ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2005. № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

Л. А. Белоусов

УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОЙ КАТАЛИЗАТОРА В МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКОГО КАТАЛИЗА БОРЕСКОВА[1]

Рассматривается модель гетерогенного каталитического процесса в неподвижном слое, представленная в работе [1], которая вписывается в класс гладко-выпуклых экстремальных задач $F(\theta, u) = 0$, $J(\theta, u) \to \max$, $u \in U_\partial$. Здесь θ — температура газа, $u(t)$ — температура катализатора на входе в слой, $J(\theta, u)$ — степень превращения продукта на выходе из слоя. Указаны условия, при которых существует почти периодическое решение θ уравнения $F(\theta, u) = 0$ при заданном почти периодическом управлении u. Выписаны уравнения Эйлера-Лагранжа.

Ключевые слова: эффективные расширения, почти периодическая оптимизация, химический катализ.

§ 1. Постановка задачи

Математическая модель, описывающая процессы в химическом реакторе (модель химического катализа) задается следующей системой уравнений [1]:

$$\partial\theta/\partial t = a^2\partial^2\theta/\partial\xi^2 - \alpha(\theta - T) + \gamma W(\theta, y), \tag{1}$$

$$\partial T/\partial\xi = \alpha(\theta - T), \tag{2}$$

$$\partial x/\partial\xi = \beta(y - x), \tag{3}$$

$$\beta(y - x) = W(\theta, y), \tag{4}$$

где функция $(\theta, y) \to W(\theta, y)$ имеет вид

$$W(\theta, y) = \mu\Big(1 - y - \frac{y}{k_p} g^{\eta-1}(\theta)\Big) g(\theta), \tag{5}$$

$$g(\theta) = \begin{cases} \exp(\frac{b\theta-1}{b^2\theta}) & \text{при } \theta > 0, \\ 0 & \text{при } \theta \leqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке конкурсного центра Минобразования России (грант E02–1.0-100) и РФФИ (грант 03–01–00014).

Здесь $\theta(t,\xi)$, $T(t,\xi)$ — безразмерные температуры газа и катализатора в момент времени t в точке ξ; $y(t,\xi)$, $x(t,\xi)$ — степень превращения на поверхности катализатора и в газе;

$$a, \quad \alpha, \quad \gamma, \quad \beta, \quad \mu, \quad k_p, \quad \eta, \quad b$$

— безразмерные параметры модели.

Предполагается, что выполнены следующие граничные условия:

$$\partial\theta/\partial\xi\big|_{\xi=0} = 0, \quad x\big|_{\xi=0} = 0, \quad T\big|_{\xi=0} = u(t), \quad \partial\theta/\partial\xi\big|_{\xi=1} = 0. \qquad (7)$$

Максимизируется показатель средней степени превращения продукта

$$J = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(t,1)\,dt \to \max \qquad (8)$$

на наборах $\Big(u(\cdot), x(\cdot), y(\cdot), \theta(\cdot), T(\cdot)\Big)$, согласованных с (1)–(7).

Цель предлагаемой работы состоит в кратком обзоре имеющихся результатов, связанных с моделью Г. К. Борескова (1)–(8).

Во-первых, показано, что задача вписывается в класс так называемых гладко-выпуклых экстремальных задач, хорошо изученных в работе [2];

во-вторых, рассмотрены теоремы существования решений следующих задач:

а) (1)–(7) при заданном управлении u;

б) экстремальной задачи (1)–(8) при фиксированном периоде;

в) системы уравнений Эйлера-Лагранжа

и, в-третьих, рассмотрена наиболее интересная задача химического катализа — задача о построении эффективных расширений множества допустимых управлений.

Эта модель изучалась ранее [3], где и поставлена задача о нахождении периода τ и измеримого по Борелю τ-периодического управления $u(t)$ — температуры катализатора на входе в слой (входящего в краевые условия в модели Г. К. Борескова [1] и принимающего значения в заранее заданном множестве), при которых функционал качества $J(\cdot)$ достигает своего максимального значения.

Численно проблема эффективности перехода от процессов стационарных к τ-периодическим рассматривалась в работах [4–7].

