свержению власти аристократии. Рабовладельческая демократия приняла решительные меры против пифагорейского союза, который вполне справедливо считался центром аристократической реакционной идеологии. Подобно тому как в других городах Греции, в которых победила рабовладельческая демократия, в Кротоне был распущен пифагорейский союз, а его сторонники изгнаны из города. Однако даже такие меры не положили конец пифагорейскому движению. Еще почти целое столетие пифагорейская философия сохраняла определенное влияние и реакционную политическую направленность в греческих колониях Южной Италии.

Политика пифагорейцев. Пифагорейский союз принимал участие в политической жизни. Провозглашенной им целью была "работа над исправлением нравов" (гармонизация общества; построение социального Космоса). *"Пифагор, установив законы для италийцев... со своими учениками... прекрасно заправляли политическими делами"* (Диоген Лаэртский). "Пифагорейцы стремились установить правление посвященных" (Б. Рассел).

Эффективности работы содействовала хорошая организация союза. *"Все давние авторитеты утверждали что орден был строго организован и централизован".*

Вскоре под властью пифагорейского союза оказался Кротон и почти все другие греческие полисы Южной Италии. *"Целые города вверяли себя его ученикам"* (Порфирий). *"Некоторое время каллокагатия <правлеиие хороших граждан> пифагорейцев и предпочтение отдаваемое им, имели перевес, так что государственными делами правили они"* (Ямвлих).

В самом Кротоне правление союза, вероятно, было прямым, в других городах оно могло принимать характер влияния участвовавших в правительстве пифагорейцев. *"Пифагорейское влияние оказывалось также через "гетерии", политические клубы, которые в Великой Греции были олигархически настроенными".*

Пифагорейцам принадлежат: решающий вклад в создание дедуктивной геометрии, открытие иррациональности, основа I–IV книг «Начал» Евклида, построение трех правильных многогранников (куб, пирамида, додекаэдр). Арифметика (теория чисел) была монополией школы от Пифагора до Архита и вошла в «Начала» в виде VII–IX книг. В астрономии ими установлена сферичность Земли, правильный порядок и направление движения пяти планет, выдвинута идея о том, что движение всех небесных тел является равномерным и круговым. Гармоника, состоявшая из математической теории созвучий и физической теории звука, завершала квадривиум точных наук, преподавание которого началось уже в 5 в. Полагая, что всякий звук возникает от движения, пифагорейцы решили, что звук сопровождает всякое движение, в т. ч. и небесных тел. Находясь на разных расстояниях от Земли, они издают неслышимые нам гармонические звуки, высота которых пропорциональна их скорости («небесная гармония»).

Конец союза. Однако итог занятий политикой был для пифагорейцев неудачным.

"В конце концов против них сложился заговор" (Порфирий)

"В тех областях Италии, которые тогда назывались Великой Грецией, в удобный момент подожгли дома собраний пифагорейцев... повсеместно произошли государственные перевороты" (Полибий)

"Повсюду тогда вспыхивали великие мятежи, которые и поныне у историков именуются пифагорейскими" (Порфирий)

"Товарищества пифагорейцев пали по городам Италии а все еще организованных в союз пифагорейцев Метапонта килоновцы обложили огнем... уничтожили всех кроме Филолая и Лизиса..."

Пифагор, видимо, тоже погиб во время переворота.

После изгнания пифагорейцев греко-италийские города заменили олигархические законы на демократические (по сообщению Страбона).

Пифагорейцы Филолай и Лизис перебрались в Фивы. Позже Филолай вернулся в Италию, в Тарент, где стал учителем Архита, долго возглавлявшего этот город (2 пол. - V в.). У Филолая учился и Платон.

На материале пифагореизма хорошо просматривается формирование философии из мифологии под воздействием научного знания (особенно математики) и вообще все более рационализированного мышления. Пифагорейцы превратили орфическое ритуальное очищение в научное занятие, в культ разума. И по мере того как пифагорейцы понимали, что окружающий их мир не хаос, а космос, глубже представляли реальный мир.

Список литературы

1. Асмус, В.Ф. Античная философия / В.Ф., Асмус. 2-е изд. – М. : Высшая школа, 1976. – 730 с.

2. Кохановский, В.П. Философия: Учебное пособие / В.П., Кохановский. – Ростов н/Д. :Феникс, 2005. – 576 с.

3. Ламин, А.С. Античная философия / А.С., Ламин. / СПб. : Триада-С, 2006. – 450 с.

4. Спиркин, А.Г. Философия / А.Г., Спиркин. – М. : Гардарики, 2001. – 272 с.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ГРЕЯ СТРОГО ПСЕВДОКОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Рустанов А.Р. (МПГУ)
Салахов А. З. (ДГТУ)

Аннотация. В работе рассматриваются аналоги тождеств Грея на тензор римановой кривизны строго псевдокосимплектического многообразия и на их основевыделяются классы Грея строго псевдокосимплектических многообразий.Получена локальная характеризация выделенных классовстрого псевдокосимплектических многообразий.

Ключевые слова: строго псевдокосимплектическая структура, тензор римановой кривизны, тождества Грея, косимплектические многообразия.

1.Введение

В одной из значительных работ по дифференциальной геометрии почти контактных метрических многообразий Чинья и Гонзалез [1] привели классификацию почти контактных метрических многообразий. В этой работе авторы выделили 12 классов почти контактных метрических многообразий и привели тождества их характеризующих в терминах ковариантной производной фундаментальной 2-формы этих многообразий. Интерес представляет многообразия класса C_9, являющиеся обобщениями косиплектических многообразий. В своей диссертационной работе Валеев Р.Р. [2] данный класс многообразий назвал классом строго псевдокосимплектических многообразий, коротко $SPCs$-многообразий. Он показал, что скалярная кривизна строго псевдокосимплектических многообразий с нулевым структурным тензором третьего рода неположительна. При этом она равна нулю тогда и только тогда, когда многообразие является косимплектическим. К сожалению, далее этот класс многообразий выпал из поля зрения геометров. В работе [3] начато изучение строго псевдокосимплектических многообразий. В частности, авторы исследовали строго псевдокосимплектические многообразия постоянной кривизны, многообразия Эйнштейна, η-Эйнштейновы многообразия и выделены два класса строго псевдокосимплектических многообразий.