Линеаризованная задача изучалась О. В. Барановой [15], а затем и Е. Г. Глушко [11]. Были найдены условия, при которых решение задачи (1)–(7) единственно, был изучен спектр, и был получен целый ряд интересных результатов [11].

§ 2. Интегральная форма записи задачи

Прежде всего отметим, что, выражая T, x и y через θ из равенств (2) и подставляя их в уравнение (1), придем к следующему интегро-дифференциальному уравнению относительно θ (при $\gamma > 0$):

$$F(\theta, u) \doteq A(\theta) - S(\theta) - \gamma N(\theta) - V(u) = 0, \tag{9}$$

$$A(\theta) \doteq \partial\theta/\partial t - a^2\partial^2\theta/\partial\xi^2 + \alpha\theta, \quad V(u)(t,\xi) \doteq u(t)\alpha\exp(-\alpha\xi). \tag{10}$$

$$S(\theta)(t,\xi) \doteq \alpha^2 \int_0^\xi \exp\bigl(\alpha(s-\xi)\bigr)\theta(t,s)\,ds, \tag{11}$$

$$N(\theta)(t,\xi) \doteq \frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\xi K\bigl(\theta(t,s)\bigr)\exp\Bigl(-\int_s^\xi \Phi(\theta(t,\omega))\,d\omega\Bigr)\,ds. \tag{12}$$

Функции K и Φ определены равенствами

$$K(\theta) = \frac{g(\theta)}{Z(\theta)},\ \Phi(\theta) = \beta - \frac{\beta}{Z(\theta)},\ Z(\theta) = 1 + \frac{\mu}{\beta}\Bigl(g(\theta) + \frac{g^\eta(\theta)}{k_p}\Bigr), \tag{13}$$

а функция $g(\cdot)$ — равенством (6). Всюду далее будем предполагать, что выполнены неравенства

$$\begin{gathered} \eta > b\ln\frac{k_p\beta}{\mu(\eta-1)}, \quad a > 0, \quad b > 0, \\ \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \mu > 0, \quad k_p > 0, \quad \gamma \geqslant 0 \end{gathered} \tag{14}$$

и граничные условия

$$\partial\theta(t,\xi)/\partial\xi\big|_{\xi=0} = 0, \quad \partial\theta(t,\xi)/\partial\xi\big|_{\xi=1} = 0. \tag{15}$$

Пусть задано множество $U = [u_*, u^*]$ допустимых значений управлений. Здесь $0 \leqslant u_* < u^* < \infty$. Мы будем исследовать (классические или обобщенные) а) стационарные, б) периодические, в) предельно периодические или г) почти периодические по t решения $\theta(t,\xi)$ уравнения (9), отвечающие следующим множествам допустимых управлений:

а) стационарным

$$\mathcal{U}_C \doteq \{u \in U\colon\ u = \mathrm{const}\};$$

б) τ-периодическим

$$\mathcal{U}_P(\tau) \doteq \{u(\cdot) \in C(\mathbb{R}, U)\colon\ u(t+\tau) = u(t)\}$$

или

$$\mathfrak{U}_P(\tau) \doteq \{u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, U)\colon\ u(t+\tau) = u(t)\};$$

в) предельно периодическим [8]: $\mathcal{U}_P \doteq \mathrm{cl} \bigcup\limits_{0<\tau<\infty} \mathcal{U}_P(\tau)$ (замыкание в $C(\mathbb{R})$) или $\mathfrak{U}_P \doteq \mathrm{cl} \bigcup\limits_{0<\tau<\infty} \mathfrak{U}_P(\tau)$ (замыкание в метрике $\sup\limits_t \int\limits_t^{t+1} |\widehat{u}(s) - u(s)|\, ds, t \in \mathbb{R}$);

г) почти периодическим в смысле Г. Бора [8, гл. I]:

$$\mathcal{U}_B \doteq \{u(\cdot) \in C(\mathbb{R}, U)\colon\ u(\cdot) \text{ — п. п. по Бору}\}$$

или в смысле В. В. Степанова [8, гл. V]:

$$\mathfrak{U}_S \doteq \{u(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, U)\colon\ u(\cdot)\text{— п. п. по Степанову}\}.$$