Данная работа посвящена изучению строго псевдокосимплектических многообразий и организована следующим образом. В параграфе 2 приводятся предварительные сведения. Во втором параграфе мы даем определение строго псевдокосимплектических структур, приведены компоненты тензора римановой кривизны строго псевдокосимплектических многообразий на пространстве присоединенной G-структуры. В параграфе 3 мы рассматриваем контактные аналоги тождеств Грея для указанных многообразий. На их основе выделены три класса строго псевдокосимплектических многообразий и исследуем локальное строение выделенных классов.

2. Строго псевдокосимплектические структуры

Определение 2.1[3]. Почти контактная метрическая структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi - \langle \Phi X, \nabla_Y \xi\rangle \xi;\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \tag{2.1}$$

называется ***строго псевдокосимплектической*** (коротко, ***SPCs***-) ***структурой***. Почти контактное метрическое многообразие, снабженное $SPCs$-структурой называется ***строго псевдокосимплектическим*** (коротко, $SPCs$-) ***многообразием***.

Напомним необходимые сведения о строго псевдокосимплектических многообразиях, приведенные в работе [3].

Первая группа структурных уравнений $SPCs$-структуры на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид:

$$1)\ d\omega = 0;\quad 2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b - F^{ab}\omega \wedge \omega_b;\quad 3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b - F_{ab}\omega \wedge \omega^b. \tag{2.2}$$

Предложение 2.1[3].$SPCs$-структура является косимплектической тогда и только тогда, когда$F^{ab} = F_{ab} = 0$.

Компоненты тензора Римана-Кристоффеля$SPCs$-многообразияна пространстве присоединенной G-структуры имеют вид [3]:

$$1)\ R^0_{a\hat{b}0} = F_{ac}F^{cb};\ 2)\ R^0_{ab0} = -F_{ab0};\ 3)\ R^0_{\hat{a}\hat{b}0} = -F^{ab0};\ 4)\ R^0_{ab\hat{c}} = -F_{ab}{}^{c};\ 5)\ R^0_{\hat{a}b\hat{c}} = F^{ac}{}_{b};\ 6)\ R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} + F^{ad}F_{bc};\ 7)\ R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = -2F^{a[c}F^{|b|d]};\ 8)\ R^{\hat{a}}_{bcd} = -2F_{a[c}F_{|b|d]}. \tag{2.3}$$

Плюс соотношения, полученные с учетом свойств тензора Римана-Кристоффеля. А остальные компоненты нулевые.

Ковариантные компоненты тензора Риччи на пространстве присоединенной G-структуры вычисляются по формуле [3], $S_{ij} = -R^k_{ijk}$, которая на пространстве присоединенной G-структуры $SPCs$-многообразия, в силу (1.3), принимает вид:

$$1)\ S_{00} = -2F_{ab}F^{ba};\ 2)\ S_{0a} = S_{a0} = -F_{ba}{}^{b};\ 3)\ S_{0\hat{a}} = S_{\hat{a}0} = -F^{ba}{}_{b};\ 4)\ S_{ab} = F_{ab0};\ 5)\ S_{\hat{a}\hat{b}} = F^{ab0}; 6)\ S_{a\hat{b}} = S_{\hat{b}a} = A^{bc}_{ac}. \tag{2.4}$$

Скалярная кривизна $SPCs$-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры вычисляется по формуле

$$\chi = g^{ij} S_{ij} = 2S_{a\hat{a}} = 2A^{ab}_{ab}. \qquad (2.5)$$

3. Классы Грея строго псевдокосимплектических многообразий

Широко известно высказывание А.Грея о том, что ключом к геометрии почти эрмитовых многообразий являются тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны [4]. И в этой же работе Греем были выделены несколько специальных классов R_i почти эрмитовых многообразий, характеризующиеся следующими тождествами:

1. Класс R_1: $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(JX,JY)Z,W\rangle$;

2. Класс
R_2: $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(JX,JY)Z,W\rangle + \langle R(JX,Y)JZ,W\rangle + \langle R(JX,Y)Z,JW\rangle$;

3. Класс R_3: $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(JX,JY)JZ,JW\rangle$.

Для произвольного почти эрмитова многообразия им же было показано, что для классов R_1, R_2, R_3 справедливы включения $R_1 \subset R_2 \subset R_3$. При этом, если многообразие келерово, то его тензор кривизны удовлетворяет всем трем соотношениям [4], для эрмитовых многообразий классы R_2 иR_3 совпадают. Ввиду этого естественно ожидать, что среди *AH*-многообразий по дифференциально-геометрическим и топологическим свойствам наиболее близки к келеровым многообразиям многообразия класса R_1, затем многообразия класса R_2, и, наконец, многообразия класса R_3.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 [5]. *Пусть* $S = (J, g = (\cdot,\cdot))$ *– почти эрмитова структура. Тогда*:

(1) $S = (J, g = (\cdot,\cdot))$ *– структура класса* R_1 *тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры*$R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$;

(2) $S = (J, g = (\cdot,\cdot))$ *– структура класса* R_2 *тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры*$R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = 0$;

(3) $S = (J, g = (\cdot,\cdot))$ *– структура класса* R_3 *тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры*$R_{\hat{a}bcd} = 0$.

Наиболее интересные свойства появляются, если почти контактную метрическую структуру многообразия дополнить эту структуру дополнительными условиями. Представляет интерес рассмотреть контактные аналоги тожеств Грея на тензор римановой кривизны. Таковыми являются следующие тождества [6]:

$$CR_1: \langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)\Phi Z,\Phi W\rangle;$$

$$CR_2: \langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\rangle =$$
$$\langle R(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)\Phi Z,\Phi W\rangle + \langle R(\Phi^2 X,\Phi Y)\Phi^2 Z,\Phi W\rangle + \langle R(\Phi^2 X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi^2 W\rangle;$$

$CR_3: \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W\rangle.$ (3.1)

На пространстве присоединенной *G*-структуры тождества CR_1 –CR_3 эквивалентны следующим равенствам [6]:

$$CR_1 \Leftrightarrow R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0;$$

$$CR_2 \Leftrightarrow R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = 0; \qquad (3.2)$$

$$CR_3 \Leftrightarrow R_{\hat{a}bcd} = 0.$$

Замечание. Согласно формулам (3.2) очевидны включения $CR_1 \subset CR_2 \subset CR_3$.

Таким образом, тождества $CR_1 - CR_3$ в изучении строения почти контактных метрических структур имеют большое значение. Исследуем эти тождества для *SPCs*-многообразия.

Определение 3.1.*SPCs*-многообразия, тензор Римана-Кристоффеля которых удовлетворяет тождеству CR_i, $i = 1,2,3$,называются *SPCs*-многообразиями класса CR_i.

Теорема 3.2.*SPCs-многообразие M является многообразием класса*CR_3.

Доказательство следует из (2.3) и (3.2).

Теорема 3.3.*SPCs-многообразие M является многообразием класса CR_2 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры имеет место равенство $F_{ab}F_{cd} = 0$.*

Доказательство.Пусть *SPCs*-многообразие *M* является *AC*-многообразием класса CR_2. Тогда согласно (1.5:8) и (2.2) имеют место равенства$R_{abcd} = -2F_{a[c}F_{|b|d]} = 0, R_{\hat{a}bcd} = 0$, т.е. $F_{ac}F_{bd} - F_{ad}F_{bc} = 0$. На *SPCs*-многообразии имеет место следующее равенство $F_{a[c}F_{bd]} = 0$, т.е.$F_{ab}F_{cd} + F_{ac}F_{db} + F_{ad}F_{bc} = 0$,которое вместе с равенством $F_{a[c}F_{|b|d]} = 0$, дает $F_{ab}F_{cd} = 0$. Обратно, если $F_{ab}F_{cd} = 0$, то $R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = 0$, т.е. многообразия является многообразием класса CR_2. □

Теорема 3.4.*SPCs-многообразия M класса CR_1 и класса CR_2 совпадают.*

Доказательство следует из того что для *SPCs*-многообразия имеет место равенства$R_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$. И согласно Теореме 3.2*SPCs*-многообразие *M*класса CR_1 также является многообразием класса CR_2.

Теорема 3.5.*SPCs*-многообразие является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Доказательство. Пусть*M* – *SPCs*-многообразие класса CR_1.Тогда $R_{abcd} = -2F_{a[c}F_{|b|d]} = 0, R_{\hat{a}bcd} = 0$, т.е. $F_{ab}F_{cd} = 0$. Отсюда следует, что

$F_{ab} = 0$, т.е. структурный тензор равен нулю. И согласно Предложения 2.1 многообразие является косимплектическим, а значит [5]локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Поскольку косимплектическое многообразие является *SPCs*-многообразием,структурный тензор которого равен нулю, т.е. $F_{ab} = 0$.То $R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$. Таким образом,*SPCs*-многообразие является многообразиемкласса CR_1.

Литература

1. Chinea D., Gonzalez C. *Classification of almost contact metric structures*.// Annali di Matematicapuraedapplicata (IV). V. CLVI. 1990. P. 15-36.

2. Валеев Р.Р. *Геометрия квазикосимплектических многообразий*. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, М., 2004.

3. А.Р. Рустанов, А.И. Юдин, Т.Л. Мелехина. *Геометрия строго псевдокосимплектических многообразий*. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказскийрегион. Естественныенауки. 2019, №1, с.33 – 40.

4. Gray A. *Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds*. TohokuMath. J., 1976, v.28, p. 601-612.

5. Кириченко В.Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*. Издание второе, дополненное. Одесса: «Печатный Дом», 2013, 458 с.

6. А.Р. Рустанов, О.Н. Казакова, С.В. Харитонова. *Контактные аналоги тождеств Грея для NC_{10}-многообразий*. // Сибирские электронные математические известия, 2018, v. 15, pp. 823-828.

УДК 517.946

О НЕТЕРОВОСТИ И ИНДЕКСЕ ОДНОЙ R-ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Умалатов С.Д. (ДГТУ)

Аннотация: в данной работе рассматривается краевая задача с разными порядками краевых условий на разных частях границы. Она возникает при исследовании вопросов жесткости поверхности. Даются критерии нетеровости и формулы для индекса.

Ключевые слова: краевая задача ,краевые условия, оператор, нетеровость, индекс.

Рассмотрим R- линейную краевую задачу

(1) $$E\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}=f\in X(n+l;Q),$$

(2) $$Re\left(\sum_{j-1}^{l+1}a_j\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{l+1-j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j-1}u\right)=\varphi\in Y(n;\partial Q),$$

где B и a_j – матрицы порядка k, элементы которых комплекснозначные функции. Все остальные предположения относительно коэффициентов такие же как в [1, стр.742].

Эллиптическая матрица B из (1) допускает разложение:

$$B=Tdiag\,(\Lambda_1,\Lambda_2)T^{-1},$$

где $T=(\mathrm{T}_1 \vdots \mathrm{T}_2)$ – непрерывная квадратная матрица порядка k состоящая из двух $k\times k_+$ и $k\times k_-$- блоков $\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2$. Здесь k_+- сумма алгебраических кратностей собственных значений матрицы B из верхней полуплоскости $Im\lambda>0$, а k_- - из нижней $(k_+ + k_- = k)$. Матрицы Λ_1 и Λ_2 – квадратные матрицы порядка k_+и k_- соответственно, а $diag\,(\Lambda_1,\Lambda_2)$ – блочно-диагональная матрица. Если элементы матрицы B – действительные функции, то из условия эллиптичности следует $k_+ = k_-$и k – число четное. При этом в разложении можно взять $\mathrm{T}_2=\overline{\mathrm{T}}_1\,,\Lambda_2=\overline{\Lambda}_2.$

Далее, если $k_+ = k\,,k_- = k$ (спектр матрицы B расположен в верхней полуплоскости $Im\lambda>0$) , разложение переходит в тривиальное: B = B, т.е T = E , Λ_2 – отсутствует и $\Lambda_1=\mathrm{B}$.То же самое имеет место и для противоположного случая: $k_+=0,\,k_-=k$. Здесь отсутствует Λ_1, а $\Lambda_2=\mathrm{B}$.