Очевидно, что перечисленные выше множества упорядочены следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{U}_C & \subset & \mathcal{U}_P(\tau) & \subset & \mathcal{U}_P & \subset & \mathcal{U}_B \\ & & \cap & & \cap & & \cap \\ & & \mathfrak{U}_P(\tau) & \subset & \mathfrak{U}_P & \subset & \mathfrak{U}_S. \end{array}$$

Пусть множество $\mathcal{U}$ (или $\mathfrak{U}$) совпадает с одним из перечисленных множеств и управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ (или $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$) отвечает, по крайней мере, одно классическое (в случае множества $\mathcal{U}$) или обобщенное (в случае $\mathfrak{U}$) стационарное (по t), τ-периодическое, предельно периодическое или почти периодическое решение $\theta(t,\xi)$ задачи (9)–(15) (для фиксированного $u(\cdot)$ таких решений может быть много [9]). Пары $z(t,\xi) \doteq \big(\theta(t,\xi), u(t)\big)$, будем называть *допустимыми процессами*, а множество $\mathcal{D}$ (соответственно $\mathfrak{D}$, если идет речь об обобщенных решениях), состоящее из допустимых процессов, — *допустимым множеством*. При необходимости будем снабжать допустимые множества индексами

$$\mathcal{D}_C, \quad \mathcal{D}_P(\tau), \quad \mathfrak{D}_P(\tau), \quad \mathcal{D}_P, \quad \mathfrak{D}_P, \quad \mathcal{D}_B, \quad \mathfrak{D}_S.$$

Например, запись $z(\cdot) \in \mathfrak{D}_P$ означает, что $z(\cdot)$ состоит из пары $\big(\theta(\cdot), u(\cdot)\big)$, где $u(\cdot) \in \mathfrak{U}_P$, а $\theta(\cdot)$ — обобщенное предельно периодическое решение задачи (9)–(15). Подчеркнем еще раз, что фиксированному допустимому управлению $u(\cdot)$ может отвечать семейство допустимых процессов $\big(\theta(t,\xi),\ u(t)\big)$.

Условие оптимальности можно записать (при $\gamma > 0$) в виде

$$J\big(z(\cdot)\big) \doteq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^1 k(\xi)\Big(\theta(t,\xi) - u(t)\Big)\, d\xi\, dt \to \sup_{z(\cdot)\in\mathcal{D}}, \tag{16}$$

$$k(\xi) = \alpha \exp\big(\alpha(\xi - 1)\big). \tag{17}$$

Здесь $\mathcal{D}$ — одно из множеств

$$\mathcal{D}_C, \quad \mathcal{D}_P(\tau), \quad \mathcal{D}_P, \quad \mathcal{D}_B, \quad \mathfrak{D}_P(\tau), \quad \mathfrak{D}_P, \quad \mathfrak{D}_S.$$

Поскольку имеют место включения

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{D}_C & \subset & \mathcal{D}_P(\tau) & \subset & \mathcal{D}_P & \subset & \mathcal{D}_B \\
 & & \cap & & \cap & & \cap \\
 & & \mathfrak{D}_P(\tau) & \subset & \mathfrak{D}_P & \subset & \mathfrak{D}_S,
\end{array}$$

то максимальное значение $\widehat{J}$ функционала J может только возрасти при переходе к более широкому множеству. Таким образом, возникает последовательность расширений задачи оптимального управления. Расширение называется *эффективным*, если $\widehat{J}$ строго возрастет при расширении допустимого множества. Основная задача управления процессом химического катализа состоит в выяснении условий, при выполнении которых расширение задачи управления становится эффективным, и построении оптимального процесса $\big(\widehat{\theta}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)\big)$ для расширенной задачи.

Стационарным решением задачи (9)–(15), отвечающим стационарному управлению $\mathrm{u} \in \mathcal{U}_C$, назовем функцию $\theta(\cdot)$ класса $C^2[0,1]$, не зависящую от t и согласованную с (9)–(15).