Имеет место

Теорема. *Для нетеровости задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнения условия*

(3) $\beta \equiv \det(\tau_1 \vdots \overline{\tau_2}) \neq 0$ *всюду на* ∂Q,

где

$$\tau_1 = a_{l+1}T_1\Lambda_1^l - a_lT_1\Lambda_1^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_lT_1,$$
$$\tau_2 = a_{l+1}T_2\Lambda_2^l - a_lT_2\Lambda_2^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_lT_2,$$

При выполнении этого условия индекс задачи дается равенством

(4) $J = 2 \operatorname{Ind} \beta - k(2l + 1)(m - 1)$.

В случае, когда все собственные значения B расположены в верхней полуплоскости

$$\tau = \tau_1 = a_{l+1}B^l - a_lB^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_l,$$

а τ_2отсутствует.

Доказательство. Пусть

$$\mathrm{B}_0 = v + i\mu, u = u_1 + iu_2, a_j = a_j^l + ia_j^2, f = f_1 + if_2.$$

Тогда задача (1), (2) эквивалентна следующей краевой задаче для эллиптической системы $2k$ уравнений с действительными коэффициентами

(5) $E\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} = F,\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} v - \mu \\ \mu v \end{pmatrix},$

(6) $\sum_{j=1}^{l+1}(a_j^1 \vdots -a_j^2)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{l+1-j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j-1} v = \varphi_1,$

где $v = (u_1 u_2)^t$и $\mathrm{F} = (f_1 f_2)^t$ –вектор-столбцы.

Эта задача и исходная нетеровые или нет одновременно, причем имеют равные индексы. Согласно теореме 1 (см. [2, стр.743]) для нетеровости задачи (5),(6) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\det\left(a_{l+1}T_1\Lambda^l - a_lT_1\Lambda^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_lT_1 \neq 0 \quad (7)\right.$$

где матрица a_l заменена на матрицу $(a_j^1 \vdots -a_j^2)$, а T_1 – матрица из факторизации эллиптической B. Более того, при выполнении указанного условия, индекс задачи (5), (6) (с учетом введенной замены) дается формулой

$$\alpha \equiv 2 \operatorname{Ind} \gamma - k(2l + 1)(m - 1) \quad (8)$$

Докажем (3). С этой целью, заметим, что матрицу B можно представить в виде

(9) $\mathrm{B} = 2^{-1}\begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix}$

Матрица B_0 – эллиптическая, поэтому она допускает разложение. С учетом этого (9) можно записать в виде

$$B = Mdiag(\Lambda_1, \Lambda_2, \bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2)M^{-1},$$

где

$$M= 2^{-1}\begin{pmatrix} T_0 & \bar{T}_0 \\ -iT_0 & i\bar{T}_0 \end{pmatrix}$$

Это не является требуемой факторизацией. Для получения последней нужно переставить блоки Λ_2 и $\bar{\Lambda}_2$ в блочнодиагональной матрице. Напомним, что собственные значения Λ_2 расположены в нижней полуплоскости. С этой целью умножим ее на матрицу перестановок N=$\{n_{ij}\}$, n_{11}=n_{33}=n_{24}=n_{42}=1 –единичные матрицы, а остальные матрицы – нулевые.

Тогда с учетом очевидного равенства N^2=1, получим

$$B = MN\, diag(\Lambda_1, \bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_1, \Lambda_2)(MN)^{-1}$$

Если теперь положим Λ=diag($\Lambda_1, \bar{\Lambda}_2$), мы получим требуемое разложение с T=MN. Далее, легко видеть, что T представляется в виде T=($X \vdots \bar{X}$),

где

$$X=\begin{pmatrix} T_1 & \overline{T_2} \\ -iT_1 & \overline{iT_2} \end{pmatrix}$$

Подставляя в равенства (7), (8) вместо матриц a_j, T_1 и Λ матрицы ($a_j^1 \vdots -a_j^2$), X и diag($\Lambda_1, \bar{\Lambda}_2$) соответственно, получим равенства (3) и (4).

Список литературы

1. Сиражудинов М. М., Нурмагомедов А.М., Умалатов С. Д. Краевые задачи типа Римана-Гильберта-Пуанкаре для общих эллиптических систем первого порядка.- Доклады АН, 2010, том 434, № 6, с.742-743.
2. Сиражудинов М. М., Умалатов С. Д. Задача Римана-Гильберта-Пуанкаре.– Махачкала. 1998, − 11 с., деп. в ВИНИТИ, 10. 02. 98, №972-В98.

УДК 517.5

О НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЯХ

Хаиров Рагим А. (ДагГАУ)
Хаиров Рахман А.(ДГТУ)

Аннотация. Пользуясь тем, что суммы Фейера, полиномы Валле-Пуссена и другие аппараты приближения имеют одинаковую структуру (они получаются из частичной суммы ряда Фурье путем соответствующих преобразований ее коэффициентов) в работе построены производящие функции, из которых выводятся некоторые свойства соответствующих аппаратов приближения.

Ключевые слова*:* аппарат приближения, тригонометрический полином, частичная сумма, производящая функция.

После того, как дю-Буа-Реймонд в 1876 году построил пример непрерывной функции [1], не разлагающейся в ряд Фурье, стало ясно, что не все ряды Фурье могут быть использованы как аппарат приближения. С еще большей осторожностью стали относиться к тригонометрическим рядам после появления в 1885 году фундаментальной теоремы К. Вейерштрасса о приближении непрерывной на всей оси функции тригонометрическими полиномами. Вслед за доказательством Вейерштрасса появились другие доказательства, которые сопровождались новыми аппаратами приближения: суммы Фейера, суммы Валле-Пуссена, суммы Бернштейна-Рогозинского, сингулярный интеграл Валле-Пуссена и др. [1], [2], [3]. Впоследствии выяснилось, что все указанные операторы обладают одним свойством: они получаются из частичной суммы ряда Фурье путем соответствующего преобразования ее коэффициентов. Приведем некоторые из них для исследования при установлении формул связи между приводящими функциями.

Пусть $a_0, a_1, ..b_1, ..., a_n, b_n, ...$ - коэффициенты ряда Фурье $f(x) \in C_{2\pi}$ – множество непрерывных на всей оси 2π периодических функций. $S_n(f;x)$ - частичная сумма ряда Фурье.

1. Суммой Фейера называется

$$F_n(x; f) = \frac{S_0(f;x) + S_1(f;x) + ... + S_n(f;x)}{n} \qquad (1)$$

Фейер Л. [2] в 1904 году с помощью (1) доказал, что равномерно на всей оси $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x; f) = f(x),$ если $f(x) \in C_{2\pi}$

В развернутом виде она имеет вид

$$F_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

2. Сингулярным интегралом Валле-Пуссена называется интеграл

$$V_n(x; f) = \frac{n!}{2\pi\left(\frac{1}{2}\right)_n} \int_0^{2\pi} f(t) \cos^{2\pi} \frac{t-x}{2} dt \tag{2}$$

В 1906 году [1] Валле-Пуссен доказал, что

$$\lim_{n\to\infty} V_n(x; f) = f(x)$$

равномерна на всей оси, если $f(x) \in C_{2\pi}$. Если интеграл (2) представить в развернутом виде, то

$$V_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+1)!}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

3. Бернштейн С.Н. в 1930 г. Рогозинский Р.В. в 1925 г. изучали суммы

$$B_n(x; f) = \frac{1}{2}\left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) + S_n\left(x - \frac{\pi}{2n+1}\right)\right]$$

где $S_n(x)$- частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

Суммы Бернштейна-Рогозинского

$$B_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{2n+1}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) \tag{3}$$

тоже получаются из частичной суммы ряда Фурье путем преобразования ее коэффициентов.

Таким образом, все операторы (1) - (3) имеют одинаковую структуру. В [2] построена общая теория линейных операторов, которая содержит замечательные результаты о приближении функций.

Определения и большое число важных результатов о производящих функциях приведены в [4]. Мы в настоящей заметке строим производящие функции для сумм Валле-Пуссенаи и Фейера, из которых выводим некоторые свойства этих сумм.

4. Для последовательности полиномов (2) образуем производящую функцию

$$V(x;z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n V_n(x;f) \tag{4}$$

Из определения полинома $V_n(x;f$ и теоремы Коши-Адамара [5] о радиусе сходимости степенного ряда следует, что ряд (4) абсолютно сходится в интервале (-1,1) и равномерно сходится на любом отрезке $[\alpha,\beta]\subset(-1,1)$.
Поэтому в равенстве

$$V(x;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{2\pi\, n!}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)z^n\cos^{2n}\frac{t}{2}dt$$

Можно поменять местами знаки суммирования и интеграла

$$V(x;z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\left(z\cos^2\frac{t}{2}\right)^n dt \tag{5}$$

Согласно биноминальному разложению

$$(1-x)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}x^n,\quad |x|<1$$

равенство (5) принимает вид

$$V(x;z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(1-z\cos^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt \tag{6}$$

Мы получили интегральное представление для полиномов Валле-Пуссена, из которого очевидным образом следует важное свойство [4]

$$V_n'(x;f)=V_n(x;f)$$

если $f'(x)\in C_{2\pi}$.

5. Для последовательности полиномов Фейера образуем производящую функцию

$$\Phi(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n F_n(x;f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sin^2\frac{nt}{2}dt \tag{7}$$

При этом законность перестановки суммы и интеграла устанавливается таким же путем, как в предыдущем случае. Представив (7) в виде

$$\Phi(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n(1-\cos nt)dt,$$

воспользуемся формулой [6]

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\cos nx=\frac{1-z\cos x}{1-2z\cos x+z^2}$$

В результате получим

$$\Phi(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\sin^2\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2}\right)dt$$

Это равенство после упрощения принимает вид

$$\Phi(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{z(1+z)}{(1-z)(1-2z\cos t+z^2)}dt$$

Из этого равенства и (7) следует, что

$$F(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}F_n(x;z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{(1+z)dt}{(1-z)(1-2z\cos t+z^2)}$$

Список литературы

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
2. Коровкин П.П. Линейные операторы и теореия приближений. – М.: Физматгиз, 1953.
3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.3. – М.: Наука, 1967.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. – М.: Наука, 1969.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений. – М.: Физматгиз, 1963.

УДК 517.948

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОБСТВЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Шамов Э.Ш., (ДГТУ)

Аннотация. В работе рассматривается проблема Айзермана для системы двух разностных уравнений с одной нелинейностью и исследуется устойчивость нулевого решения этой системы. С целью упрощения обобщенных условий Рауса-Гурвица, с помощью линейного преобразования переменных упрощают исследуемую систему разностных уравнений, а затем исследуют упрощенную систему. Исследование поведения решений упрощенной системы разбивают на ряд случаев. Доказаны несколько теорем. Доказательство теорем приводится с помощью функции Ляпунова.

Ключевые слова: разностное уравнение, проблема Айзермана, несобственная нелинейность, условия Рауса-Гурвица, характеристическое уравнение, линейное преобразование, тривиальное решение, функция Ляпунова.

В работе [1] рассматривается проблема Айзермана [2] для системы

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n, \\ y_{n+1} = a^2 f(x_n) + p y_n, \end{cases}$$

где $0 < p < 1$, $f(x_n)x_n > 0$, $0 < a < 1$ и исследуется поведение её решений.

В данной работе рассматривается проблема Айзермана для системы двух разностных уравнений с одной нелинейностью вида

$$\begin{cases} x_{1n+1} = a_{11}x_{1n} + f_2(x_{2n}), \\ x_{2n+1} = a_{21}x_{1n} + a_{22}x_{2n}, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_{1n} = x_1(n), x_{2n} = x_2(n)$, $f_2(x_{2n})-$ непрерывна в промежутке $-\infty < x_{2n} < +\infty$, удовлетворяет условию единственности и $f_2(0) = 0$.

Обобщенные условия Рауса-Гурвица для системы (1) имеют вид:

$$\begin{cases} (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{21}\dfrac{f_2(x_{2n})}{x_{2n}} > 0, \\ 1 - a_{11}a_{22} + a_{21}\dfrac{f_2(x_{2n})}{x_{2n}} > 0, \\ (1+a_{11})(1+a_{22}) - a_{21}\dfrac{f_2(x_{2n})}{x_{2n}} > 0, \; при \; x_{2n} \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

При выполнении условий (2) корни характеристического уравнения системы (1) по модулю меньше единицы, значит нулевое решение устойчиво.