Классическим τ-периодическим по t решением задачи (9)–(15), отвечающим управлению $u(t) \in \mathcal{U}_P(\tau)$, назовем функцию $\theta(\cdot,\cdot)$ класса $\mathcal{S}_P(\tau)$, согласованную с (9)–(15), где

$$\mathcal{S}_P(\tau) \doteq \{\theta \in C(\mathbb{R}; C^2[0,1]) \colon \partial\theta/\partial t \in C(\mathbb{R}; C[0,1]),$$
$$\theta(t+\tau,\xi) = \theta(t,\xi), \quad \partial\theta/\partial\xi\big|_{\xi=0} = \partial\theta/\partial\xi\big|_{\xi=1} = 0\}.$$

Обобщенные τ-периодические решения θ задачи (9)–(15), отвечающие управлению $u(\cdot) \in \mathfrak{U}_P(\tau)$, будем искать в пространстве $\mathfrak{S}_P(\tau)$:

$$\mathfrak{S}_P(\tau) \doteq \{\theta \in L_2(\mathbb{R}; H^2(0,1)) \colon \partial\theta/\partial t \in L_2(\mathbb{R}; H^0(0,1)),$$
$$\theta(t+\tau,\xi) = \theta(t,\xi), \quad \partial\theta/\partial\xi\big|_{\xi=0} = \partial\theta/\partial\xi\big|_{\xi=1} = 0\},$$

где через $H^2(0,1)$ обозначено пространство С. Л. Соболева [10].

Напомним некоторые обозначения:

$$\mathcal{D}_C = C^2[0,1] \times \mathcal{U}_C, \quad \mathcal{D}_P(\tau) = \mathcal{S}_P(\tau) \times \mathcal{U}_P(\tau),$$
$$\mathfrak{D}_P(\tau) = \mathfrak{S}_P(\tau) \times \mathfrak{U}_P(\tau).$$

Класс почти периодических решений задачи (9)–(15) определим ниже.

§ 3. О существовании периодических по времени решений

Пусть

$$C_\tau(\mathbb{R}; C^k[0,1]) \doteq \{\theta \in C(\mathbb{R}; C^k[0,1]) \colon \theta(t+\tau,\xi) = \theta(t,\xi)\}, \quad k = 0,1.$$

Тогда справедлива следующая теорема [11; 9].

Теорема 1. *Пусть α, β, η, γ — фиксированные параметры, согласованные с (14). Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) для любого числа u *существует стационарное решение* $\theta(\xi)$ *задачи* (9)–(15). *Кроме того, существует константа* c, *не зависящая от* u, *такая, что для любого решения* $\theta(\xi)$ *задачи* (9)–(15) *при любом* $\xi \in [0,1]$ *справедливо неравенство* $|\theta(\xi) - \mathrm{u}\,| \leqslant c$;

b) при каждом $\tau > 0$ *и любом* $u \in \mathcal{U}_P(\tau)$ *существует классическое* τ*-периодическое по* t *решение* $\theta \in \mathcal{S}_P(\tau)$ *задачи* (9)–(15);

c) при любом управлении $u \in \mathcal{U}_P$ существует классическое предельно периодическое решение $\theta \in \mathcal{S}_P$ задачи (9) – (15) *. Кроме того, найдется константа $M(\mathrm{u}_*, \mathrm{u}^*) > 0$ такая, что для любой пары $(\theta, u) \in \mathcal{D}_P$, согласованной с* (9) – (15) *, справедлива оценка*

$$\sup_t \|\theta(t,\cdot)\|_{C^2[0,1]} + \sup_t \|\theta_t(t,\cdot)\|_{C[0,1]} \leqslant M(\mathrm{u}_*, \mathrm{u}^*); \qquad (18)$$

d) при любом управлении $u \in \mathfrak{U}_P(\tau)$ существует обобщенное решение $\theta \in \mathfrak{S}_P(\tau)$ задачи (9) – (15) *. Кроме того, найдется константа $M(\mathrm{u}_*, \mathrm{u}^*) > 0$ такая, что для любой пары $(\theta, u) \in \mathfrak{D}_P(\tau)$, согласованной с* (9) – (15) *справедлива оценка*

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R};H^2(0,1))} + \|\theta_t(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R};H^0(0,1))} \leqslant M(\mathrm{u}_*, \mathrm{u}^*).$$

§ 4. О существовании почти периодических по t решений

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$A(y) = S(y) + \gamma N(y) + V(u), \quad y\big|_{t=0} = 0, \quad y_\xi\big|_{\xi=0} = y_\xi\big|_{\xi=1} = 0. \qquad (19)$$