С целью упрощения обобщенных условий Рауса-Гурвица (2) совершим в системе (1) следующее линейное преобразование переменных

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{a_{21}^2}{a_{22}} x_{1n} + a_{21} x_{2n}, \\ y_n = x_{2n}. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда система в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + f(y_n), \\ y_{n+1} = b x_n, \end{cases} \tag{4}$$

где $a = a_{11} + a_{22}$, $b = \dfrac{a_{22}}{a_{21}}$, $f(y_n) = -a_{11} a_{21} y_n + \dfrac{a_{21}^2}{a_{22}} f_2(y_n)$.

Так как система (1) удовлетворяет обобщенным условиям Рауса-Гурвица (2), то тогда и система (4) удовлетворяет этим условиям. Данные условия имеют следующий вид

$$b\frac{f(y_n)}{y_n} < 1 - a,\;\; b\frac{f(y_n)}{y_n} < -1,\;\; b\frac{f(y_n)}{y_n} < 1 + a,\quad при\ y_n \neq 0. \tag{5}$$

Исследование поведения решений в целом системы (4) разобьём на ряд случаев:

1. $b > 0,\; 0 < a < 1,\; \dfrac{-1}{b} < \dfrac{f(y_n)}{y_n} < \dfrac{1-a}{b}$.

Теорема 1. Если $0 < \delta \le \dfrac{f(y_n)}{y_n} < \dfrac{1-a}{b}$, то тривиальное решение системы (4) устойчиво.

Если
$$0 < \delta \le \frac{f(y_n)}{y_n} < \frac{1-a}{b} - \varepsilon, \tag{*}$$

где $\varepsilon > 0$, то все решения системы (4) стремятся к нулю.

Если $\varepsilon = 0$ и выполняется условие (*), то все решения системы (4) ограничены и стремятся к множеству $x = \dfrac{1}{b} y$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится с помощью функции Ляпунова $V(x, y) = \alpha x_n^2 + \dfrac{\alpha(1-a)}{b^2} y_n^2$, где $\alpha > 0$.

Тогда в силу системы (4) имеем

$$V_{n+1}-V_n=\alpha\left(a^2x_n^2+2ax_nf(y_n)+f^2(y_n)\right)-\alpha x_n^2+\frac{\alpha(1-a)}{b^2}b^2x_n^2-\frac{\alpha(1-a)}{b^2}y_n^2=$$
$$=\left(\alpha a^2-\alpha+\alpha(1-a)\right)x_n^2+2\alpha a\frac{f(y_n)}{y_n}x_ny_n+\left(\alpha\frac{f^2(y_n)}{y_n^2}-\frac{\alpha(1-a)}{b^2}\right)y_n^2=$$
$$=-\alpha a\frac{f(y_n)}{y_n}\left(x_n-\frac{y_n}{b}\right)^2b+\left(\alpha a^2-\alpha+\alpha-\alpha a+\alpha a\frac{f(y_n)}{y_n}b\right)x_n^2+$$

$$+\left(\alpha\frac{f^2(y_n)}{y_n}-\frac{\alpha(1-a)}{b^2}+\alpha a\frac{f(y_n)}{y_n}b\frac{1}{b^2}\right)y_n^2=-\alpha a\frac{f(y_n)}{y_n}\left(x_n-\frac{y_n}{b}\right)^2b+$$
$$+\alpha ab\left(\frac{f(y_n)}{y_n}-\frac{1-a}{b}\right)x_n^2+\alpha\left(\frac{f(y_n)}{y_n}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{f(y_n)}{y_n}-\frac{1-a}{b}\right)y_n^2\le$$
$$\le-\alpha ab\frac{f(y_n)}{y_n}\left(x_n-\frac{y_n}{b}\right)^2\le-\alpha a\delta\left(x_n-\frac{y_n}{b}\right)^2.$$

Решения, выходящие из области $\alpha x_n^2+\frac{\alpha(1-a)}{b^2}y_n^2<\eta$, остаются там, следовательно, все решения ограничены и стремятся к множеству $x=\frac{1}{b}y$, а значит $x_n-\frac{1}{b}y_n\to 0$. Если $0<\delta\le\frac{f(y_n)}{y_n}<\frac{1-a}{b}-\varepsilon$, то

$V_{n+1}-V_n\le-\alpha ab\delta\left(x_n-\frac{y_n}{b}\right)^2-\alpha ab\varepsilon x_n^2-\alpha\varepsilon\left(\delta+\frac{1}{b}\right)y_n^2$ и решения стремятся к нулю.

2. $b<0$, $-1<a<0$, $\frac{1+a}{b}<\frac{f(y_n)}{y_n}<\frac{-1}{b}$.

Теорема 2. Если $\frac{1+a}{b}<\frac{f(y_n)}{y_n}\le-\varepsilon<0$, где $\varepsilon>0$, то тривиальное решение системы (4) устойчиво.

Если $$\frac{1+a}{b}+\delta<\frac{f(y_n)}{y_n}\le-\varepsilon<0, \qquad (*)$$

где $\delta>0$, то все решения системы (4) стремятся к нулю.

Если $\delta=0$ и выполняется условие (*), то все решения системы (4) ограничены и стремятся к множеству $ax=-\frac{a}{b}y$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится с помощью функции Ляпунова $V(x,y)=\alpha x_n^2+\frac{\alpha(1+a)}{b^2}y_n^2$, где $\alpha>0$

3. $b<0$, $0<a<1$, $\frac{1-a}{b}<\frac{f(y_n)}{y_n}<\frac{-1}{b}$.

Теорема 3. Если $0 < \delta \le \frac{f(y_n)}{y_n} < \frac{-1}{b}$, то тривиальное решение системы (4) устойчиво.

Если $$0 < \delta \le \frac{f(y_n)}{y_n} < \frac{-1}{b} - \varepsilon, \qquad (*)$$

где $\varepsilon > 0$, то все решения системы (4) стремятся к нулю.

Если $\varepsilon = 0$ и выполняется условие (*), то все решения системы (4) ограничены и стремятся к множеству $bx = -y$.

Доказательство. Теорема доказывается с помощью функции Ляпунова

$$V(x, y) = \alpha x_n^2 + \frac{\alpha(1+a)}{b^2} y_n^2 \text{ , где } \alpha > 0.$$

4. $b > 0$, $-1 < a < 0$, $\frac{-1}{b} < \frac{f(y_n)}{y_n} < \frac{1+a}{b}$.

Теорема 4. Если $\frac{-1}{b} < \frac{f(y_n)}{y_n} \le -\delta < 0$, где $\delta > 0$, то тривиальное решение системы (4) устойчиво.

Если $$\frac{-1}{b} + \varepsilon < \frac{f(y_n)}{y_n} \le -\delta < 0, \qquad (*)$$

где $\varepsilon > 0$, то все решения системы (4) стремятся к нулю.

Если $\varepsilon = 0$ и выполняется условие (*), то все решения системы (4) ограничены и стремятся к множеству $bx = y$.

Доказательство. Теорема доказывается с помощью функции Ляпунова $V(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$, где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha\gamma > \beta^2$.

Теперь совершим в системе (1) линейное преобразование переменных.

$$\begin{cases} x_n = a_{11}x_{1n} + a_{22}x_{2n}, \\ y_n = x_{2n}. \end{cases} \qquad (6)$$

Тогда система (1) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + f(y_n), \\ y_{n+1} = by_n, \end{cases} \qquad (7)$$

где $a = a_{11}$, $b = -a_{22}$, $f(y_n) = (a_{22}^2 - a_{11}a_{22})y_n + a_{11}f_2(y_n)$.

Условия Рауса-Гурвица для системы (7) имеют вид

$$(1-a)(1-b) > 0, \quad ab < 1, \quad (1+a)(1+b) > 0. \qquad (8)$$

Теорема 5. Если $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$, то тривиальное решение системы (7) устойчиво в целом при любой нелинейности, удовлетворяющей условию

$$\frac{f^2(y_n)}{y_n^2} < \frac{\beta(1-b^2)}{\alpha}, \text{ где } \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводится с помощью функции Ляпунова $V = \alpha x_n^2 + \beta y_n^2$.

Далее совершим в системе (1) линейное преобразование переменных

$$\begin{cases} x_n = -\dfrac{a_{22}a_{21}}{a_{11}} x_{1n} + a_{22}x_{2n}, \\ y_n = x_{2n}. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда система (1) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(y_n), \\ y_{n+1} = ax_n + by_n, \end{cases} \tag{10}$$

где $a = -\dfrac{a_{11}}{a_{22}}$, $b = a_{11} + a_{22}$, $f(y_n) = a_{22}^2 y_n - \dfrac{a_{22}a_{21}}{a_{11}} f_2(y_n)$.

Обобщенные условия Рауса-Гурвица для системы (10) имеют вид

$$a\frac{f(y_n)}{y_n} < 1 - b, \quad a\frac{f(y_n)}{y_n} > -1, \quad a\frac{f(y_n)}{y_n} < 1 + b, \text{ при } y_n \neq 0. \tag{11}$$

Из условий (11) следует ряд случаев:

1. $a > 0$, $-1 < b < 0$, $\dfrac{-1}{a} < \dfrac{f(y_n)}{y_n} < \dfrac{1+b}{a}$,

2. $a > 0$, $0 < b < 1$, $\dfrac{-1}{a} < \dfrac{f(y_n)}{y_n} < \dfrac{1-b}{a}$,

3. $a < 0$, $-1 < b < 0$, $\dfrac{1+b}{a} < \dfrac{f(y_n)}{y_n} < \dfrac{-1}{a}$,

4. $a < 0, 0 < b < 1$, $\dfrac{1-b}{a} < \dfrac{f(y_n)}{y_n} < \dfrac{-1}{a}$.

Эти условия аналогичны условиям (5) системы (4), поэтому система (10) исследуется аналогично системе (4).

Список литературы

1. Шамов Э.Ш. О поведении решений одной разностной системы с одной нелинейностью./ Материалы второй Международной конференции по функционально-дифференциальным уравнениям и их приложениям. Махачкала, 2005, с.169-171.

2. Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в большом динамических систем. УМИ, IV,вып.4, 1949.

3. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем, - М.: Мир, 1971.

4. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования, - М.: Высшая школа, 1971.

5. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова, - М.: Наука, 1971.

УДК 517

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ ЧАСТИ ОГЭ

Эфендиев Э.И.(ДИРО)

Аннотация. Системы уравнений находят широкое применение в различных областях математики. В данной статье мы рассмотрим основные типы наиболее сложных заданий систем уравнений второй части КИМов ОГЭ по математике 2020 года, дадим рекомендации по их решению.

Ключевые слова: Системы уравнений, основные типы, алгебраическое сложение, замена переменной, симметрические системы.

Системы уравнений.

Системы уравнений второй части ОГЭ состоят из следующих типов:

1) Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными;
2) Системы, в которых одно уравнение линейное, а другое квадратное;
3) Системы, решаемые методом алгебраического сложения;
4) Системы, решаемые методом замены переменной;
5) Системы, решаемые некоторой модификацией вышеперечисленных методов.

Начнем разбор заданий.

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x+2y}{5} + \frac{3x-y}{3} = 5, \\ 2x - 3y = -1. \end{cases}$

Решение. Умножим обе части первого неравенства на 15. Тогда получим: $3x + 6y + 15x - 5y = 75 \Leftrightarrow 18x + y = 75 \Leftrightarrow y = 75 - 18x$. Теперь первоначальная система примет вид:

$$\begin{cases} y = 75 - 18x, \\ 2x - 3(75 - 18x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 56x = 224, \\ y = 75 - 18x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ. (4; 3)

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 17, \\ x - y = -5. \end{cases}$

Решение. Выразим из второго уравнения системы $y = x + 5$ и подставим в первое уравнение. Тогда получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2 - 2x(x+5) = 17, \\ y = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x(x+5) - (x+5)^2 = 17, \\ y = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x(x+5) - (x+5)^2 = 17, \\ y = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 10x + 21 = 0, \\ y = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \pm \sqrt{25-21}, \\ y = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left[\begin{matrix} -7 \\ -3 \end{matrix}\right., \\ y = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \begin{cases} x=-7 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases} \end{matrix}\right.$$

Ответ. $(-7; -2)$; $(-3; 2)$.