Пусть A, S, N и V — операторы, определенные формулами (10)–(14), (6). Тогда при любом $\gamma > 0$ и любом непрерывном управлении $u(\cdot)$, стесненном ограничениями $\mathrm{u}_* \leqslant u(t) \leqslant \mathrm{u}^*$, существует классическое решение y задачи (19) такое, что $y \in C(\mathbb{R}_+; C^2[0,1])$, $y_t \in C(\mathbb{R}_+; C[0,1])$. Кроме того, если пара (θ, u) удовлетворяет условиям (19), то она удовлетворяет и оценке

$$\sup_{t>0} \|y(t,\cdot)\|_{C^2[0,1]} + \sup_{t>0} \|y_t(t,\cdot)\|_{C[0,1]} \leqslant M_1(\mathrm{u}_*, \mathrm{u}^*), \qquad (20)$$

где $M_1(\mathrm{u}_*, \mathrm{u}^*)$ — некоторая константа, зависящая лишь от u_* и u^*.

Пусть E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, определенное равенством

$$E = \{l \in H^2(0,1) : l_\xi\big|_{\xi=0} = l_\xi\big|_{\xi=1} = 0\}.$$

Тогда если билинейная форма $\langle x, y\rangle, (y \in E^*, x \in E)$ совпадает со скалярным произведением на $H^1(0,1)$ при $x, y \in H^1(0,1)$, то вложение $E \subset H^1(0,1) \subset E^*$ плотно и непрерывно. Пусть $\|\cdot\|$ есть E-норма, $\langle x, y\rangle$ есть скалярное произведение в $H^1(0,1)$.

Пусть $G\colon E \to E^*$ — оператор, определенный равенством

$$G(\theta) = -a^2\Delta\theta + \alpha\theta - S(\theta) - \gamma N(\theta),$$

тогда существует такая положительная константа γ_0, что при любом $\gamma \in (0, \gamma_0)$ оператор G монотонен, полунепрерывен, ограничен и коэрцитивен [9]: существуют постоянные $c_i > 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$ такие, что

$$\langle Gx, x\rangle \geqslant c_1\|x\|^2 - c_2, \quad \|Gx\|_* \leqslant c_3\|x\|^2 + c_4.$$

(Первая из этих оценок означает коэрцитивность оператора G, вторая — его ограниченность.)

Следуя [12], обозначим через $C(H^1)$ пространство всех измеримых по Борелю функций $f\colon \mathbb{R} \to H^1$ с нормой

$$\|f\|_{C(H^1)} = \sup_t \Big(\int_0^1 \|f(t+s)\|^2_{H^1}\, ds\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Через $C(H^1)_{\mathrm{comp}}$ обозначим подпространство из $C(H^1)$, состоящее из тех элементов $f(t)$, для которых семейство сдвигов $\{f(t+\tau)\}$, $\tau \in \mathbb{R}$ компактно в $L_2(-T, T, H^1)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модуль показателей Фурье функции $u(t)$, где $u \in \mathfrak{U}_S$ то есть $u(t)$ есть п. п. (в смысле Степанова) функция $\mathbb{R} \to U$.

Через $\overset{\circ}{C}(H^1)$ обозначим подпространство элементов $f \in C(H^1)$, для которых семейство сдвигов $\{f(t+\tau)\}$, $\tau \in \mathbb{R}$, компактно в $C(H^1)$, а модуль показателей Фурье принадлежит $\mathfrak{M}$. Тогда справедлива следующая теорема [9].

Теорема 2. *Пусть α, β, μ, η, K_0, b — фиксированные параметры, согласованные с* (14)*. Тогда существует число $\gamma_0 > 0$ такое, что при любом $\gamma \in (0, \gamma_0)$, для любой функции $u \in \mathfrak{U}_S$, почти периодической по Степанову, существует решение θ задачи* (9) – (15) *класса $\overset{\circ}{C}(H^1)$, то есть θ — почти периодическое по Бору; при этом $\theta \in C(\mathbb{R}; C^1[0,1])$.*

§ 5. Необходимые условия оптимальности

Воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина для гладко-выпуклой задачи [13, теорема 3.4]. Напомним, что

$$\mathfrak{U}_P(\tau) = \{u \in L_\infty(\mathbb{R}; U) : u(t+\tau) = u(t)\}.$$

Обобщенным оптимальным τ-периодическим процессом задачи (9)–(17) назовем допустимый процесс

$$\widehat{z}(\cdot) = \big(\widehat{\theta}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)\big) \in \mathfrak{D}_P(\tau) \doteq \mathfrak{S}_P(\tau) \times \mathfrak{U}_P(\tau),$$

удовлетворяющий равенству

$$J\big(\widehat{z}(\cdot)\big) = \max_{z(\cdot)} J\big(z(\cdot)\big), z(\cdot) \in \mathfrak{D}_P(\tau).$$

Выпишем теперь необходимые условия оптимальности решения задачи (9)–(17) [14].

Теорема 3. *Пусть A, S, N, V — операторы, определенные равенствами (6), (9)–(13). Тогда найдется такое число $\gamma_0 > 0$, что при любом $\gamma \in (0, \gamma_0)$ имеет место следующее утверждение: решению $(\widehat{\theta}, \widehat{u}) \in \mathfrak{S}_P(\tau) \times \mathfrak{U}_P(\tau)$ задачи (9)–(17) отвечает единственное решение $\widehat{p} \in \mathfrak{S}_P(\tau)$ уравнения Эйлера-Лагранжа*

$$A^* p - S^* p - \gamma\big(dN(\widehat{\theta})\big)^* p = -k,$$

где $k(\xi) = \alpha \exp(\alpha(\xi - 1))$ — ядро функционала J. Кроме того, выполнено условие максимума

$$\max_v \Big(-\int_0^\tau \int_\Omega v(t,\xi)\Big(k(\xi) + l(\xi)\widehat{p}(t,\xi)\Big)\, d\xi\, dt\Big) = \\ = -\int_0^\tau \int_\Omega \widehat{u}(t,\xi)\Big(k(\xi) + l(\xi)\widehat{p}(t,\xi)\Big)\, d\xi\, dt, \quad v \in \mathfrak{U}_P(\tau). \quad (21)$$

где $l(\xi) = \exp(-\alpha\xi)$.

Отметим, что из равенства (21), в частности, вытекает, что

$$\widehat{u}(t,\xi) = \begin{cases} u_*, \text{ если } & k(t,\xi) + l(t,\xi)\widehat{p}(t,\xi) > 0, \\ u^*, \text{ если } & k(t,\xi) + l(t,\xi)\widehat{p}(t,\xi) < 0. \end{cases}$$

§ 6. Существование решения экстремальной задачи

Обобщенное решение $(\widehat{\theta},\ \widehat{u}) \in \mathfrak{S}_P(\tau) \times \mathfrak{U}_P(\tau)$ экстремальной задачи (6), (9)–(17) существует [14] при любых $u_*, u^* \quad (u_* < u^*)$.

Будем называть задачей $\mathcal{D}_C$ задачу (6), (9)–(17) в предположении, что множество допустимых управлений состоит из констант (стационарный случай). Тогда [9] существует оптимальный процесс задачи $\mathcal{D}_C$, т. е. найдется пара $(\widehat{\theta}(\cdot), \widehat{\mathrm{u}})$ из множества $C^2[0,1] \times \mathcal{U}_C$, согласованная с (6), (9)–(17), на которой функционал J (16), (17) достигает своего максимума. Отметим, что $\widehat{u}$ — внутренняя точка для $\mathcal{U}_C$ при достаточно больших u^* и достаточно малых u_*.

§ 7. Эффективность расширения множества стационарных управлений до множества периодических управлений

Пусть $(\widehat{\theta}\,(\xi), \widehat{u})$ — оптимальный процесс задачи (6), (9)–(17) на множестве $\mathcal{D}_C$, $\widehat{J} \doteq J(\widehat{\theta}\,(\cdot), \widehat{u})$ — оптимальное значение функционала на $\mathcal{D}_C$. Расширение множества стационарных допустимых процессов $\mathcal{D}_C$ до множества $\mathcal{D}_P(\tau)$ — τ-периодических допустимых процессов называется *эффективным,* если найдется допустимый процесс $\big(\theta(t,\xi), u(t)\big)$ задачи $\mathcal{D}_P(\tau)$ такой, что $J\big(\theta(\cdot)\,, u(\cdot)\big) > \widehat{J}$.