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + 3x + y^2 = 2, \\ x^2 + 3x - y^2 = -6. \end{cases}$

Решение. Алгебраическое сложение двух уравнений системы означает умножение одного уравнения на какое – нибудь число, а другого уравнения на другое число и их сложение. При этом умножаемые числа могут быть как положительными, так и отрицательными. Обычно умножаемые числа подбирают так, чтобы одно из уравнений системы стало уравнением с одним неизвестным.

В нашем случае также напрашивается способ непосредственного сложения уравнений системы. т.к. если сначала сложить оба уравнения и затем отнять из первого уравнения второе, то получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 2x^2 + 6x + 4 = 0, \\ y^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left[\begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}\right. \\ y = \left[\begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix}\right. \end{cases}$$

Получили четыре пары решений: $(-2; -2)$; $(-2; 2)$; $(-1; -2)$; $(-1; 2)$.

Ответ. $(-2; -2)$; $(-2; 2)$; $(-1; -2)$; $(-1; 2)$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (2x+3)^2 = 5y, \\ (3x+2)^2 = 5y. \end{cases}$

Решение. Очевидно, что данная система равносильна системе:

$$\begin{cases} (2x+3)^2 = (3x+2)^2, \\ (3x+2)^2 = 5y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (3x+2)^2 - (2x+3)^2 = 0, \\ (3x+2)^2 = 5y. \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (3x+2-2x-3)(3x+2+2x+3) = 0, \\ (3x+2)^2 = 5y. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow$$

Ответ. $(-1; \frac{1}{5})$; $(1; 1)$.

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x-4)(y-6) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение системы равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ y = 6. \end{array}\right.$$

При $x = 4$ второе уравнение системы принимает вид:

$$\frac{y-4}{y-4} = 2 \Leftrightarrow y \in \emptyset.$$

При $y = 6$ второе уравнение системы принимает вид:

$$\frac{2}{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ. (3; 6).

Прежде, чем перейти к решению следующей системы, напомним о некоторых методах решения симметрических систем.

Определение 1. Функция $g(x,y)$ называется симметрической, если $g(x,y) = g(y,x)$.

Например, функция $g(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 + 4$ является симметрической.

Определение 2. Система вида

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

называется симметрической, если функции f_1 и f_2 являются симметрическими функциями своих аргументов

Простейшей симметрической системой является система вида

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \qquad (1)$$

справедлива

Теорема 1. Система уравнений (1) и квадратное уравнение

$$z^2 - az + b = 0 \qquad (2)$$

связаны следующим образом: если z_1 и z_2 являются корнями уравнения (2), то система (1) имеет два решения (z_1, z_2) и (z_2, z_1) и не имеет других решений. Обратно, если (x_0, y_0) – решение системы (1), то числа x_0 и y_0 являются корнями уравнения (2).

***Пример* 6**. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Решение. Уравнение (2) в этом случае имеет вид: $z^2 - z - 2 = 0$ откуда $z_1 = 2$ и $z_2 = -1$ и из **теоремы 1** получим

Ответ. {(2; -1); (-1; 2)}.

Пример 7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Решение. Данную систему можно решить методом подстановки, но мы воспользуемся **теоремой 1**. Для этого возведем обе части второго уравнения системы в квадрат. Тогда мы получим систему, являющуюся следствием исходной системы (т.е. всякое решение исходной системы будет и её решением):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 y^2 = 4 \end{cases}$$

Уравнение (2) для этой системы примет вид (имеем x^2 вместо x и y^2 вместо y):

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 4 \\ z = 1, \end{array}\right.$$

откуда по **теореме 1** получим совокупность двух систем для определения x и y:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Из полученных отсюда восьми решений (2; 1), (2; -1), (-2; -1), (-2; 1), (1; 2), (1; -2), (-1; 2), (-1; -2) только четыре удовлетворяют второму уравнению исходной системы.

Ответ. {(-2; 1), (2; -1), (1; -2), (-1; 2)}.

Для разнообразия решим исходную систему методом подстановки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-\dfrac{2}{x})^2 = 5 \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{4}{x^2} = 5, \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0, \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 4, \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2, \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right. \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Естественно, получаем тот же ответ, как и в предыдущем решении.

Заметим, что в общем случае симметрические системы решаются подстановкой:

$$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$$

Список литературы

1. Банк заданий ОГЭ 2020 http: // mathgia.ru.
2. Мордкович А.Г. и др. Алгебра.9 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений (углубленный уровень), Ч.1 — М.: Мнемозина, 2019. — 288с. : ил.
3. Мордкович А.Г. и др. Алгебра.9 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений (углубленный уровень), Ч. 2— М.: Мнемозина, 2019. — 287с. : ил.
4. Мордкович А.Г. и др. Алгебра.8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений (углубленный уровень), Ч.1 — М.: Мнемозина, 2019. — 256с.: ил.
5. Мордкович А.Г. и др. Алгебра.8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений (углубленный уровень), Ч. 2— М.: Мнемозина, 2019. — 274с.: ил.
6. Сайт Дмитрия Гущина «Решу ОГЭ математика, 9 класс, 2020»
7. Эфендиев Э. И. Практикум по элементарной математике (Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия по самообразованию для учащихся старших классов и абитуриентов). — Махачкала: изд.ООО «А-4», 2015. — 246 с.
8. Ященко И.В. ОГЭ, Математика, Типовые экзаменационные варианты, 36 вариантов, Серия «ОГЭ. ФИПИ — школе, М., 2017-2020.

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Труды межвузовского семинара

Формат 60x84 1/16. Бумага офсет 1. Печать ризографная. Гарнитура Таймс.
Усл.п.л. 4,1. Заказ № 045-21. Тир. 100 экз. Отпеч. в тип. ИП Тагиева Р.Х.
г.Махачкала, ул. Батырая, 149. Тел.: 8 928 048 10 45
"ФОРМАТ"