Можно показать [9], что существует набор параметров системы (1)–(8), при котором расширение задачи $\mathcal{D}_C$ до задачи $\mathcal{D}_P(\tau)$ эффективно при любом $\tau > 0$.

Теорема 4. *Пусть $\eta > 1$, $\eta > b \ln \frac{k_p \beta}{\mu(\eta-1)}$ и τ — произвольный фиксированный период. Существует $\beta_0 > 0$ такое, что каждому $\beta > \beta_0$ отвечает $\alpha_0 = \alpha_0(\beta) > 0$, обладающее следующим свойством: для любого $\alpha > \alpha_0$ расширение задачи $\mathcal{D}_C$ до задачи $\mathcal{D}_P(\tau)$ эффективно при всех $\gamma \in [0, \gamma_0(\alpha,\beta))$, где $\gamma_0(\alpha,\beta) > 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боресков Г. К., Матрос Ю. Ш., Киселев О. В., Бунимович Г. А. Осуществление гетерогенного каталитического процесса в нестационарном режиме // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 1. С. 160–163.
2. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

3. Матрос Ю. Ш., Валко П. Эффективность гетерогенного катализатора при периодическом изменении температуры исходной смеси // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, №4. С. 912–914.

4. Ахметзянов А. М., Кузин В. Л., Матрос Ю. Ш., Носков А. С. Оптимальное периодическое управление температурой на входе адиабатического слоя катализатора // ТОХТ. 1986. Т. 20, №5. С. 626–632.

5. Золотарский И. А., Богдашев С. М., Матрос Ю. Ш. Оптимизация периодических режимов для класса химико-технологических задач // Нестационарные процессы в катализе. Тр. конф. Новосибирск, 1987. С. 192–211.

6. Матрос Ю. Ш. Осуществление каталитических процессов в нестационарных условиях // Нестационарные процессы в катализе. Тр. конф. Новосибирск, 1987. С. 6–17.

7. Киселев О. В. Свойства теплового фронта, распространяющегося в слое катализатора // Нестационарные процессы в катализе. Тр. конф. Новосибирск, 1987. С. 102–130.

8. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.

9. Белоусов Л. А., Тонков Е. Л. Некоторые математические задачи, связанные с одной моделью химического катализа // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1997. Вып.1(9). С. 3–62.

10. Соболев С. Л. Некоторые вопросы применения функционального анализа в математической физике. Л: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. 255 с.

11. Глушко Е. Г. Существование и единственность периодического решения нелинейной задачи химического катализа: Автореф. дис. …канд. физ.-мат. наук. Минск, 1989. 15 с.

12. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 205 с.

13. Фурсиков А. В. Некоторые вопросы теории оптимального управления нелинейными системами с распределенными параметрами // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып.9. С. 167–189.

14. Белоусов Л. А., Тонков Е. Л. Об оптимальном управлении периодическими колебаниями некоторых процессов химического катализа // Нестационарные процессы в катализе. Тр. конф. Новосибирск, 1987. С. 212–225.

15. Баранова О.В. О существовании периодического режима одной линеаризованной задачи химического катализа // Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск, 1982. Вып. 4. С. 19–30.

Поступила в редакцию 01.10.04

L. A. Belousov

Control by temperature of catalyst in Borescovs model of chemical catalysis

The model of heterogeneous catalysis in the immovable layer which was presented by G.K.Borescov and others in the Doklady Akademii Nauk SSSR, Vol.237, № 1, p.p. 160-163, is considered. This model is contained in the set of smoothly convex extremal prolems like $F(\theta, u) = 0, \quad J(\theta, u) \to \max_{u \in U_\partial}$ The conditions of the solution θ of the equation $F(\theta, u) = 0$ for given control u, are founded.

Белоусов Леонид Александрович
Удмуртский государственный университет
Кафедра дифференциальных уравнений
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1(корп. 4)
e-mail: imi@uni.udm.ru